

Module Mat242
Année 2010–2011

C. Peters

février 2011

Table des matières

1	Suites et séries de fonctions	2
1.1	Quelques rappels sur les séries numériques	2
1.2	Convergence simple	3
1.3	Convergence uniforme	4
1.4	Convergence uniforme et continuité	5
1.5	Convergence uniforme et intégration	6
1.6	Convergence uniforme et dérivation	6
2	Séries entières	8
2.1	Rappels sur les bornes sup	8
2.2	Rayon de convergence	9
2.3	Sommes, produits et composition des séries	10
2.4	Dérivation	11
2.5	Les fonctions e^z , $\log(z)$, $\sin(z)$ et $\cos(z)$	12
3	Séries de Fourier	15
3.1	Polynômes et séries trigonométriques	15
3.2	Séries de Fourier	16
3.3	Fonctions de périodicité quelconque	20

Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

1.1 Quelques rappels sur les séries numériques

Soit (u_0, u_1, \dots) une série numérique. On considère leurs sommes partielles

$$\begin{aligned} s_0 &= u_0 \\ s_1 &= u_0 + u_1 \\ &\vdots \\ s_n &= u_0 + \dots + u_n \end{aligned}$$

La suite (s_0, s_1, \dots) des sommes partielles est **la série associée** à la suite numérique $(u_n \in \mathbb{N})$. L'écriture formelle est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Dans le cas où $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existe et est égale à s , on dit que **la somme** $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ **est égal à** s et on écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s.$$

Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Exemples 1.1.1. 1) **Série géométrique.** Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

La série diverge si $|a| \geq 1$.

2) La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge pour $\alpha > 1$ mais elle diverge si $\alpha \leq 1$.

Rappelons aussi la notion de **convergence absolue**. On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge. Convergence absolue implique convergence, mais pas réciproquement (la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge mais

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}).$$

Voici un critère pour tester si la série converge :

Lemme 1.1.2. Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$ (mais l'assertion réciproque n'est pas vraie).

Pour les **séries à termes positives**, on a plusieurs résultats utiles :

1. Si $0 \leq u_n \leq v_n$, alors : $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.
2. **Critère d'Alembert** : Supposons que les termes de la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes > 0 et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ existe. Alors :
 $k > 1 \implies$ divergence de $\sum u_n$; $k < 1 \implies$ convergence de $\sum u_n$.
3. **Critère de Cauchy** : Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = k$ existe. Alors :
 $k > 1 \implies$ divergence de $\sum u_n$; $k < 1 \implies$ convergence de $\sum u_n$.

1.2 Convergence simple

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soient $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ des fonctions. Elles définissent la suite (f_0, f_1, f_2, \dots) .

- Définition 1.2.1.** 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f_n \rightarrow f$ converge **simple-ment** vers f , si pour tout $x \in I$ la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe et vaut $f(x)$.
2. Soit $s : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge **simple-ment** vers s si pour tout $x \in I$ les sommes partielles $\sum_{i=1}^n f_i(x)$ convergent vers $s(x)$.

Problème. Si f_n est continue, resp. dérivable, resp. intégrable, qu'est-ce qu'on peut dire sur la limite f .

- Exemples 1.2.2.** 1. L'exemple $f_n(x) = x^n$ montre que la limite n'est pas forcément continue.
2. L'exemple $f_n = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ montre que f'_n ne converge pas forcément vers f' .
3. L'exemple $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ montre que $\int_0^1 f_n(x)dx$ ne converge pas forcément vers $\int_0^1 f(x)dx$.
4. L'étude de la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ montre qu'une série de fonctions continue n'a pas forcément une somme continue.

1.3 Convergence uniforme

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots$ des fonctions.

- Définition 1.3.1.** 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f_n \rightarrow f$ converge **uni-formément**, si $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ tel que si $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ pour chaque point $x \in I$.
2. Soit $s : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge **uniformément** vers $s(x)$ sur I si les sommes partielles $\sum_{i=0}^n f_i$ convergent uniformément vers s .

Dans l'exemple 2 du paragraphe précédent, $f_n = x^n$ ne converge pas uniformément vers sa limite sur $I = [0, 1]$.

Il y a deux critères importants :

- Critère 1.3.2 (Cauchy).** 1. On a $f_n \rightarrow f$ uniformément sur I si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ tel que si $n, m \geq N$, et $x \in I$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$.

