Chapitre 4

Equations différentielles et calcul variationnelle

Introduction

Les équations différentielles, au sens littéral les équations qui font intervenir une fonction (scalaire, ou vectorielle) et ses dérivées jusqu'à un ordre n donné, soit

$$\boxed{(E) \qquad\qquad F(t, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0}$$

forment l'expression la plus courante des lois d'évolution de sytèmes physiques. Ces sytèmes sont matérialisés par la fonction $t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^m$, le système dépend de m paramètres, et un paramètre d'évolution, appelé le temps. L'équation la plus simple est

$$\boxed{y'(t) = f(t)}$$

où $f(t)$ est supposée définie continue sur un intervalle I. Si $t_0 \in I$, on sait que la seule solution qui prend la valeur C en t_0 est

$$y_C(t) = C + \int_{t_0}^{t} f(u)\, du$$

Cette équation est donc "en théorie" complètement résolue par une seule quadrature (intégrale). Caractéristique des des solutions : dans le plan (t, y) les graphes des courbes y_C, si C varie, sont translatés dans la direction de Oy de l'un d'eux, donc disjoints deux à deux. Plus généralement, soit un système à deux "paramètres" $R(t) = (x(t), y(t))$, les vecteurs $R'(t)$ et $R''(t)$ représentent toujours la vitesse et l'accélération du mouvement. Si R représente la position d'une particule en mouvement, de masse m, soumise à une force $F(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$, on a la célèbre loi de Newton

$$\boxed{mR''(t) = F \Longleftrightarrow \begin{cases} mx''(t) = & X(x(t), y(t)) \\ my''(t) = & Y(x(t), y(t)) \end{cases}}$$

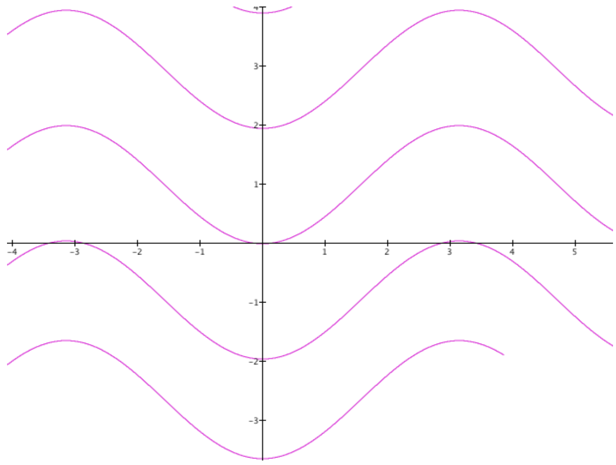


FIG. 4.1 – Graphes des solutions de $y' = \cos t$.

Dans cet exemple l'équation est d'ordre deux. L'objectif est de trouver de manière aussi explicite que possible la forme de R, la solution, ayant F l'équation. Trouver R, ou $y(t)$ dans l'équation intiale, signifie résoudre, ou intégrer l'équation. En général cela ne sera pas possible. On recherchera à défaut des informations qualitatives, et (ou numériques) sur la solution espérée. Pour cela une batterie de méthodes est connue, recherche d'intégrales premières, ou lois de conservation. Classiquement l'énergie totale $E = E_p + E_c$ (potentielle + cinétique) est une telle quantité.

On notera qu'une solution $t \to R(t)$ définit une courbe paramétrée, dite *courbe intégrale*.

Le principe de base de la théorie des équations différentielles, *principe de Cauchy*, est qu'une solution de (E) est totalement déterminée une fois qu'on a fixé certaines conditions initiales (la valeur de $y^{(k)}(t_0)$, $0 \leq k \leq n$ en un temps initial t_0). Cela ouvre porte à des questions naturelles, comme l'intervalle de temps maximal de définition de cette solution, et son comportement pour des temps très grands, si l'intervalle est $\mathbb{R}$, ou lorsque le temps s'approche des bornes de l'intervalle de définition. Dans la suite on se limitera à l'ordre au plus deux.

4.1 Equations du premier ordre

Définitions

On fixe les définitions pour les équations (E) du premier ordre. Bien que n'ayant en vue que des équations dans $\mathbb{R}$, ou bien $\mathbb{R}^2$, donc scalaire, ou dans le plan (système), la définition générale, i.e dans $\mathbb{R}^n$ ne pose pas de problème. Soit d'abord le cas *scalaire*. Considérons une fonction $f(t, y, z)$ définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$.

Définition 4.1.1. On doit comprendre par solution de l'équation différentielle

$$\boxed{(t, y(t), y'(t)) = 0}$$

la donnée d'une fonction y(t) définie et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, telle que pour $t \in I$, le point $(t, y(t), y'(t))$ soit dans D, et pour tout $t \in I$, on a $f(t, y(t), y'(t)) = 0$. On dit que l'équation est **résolue** si elle est de la forme

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t)).}$$

Dans ce cas de figure la fonction f est de deux variables, définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$. On parlera de D comme l'espace des phases du système.

De manière plus générale, une équation (résolue) à n composantes (on parle aussi de système d'ordre n) est définie par un domaine de définition $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (l'espace des phases) , une fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$, de composantes $f_1, \cdots, f_n$. Une solution $t \mapsto y(t) = (y_1(t), \cdots, y_n(t)$ est une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, telle que $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in D$, et

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t).}$$

On peut mettre en évidence les composantes, soit la forme équivalente (système à n composantes)

$$\begin{cases} y_1'(t) = & f_1(t, y_1(t), \cdots, y_n(t)) \\ \cdots = & \cdots \\ y_n'(t) = & f_n(t, y_1(t), \cdots, y_n(t)) \end{cases}$$

Une équation est dite *autonome* si le second membre, la fonction f ne dépend pas du temps t, mais que de x. Une équation autonome est donc de la forme

$$\boxed{x'(t) = f(y(t)).}$$

Théorème de Cauchy (cas scalaire)

Dorénavant on ne considèrera que des équations *scalaires du premier ordre résolues*

$$\boxed{y' = f(t, y).}$$

On parlera de $y(t)$ comme d'une solution définie sur un intervalle $I =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, et de I comme de son intervalle de définition.

Définition 4.1.2. Soit $t_0 \in I$ un point supposé fixé (souvent $t_0 = 0$). Soit $y(t_0) = y_0$, de sorte que $(t_0, y_0) \in D$. On appellera le couple (t_0, y_0) la condition initiale en t_0.

Interprétation géométrique : On peut interpréter la fonction $f(t, y)$ comme définissant dans l'espace des phases un **champ de vecteurs** $F(t, y)$, de composantes $(1, f(t, y))$. Imaginer au point (t, y) attaché le vecteur $(1, f(t, y))$. Si $y(t)$ est une solution de l'équation, on forme son graphe $t \mapsto (t, y(t))$, qu'on regarde comme une courbe paramétrée. Le *vecteur tangent* à cette courbe au point de paramètre t est exactement $(1, f(t, y(t))$. On dit que la courbe est une courbe **intégrale** du champ. Si on a affiare à une équation autonome, donc $y(t) = f(y(t))$, la fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ définit dans ce cas un champ de vecteurs sur D, et une solution $y(t)$ est une courbe intégrale du champ. Donc :

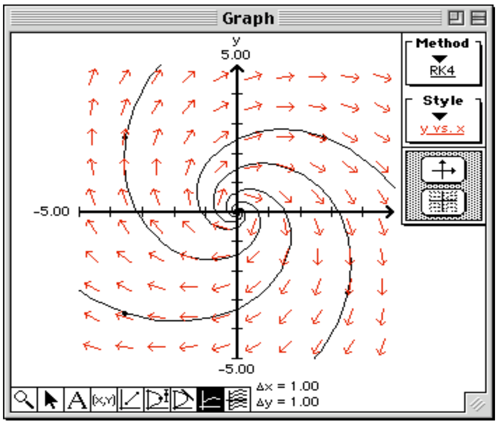


FIG. 4.2 – Un champ de vecteur et des courbes intégrales.

Solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ = courbe intégrale du champ F

Nous allons énoncer le théorème principal (de *Cauchy*), qui ne sera pas démontré, mais que nous testerons sur différents exemples.

FIG. 4.3 – Louis Augustin Cauchy.

Théorème 4.1.3. *On suppose que le second membre $f(t, y)$ admet des dérivées partielles continues sur D. Alors pour toute condition initiale $(t_0, y_0) \in D$, il existe un intervalle $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, tel que $a < t_0 < b$, et une unique solution $y(t)$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, définie sur I, et telle que $y(t_0) = y_0$.*
On peut supposer que l'intervalle I est maximal pour les propriétés requises, voulant dire que la solution $y(t)$ ne peut être étendue à un intervalle strictement

plus grand. On dira que I est l'intervalle maximal de définition de la solution de condition initiale donnée.

