

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

Introduction

Le calcul différentiel dans l'étude des fonctions $x \mapsto f(x)$ de la variable réelle x , a pour objectif essentiel de préciser, soit sur la forme explicite de f , soit dans une définition implicite de f , solution d'une équation différentielle par exemple, le comportement local ou global de f . C'est à dire, domaine de définition, monotonie éventuelle, comportement aux bornes du domaine de définition, et (ou) extremums. Un principe essentiel stipule qu'en un extremum (local) x_0 , on a la condition (réciproque fausse!)

$$f'(x_0) = 0$$

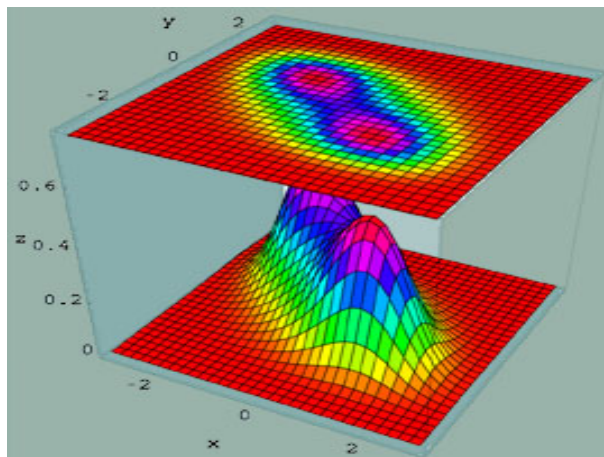


FIG. 2.1 – Graphe d'une fonction de deux variables et ses extremums (maxima) locaux

On souhaite étendre ce principe aux fonctions de plusieurs variables (Fig. 2.1). La raison est que dans la grande majorité des situations rencontrées, en Mathématiques et dans ses applications, Physique, Biologie, etc., les systèmes dont on étudie le comportement dynamique, dépendent non pas d'une variable x (souvent le temps t), mais de plusieurs variables, par exemple temps et coordonnées d'espace. Le cas typique est donné par un point du plan (resp. espace) $M = (x, y)$, (resp. $M = (x, y, z)$) dont la position par rapport à un système d'axes fixé à l'avance dépend de deux (resp. trois) paramètres = coordonnées. Noter qu'un point du plan peut être repéré au moyen des coordonnées polaires, et sphériques pour un point de l'espace. En mécanique relativiste, un point de l'espace temps est décrit par quatre coordonnées, trois d'espace (x, y, z) et une de temps t . Les lois de la physique s'expriment en général en disant que certaines quantités, dépendantes de la position du point dans le plan ou l'espace, sont des invariants du mouvement. La physique spécifie les "lois du mouvement".

Le principe de moindre action de Euler-Lagrange (Chapitre 3) conduit à des questions d'extremum mais pour des fonctions de plusieurs variables, et même d'une "infinité" de variables. Si par exemple l'action est donnée par la fonction $f(x, y)$, l'énergie le long d'une trajectoire $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ est alors

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), x'(t)) dt$$

L'équation du mouvement ou d'Euler-Lagrange est comme nous le verrons l'équation aux dérivées partielles qui correspond à la minimisation de J

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

Ceci se généralise à des systèmes mécaniques en n coordonnées d'espace. Les dérivées partielles peuvent être itérées, donnant un sens à l'équation $\Delta f = 0$, où Δ représente l'opérateur de Laplace : $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$. L'équation $\Delta(f) = 0$ est l'équation de Laplace. L'équation en encadré est dite "équation de Korteweg-de Vries". Un calcul montre que la fonction suivante est solution

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{ch}\left(\frac{x-t-a}{2}\right)^2}$$

2.1 Quelques notions métriques

Rappelons que l'espace euclidien \mathbb{R}^2 est implicitement muni de la *distance euclidienne*

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Le terme de droite représente la *norme* du vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$, que nous écrirons $\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$. On aura à considérer plus généralement l'espace euclidien \mathbb{R}^n , de *dimension* n . Un point de \mathbb{R}^n est repéré par ses coordonnées $M = (x_1, \dots, x_n)$ (on écrira souvent $x = (x_1, \dots, x_n)$). La distance euclidienne est :