2. On a $\sum_n f_n = s$ uniformément sur I si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ tel que si $n \geq m \geq N$, et $x \in I$, $|f_m(x) + \dots + f_n(x)| \leq \epsilon$.

Critère 1.3.3 (Weierstraß). *Supposons que*

1. Pour chaque $x \in I$, $|f_n(x)| \leq M_n$,
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge,
- alors $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément.

Exemple 1.3.4. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ converge uniformément sur \mathbb{R} si $p > 1$.

Définition 1.3.5. Sous les hypothèses de 1.3.3 on dit que la série $\sum_n f_n$ converge **normalement** sur E .

Donc : convergence normale \implies convergence uniforme.

1.4 Convergence uniforme et continuité

Théorème 1.4.1. *Soit (f_n) , $n = 1, 2, \dots$ une suite de fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f . Alors f est continue.*

Exemples 1.4.2. 1. La suite

$$f_n = \frac{nx}{nx + 1}$$

ne converge pas uniformément sur la demi-droite $x \geq 0$ car la limite n'est pas continue. Par contre, sur la demi-droite $x \geq \delta$ avec $\delta > 0$ la convergence est uniforme (avec limite 1).

2. La fonction **zeta** :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x > 1.$$

La convergence est uniforme sur chaque intervalle $x \geq 1 + \delta$ avec $\delta > 0$ et donc ζ est une fonction continue sur la demi-droite $x > 1$. On a

$$\lim_{x \downarrow 1} \zeta(x) = \infty$$

et donc la convergence ne peut pas être uniforme sur la demi-droite $x > 1$.

1.5 Convergence uniforme et intégration

Théorème 1.5.1. Soit f_n , $n = 1, 2, \dots$ une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ qui est uniformément convergente. Alors

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Remarque. On peut même montrer que si les f_n sont intégrables sur $[a, b]$, la limite uniforme est intégrable et la formule du théorème 1.5.1 reste vraie.

Corollaire 1.5.2. Soit f_n , $n = 1, 2, \dots$ une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telle que la somme converge uniformément, alors

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

1.6 Convergence uniforme et dérivation

L'exemple 1.2.2 2 montre que même si une suite de fonctions dérivables converge uniformément vers une fonction dérivable, disons $f_n \rightarrow f$, alors on n'a pas forcément $f'_n \rightarrow f'$.

Théorème 1.6.1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continûment dérivables sur un intervalle I telle que

1. $f_n(x_0) \rightarrow y_0$, $x_0 \in I$
2. $f'_n \rightarrow g$ (uniformément).

Alors, si on pose

$$f(x) := y_0 + \int_{x_0}^x g dx,$$

la fonction f est dérivable, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , et on a

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = f'(x).$$

Remarque. Au lieu de la continuité de f'_n , il suffit de supposer que f_n est dérivable.

Corollaire 1.6.2 (Version faible du théorème). Si $f_n \rightarrow f$ et $f'_n \rightarrow g$ uniformément sur un intervalle I , alors f est dérivable et $f' = g$ sur I .

Exercices

1. On considère la suite $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{nx} + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Montrer que f_n converge uniformément vers la fonction $f = 1$ sur tout intervalle $[a, b]$.
- (b) A-t-on convergence uniforme sur \mathbb{R} ?
2. On considère sur l'intervalle $[0, 1]$ la suite

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Montrer que $f_n(x)$ converge uniformément vers une fonction f que l'on détermine.

3. Établir le domaine $I \subset \mathbb{R}$ de convergence de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2 + 1}.$$

Montrer que la série converge absolument et uniformément sur I .

4. On considère la fonction

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n + 1}.$$

- (a) Quel est le domaine de définition, $I \subset \mathbb{R}$, de cette fonction ?
- (b) Montrer que sur I la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n + 1}$ converge uniformément vers $f(x)$. Dédire que f est continue.

Chapitre 2

Séries entières

2.1 Rappels sur les bornes sup

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R} . Alors, si E n'est pas borné supérieurement, on pose

$$\sup E = \infty,$$

sinon, il y a une **borne supérieure** finie et on pose

$$\sup E = \min \{x \in \mathbb{R} / x \text{ est un majorant de } E\}.$$

C'est donc le plus petit majorant de E .