Pour tester ce théorème fondamental, il faut être en mesure de résoudre l'équation $y' = f(t,y)$. Cela est possible dans quelques cas (voir section suivante). On observera, comme conséquence du théorème de Cauchy, le fait suivant, qui dit que deux courbes intégrales distinctes ne se coupent jamais :

Corollaire 4.1.4. *Soient deux solutions $y_1(t), y_2(t)$ de $y' = f(t,y)$, définies sur des intervalles respectifs I_1 et I_2. Si en $t_0 \in I_1 \cap I_2$, on a $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$, et ces deux solutions se recollent en une solution $y(t)$ définie sur $I = I_1 \cup I_2$.*

Démonstration : $I_1 \cap I_2$ est un intervalle, de sorte que l'unicité dans le théorème de Cauchy, donne la réponse. On définit $y(t)$ par $y(t) = y_1(t)$ si $t \in I_1$, et $y(t) = y_2(t)$ si $t \in I_2$. □

Le premier exemple, le plus basique, est comme indiqué en introduction

$$y'(t) = f(t)$$

donc le second membre, défini sur D, ne dépend pas de y. Cela revient à trouver une fonction $y(t)$ connaissant sa dérivée. L'espace des phases élargi est $\mathbb{R} \times D$. La réponse est, si on fixe une condition initiale, $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times D$

$$\boxed{y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds}$$

le théorème de Cauchy est vérifié !

4.2 Résoudre une équation différentielle scalaire du premier ordre ?

Séparation des variables

On fait l'hypothèse que la fonction $f(t,y)$ (le second membre) est de la forme $\frac{h(t)}{g(y)}$. dans ce cas l'équation initiale peut s'écrire si on introduit $G(y) = \int g(y)dy$

$$g(y(t))y'(t) = h(t) \Longleftrightarrow (G(y(t)))' = h(t) \Longleftrightarrow g(y(t)) = \int h(t)dt$$

Cette remarque simple permet dans quelques cas de résoudre effectivement l'équation. Noter qu'il faut calculer deux primitives, et ensuite inverser G !

Exemples 4.2.1. 1) $\boxed{y' = y^2}$. Noter la solution constante ou stationnaire $y = 0$. Si $y(t)$ définie sur I est non identiquement nulle, alors par le théorème de Cauchy, pour tout $t \in I$, $y(t) \neq 0$. On écrit

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \Longrightarrow \int \frac{y'}{y^2} = t + c$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{C - t}\ (C = -c)$$

La solution générale est $\boxed{y_C(t) = \frac{1}{C-t}}$. Il faut cependant fixer l'intervalle de définition, qui est soit $]-\infty, C[$, soit $]C, \infty[$, donc y_C conduit à deux solutions, selon qu'on choisit l'un ou l'autre de ces deux intervalles.

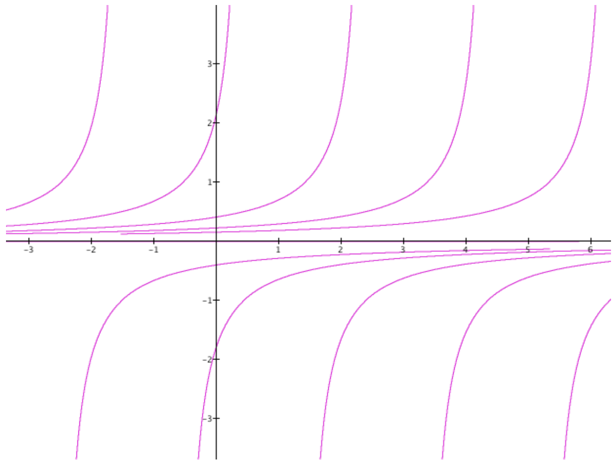


FIG. 4.4 – Courbes intégrales de $y' = y^2$.

2) l'Equation logistique : $\boxed{\frac{dy}{dt} = \mu y(L-y),\ (\mu \neq 0)}$ ou équation proies-prédateurs en biologie. Par le changement de variable $\frac{y}{L} \mapsto y$ on se ramène à $L = 1$. Elle est bien à variables séparées, avec $h = 1$, $g(y) = \frac{1}{y(1-y)}$. On peut donc l'écrire

$$y'\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) = 1$$

Après intégration on trouve $\log|\frac{y}{(1-y)}| = \mu t + c'$, $(c' \in \mathbb{R})$, d'où la"solution générale" en posant $(C = \pm e^{c'})$

$$y_C(t) = \frac{Ce^{\mu t}}{1 + Ce^{\mu t}}\ (C \in \mathbb{R})$$

La constante $C \in \mathbb{R}$ est dite constante d'intégration. Il faut la traiter avec soin, car c'est elle qui va nous dire à quelle solution on a affaire. Les solutions "stationnaires" (= constantes) sont $y(t) = 0\,(C = 0)$ et $y(t) = 1(C = \infty)$. Noter que la solution y_C est définie sur $I = \mathbb{R}$ si $C \geq 0$, sinon si $C < 0$, il y a en fait deux solutions définies sur les intervalles respectifs $]-\infty, t_C[$ et $]t_C, +\infty[$, $t_C = -\frac{\log -C}{\mu}$. Choisissons par exemple la condition initiale $(t_0 = 0, \beta)$, et explicitons la solution y_C telle que $y(0) = \beta$. Alors

$$\frac{C}{1+C} = \beta \Longrightarrow C = \frac{\beta}{1-\beta}$$

On a donc bien une unique solution ($y = \text{cte} = 1$, si $\beta = 1$). Les propriétés qualitatives de la solution y_C et de son intervalle de définition, dépendent de la constante C (voir exercices de dessous). On peut noter que si $y_C(t)$ est une solution non stationnaire, alors $y' \neq 0$ en tout point. En effet $y'(t) = 0$ correspond à $y(t) = 0$, ou 1. Donc le corollaire au théorème de Cauchy nous enseigne que dans ce cas y est l'une des deux solutions stationnaires. On peut le vérifier directement !

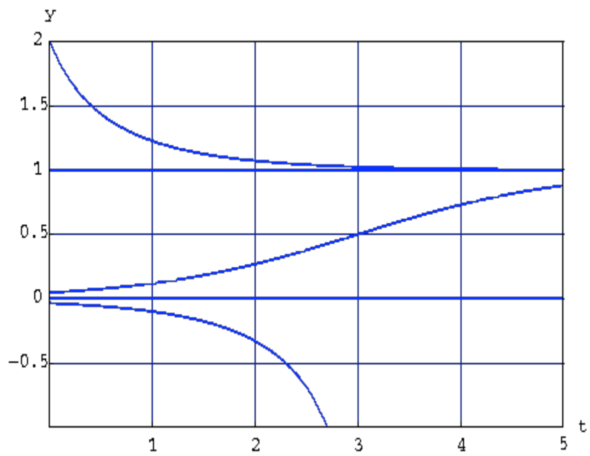


FIG. 4.5 – $y' = y(1 - y)$.

Les équations à variables séparées, sont des cas particuliers de la situation suivante. Soit l'équation

$$\boxed{P(t, y) + Q(t, y)y' = 0}$$

qu'on représente souvent sous la forme (symbolique)

$$\boxed{P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0}$$

Supposons avoir une fonction $U(t, y)$ de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial U}{\partial t} = P(t, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(t, y)$$

Dans cette situation le champ dérive du potentiel U.

Proposition 4.2.2. *Sous les condition précédentes, une solution $y(t)$ de l'équation différentielle doit vérifier*

$$U(t, y(t)) = \lambda = cte$$

Donc $t \mapsto (t, y(t))$ est une courbe de niveau de $U(t, y)$. On parle pour U comme une intégrale première de l'équation.

Démonstration : On dérive par rapport à t, soit

$$\frac{d}{dt}(U(t, y(t)) = U'_t(t, y) + U'_y(t, y)y'(t) = 0$$

donc $U(t, y(t)) = cte$ sur l'intervalle de définition de $y(t)$. □

Pour une équation à variables séparées $g(y)y' - h(t) = 0$, on voit qu'il suffit de prendre

$$U(t,y) = -\int h(t)dt + \int g(y)dy$$

Soit par exemple l'équation $(2y-t)y'+(2t-y) = 0$. On a $U(t,y) = t^2+y^2-ty$, donc une solution $y(t)$ vérifie

$$y^2(t) - ty't) + t^2 = \lambda$$

qu'on peut résoudre comme une équation du second degré en y, soit

$$y(t) = \frac{t \pm \sqrt{-3t^2 + 4\lambda}}{2}$$

On laisse à titre d'exercice la discussion sur l'intervalle de définition d'une solution. On notera que l'existence de U, et la forme explicite de U ne sont pas assurées en général.

L'équation linéaire du premier ordre :

$$\boxed{y' = a(t)y + b(t)}$$

Dans cet exemple, les fonctions a, b sont définies continues sur I. Si $b = 0$ (cas homogène), l'équation est à variables séparées. Par intégration, on obtient

$$\log|y(t)| = A(t) = \int a(t)dt \implies \boxed{y(t) = Ce^{A(t)}}.$$

On observe que la solution telle que $y(t_0) = y_0$ s'obtient avec $C = C_0 = y_0e^{-A(t_0)}$. On voit bien que la solution est unique, et que son intervalle de définition est I.

