Université Joseph Fourier
Année universitaire 2007/2008
Licence Sciences et Technologies (L2)
Unité MAT233
Feuille d'exercices no.5

Exercice 1. Montrer que l'équation différentielle $x' = 2 \mid x \mid^{1/2}$ possède une infinité de solutions de classe $\mathcal{C}^1$ pour la condition initiale $x = 0$ en $t = 0$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle $x' = \sin(x)$. Déterminer toutes les solutions constantes et montrer que chaque solution est bornée.

Exercice 3. Soit $x' = f(x)$ un système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \neq 0$ partout et F une intégrale première dont la dérivée totale ne s'annule pas. Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée dérivable telle que $F \circ c \equiv$ *constante*. Montrer qu'il existe une fonction réelle $\lambda(t)$ continue telle que $c'(t) = \lambda(t) f(c(t))$. Généraliser cette conclusion à la dimension n (avec $n-1$ intégrales premières données).

Exercice 4. Soit $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que le système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^2$

$$x' = y\lambda(x, y),$$

$$y' = -x\lambda(x, y)$$

possède une intégrale première et que chaque solution (non stationnaire) est périodique.

Exercice 5. Soit A une matrice réelle $n \times n$. On considère le système linéaire d'équations différentielles (*) $x' = Ax$ sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que si (*) possède une solution périodique alors il existe aussi une infinité de solutions périodiques. Discuter le cas $n = 2$ en détail via une forme normale de A.

b) Soit A antisymétrique (i.e. ${}^tA = -A$). Alors (*) admet une intégrale première.

Exercice 6. On consider, pour une matrice réelle A non-inversible, le système d'équations différentielles *implicites* (*) $Ax' = x$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour une matrice carrée B, on dénote aussi par B l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Bx$. Montrer d'abord pour $E_k := \mathrm{Im}(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$, que $E_k \supset E_{k+1}$ et que la suite $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang k_0 .

Soit φ une solution de (*). Montrer que φ reste entièrement dans E_{k_0} et qu'il existe une solution unique pour chaque condition initiale dans E_{k_0}.

Exercice 7. Soit $x' = f(x)$ une équation différentielle où $f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ est une série entière convergente. On fixe $M, R > 0$ tels que $\mid a_k \mid \leq MR^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. A montrer

a) $\mid f(x) \mid \leq \frac{M}{1-R|x|}$ pour tout x tel que $\mid x \mid < \frac{1}{R}$,

b) il existe une solution unique ψ de l'équation différentielle $x' = \frac{M}{1-Rx}$ pour la condition initiale $x = 0$ en $t = 0$ et que ψ possède un devéloppement en série entière $\psi(t) = d_1 t + d_2 t^2 + ...$ avec des coefficients d_k, tous non-négatifs,

c) soit $\varphi(t) = c_1 t + c_2 t^2 +$ une solution de l'équation différentielle $x' = f(x)$ pour la condition initiale $x = 0$ en $t = 0$, alors $\mid c_k \mid \leq d_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. - Indication : récurrence sur k, en utilisant le fait mentionné au cours que chaque coefficient c_k s'expriment d'une façon unique comme un polynome universel (i.e. indépendant de f , et à coefficients non-négatifs) en les $c_1, ...c_{k-1}$ et les $a_0, ...a_k$.

⁕