Soit $E = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Une fonction $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante stricte définit la suite croissante $0 \leq k_0 < k_1 < k_2 \cdots$ et donc une sous-suite $(u_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Une telle suite peut ou ne peut pas converger. Par définition, si la limite existe c'est un **valeur d'adhérence** de E . On peut montrer que $\sup E$ est un point d'adhérence de l'ensemble $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $E = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite borné. On pose

$$u^* = \limsup (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \quad v_n := \sup \{u_k\}_{k \geq n}$$

On montre que c'est le plus grand valeur d'adhérence de E . L'ensemble E pourrait contenir des nombres $u_n > u^*$, mais pour chaque $\epsilon > 0$ seulement pour un nombre fini de n on peut avoir $u_n \geq u^* + \epsilon$.

Remarque. Si $E = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, on a également un $\liminf E$ et la suite converge si et seulement si $\liminf E = \limsup E$.

2.2 Rayon de convergence

Définition 2.2.1. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres **complexes**. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est une série entière et les a_n sont les coefficients de la série entière.

On a rappelé (voir le § 1.1) qu'une série *numérique* $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge. Convergence absolue entraîne convergence. De même, pour une série de fonctions $\sum_n f_n(z)$ de fonctions complexes, on dispose des notions suivantes :

1. convergence simple ;
2. convergence absolue ;
3. convergence uniforme ;
4. convergence absolue uniforme ;
5. convergence normale (voir 1.3.5).

On a les implications suivantes $5 \implies 4 \implies 3 \implies 1$ et $4 \implies 2 \implies 1$).

Lemme 2.2.2. Si $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en z_0 , alors $s(z)$ converge normalement pour chaque $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < |z_0|$ et par conséquent $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur chaque disque $|z| \leq \theta |z_0|$, $0 \leq \theta < 1$.

On introduit :

$$R = \text{rayon de convergence} = \sup\{|z|, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ est convergente}\}.$$

Clairement, si $R = 0$, la série est divergente si $z \neq 0$ et si $R > 0$, la série est convergente sur chaque le disque $|z| < R$ et uniformément convergente sur chaque disque $|z| \leq \theta \cdot R$, avec $\theta < 1$. Si $R = \infty$ la série est partout convergente.

Pour déterminer R on utilise la notion de \limsup .

Théorème 2.2.3.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

2.3 Sommes, produits et composition des séries

Rappel 2.3.1. Soient $\sum a_n, \sum b_n$ deux séries de nombres complexes, alors, la **série somme** est $\sum(a_n + b_n)$. Si les deux séries sont absolument convergentes, c'est aussi le cas pour la série somme et l'on a

$$\sum(a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n.$$

Sous les mêmes hypothèses, la série $\sum \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n$ est convergente pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ arbitraires en l'on a :

$$\sum \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n = \alpha \sum_n a_n + \beta \sum_n b_n.$$

Proposition 2.3.2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ arbitraires. Le rayon de convergence de $\sum_n(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)z^n$ est au moins égal au minimum r des rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ et l'on a dans $|z| < r$:

$$\sum_n(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)z^n = \alpha \sum_n a_n z^n + \beta \sum_n b_n z^n.$$

Définition 2.3.3. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries de nombres complexes. Alors la **série produit** est la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ avec $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

Cette série se trouve si on multiplie terme par terme les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Proposition 2.3.4. Si $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument et si $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors la série produit converge vers AB .

Deux corollaires importants :

Corollaire 2.3.5. La série produit de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (rayon de convergence R_1) et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ (rayon de convergence R_2) a un rayon de convergence $\geq r = \min(R_1, R_2)$ et si $|z| < r$ la série produit vaut le produit des séries.

Corollaire 2.3.6. La série

$$E(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

(qui converge partout) a la propriété suivante : $E(z+w) = E(z)E(w), \forall z, w \in \mathbb{C}$.

Puisque pour $z \in \mathbb{R}$ cette propriété caractérise la fonction e^z cela motive la définition suivante :

Définition 2.3.7. La **fonction exponentielle** est donnée par la série entière

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Pour finir on étudie la composition $g \circ f$ de deux séries entières f et g . On suppose que f envoie un disque D sur laquelle f converge dans la disque de convergence de g . Dans ce cas $g \circ f$ est définie sur D . On ne traite que le cas où $f(0) = 0$. Le cas général peut être réduit à ce cas en remplaçant $g(w)$ par $w \mapsto g(w) - f(0)$ en combinaison avec le résultat avec Thm. 2.4.3.