En présence d'un second membre, on utilise la méthode de la *variation de la constante de Lagrange.*

Dans cette méthode on remplace la constante C par une fonction $C(t)$, et on cherche sous quelles conditions la fonction $t \mapsto C(t)e^{A(t)}$ a des chances d'être solution de l'équation générale (avec second membre). On doit avoir

$$y' = C'e^{A(t)} + Ca(t)e^{A(t)} = a(t)y + b(t) \iff C' = b(t)e^{-A(t)}$$

Donc on obtient $C(t)$ par une seule intégration $C(t) = \lambda + \int b(u)e^{-A(u)}du$, et la solution générale

$$\boxed{y(t) = \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \int b(u)e^{-A(u)}du}$$

On notera que dans cet exemple, une solution définie par une condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ a pour intervalle maximal de définition exactement I. Le théorème de Cauchy est tout à fait clair, si on regarde la forme explicite d'une solution.

Changement de variable et (ou) de fonction

Principe : Soit l'équation différentielle $y' = f(t, y)$. Si $y \mapsto z = h(y)$, $t = \varphi(s)$ sont deux changements de variables, voulant dire que h et φ ont des fonctions réciproques h^{-1} et φ^{-1}. On forme la fonction de s :

$$s \mapsto h(y(t)) = z(s)$$

On va identifier l'équation différentielle qui a z pour solution. On dérive par rapport à s, on trouve par un calcul de dérivation de fonctions composées

$$\boxed{z'(s) = h'(y)y'(t)\varphi'(s) = h'(h^{-1}(z))f(\varphi^{-1}(s), h^{-1}(z))\varphi'(s).}$$

C'est l'équation différentielle obtenue par changement de variable et de fonction.

Exemples 4.2.3. 1) Equation homogène. L'équation scalaire homogène est une équation de la forme

$$\boxed{y' = f(\frac{y}{t}).}$$

On peut la résoudre par "l'astuce" suivante : faisons le changement de fonction $z = \frac{y}{t}$. En dérivant, on arrive à

$$z' = \frac{ty' - y}{t^2} = \frac{f(z) - z}{t}$$

qui est maintenant une équation à variables séparées.
2) L'équation de Riccati : Une équation de Riccati est de la forme

$$\boxed{y' = A(t) + B(t)y + C(t)y^2.}$$

On suppose les fonctions A, B, C définies continues sur un intervalle I. Si $C = 0$, c'est une équation linéaire, on suppose donc $C \neq 0$. On va illustrer un principe qui rend quelques services : si on connaît une solution de l'équation, alors on peut ramener la recherche des autres solutions à une équation linéaire. Supposons connue la solution $z(t)$. Posons $\varphi(t) = \frac{1}{y(t)-z(t)}$. On va voir que $y(t)$ est solution de l'équation de Riccati ssi $\varphi(t)$ est solution d'une équation linéaire.

On dérive, et on trouve $\varphi'(t) = -\frac{y'(t)-z'(t)}{(y-z)^2}$. Mais $y' - z' = (y - z)(B + C(y + z))$. Donc

$$\varphi'(t) = -\varphi(B + C(y + z)) = -\varphi(B + 2Cz) - C$$

(en utilisant $y = z + \frac{1}{\varphi}$. Soit un exemple : $y' = y^2 + 2t - t^4$. Il y a une solution évidente $y(t) = t^2$. Alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$\varphi' = -2t^2\varphi - 1$$

L'équation homogène associée est $\varphi' = -2t^2\varphi$, soit $\varphi = \alpha e^{-\frac{2}{3}t^3}$, α étant la constante d'intégration. Par la méthode de variation de la constante, on trouve

$$\alpha = \lambda - \int_0^t e^{\frac{3}{2}s^3} ds$$

(on ne cherchera pas à calculer cette primitive) soit finalement

$$\varphi(t) = (\lambda - \int_0^t e^{\frac{3}{2}s^3} ds)e^{-\frac{2}{3}t^3}$$

et

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{\varphi} = t^2 - \frac{e^{-\frac{2}{3}t^3}}{\lambda - \int_0^t e^{\frac{3}{2}s^3} ds}$$

Comme exemple considérons **l'équation dite de Bernoulli** :

$$\boxed{y' = a(t)y + b(t)y^\alpha \ (\alpha \neq 1)}$$

Divisons les deux membres par y^α. On trouve

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{a}{y^{\alpha-1} + b}$$

et en faisant le changement de fonction $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$, on tombe sur l'équation linéaire

$$\frac{1}{1-\alpha} z' = az + b$$

On peut imaginer effectuer des changements de variable et fonction plus compliqués, dans le sens que le changement de variable porte sur l'espace des phases, c'est à dire sur le couple (t, y), et non pas individuellement sur t, et y.

Pour illustrer cela, soit par exemple l'utilisation des *coordonnées polaires* comme nouvelles variables. Soit l'équation

$$y'(t) = \frac{t + ay}{tx - y}$$

qu'on peut mettre sous la forme $\boxed{-(t + yy') = a(y - ty')}$. Si $r^2 = t^2 + y^2$, le premier membre est $-rr'$. Si $\mathrm{tg}\theta = \frac{y}{t}$, on

$$\theta'(1 + \mathrm{tg}^2\theta) = \frac{ty' - y}{t^2}$$

soit $\theta'(t^2 + y^2) = ty' - y = \theta' r^2$. Donc finalement l'équation initiale se réduit à

$$r' = ar\theta' \Longleftrightarrow \frac{dr}{d\theta} = ar$$

La solution générale est $\boxed{r(\theta) = Ce^{a\theta}}$. L'expression de cette solution en termes des coordonnées de départ (t, y) est un désastre !, pour les curieux seulement. Noter que l'équation initiale peut aussi être traitée comme une équation homogène.

Exercices

1. Dresser le tableau des variations et tracer le graphe de $y_C(t)$ en fonction de C.
Solution : Si $C > 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ prend ses valeurs dans $]0, 1[$. Les valeurs aux bornes sont 0 si $T \to -\infty$ et 1 si $t \to \infty$ (asymptotes horizontales). La fonction ne peut être que croissante, le tableau des variations le montre !,

et avec un point d'inflexion. Pour trouver ce point, autant utiliser l'équation différentielle, qui donne en dérivant

$$y'' = \mu y'(1-2y)$$

Comme $y' \neq 0$, il y a inflexion si $y(t_{inf}) = \frac{1}{2}$.
Supposons $C < 0$. Dans ce cas il y a une solution définie sur $]t_C, \infty[$, qui tend vers $+\infty$ si $t \to t_C+0$, et tend vers 1 si $t \to \infty$. Elle ne peut être que décroissante. De même si $t < t_C$, la courbe est décroissante et $y(t) < 0$.

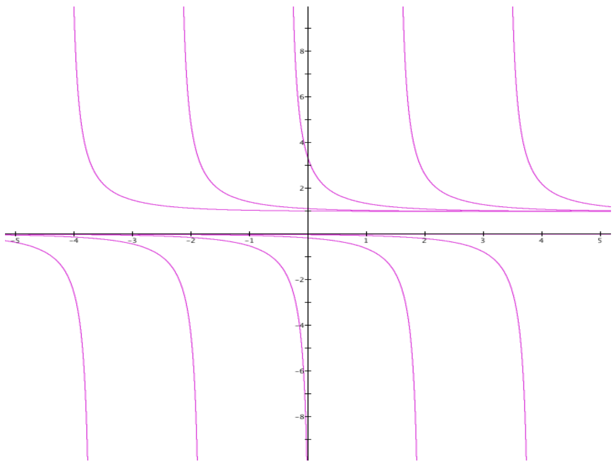


FIG. 4.6 – Courbes intégrales de l'équation logistique $y' = y(1-y)$.

2. Discuter l'existence des solutions pour l'équation "logistique avec prélèvement" $y'(t) = y(1-y) - m$ $(m \neq 0)$.
Solution :

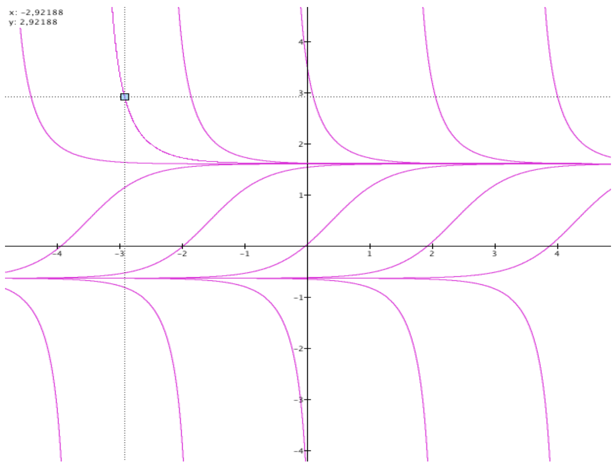


FIG. 4.7 – Courbes intégrales de $y' = y(1-y) + 1$.

