Écriture décimale des nombres réels

Le but de ce polycopié est de légitimer l'écriture des nombres réels que l'on utilise quotidiennement. Il est à noter que l'usage quasi-universel (même les Anglais s'y sont pliés, c'est dire !) veut que l'on écrive les nombres en base 10, à cause des dix doigts de la main bien sûr. Cependant, le nombre 10 n'a en réalité aucune particularité et tous les résultats qui suivent pourraient se démontrer exactement de la même manière en choisissant comme base de numération n'importe quel entier *p* supérieur ou égal à 2 (la base 2 est utilisée en informatique, la base 12 a souvent été employée, 12 ayant la supériorité sur 10 de posséder plus de diviseurs, mais aussi la base 20, parce que l'on possède aussi dix doigts de pieds...)

1. Signification de l'écriture décimale

Soit (a_n) une suite d'entiers, telle que pour tout *n* plus grand que 1, a_n soit compris entre 0 et 9.

Considérons la série $\sum \frac{a_n}{10^n}$:

$$\forall n \geq 1, 0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n},$$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

La série $\sum \frac{a_n}{10^n}$ est donc convergente. Si *x* désigne sa somme, *x* est donc un réel que l'on conviendra d'écrire $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

Il peut être intéressant de remarquer d'ores et déjà qu'une telle écriture d'un réel n'est pas nécessairement unique. Prenons en effet $a_0 = 0$ et $a_n = 9$ pour tout *n* plus grand que 1. On a alors, par définition même de notre écriture décimale :

$$0,99\dots 9\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9.\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1 = 1,00\dots 0\dots$$

2. Existence, pour tout réel positif *x*, d'une écriture décimale de *x*

Il est absolument indispensable, pour bien comprendre ce qui va suivre, de s'efforcer de bien réfléchir à ce que sont les quantités que l'on va définir.

Soit *x* un réel fixé.

Posons, pour tout entier positif *n*, les crochets [ ] désignant bien entendu la partie entière :

$$A_n = \frac{[10^n x]}{10^n}, B_n = \frac{[10^n x]+1}{10^n}$$ et enfin, pour $n \geq 1$, $a_n = 10^n (A_n - A_{n-1})$.

<u>Premier point</u> :

$$[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1 .$$

Il vient donc, par division par 10^n :

$$A_n \leq x < B_n \Rightarrow 0 \leq x - A_n < B_n - A_n = \frac{1}{10^n}.$$

La suite (A_n) est donc convergente, de limite x.

Second point :

$$\text{Pour tout } n \geq 1,\ a_n = 10^n(A_n - A_{n-1}) = [10^n x] - 10.[10^{n-1}x] \in \mathbf{Z}$$

Troisième point :

Par définition de la partie entière d'un nombre, il vient :

$$[10^{n-1}x] \leq 10^{n-1}x < [10^{n-1}x] + 1$$

D'où, par multiplication par 10,

$$10.[10^{n-1}x] \leq 10^n x < 10.[10^{n-1}x] + 10$$

Ainsi, $10.[10^{n-1}x]$ est un entier inférieur à $10^n x$, il est donc inférieur à sa partie entière. On en déduit donc les inégalités suivantes :

$$10.[10^{n-1}x] \leq [10^n x] \leq 10^n x < 10.[10^{n-1}x] + 10$$

$$\Rightarrow 10^n A_{n-1} \leq 10^n A_n < 10^n A_{n-1} + 10$$

$$\Rightarrow 0 \leq 10^n(A_n - A_{n-1}) = a_n < 10$$

Ainsi, l'entier a_n est compris entre 0 et 9.

Quatrième point :

Il vient, en sommant de 1 à un certain entier N l'égalité $A_n - A_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$, et en tenant compte du fait que a_0 et A_0 sont égaux,

$$A_N - A_0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k}$$

d'où l'égalité, valable pour tout entier N :

$$A_N = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k}$$

Il vient donc, en faisant tendre N vers l'infini :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

On a ainsi prouvé que tout réel positif possède un développement décimal.

3. Existence d'un développement décimal propre

Prouvons que le développement décimal que l'on vient de construire du réel positif x est "propre", c'est-à-dire qu'il n'existe pas de rang N à partir duquel tous les a_n sont égaux à 9.

Si tel n'était pas le cas, il existerait donc un entier N vérifiant : $\forall n \geq N, a_n = 9$. On aurait alors :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \\
&= A_N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \\
&= A_N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} \\
&= A_N + \frac{9}{10^{N+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\
&= A_N + \frac{1}{10^N} \\
&= B_N
\end{aligned}
$$

et ceci est impossible puisque l'une des premières inégalités que l'on a obtenues est justement $x < B_n$.