Proposition 2.3.8. Soient $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ (alors $f(0) = 0$) et $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_j w^j$.

Soit D un disque sur laquelle f converge et telle que $f(D)$ est contenu dans la disque de convergence de g . Alors $g \circ f$ admet une représentation en tant que série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergente dans D .

2.4 Dérivation

Une série entière est une fonction continue sur le disque $|z| < R$, R le rayon de convergence de la série. On a même :

Théorème 2.4.1. Soit R le rayon de convergence de f . La fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est dérivable sur $|z| < R$ avec

$$f'(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Le rayon de convergence de la série entière $g(z)$ est R . Par conséquent, la fonction $f(z)$ est C^∞ sur $|z| < R$. Finalement,

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Corollaire 2.4.2 (Principe d'identité - version 1)). Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières convergentes sur $|z| < r$. Si $f(z_j) = g(z_j)$ pour une suite $z_j, j = 1, 2, \dots$ de points dans le disque $|z| < r$ qui converge vers 0, alors $f = g$.

Au lieu de séries $f(z) = \sum a_n z^n$ centrées en 0 on peut aussi considérer des séries $\sum a_n (z - a)^n$ centrées en a . Dans le disque de convergence D de f on passe de l'un à l'autre en utilisant

$$z^n = (z - a + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (z - a)^k.$$

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente dans le disque $D_r = \{|z| < r\}$. Nous voulons trouver une série entière centrée en $a \in D_r$ qui converge autour de a et représente f . On dit qu'une telle série est un **développement de f** autour de a .

Théorème 2.4.3 (Taylor). Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente dans le disque $D_r = \{|z| < r\}$ et $a \in D_r$. Alors f admet un développement autour de a . Ce développement est convergent dans la disque $|z - a| < r - |a|$, et dans ce disque :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n.$$

Corollaire 2.4.4 (Principe d'identité - version 2)). Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières convergentes sur $|z| < r$. Si $f(z_j) = g(z_j)$ pour une suite convergente $z_j, j = 1, 2, \dots$ de points dans le disque $|z| < r$, alors $f = g$.

2.5 Les fonctions e^z , $\log(z)$, $\sin(z)$ et $\cos(z)$

Définition 2.5.1. 1. (Rappel, voir 2.3.7) La **fonction exponentielle** est donnée par

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Son domaine est \mathbb{C} tout entier.

2. Le **logarithme** $z = \log(w)$ est son inverse, sa valeur principale est déterminée par

$$z = \text{Log}(w), \quad -\pi < \arg(w) \leq \pi.$$

On pose $\mathcal{R} = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$, le **domaine de Log**.

On a les propriétés suivantes :

- Proposition 2.5.2.**
1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
 2. $(e^z)' = e^z$
 3. Si x , resp. y est la partie réelle, resp. la partie imaginaire de z , on a $|e^z| = e^x$ et $\arg(e^z) = y$.
 4. $\text{Log}(w)$ est dérivable sur son domaine \mathcal{R} et $\frac{d}{dw}\text{Log}(w) = \frac{1}{w}$
 5. Dans le disque $|w| < 1$ on a une série convergente

$$\text{Log}(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} w^n.$$

Finalement, on a des séries convergentes (sur \mathbb{C}) :

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin(z) &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \end{aligned}$$

Exercices

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ et établir sa somme de pour des valeurs réelles dans le domaine de convergence.
Indication : une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$ est $\text{Arctan}(x)$.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. On considère la série

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + a^k)z^k}{k}.$$

(a) Déterminer la rayon de convergence de $u(z)$.

(b) Évaluer $u(x)$ dans son domaine de convergence. On pourra utiliser

$$\text{Log}(1 - z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \text{ pour } |z| < 1.$$

3. Trouver les solutions de l'équation

$$e^{z+1} = 1 - i\sqrt{3}.$$

4. On considère la fonction $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Trouver une série entière de la fonction $f(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 3

Séries de Fourier

3.1 Polynômes et séries trigonométriques

Définition 3.1.1. Un polynôme, resp. une série trigonométrique est un polynôme, resp. série de la forme

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots ,$$

où les a_i et les b_i sont des constantes complexes et x est une variable réelle.