3. (Recherche d'un **facteur intégrant**) : Montrer qu'on peut ramener l'équation linéaire (EL) à la forme basique $y' = f(t)$, en multipliant $y' - ay$ par une fonction

inconnue $\mu(t)$. Expliciter la contrainte sur μ, et résoudre.
Solution : on cherche μ de sorte que

$$\mu(t)y'(t) - a(t)y) \stackrel{?}{=} (\mu(t)y(t))'$$

Cela donne après dérivation du terme de droite, et simplification

$$\mu'(t) + a(t)\mu(t) = 0$$

Donc $\log \mu(t) = -\int_{t_0}^t \ a(s) \ ds + c$, donc

$$\mu(t) = C\exp\left(-\int_{t_0}^t \ a(s) \ ds\right)$$

Alors l'équation initiale devient $(\mu(t)y(t))' = \mu(t)b(t)$, la solution générale est alors

$$y(t) = \frac{\int_{t_0}^t \mu(s)b(s) \ ds + \text{cte}}{\mu}$$

4. Résoudre les équations, et pour chaque solution, indiquer l'intervalle de définition

   1) $y' = y\left(\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$
   2) $y' = \frac{t+y}{t-y}$.
5. L'equation de Bernoulli est une équation de la forme $y'+f(t)y = g(t)y^n$. Montrer qu'on peut la ramener à une équation à variables séparées par le changement de fonction $y = z\exp\{-\int f(t)dt\}$. (On verra une autre méthode pour résoudre cette équation).
6. Résoudre $y' = 1 - \frac{t}{y}$.
7. Soient $y_1, \cdots, y_4$ quatre solutions distinctes de l'équation de Riccati. Prouver que l'expression

$$\frac{\left(\frac{y_1-y_3}{y_1-y_4}\right)}{\left(\frac{y_2-y_3}{y_2-y_4}\right)}$$

   est constante (ne dépend pas de t).
8. Résoudre $ty' + y = y^2 \log t$.
9. (Equation de Julia) Soit $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle (non résolue)

$$h(t)y' = h(y)$$

   i) Identifier les solutions stationnaires.
   ii) On suppose que sur $J =]a, b[\subset I$ la fonction h ne s'annule pas. Expliciter la solution générale de l'équation, et observer que les solutions sont définies sur J.
   Solution : la fonction h a un signe constant dans J, on peut considérer une primitive $\phi(t) = \int_{t_0}^t \frac{du}{h(u)}$. Alors si $y(t)$ est une solution, on a

$$(\phi(y(t))' = \phi'(y)y'(t) = \frac{y'(t)}{\phi(y)} = \frac{1}{h'(t)} = \phi'(t)$$

   Donc $\phi(y(t)) = \phi(t) + c$ ($c \in \mathbb{R}$). la fonction ϕ est de classe C^1 monotone, donc admet une fonction réciproque ϕ^{-1} de classe C^1, qui permet d'écrire

$$y(t) = \phi^{-1}(c + \phi(t))$$

   Noter que $y(t_0) = \phi^{-1}(c)$.

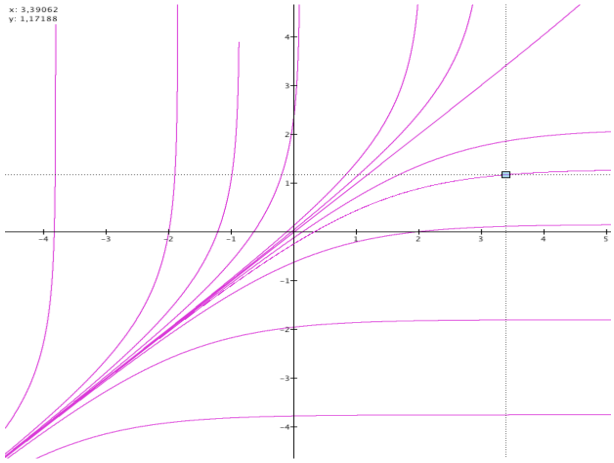


FIG. 4.8 – Courbes intégrales de $e^t y' = e^y$.

4.3 Equations linéaires

4.3.1 Coefficients constants (l'algèbre linéaire s'invite)

L'équation linéaire scalaire du premier ordre conduit à une extension à des "systèmes". On se concentre d'abord sur le cas des équations linéaires homogènes du premier ordre

$$\star \quad \boxed{y'(t) = A\,y(t)}$$

où $y = (y_1, \cdots, y_n)$ et $A = (a_{i,j})$ est une matrice $n \times n$ à coefficients réels (ou complexes). Donc contrairement à ce qui a était dit dans le §1, on pose le problème dans $\mathbb{R}^n$, et on explicitera sa solution pour $n = 2$. Observons que $\star$ équivaut à

$$\begin{cases} y_1'(t) & = \sum_{j=1}^n a_{1,j} y_j(t) \\ \quad\vdots & \\ y_n'(t) & = \sum_{j=1}^n a_{n,j} y_j(t) \end{cases}$$

On parle à juste titre de système d'équations différentielles linéaires. Le résultat suivant est (relativement) élémentaire ; il précise la structure de l'ensemble des solutions :

Théorème 4.3.1. *Pour toute condition initiale $C \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution et une seule $y_C(t)$ de l'équation $\star$ définie sur $\mathbb{R}$, telle que $y_C(0) = C$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est (pour les lois naturelles sur les fonctions) un espace vectoriel isomorphe par $C \mapsto y_C$ à $\mathbb{R}^n$.*

On ne va pas en donner de preuve directe générale, mais l'observer dans quelques situations.
• Si $n = 1$, on sait que la *solution générale* est $y(t) = Ce^{At}$, la condition initiale étant $y(0) = C$. Le théorème est donc vrai dans ce cas.
• On suppose donc que $n \geq 2$. Il est commode et souvent utile d'effectuer un changement linéaire de fonctions, ce qui revient à multiplier les deux membres de

$\star$ par une matrice inversible T. On observe que $\star$ équivaut à l'équation modifiée :

$$T\,y'(t) = TA\,y(t) \Longleftrightarrow z'(t) = TAT^{-1}\,z(t)$$

si on pose

$$\boxed{z(t) = Ty(t).}$$

ou encore $z_i(t) = \sum_j t_{i,j} y_j(t)$. En effet on a l'égalité matricielle $z'(t) = Ty'(t)$! Ainsi les équations $y' = Ay$ et $z' = TAT^{-1}z$ sont équivalentes, du fait qu'on retrouve $y(t)$ par $y(t) = T^{-1}z(t)$. Des solutions de l'une on tire les solutions de l'autre. Le problème de résoudre $\star$ est ainsi ramené à une question sur les matrices. Simplifier autant que possible la matrice A par l'opération (dite de conjugaison) TAT^{-1}.
Rappel d'algèbre linéaire : On dit que $C \in \mathbb{R}^n$, $C \neq 0$ (resp. $C \in \mathbb{C}^n$) est un *vecteur propre* de A de *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si

$$\boxed{AC = \lambda C.}$$

S'il est possible de trouver n vecteurs propres *indépendants*, formant une base de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), la matrice A est diagonalisable ($\exists T \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) inversible, avec TAT^{-1} diagonale). On démontre en MAT 231 le résultat suivant :

Proposition 4.3.2. *Si le polynôme (caractéristique)* $\det(\lambda 1_n - A)$ *a n racines réelles distinctes dans* $\mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*), alors A est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *(resp. sur* $\mathbb{C}$*).*

Cas diagonalisable sur $\mathbb{R}$

C'est la situation la plus simple. On veut dire par la qu'il existe une matrice inversible T (à coefficients réels) telle que

$$\boxed{TAT^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).}$$

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ signifie la matrice diagonale de coefficients diagonaux (réels) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Dans ce cas le *nouveau système* est

$$\begin{cases} z_1'(t) & = \lambda_1 z_1(t) \\ \quad\vdots & \\ z_n'(t) & = \lambda_n z_n(t) \end{cases}$$

C'est la superposition de n équations scalaires, donc la *solution générale* est

$$z_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} \quad (1 \leq i \leq n)$$

La solution générale du système initial est alors (T^{-1} = matrice inverse de T)

$$y_i(t) = \sum_j t_{i,j}^{-1}\, C_j e^{\lambda_j t}$$

la condition initiale étant $y(0) = C = (C_1, \cdots, C_n)$. La difficulté est certainement de s'assurer que A peut par conjugaison se ramener à la forme diagonale (réelle), donc si A est *diagonalisable* sur $\mathbb{R}$.