On a ainsi prouvé que tout réel positif possède un développement décimal propre.

4. Unicité du développement décimal propre

Prouvons l'unicité du développement décimal propre.

Écrivons pour cela $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$ où les a_n et les b_n sont, pour n plus grand que 1, des entiers compris entre 0 et 9. Supposons que ces développements soient propres, et que ce ne soient pas les mêmes. On peut alors considérer le plus petit entier N tel que $a_N \neq b_N$.

Pour fixer les idées, je supposerai $b_N < a_N$, et donc $b_N \leq a_N - 1$. Enfin, les développements considérés étant propres, il ne comportent pas que des 9 à partir d'un certain rang, et donc il existe un entier N_1 strictement plus grand que N tel que $b_{N_1} \neq 9$.

Alors,

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_N}{10^N} + \sum_{n=N+1}^{N_1-1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{N_1}}{10^{N_1}} + \sum_{n=N_1+1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}
\end{aligned}
$$

et si l'on tient compte du fait que les a_n sont égaux aux b_n avant le rang N, que b_{N_1} est strictement plus petit que 9, et que les autres b_k sont inférieurs ou égaux à 9, il vient :

$$
\begin{aligned}
x &< \sum_{n=0}^{N-1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_N}{10^N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_N}{10^N} + \frac{1}{10^N}
\end{aligned}
$$

et donc $$x < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{b_N + 1}{10^N}$$

et enfin, puisque $b_N + 1 \leq a_N$, il vient :

$$x < \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = x$$

On a bien obtenu une contradiction, et l'on peut donc énoncer enfin :

Théorème : Tout nombre réel positif possède un unique développement décimal propre

5. Une application très importante : la non dénombrabilité de R

Un ensemble dénombrable est un ensemble qui est fini ou qui peut être mis en bijection avec **N** (ou avec **N***). En quelque sorte, un ensemble infini dénombrable est donc un ensemble dont "l'infini est le même que celui de **N**". Bien qu'ils contiennent strictement **N**, les ensembles **Z** et **Q** sont dénombrables. Nous allons prouver ici que **R** n'est pas dénombrable, et donc que "l'infini de **R** est strictement plus grand que celui de **N**".

Pour prouver ce résultat, nous allons prouver que [0,1[n'est pas dénombrable. Alors pour **R**, ce sera encore pire…

Supposons donc que **N*** puisse être mis en bijection avec [0,1[. Soit *f* une bijection de **N*** sur [0,1[.

Soit a_1 la première décimale du développement propre de $f(1)$. Soit a_2 la deuxième décimale du développement propre de $f(2)$. Soit plus généralement a_n la $n^{\text{ième}}$ décimale du développement propre de $f(n)$.

Choisissons un entier b_1 compris entre 0 et 8 et différent de a_1. Choisissons un entier b_2 compris entre 0 et 8 et différent de a_2. Plus généralement, choisissons un entier b_n compris entre 0 et 8 et différent de a_n.

Construisons à présent le nombre dont le développement décimal (propre puisque l'on a bien pris soin de prendre des b_k tous différents de 9) est le suivant : $x = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$

Le nombre *x* est un élément de [0,1[, différent de $f(1)$ puisqu'ils n'ont pas la même première décimale, différent de $f(2)$ puisqu'ils n'ont pas la même seconde décimale, et plus généralement différent pour tout entier *n* de $f(n)$ puisqu'ils n'ont pas la même $n^{\text{ième}}$ décimale. Bref, *x* n'est pas le *f* de quelqu'un, *f* n'est donc pas surjective : contradiction.

R n'est pas dénombrable.

6. Et pour finir…

Savez-vous que l'on connaît à l'heure actuelle plus de cent milliards de décimales de π ? Pour vous donner une petite idée, sachez que si vous vouliez les énumérer toutes, à raison d'une décimale par seconde, il vous faudrait… un peu plus de trois mille ans (vous avez fêté - ou fêterez - votre anniversaire d'un milliard de secondes à 31 ans et sept mois) ! Et vous mesurerez sans doute l'utilité pratique d'une telle connaissance en sachant que, pour calculer la longueur d'un cercle dont le diamètre est dix mille fois celui de notre univers, avec une erreur inférieure au diamètre d'un atome d'hydrogène, on a besoin de… 40 décimales exactes de π !

π = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620...

(pour les curieux, je tiens le premier millier de décimales à leur disposition).