Puisque

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\ \sin(nx) &= \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}),\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) &= c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n).\end{aligned}$$

Réciproquement, une telle terme est de la forme $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ avec

$$\begin{aligned}a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}).\end{aligned}$$

et donc, les polynômes et les séries trigonométriques sont tous de la forme

$$\text{(trig)} \quad c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + \dots + (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) + \dots$$

Un rôle important est joué par :

Définition 3.1.2. Le noyau de Dirichlet :

$$D_n(x) := \sum_{-n}^n e^{ikx}$$

On a :

Lemme 3.1.3. On a

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 1. \quad (3.2)$$

Concernant la convergence des séries on a :

Théorème 3.1.4.

1. Si la série de terme général $|c_n| + |c_{-n}|$ est convergente, alors la série (trig) est absolument convergente sur \mathbb{R} de somme une fonction $f(x)$ continue sur \mathbb{R} . Une primitive est obtenue en intégrant la série (trig) terme à terme.
2. Si la série de terme général $n(|c_n| + |c_{-n}|)$ est convergente, la série (trig) est une fonction continûment dérivable de x , et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme la série (trig).

3.2 Séries de Fourier

Ici on utilise quelques résultats de l'algèbre bilinéaire. On suppose connu la notion de produit hermitien.

On introduit

$$E = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \begin{array}{l} f \text{ périodique de période } 2\pi \text{ et continue par} \\ \text{morceaux sur tout intervalle borné} \end{array} \right\}$$

avec produit hermitien donné par

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Les fonctions

$$e_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx}, p \in \mathbb{Z}$$

donnent un ensemble orthonormé de E . On a aussi

$$\begin{aligned}(f, e_p)e_p &= c_p e^{ipx} \\ c_p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ipt} dt\end{aligned}$$

et la projection orthogonale de f dans

$$F_n = \mathbb{C}\text{- espace vectoriel engendré par les } e^{ikx}, k = -n, \dots, n$$

est la somme partielle

$$S_n(f) = \sum_{p=-n}^n c_p e^{ipx} = c_0 + \sum_{p=1}^n (c_p e^{ipx} + c_{-p} e^{-ipx}).$$

Définition 3.2.1. Si $f \in E$, on dit que les $c_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ipt} dt$ sont ses **coefficients de Fourier** et que la série

$$S(f) = c_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (c_p e^{ipx} + c_{-p} e^{-ipx})$$

est la **série de Fourier** associée à f .

Remarque 3.2.2. On peut aussi écrire

$$S(f) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx) + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx),$$

avec

$$\begin{aligned}a_0(f) &= c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \\ a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)dt \text{ pour } n \geq 1, \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)dt.\end{aligned}$$

On appelle aussi les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier.

On a un résultat général :

Lemme 3.2.3. Si la série $s_n(x) := c_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (c_p e^{ipx} + c_{-p} e^{-ipx})$ converge **uniformément** vers $s(x)$, alors $s(x) \in E$ et la série Fourier de $s(x)$ est la série somme des $s_n(x)$.

Remarque 3.2.4. 1) Une fonction paire a une série de Fourier

$$\sum_{p \geq 0} a_p \cos(px) = c_0 + \sum_{p=1}^{\infty} 2c_p \cos(px)$$

et une fonction impaire a une série de Fourier

$$\sum_{p \geq 1} b_p(x) \sin_p(x) = \sum_{p=1}^{\infty} 2ic_p \sin(px).$$

2) On ne sait pas que si $f \in E$, la série de Fourier $S(f)$ converge simplement, même dans un seul point ! Et, si on suppose que les sommes partielles $S_n(f)$ convergent vers $S(f)$, ce n'est pas vrai en général que $S(f) = f(x)$.

3) Si $f \in E$ on a toujours **l'inégalité de Bessel** :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_p|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} (f, f).$$

Par conséquent, même si on ne sait pas si la série de Fourier converge on sait que $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f) = 0$. En particulier, si $f \in E$, ces coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ discuté en remarque 3.2.2 convergent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Pour arriver à une large classe de fonctions égales à leurs séries de Fourier nous introduisons

Définition 3.2.5. Une fonction $f \in E$ est une fonction **régulière en** x_0 si $f(x_0)$ est la moyenne de sa limite à gauche $f_-(x_0)$ et à droite $f_+(x_0)$.