Faisons une observation simple mais importante : cherchons à quelle condition la courbe $y(t) = Ce^{\lambda t},\ C \in \mathbb{R}^n, C \neq 0$ est solution de $\star$. On a en dérivant

$$y'(t) = \lambda y(t) \stackrel{?}{=} e^{\lambda t} AC$$

En conclusion la condition nécessaire et suffisante est :

$$\boxed{AC = \lambda C, \text{ donc } C \text{ est vecteur propre de valeur propre } \lambda}$$

Expliquons la stratégie pour analyser un système linéaire dans le cas du plan, $n = 2$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$. Le discriminant est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$. Il y a trois cas : 1) si $\Delta > 0$, il y a deux valeurs propres réelles distinctes λ et μ, 2) si $\Delta = 0$, il y a une seule valeur propre $\lambda = \frac{a+d}{2}$, et 3) si $\Delta < 0$, il y a deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda, \overline{\lambda}$.

1. Cas diagonalisable réel ($n = 2$)

Dans les cas 1) on trouve les vecteurs propres $Au = \lambda u$ et $Av = \mu v$ par résolution des systèmes linéaires 2×2

$$(A - \lambda 1_2)u = 0 \quad (\text{resp. } (A - \mu 1_2)v = 0)$$

La solution générale est

$$\boxed{y(t) = \alpha e^{t\lambda} u + \beta e^{t\mu} v \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).}$$

L'équation est une *superposition* d'équations linéaires scalaires. Ce fait est général. Si $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de vecteurs propres, et si $Au_i = \lambda_i u_i$, la solution générale de l'équation $\star$ est

$$\boxed{y(t) = \sum_i C_i e^{t\lambda_i} u_i}$$

pour des constantes arbitraires C_i. On a $y(0) = (C_1, \cdots, C_n)$ (condition initiale).

2. A non diagonalisable ($n = 2$)

Pour continuer la discussion précédente, notons que dans ce cas Il y a une seule valeur propre réelle λ. On a $\lambda == \frac{a+d}{2}$ et $ad - bc = \lambda^2$. On élimine le cas (trivial) $A = \lambda 1_2$, qui relève de i). Outre la solution $y(t) : t \mapsto e^{\lambda t} u \quad (Au = \lambda u)$, qui subsiste comme dans i), on cherche maintenant une seconde solution de la forme

$$z(t) : t \mapsto e^{\lambda t}(tu + v)$$

$v \in \mathbb{R}^2$ étant un vecteur à déterminer. On va voir que le couple (u, v) doit être une base de $\mathbb{R}^2$. Faisons le test :

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}(tu + v)) = \lambda e^{\lambda t}(tu + v) + e^{\lambda t} u = e^{\lambda t}(\lambda(tu + v) + u)$$

qu'on compare avec $Ae^{\lambda t}(tu + v) = e^{\lambda t}(tAu + Av) = e^{\lambda t}(t\lambda u + Av)$. On doit donc avoir par comparaison : $t\lambda u + Av = \lambda(tu + v) + u$, soit

$$\boxed{Av = \lambda v + u.}$$

Du point de vue de la matrice A, cela revient à trouver une base (u, v), u étant un *vecteur propre*, relativement à laquelle l'opérateur $x \to Ax$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On prend d'abord v de manière complètement arbitraire (indépendant de u cependant), alors $Av = \alpha u + \beta v$. Sur cette base la matrice devient

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

comme la trace est inchangée, on doit avoir $\beta = \lambda$ (d'une autre manière, si $\beta \neq \lambda$, on aurait deux valeurs propres distinctes. Comme $\alpha \neq 0$ (car A n'est pas diagonale), quitte à changer u en αu (ou v en $\alpha^{-1} v$), on peut supposer $\alpha = 1$. On peut ainsi trouver une base (u, v) comme indiqué, et en conséquence trouver deux solutions indépendantes de l'équation différentielle

$$y(t) = e^{t\lambda} u, \quad z(t) = e^{t\lambda}(v + tu)$$

la solution générale est combinaison linéaire de ces deux solutions

$$\boxed{t \mapsto py(t) + qz(t) = pe^{\lambda t} u + qe^{\lambda t}(tu + v).}$$

On peut remarquer que le calcul qui précède dit que la solution générale est, en supposant $A = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$t \mapsto e^{\lambda t} \left(1_2 + t \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

La matrice qui apparaît à droite peut légitimement s'écrire $e^{tA} = 1_2 + tA$! Il n'est pas difficile d'énoncer un principe général, pour $n \geq 2$, qui simplifie le raisonnement précédent, en lui donnant un sens au calcul.

Proposition 4.3.3. *Soit l'équation linéaire $y' = Ay$, A matrice $n \times n$. On suppose que $A = \lambda 1_n + N$, avec $N^k = 0$ (matrice nilpotente). On définit*

$$e^{tA} = e^{t\lambda} \left(1_n + tN + t^2 \frac{N^2}{2} + \cdots + t^{k-1} \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

On appelle cette matrice l'exponentielle *de tA. Alors pour tout vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction (= courbe) $t \mapsto e^{tA}\xi$ est la solution de l'équation différentielle de condition initiale $y(0) = \xi$.*

Démonstration : On a de manière plus explicite l'égalité de vecteurs

$$e^{tA}\xi = e^{t\lambda} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} N^j(\xi) \right)$$

Si on dérive les deux membres par rapport à t, on trouve

$$\frac{d}{dt} e^{tA}\xi = (\frac{d}{dt} e^{t\lambda}) \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} N^j(\xi) \right) + e^{t\lambda} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{d}{dt} \frac{t^j}{j!} N^j(\xi) \right)$$

$$= \lambda e^{t\lambda}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{t^j}{j!}N^j(\xi)\right) + e^{t\lambda}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}N^j(\xi)\right)$$
$$= \lambda e^{tA}\xi + Ne^{tA}\xi = Ae^{tA}\xi$$

qui est exactement le résultat souhaité (observer que $e^{t\lambda}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}N^j\right) = Ne^{tA}$). □

3. Utilisation des nombres complexes : $n = 2$

Il arrive qu'une matrice soit seulement diagonalisable sur $\mathbb{C}$, c'est le cas si le polynôme caractéristique a ses racines réelles ou complexes simples, par exemple pour une matrice 2×2, si les valeurs propres sont complexes conjuguées (non réelles). Pour exploiter ce fait, il faut accepter des solutions $y(t) : I \to \mathbb{C}^n$. Tout ce qui a été dit au-dessus dans le cas réel, est vrai sans changement dans le cas des solutions complexes. En particulier toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, avec un vecteur propre associé $u \in \mathbb{C}^n$, donne naissance à une solution à valeurs complexes

$$\boxed{t \mapsto e^{\lambda t}u.}$$

Si la matrice A est à coefficients réels, ce qu'on suppose, on va exploiter le fait que partie réelle et partie imaginaire d'une solution $t \mapsto e^{t\lambda}u$ sont des solutions réelles. On se limite à $n = 2$, l'argument est général.

Soit l'équation $y' = Ay$ ($n = 2$), la matrice A réelle ayant deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\overline{\lambda}$, de vecteurs propres respectifs u, $\overline{u} \in \mathbb{C}^2$. Dans ce cas la matrice est diagonalisable mais sur $\mathbb{C}$.

Le raisonnement de 1) est encore valable, il montre que les deux fonctions $y : t \mapsto e^{t\lambda}u$ et $\overline{y} : t \mapsto e^{t\overline{\lambda}}\overline{u}$ sont deux solutions indépendantes mais à valeurs complexes !, et conjuguées. Cela suggère le procédure suivante. En fait ayant trouvé λ et $u = v + iw$, $v, w \in \mathbb{R}^2$, on a en considérant partie réelle et partie imaginaire :

Proposition 4.3.4. *Les fonctions $t \mapsto \Re(e^{t\lambda}u)$ et $t \mapsto \operatorname{Im} e^{t\lambda}u$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions (réelles). Toute solution réelle s'écrit de manière unique*

$$y(t) = p\Re(e^{t\lambda}u) + q\operatorname{Im} e^{t\lambda}u$$

pour certaines constantes p et q.

Démonstration : Posons $\varphi(t) = e^{t\lambda}u$ (solution complexe, c'est à dire dans $\mathbb{C}^2$). On décompose cette fonction vectorielle en partie réelle et partie imaginaire. Si $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, et si $z_j = x_j + iy_j (j = 1, 2)$, le vecteur partie réelle (resp. imaginaire) de w est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. On peut écrire $\varphi(t) = \Re(e^{t\lambda}u) + i\operatorname{Im} e^{t\lambda}u = y(t) + iz(t) \in \mathbb{C}^2$. En dérivant, on trouve

$$\varphi'(t) = y'(t) + iz'(t) = A\varphi(t) = A(y(t) + iz(t))$$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on trouve (A est réelle)

$$y'(t) = Ay(t)\ ,\ z'(t) = Az(t)$$

On a donc deux solutions réelles et $y(0) = v$, $z(0) = w$. On ne peut avoir $w \in \mathbb{R}v$, car dans ce cas on aurait $Aw = \lambda w$, et comme A est réelle, λ serait un réel. Il s'ensuit que y et z sont deux solutions indépendantes, comme convenu.