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{2,i} - x_{1,i})^2}$$

Si $n = 3$, on utilisera souvent (x, y, z) au lieu de (x_1, x_2, x_3) . On sait que en toute dimension n cette distance satisfait à l'inégalité triangulaire

$$d(M_1, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3)$$

de manière équivalente pour deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} , $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Parallèlement à l'inégalité triangulaire, on retiendra au niveau vectoriel la définition du *produit scalaire* de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

de sorte que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. L'inégalité triangulaire découle en fait de l'inégalité fondamentale dite de *Cauchy-Schwarz*, C.S pour abrégé :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Dans le plan cette inégalité découle de la formule

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\widehat{x, y})$$

Remarque. Une preuve de C.S est la suivante : on élève au carré les deux membres et on fait la différence, on se ramène à prouver que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \geq 0$$

Si on développe avec un peu de soin les carrés, il reste pour le terme de gauche :

$$\sum_{i \neq j} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j y_i y_j = \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

expression positive ou nulle. On observera que l'égalité (dans l'inégalité) équivaut à y est proportionnel à x . L'inégalité triangulaire se déduit de l'inégalité C.S. En effet il suffit d'élever au carré les deux membres, et de prouver que

$$\|x + y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 \leq 0$$

En développant cette expression, on voit facilement qu'elle se réduit à $(\langle x, y \rangle) - \|x\| \|y\|$ qui est bien ≤ 0 .

La terminologie suivante est classique et intuitivement correcte. On appelle *boule ouverte* (resp. *fermée*) de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et rayon $r > 0$, l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| < r\} \text{ (resp. } \leq r)$$

Des qu'on a la notion de boule, on peut définir la convergence convenablement :

Définition 2.1.1. Une suite $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ de points de \mathbb{R}^n converge vers x si pour tout boule $B(x, r)$ de centre x , il existe $N = N(r)$ tel que les points x_n , $n \geq N$ sont contenus dans $B(x, r)$.

On peut montrer que $x_n \rightarrow x$ si et seulement si chaque coordonnée de x_n converge vers la coordonnée correspondante de x . Par exemple $(\frac{1}{n}, 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}})$ converge vers $(0, 0)$.

Définition 2.1.2. Une partie $U \subset \mathbb{R}^n$ est dite *ouverte* si pour tout $a \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Le complémentaire d'une partie ouverte est dite *fermée*.

De cette définition il n'est pas clair que la boule ouverte est ouverte !

Lemme 2.1.3. $B(a, r)$ est ouverte.

Démonstration : C'est instructif de faire un dessin. Si $b \in B(a, r)$, alors $\rho := d(b, a) < r$ et on va montrer que $B(b, r - \rho) \subset B(a, r)$. Soit $c \in B(b, r - \rho)$. Alors $d(c, b) < r - \rho$. Donc, par l'inégalité triangulaire, on a $d(c, a) \leq d(c, b) + d(b, a) < r - \rho + \rho = r$ ce qui signifie que $c \in B(a, r)$. \square

Attention, une partie peut être ni ouverte, ni fermée (exemple dans \mathbb{R} , l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$). Les ouverts rencontrés dans le cours seront souvent des "domaines de définition" ; ils seront décrits par un nombre fini d'inégalités polynômiales strictes. L'adjectif "fermé" est justifié par la propriété suivante :

Proposition 2.1.4. Une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermée, si et seulement si pour toute suite (x_n) , $x_n \in F$ qui est convergente, alors $\lim x_n \in F$.

Démonstration : Supposons F fermée. Soit une suite (x_k) de points de F telle que $x_k \rightarrow x$, soit $\|x_k - x\| \rightarrow 0$. Si $x \notin F$, donc $x \in U = \mathbb{R}^n - F$, alors comme U est ouvert, il existe une boule (ouverte) B de centre x et rayon $r > 0$, telle que $B \subset U$. Mais pour $k \gg 0$, on sait que $x_k \in B$, donc en contradiction avec le fait que $x_k \in F$.