Proposition 3.2.6. Soit $f \in E$. On a

$$\begin{aligned} S_n(f)(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0 - t) D_n(t) dt + e_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0 \end{aligned}$$

pour $0 < \delta \leq \pi$.

On utilise ce résultat pour montrer :

Théorème 3.2.7. 1) Une fonction f périodique de période 2π qui est dérivable à droite et à gauche en x_0 admet une série de Fourier convergente en x_0 .

2) Si f est régulière en x_0 , la série de Fourier converge en x_0 vers $f(x_0)$. En particulier, si f est dérivable partout, la série de Fourier de f converge vers f partout.

3) **Localisation** Pour $f \in E$, la convergence ou non de la série de Fourier $S(f)(x_0)$ ne dépend que des valeurs de la fonction f arbitrairement proche de x_0 .

Corollaire 3.2.8. Si f est de classe C^1 on a égalité de **Parseval** :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_p|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Remarque. La formule de Parseval reste vrai pour les fonctions continues appartenant à E , même si on ne sait pas si leurs séries de Fourier convergent ! La preuve est beaucoup plus difficile.

Exemples 3.2.9. 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$$

est une fonction C^∞ et égale à sa série de Fourier.

2. On définit f par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \pi}{2} & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On trouve bien que

$$f(x) = - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sin px.$$

3. On définit f par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in]-\pi/2, \pi/2[\\ \frac{-\pi}{4} & \text{si } x \in]\pi/2, 3\pi/2[\\ 0 & \text{si } x = -\pi/2 \text{ et } x = \pi/2 \end{cases}$$

On trouve bien que $c_p = 0$ si p pair et $c = \frac{1}{p}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ si p est impair.

Donc

$$f(x) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots$$

La substitution de $x = 0$ donne

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots ..$$

4. On considère la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^{2m}$ sur $] -\pi, \pi[$, $m > 0$ entier. On trouve

$$c_0 = \frac{\pi^{2m}}{2m+1}, \quad c_n = (-1)^n \pi^{2m} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1} (n\pi)^{-2k} (2m)!}{(2m-2k+1)!}.$$

En posant $x = \pi$ dans le développement on trouve

$$\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} = (-1)^{m+1} \left[\frac{m}{(2m+1)!} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{(2m-2k+1)!} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \right].$$

Cette formule montre que $\zeta(2m) = b_m \pi^{2m}$ avec $b_m \in \mathbb{Q}$. Par exemple

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

3.3 Fonctions de périodicité quelconque

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur tout intervalle borné, de période T . Alors, on introduit la fréquence associée par

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

On note que les fonctions $e^{p\omega ix}$, $p \in \mathbb{Z}$ ont une période T et on peut associer à f la série de Fourier suivante :

$$S(f) = c_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (c_p e^{p\omega ix} + c_{-p} e^{-p\omega ix}), \quad c_p = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-p\omega it} dt$$

et on a le théorème

Théorème 3.3.1. *Une fonction f périodique de période T qui est dérivable à droite et à gauche en x_0 admet une série de Fourier $S(f)$ convergente en x_0 . Si f est régulière en x_0 , la série de Fourier converge en x_0 vers $f(x_0)$. En particulier, si f est dérivable partout, la série de Fourier de f converge vers f partout.*

Exercices

1. On considère la série

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(nx)}{n!}.$$

- (a) Montrer que cette série est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que la somme est partout de classe C^∞ . Indication : on pourra utiliser la formule $4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin(3x)$ et il suffit de montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n!}$$
 est de classe C^∞ .

- (b) Montrer que $S(x)$ est développable en série de Fourier ; trouver son développement (on utilisera la formule de a.).

- (c) Déterminer $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n!}$. Indication : on posera $z = e^{ix}$ et calculera

$$\text{les parties réelles et imaginaires de } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On utilisera ce résultat pour déterminer $S(x)$.

2. Montrer que la fonction f de période 2π , définie sur $[-\pi, \pi]$ par $x \mapsto x^2$ est développable en série de Fourier. Ensuite calculer cette série. En

$$\text{dédire la valeur de } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$