Donc dans ce cas, il suffit de calculer λ et u pour avoir la totalité des solutions. □

Comportement des solutions : le pendule avec frottement

Soit l'équation

$$\boxed{y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} y(t.)}$$

D'une autre manière avec

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} y_1'(t) & = y_2(t) \\ y_2'(t) & = -y_1(t) - ky_2(t) \end{cases}$$

C'est l'équation du premier ordre associée à l'équation scalaire du second ordre

$$y'' + ky' + y = 0$$

Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + k\lambda + 1$, de discriminant $k^2 - 4$. Donc (on se limite à $k > 0$) :
i) $k > 2$. Il y a deux valeurs propres réelles $\frac{-k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$ toutes deux strictement

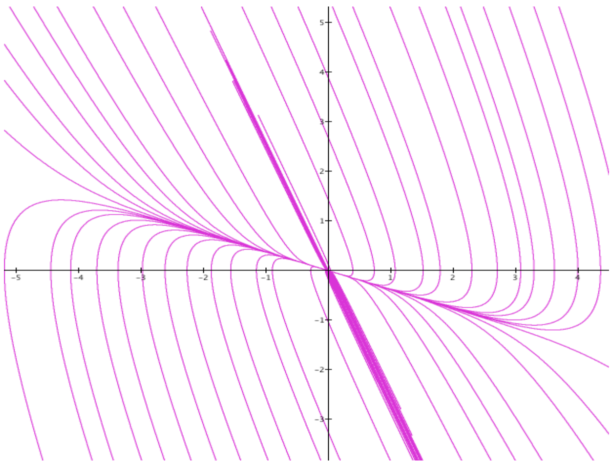


FIG. 4.9 – Les courbes intégrales pour $k = 3$.

< 0. Les vecteurs propres associés sont

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2} \end{pmatrix}$$

Une base de l'espace vectoriel des solutions est donc

$$y_1(t) = e^{t(\frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2})} u \,,\; y_2(t) = e^{t(\frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2})} v$$

La solution générale est avec $\lambda_1 = \frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2} > \lambda_2 = \frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}$

$$y(t) = \begin{pmatrix} ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} \\ a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

On peut voir $y(t)$ comme une courbe paramétrée dans l'espace des phases. L'étude de cette courbe est aisée, et le dessin doit tenir compte des signes de a, b. Noter que lorsque $t \to +\infty$ $y(t)$ s'approche de l'origine dans la direction de pente λ_1. Dans ce cas on dit être en présence d'un *noeud* car lorsque $t \to \infty$, toute solution tend vers zéro. La solution triviale (dite solution d'équilibre) est *stable*. Si les valeurs propres sont réelles strictement positives (noeud instable), les trajectoires ont l'allure suivante ($k = -3$).

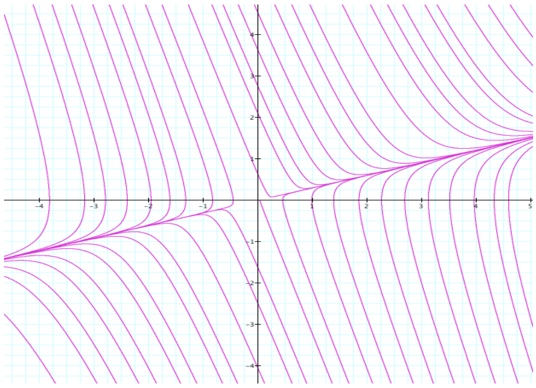


FIG. 4.10 – Noeud instable.

ii) $k = 2$: -1 est valeur propre double, et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre. Donc on a une solution

$$y(t) = e^{-t}u$$

Si $A = -1_2 + N$, on a $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et on sait que $N^2 = 0$. La solution générale est du fait de la Proposition **??**

$$t \mapsto e^{tA}\xi = e^{-t}(1_2 + tN)\xi = e^{-t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}\xi$$

iii) $|k| < 2$. Dans ce cas les valeurs propres sont complexes conjuguées. On vient de voir qu'il en faut une, et un vecteur propre associé. Le calcul est facile. On a $\lambda = \frac{-k+i\sqrt{4-k^2}}{2} = \alpha + i\omega$, et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$. On obtient

$$e^{t\lambda}u = e^{t\alpha}(\cos t\omega + i \sin t\omega)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}\right)$$

d'où les deux solutions indépendantes (partie réelle et partie imaginaire)

$$y(t) = e^{t\alpha}\left(\cos t\omega \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} - \sin t\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}\right)$$

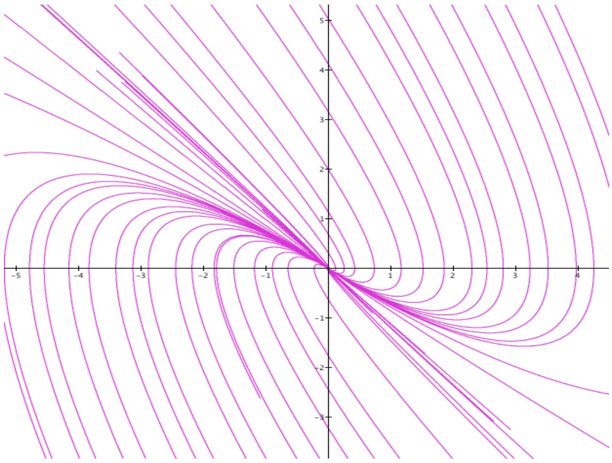
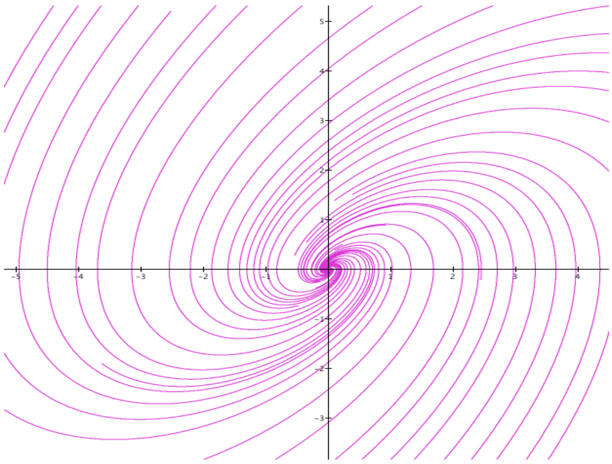


FIG. 4.11 – $k = 2$.

$$z(t) = e^{t\alpha}\left(\sin t\omega \begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix} + \cos t\omega \begin{pmatrix}0\\ \omega\end{pmatrix}\right)$$

Si $\alpha < 0$, on voit que pour toute solution $y(t)$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. On parle dans ce cas de *foyer* stable. Les trajectoires "ressemblent" à des spirales. Si $\alpha = 0$, les trajectoires sont des cercles. Si au contraire $\alpha > 0$, on parle de foyer instable. La discussion qui précède est en fait générale, et s'applique à l'équation



$y' = Ay$, voir exercices ci-dessous.

Reste à traiter le cas de l'équation linéaire avec second membre.

$$\boxed{y'(t) = Ay(t) + B(t).}$$

On suppose que la fonction $B : I \to \mathbb{R}^n$ (le second membre) dépend éventuellement de t. Le principe général est :

Proposition 4.3.5. *Soit $z(t)$ une solution de l'équation avec second membre. Alors la solution générale de cette équation est $y(t)+z(t)$, où $y(t)$ est la solution générale de l'équation homogène associée ($y' = Ay$).*

L'équation scalaire d'ordre n à coefficients constants

Soit l'équation

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(t)}$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, et $b(t)$ le second membre une fonction $b : I \to \mathbb{R}$. On ramène cette équation à une équation linéaire du premier ordre (vectorielle), en posant

$$\boxed{y_i(t) = y^{(i-1)}(t) \ (1 \le i \le n).}$$

On a donc $y_i' = y_{i+1}$ si $i < n$, et $y_n' = y^{(n)} = -a_1 y_n - \cdots - a_n y_1 + b(t)$. La fonction vectorielle $t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^n$ est donc solution de l'équation du premier ordre

$$y'(t) = Ay(t) + B(t)$$

où la matrice $n \times n$ A est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$. Le problème est donc un cas particulier du cas général traité ci-dessus. Dans le cas homogène ($b(t) = 0$), on est ramené à l'examen de la matrice A, en particulier de ses valeurs propres. A titre d'exercice on pourra vérifier que le polynôme caractéristique est $\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$.

4.3.2 Flot d'une équation différentielle

Revenons au problème général. Soit l'équation différentielle

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

avec pour espace des phases $\mathbb{R} \times U$. Pour tout $(t_0, y_0) \in U$, le théorème d'existence de Cauchy assure qu'il existe une unique solution $y(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$, définie sur un intervalle maximal (ouvert) $]c, d[$. Naturellement comme observé sur des exemples, les bornes c, d dépendent de la donnée initiale (t_0, y_0). Pour mesurer la dépendance d'une solution en fonction d'une condition initiale, il convient maintenant de noter $y_{t_0,y_0}(t)$, ou

$$\boxed{t \to \varphi(t, t_0, x_0) = y_{t_0,x_0}(t)}$$

la solution $y(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$, pour bien montrer que cette solution est celle qui satisfait à la donnée initiale choisie. La fonction ϕ ainsi définie s'appelle le *flot* de l'équation (1). On a donc par définition

$$\boxed{\frac{d}{dt}\varphi(t,s,a) = F(t,\varphi(t,s,a))}$$

Le flot n'est pas autre chose que la donnée de la *solution générale*. On peut démontrer le résultat important disant que le flot est sous certaines conditions sur F, une fonction différentiable en (t,s,a). Ce résultat traduit que la solution d'une équation différentielle dépend différentiablement de la condition initiale. On va l'observer sur des exemples.