Dans le sens opposé, si on a la propriété indiquée sur les suites, il s'agit de voir que $U = \mathbb{R}^n - F$ est une partie ouverte. Dans le cas contraire, il y a un point, disons $x \in U$ tel que pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(x, r)$ n'est pas contenue dans U . Si $r = \frac{1}{k}$ (pour tout k), on peut donc trouver un point $x_k \in B(x, \frac{1}{k}) \cap F$. Il est clair que $x_k \rightarrow x \notin F$, qui amène encore à une contradiction. \square

Pour fixer les idées on débute par deux variables (x, y) , censées représenter un point du plan \mathbb{R}^2 . Une fonction des deux variables x, y , notée $(x, y) \mapsto u = f(x, y)$, associe donc à un point $M = (x, y)$ du plan un scalaire (réel) u ; f décrit la procédure de fabrication de u .

Exemple 2.1.5.

$$u = \sin(xy), \quad u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad u = x^2 - y^2$$

Une fonction a naturellement un *domaine de définition* (D ou U), un ouvert (par définition) en dehors duquel elle n'a pas de sens. Par exemple $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a pour domaine de définition *l'intérieur* D du disque unité $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$. Les deux autres exemples ont pour domaine de définition \mathbb{R}^2 .

La représentation graphique d'une fonction de deux variables est donc en 3-dimensions !, en fait dans l'espace \mathbb{R}^3 de coordonnées (x, y, u) ; on choisira pour axe des u l'axe vertical. Par exemple le graphe de la fonction $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est l'hémisphère Nord, i.e. les points (x, y, u) qui satisfont à $x^2 + y^2 + u^2 = 1$ et $u > 0$.

Il est important de noter qu'on se réserve la possibilité de changer les *variables*, cela en fonction de la nature de la question étudiée. Par exemple dans

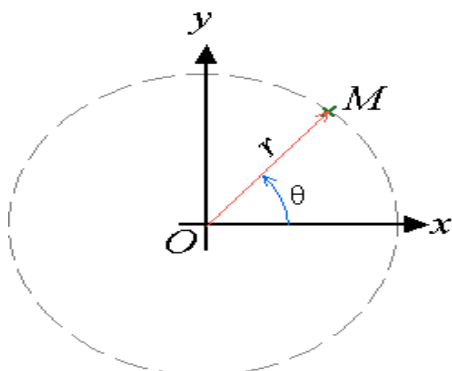


FIG. 2.2 – Les coordonnées polaires

le plan euclidien, il est parfois plus pertinent de passer aux coordonnées *polaires* ρ, θ . Elles sont reliées aux coordonnées cartésiennes par

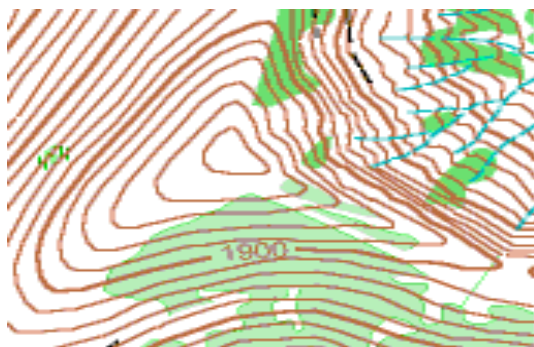
$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$$

en sens inverse, on notera les relations

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arg(x + iy) \in] -\pi, \pi[$$

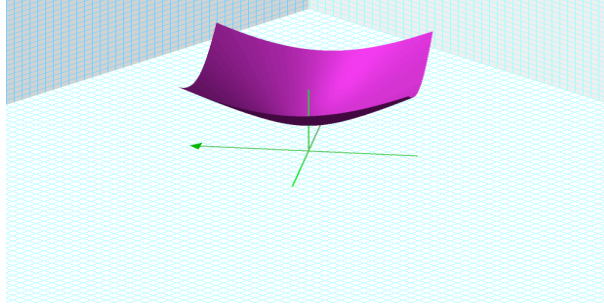
avec l'ennui que la seconde n'a de sens que si $x + iy \notin \mathbb{R}_<$! Comme exemple, la fonction $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ exprimée au moyen des coordonnées polaires est $u = \sqrt{1 - \rho^2}$.