Exemple 4.3.6. Soit dans $\mathbb{R}^n$ l'équation linéaire à coefficients constants $y' = Ay$. On suppose que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ un système de vecteurs propres indépendants, et $Au_i = \lambda_i u_i$. Si $\xi = \sum_i \xi_i u_i \in \mathbb{R}^n$, alors le flot est

$$\boxed{(t,s,\xi) \mapsto \sum_i \xi_i e^{(t-s)\lambda_i} u_i.}$$

Si la matrice est au départ diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors la flot est

$$\varphi(t,s,\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} e^{(t-s)\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{(t-s)\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{(t-s)\lambda_n} \end{pmatrix} . \overrightarrow{a}$$

On dit (et justifie) le fait que la matrice de dessus est l'exponentielle $e^{(t-s)A}$. C'est un fait général pour les équations linéaires, le flot est toujours (sans démonstration)

$$\boxed{\varphi(t,s,\overrightarrow{a}) = e^{(t-s)A}.\overrightarrow{u}.}$$

Remarque. La méthode de variation de la constante (bis repetita). Soit une équation linéaire à coefficients constants et second membre

$$\boxed{y'(t) = Ay(t) + B(t)}$$

le "second membre" $B(t)$ est une fonction vectorielle (non constante) définie continue sur un intervalle I. La méthode de la variation de la constante de Lagrange explicitée dans le cas scalaire, se généralise. On part de la solution générale de l'équation sans second membre $\varphi(t,\xi)$, de condition initiale $\varphi(0,\xi) = \xi$ (faire $s = 0$ dans le flot), c'est à dire $y : t \mapsto e^{tA}.\xi$. On suppose maintenant que

$\xi(t)$ est une fonction inconnue que l'on cherche à déterminer pour que $\varphi(t, \xi(t))$ soit solution de l'équation avec second membre. Cela conduit à

$$y'(t) = Ae^{tA}.\xi(t) + e^{tA}.\xi'(t) = Ay(t) + B(t)$$

après identification donne la condition $e^{tA}.\xi'(t) = B(t)$, qui ramène à résoudre l'équation

$$\xi'(t) = e^{-tA}.B(t)$$

Exemple 4.3.7. Cherchons le flot de l'équation

$$\begin{cases} y_1'(t) & = y_2(t) \\ y_2'(t) & = 1 \end{cases}$$

On trouve $y_2(t) = t + A$, $y_1(t) = B + At + \frac{t^2}{2}$. Soit finalement

$$\varphi(t, s, \xi) = \frac{(t-s)^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-s) \begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}, \ \xi = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$$

4.4 Equations du second ordre : exemples

Pour compléter le §2, on va considérer brièvement le cas important pour les applications, des équations différentielles linéaires ou non d'ordre deux (scalaires). Ce sont dans la cas général, les équations de la forme

$$\boxed{y''(t) = f(t, y, y').}$$

(dans beaucoup de cas $f = f(y)$ ne dépend que de y et pas de y'). Dans le cas linéaire, l'équation du second ordre est

$$\boxed{y''(t) + A(t)y'(t) + B(t)y + C(t) = 0}$$

Les fonctions A, B, C sont supposées définies continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Il y a un principe général qui ramène une équation du second ordre à une équation du premier ordre mais dans $\mathbb{R}^2$. On pose $y_1(t) = y(t)$, et $y_2(t) = y'(t)$. Alors l'équation du second ordre est équivalente à

$$\boxed{\begin{cases} y_1' & = y_2 \\ y_2' & = f(t, y_1) \end{cases}}$$

et dans le cas linéaire

$$\begin{cases} y_1'(t) & = y_2(t) \\ y_2'(t) & = -A(t)y_2(t) - B(t)y_1(t) - C(t) \end{cases}$$

ou encore sous forme matricielle

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -B(t) & -A(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -C(t) \end{pmatrix}$$

Si $C = 0$ l'équation est dite homogène, et si A, B sont des constantes, l'équation est à coefficients constants.

4.4.1 Coefficients constants

Soit l'équation $y'' = ay' + by$, équation équivalente à

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ est $\lambda^2 - a\lambda - b$. Le discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$. On applique à cette équation le traitement général des équations linéaires.

Exemple 4.4.1. Le pendule linéarisé $y'' + ky' + y = 0$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$. On retrouve l'exemple étudié en détail précédemment.

4.4.2 Coefficients non constants

Lorsque les coefficients A, B dépendent de t, il n'est pas possible en général de résoudre explicitement l'équation. Pour étudier les solutions, il faut d'autres méthodes. Voici une définition générale :

Définition 4.4.2. On appelle *intégrale première* (voir proposition 3.1) de l'équation vectorielle $y' = f(t, y)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ une fonction $E : U \to \mathbb{R}$ qui est constante sur les trajectoires, donc telle que

$$\boxed{E(y(t)) = cte}$$

sur toute solution. Les trajectoires sont donc des courbes de niveau de E.

Proposition 4.4.3. *Pour que E soit une intégrale première, il faut et il suffit que*

$$(\operatorname{grad} E\,, f) = 0$$

Démonstration : On prouve la condition suffisante. On doit avoir en effet pour toute solution

$$0 = \frac{d}{dt} E(y(t)) = \sum_i \frac{\partial E}{\partial y_i} y_i'(t) = (\operatorname{grad} E, f(y)) = 0$$

□

Ce méthode fonctionne bien dans la situation suivante. Considérons l'équation linéaire dans le plan

$$\begin{cases} y_1' & = y_2 \\ y_2' & = f(y_1) \end{cases}$$

L'équation est équivalente (= linéarisation) à l'équation scalaire d'ordre deux

$$y'' = f(y)$$

Posons

$$T = \frac{y_2^2}{2}, \quad U = -\int_{y_0}^{y} f(u)du$$

T représente *l'énergie cinétique*, et U *l'énergie potentielle*. Soit alors *l'energie totale*

$$\boxed{E = E(y_1, y_2) = T + U.}$$

On a immédiatement que $(\operatorname{grad} E, F) = 0$, donc E est une intégrale première.

Exemple 4.4.4. Soit l'équation de Newton

$$\boxed{f(y) = -\frac{dU}{dy}.}$$

Dans cet exemple l'énergie totale est

$$E(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + U(y_1)$$

Même si cela ne permet pas de résoudre explicitement l'équation en général, des informations sur U, induisent des renseignements sur la solution $y = y_1$. Par exemple supposons

$$U \geq 0$$

Comme l'energie totale E est constante le long d'une trajectoire, et que $U \geq 0$, on voit que la composante y_2 reste bornée sur son intervalle de définition, disons $|y_2| \leq c$. Alors

$$|y(t)| = |\int_a^t y_2(s)ds| \leq c|t-a|$$

Donc $y(t)$ est bornée sur tout intervalle borné $[a, b]$. On peut en déduire que la solution est prolongeable sur tout l'axe réel (si U est définie sur $\mathbb{R}$). Revenons à un exemple simple, et instructif. Soit $U = k\frac{y^2}{2}$, donc l'équation

$$y'' = -ky$$

ou sous la forme linéaire

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

L'énergie est une fonction quadratique

$$E(y_1, y_2) = \frac{y_1^2}{2} + k\frac{y_2^2}{2}$$

Supposons $k > 0$. Alors les courbes de niveau $E = c$ sont des ellipses homothétiques de centre $(0, 0)$ qui représente un minimum de l'énergie (attraction). Si $k < 0$, les courbes de niveau sont des hyperboles, l'origine est un maximum (répulsion). Dans les deux cas on sait résoudre explicitement l'équation. par exemple si $k < 0$, on montrera que la solution générale est

$$y(t) = ae^{t\sqrt{-k}} + be^{-t\sqrt{-k}}$$

On observera que la courbe $t \mapsto (y(t), y'(t))$ est bien une (branche) d'hyperbole.