Courbes de niveau

FIG. 2.3 – Courbes de niveau projetées sur le plan xy

Il est souvent instructif pour avoir une idée du graphe de $u = f(x, y)$, de préciser les *courbes de niveau*, qui sont les courbes (tracées sur le graphe) section du graphe par le plan $u = \text{constante} = k$. Donc après projection dans le plan (x, y) , les courbes $f(x, y) = k$. Par exemple dans le cas de $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

les courbes de niveau sont les cercles $x^2 + y^2 = 1 - k$, si $0 \leq k \leq 1$. Soit par exemple la fonction $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$ définie sur \mathbb{R}^2 . On note que $z \geq 1$, et que $z^2 = x^2 + y^2 + 1$. La courbe de niveau $z = k > 1$ est un cercle de centre $(0, 0, k)$ et de rayon $\sqrt{k^2 - 1}$.



2.1.1 Fonctions vectorielles, Composition

La composition des fonctions relève du schéma général de la composition des applications ; c'est une opération très importante qu'il importe de bien comprendre. Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, on doit voir les choses de la manière suivante. Soit une fonction f de deux variables x, y définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$. Donnons nous deux fonctions $g_1(\xi, \nu), g_2(\xi, \nu)$ des variables ξ, ν définies simultanément sur le domaine $V \subset \mathbb{R}^2$ (il est obligatoire de ne pas mélanger les variables x, y , avec les variables ξ, ν). On fait l'hypothèse que pour tout $(\xi, \nu) \in V$, alors $(g_1(\xi, \nu), g_2(\xi, \nu)) \in U$, soit

$$V \xrightarrow{g_1, g_2} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

On peut alors définir la fonction *composée* de variables (ξ, ν) et définie sur V :

$$(\xi, \nu) \mapsto f((g_1(\xi, \nu), g_2(\xi, \nu)))$$

On retient cette opération en disant que les variables x, y sont considérées comme des fonctions $x = g_1(\xi, \nu), y = g_2(\xi, \nu)$, des "nouvelles variables" ξ, ν , donnant par substitution la fonction composée. A ce stade il est commode de voir le couple $g = (g_1, g_2)$ comme définissant une fonction *vectorielle* à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^2$. Les fonctions g_1, g_2 sont les composantes de g . On écrit alors le fonction composée $f \circ g$.

Exemple 2.1.6. $g_1(\xi, \nu) = \xi + \nu, g_2(\xi, \nu) = \xi - \nu, f(x, y) = x^2 - y^2$, alors $(f \circ g)(\xi, \nu) = \xi\nu$.

La généralisation à un nombre de variables arbitraire ne pose pas de difficulté. On se donne n fonctions de p variables, définies sur le même domaine $V \subset \mathbb{R}^p, g_i(\xi_1, \dots, \xi_p)$ ceci pour $(i = 1, \dots, p)$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables (x_1, \dots, x_n) . Si notant $g = (g_1, \dots, g_n)$ la fonction vectorielle de composantes les g_i , on a $g(V) \subset U$, on peut alors définir la fonction composée $f \circ g$; elle est définie sur V , et

$$(f \circ g)(\xi_1, \dots, \xi_p) = f(g_1(\xi_1, \dots, \xi_p), \dots, g_n(\xi_1, \dots, \xi_p))$$

Un cas particulier un peu stupide revient à privilégier certaines variables parmi les n , et à supposer les autres constantes. Cela s'écrit par exemple, si on ne conserve que les variables x_1, \dots, x_p , et donc $x_{p+1} = a_{p+1}, \dots, x_n = b_n$, constantes :

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p, a_{p+1}, \dots, a_n)$$

Il est courant que l'on transforme une fonction de n variables en une fonction d'une seule variable, disons t , par un changement linéaire. On se donne $a \in U, h \in \mathbb{R}^n$, alors on forme la fonction (composée)

$$t \mapsto f(a + th)$$

Elle est définie sur l'intersection de la droite d'équation paramétrique $x = a + th$, avec U .