4.4.3 Application : Equation intrinsèque d'une courbe

Revenons à une courbe paramétrée γ dans le plan

$$f : s \in I \mapsto (x(s), y(s))$$

supposée paramétrée par la longueur d'arc, et sans point sationnaire. Soit

$$\tau(s) = f'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}, \ \eta(s) = \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x's) \end{pmatrix}$$

le repère de Frenet au point s. Alors par définition de la courbure $\kappa(s)$, on a

$$f''(s) = \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix} = \kappa(s)\eta(s) = \begin{pmatrix} -\kappa(s)y'(s) \\ \kappa(s)x'(s) \end{pmatrix}$$

qui définit une équation différentielle linéaire d'ordre deux. Il n'est pas question en général d'intégrer cette équation. On peut la transformer en une équation d'ordre un, en posant $u = x'(s)$, $v = y'(s)$. Donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} u'(s) \\ v'(s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}}$$

On peut toujours pour étudier cette courbe supposer que $f(0) = (0, 0)$, et que $\tau(0) = f'(0)$ est fixé. cela revient à se donner une condition initiale pour l'équation différentielle. En conséquence du théorème de Cauchy, on peut énoncer :

Théorème 4.4.5. *Une courbe paramétrée plane sans point stationnaire est totalement déterminée à un déplacement près par sa courbure.*

Démonstration : En effet la solution $\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}$ est fixée par la condition initiale, donc la fonction $f(s)$ est déterminée à une translation près. □

Exercices

1. Trouver la solution générale de $y' = Ay$ si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Solution* : Il ya une valeur propre double $\lambda = 2$. On écrit $A = 21_2 + N$ avec $N^2 = 0$. On a $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors si on veut $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre. La solution générale est
$$y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ 1-t & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
2. Trouver la solution générale de l'équation $y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Expliciter le flot de l'équation
$$\begin{cases} y_1'(t) & = \sin y_2(t) \\ y_2'(t) & = 0 \end{cases}$$
4. Donner la solution générale de l'équation $y'' = 2y' + 3y + t^2$.
5. Si $\kappa(s) = \frac{1}{r}$ est constante, retrouver le fait que la courbe est un (arc de) cercle.
6. Quelle est l'équation intrinsèque pour la spirale
$$x(t) = e^{-t} \cos t, \ y(t) = e^{-t} \sin t$$
En sens inverse, partant de l'équation différentielle, retrouver la spirale.

4.5 Complément : Calcul des variations

4.5.1 Minimiser la longueur d'arc

Le calcul des variations est un vieux sujet, mais toujours en forme. Un exemple typique de problème est celui qui concerne les arcs de courbe paramétrées joignant deux points A et B du plan. Quelle est l'arc de longueur minimum ? Réponse le segment de droite !

Posons le problème. Si l'arc est donné par $f : t \mapsto (x = x(t),\, y = y(t))\, t \in [a, b]$, et $f(a) = A$, $f(b) = B$, on sait que la longueur de l'arc est

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Le problème posé revient donc a minimiser cette intégrale relativement à la "collection" des arcs d'extrémités A et B.

Proposition 4.5.1. *Pour tout arc comme indiqué ci-dessus, on a*

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \geq \|B - A\|$$

avec égalité ssi l'arc est le segment de droite.

Démonstration : On peut choisir les coordonnées de sorte que $A = (\alpha, 0)$, $B = (\beta, 0)$, $\alpha < \beta$. Alors

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \geq \int_a^b |y'(t)|\, dt \geq \int_a^b x'(t)\, dt = x(B) - x(A) = \beta - \alpha$$

L'égalité impose à avoir l'égalité dans les deux inégalités, soit $y'(t) = 0$ pour tout t, et $|x'(t)| = x'(t)$. Donc $y(t)$ est constante, et $x(t)$ est croissante. Comme $y(a) = y(b) = 0$, on voit que $y(t) = 0$. Donc la courbe paramétrée qui réalise le minimum est

$$t \in [a, b] \mapsto (x(t), 0)$$

C'est le segment de droite $[A, B]$ avec une certaine paramétrisation. □

4.5.2 Equation d'Euler-Lagrange

Soit pour simplifier un arc γ qui représente le graphe d'un fonction $x \mapsto y(x)$ définie sur $[a, b]$. Il joint les points $A = (a, y(a))$ et $B = (b, y(b))$. On forme si $f = f(x, y, z) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction avec des dérivées partielles continues à l'ordre deux, l'intégrale

$$I(\gamma) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

On dit que $f(x, y, z)$ est le Lagrangien du problème. On cherche à **minimiser** I, c'est à dire trouver la fonction $y(x)$ qui minimise l'intégrale. On note $I = I(y)$ l'intégrale, faisant valoir le fait que la "variable" est la fonction $y(t)$. On sait que dans le cas classique un extremum atteint en y doit s'accompagner de

$$\frac{dI}{dy} = 0$$

le symbole d n'est pas une dérivation, car la variable y n'est pas un scalaire, mais une fonction. Pour avoir la réponse, on va perturber y et demander que $I(y)$ soit un minimum. On considère une fonction de deux variables $\varphi(x,\alpha)$ qui a des dérivées partielles d'ordre deux continues, définie sur $[a,b]\times(-\epsilon,+\epsilon)$, et qui satisfait à :

$$\begin{array}{lll} 1) & \varphi(a,\alpha)= & y(A)\ \forall\alpha \\ 2) & \varphi(b,\alpha)= & y(B)\ \forall\alpha \\ 3) & \varphi(x,0)= & y(x) \end{array}$$

Pour α fixé, on peut voir $y_\alpha(x) : x\mapsto\varphi(x,\alpha)$ comme une déformation de la courbe (fonction) qui réalise le minimum. On a en conséquence pour tout α

$$I(y_\alpha)\geq I(y)$$

Comme $I(y_\alpha)$ est une fonction de la variable α, on doit avoir

$$\frac{dI(y_\alpha)}{d\alpha}_{|\alpha=0}=0$$

Il s'agit maintenant de dériver une intégrale d'une fonction qui dépend d'un paramètre. On admet le résultat (voir semestre 4). Le résultat est (on peut inverser intégrale et dérivée)

$$\frac{dI(y_\alpha)}{d\alpha}=\int_a^b\frac{d}{d\alpha}f(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha))dx$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha))\varphi'_\alpha(x,\alpha)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha))\varphi''_{x,\alpha}(x,\alpha)\right)dx$$

En utilisant le fait que $\varphi''_{x,\alpha}(x,\alpha)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varphi)$, le second morceau de l'intégrale devient

$$\int_a^b\frac{\partial f}{\partial z}(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha))\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(x,\alpha)dx$$

qu'on peut intégrer par parties, cela donne

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha))\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(x,\alpha)\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,\varphi(x,\alpha),\varphi'_x(x,\alpha))\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(x,\alpha)dx$$

On obtient du fait que $\varphi(a,\alpha)=y(A),\varphi(b,\alpha)=y(B)$ que le terme entre crochets est nul, car les dérivées de φ évaluées en a et b sont nulles. Donc reste en faisant $\alpha=0$

$$\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x),y'(x))\ -\ \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y(x),y'(x))\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}_{|\alpha=0}dx=0$$

Posons $\eta(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}_{|\alpha=0}$, c'est en fait une fonction qui peut être choisie de manière arbitraire, par exemple prendre

$$\varphi(x,\alpha)=y(x)+\alpha\eta(x)$$

Donc la fonction sous le signe somme doit être identiquement nulle, et on obtient à la fin la condition nécessaire pour avoir un minimum

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x),y'(x))\ -\ \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y(x),y'(x))=0$$

Si on developpe la dérivée partielle en x, cela donne une équation différentielle du second ordre de solution $y(x)$, dite de **Euler-Lagrange** :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} y'' = 0.}$$

Cette équation est simplement une condition nécessaire. Dans beaucoup de cas heureusemnet, f ne dépend pas de x, c'est à dire $f = f(y, z)$. Alors par un calcul simple de dérivée, on note que l'équation de dessus, jointe à $f'_x = 0$, équivaut à l'équation bien plus simple

$$\frac{d}{dx}\left[y' \frac{\partial f}{\partial z} - f(y, y')\right] = 0$$

donc

$$\boxed{y' \frac{\partial f}{\partial z}(y, y') - f(y, y') = \text{cte.}}$$

qui reste une équation du premier ordre (compliquée !).

Exemples 4.5.2. 1) $f = \sqrt{1 + z^2}$. L'équation d'Euler-Lagrange devient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{cte}$$

c'est à dire $y' = \text{cte}$, donc $y(x) = cx + d$. C'est le résultat de la section 1.

2) *Le brachistochrone, ou revoilà la cycloïde* $f = \sqrt{\frac{1+z^2}{y}}$. On obtient dans ce cas l'équation différentielle

$$\boxed{y' = \sqrt{\frac{2C - y}{y}}.}$$

pour une constante C. Pour avoir la solution, on fait un changement de fonction

$$y = C(1 - \cos\theta)$$

L'équation devient

$$C\theta' \sin\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \sqrt{\frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}}$$

soit $2C\theta' \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$, finalement

$$\theta'(x) = \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

qu'on peut interpréter comme

$$\frac{dx}{d\theta} = 2C \sin^2\frac{\theta}{2}$$

La solution est $x(\theta) = C(\theta - \sin\theta)$. Cela joint à $y = C(1 - \cos\theta)$, montre que la solution est un arc de cycloïde.


corbis.com