Exercices

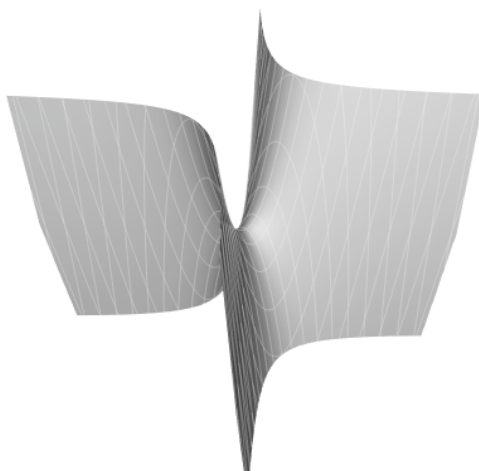
1. Prouver que le rectangle "ouvert" $R =]a, b[\times]c, d[\subset \mathbb{R}^2$ est une partie ouverte.
2. Préciser et dessiner le domaine de définition pour les fonctions suivantes :

$$u = \log(x^2 - y^2), \quad u = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$$

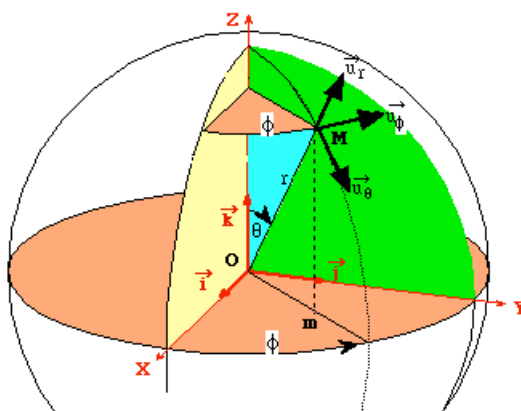
Justifier le fait que ce sont des parties ouvertes.

3. Montrer que le carré "fermé" $F = [0, 1] \times [0, 1]$ est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .
4. Dessiner le graphe de la fonction $u = x^2 - y^2$ (selle de cavalier).

Solution :



5. Quel est le domaine de définition de la fonction $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$? Quelle relation à t'on entre cette fonction et la fonction $\arg(x + iy)$?
6. Prouver que les courbes de niveau de $u = x^2 - y^2$ sont des hyperboles équilatères.
7. Expliciter les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de \mathbb{R}^3 en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ) (voir figure de dessous pour la définition).



2.2 Continuité

On se limite aux fonctions de deux variables, le cas général étant formellement identique. Soit une fonction $f(x, y)$ définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$. En général U sera un sous-ensemble ouvert, ce qui signifie (rappel) que pour tout $(a, b) \in U$, on peut trouver un réel $\alpha > 0$, tel que le disque ouvert de centre (a, b) et de rayon α est inclus dans U , soit

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \alpha \implies (x, y) \in U$$

En prélude à la définition de la continuité, il y a le concept de *limite* ; la définition est bien connue dans le cas d'une variable (!!). Elle s'étend directement à plusieurs variables (harmonie des Mathématiques!). Soit $a \in U$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - \ell\| = 0$$

Donc avec des ϵ, α, \dots , on a une définition très "compacte" :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, x \in U, \|x - a\| < \alpha \implies \|f(x) - \ell\| < \epsilon}$$

La définition de la continuité en un point est heureusement modélée sur le cas d'une variable.

Définition 2.2.1. 1. La fonction f est continue en $(a, b) \in U$ si pour tout réel $\epsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que si $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \alpha$, d'une part $(x, y) \in U$, et d'autre part $|f(x, y) - f(a, b)| < \epsilon$.

2. Si f est continue en tout point de U , on dit que f est continue sur U .

Notons le disque ouvert de centre (a, b) et de rayon α par $D_\alpha(a, b)$. Alors la condition 1) s'exprime par $D_\alpha(a, b) \subset U$, et

$$f(D_\alpha(a, b)) \subset]f(a, b) - \epsilon, f(a, b) + \epsilon[$$

Remarque. On peut remplacer la condition $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \alpha$ par la condition $|x-a| < \alpha$ et $|y-b| < \alpha$, le justifier.

Exemple 2.2.2. 1. Montrons que la fonction $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ est continue en $(0, 0)$ (en fait elle est continue en tout point de \mathbb{R}^2). Il est connu que $\log(1 + h) \leq h$ pour tout $h \geq 0$. Dès lors $|f(x, y)| \leq x^2 + y^2$ qui montre que dans cet exemple on peut prendre $\alpha = \epsilon$.

2. Un contreexemple : soit la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Il n'y a pas continuité en $(0, 0)$. On a en effet $f(x, 0) - 1 = 0$ pour tout x , mais par contre $f(0, y) - 1 = -2$ pour tout $y \neq 0$. Il est visible!! que ce dernier point contredit l'hypothèse de continuité.

La généralisation à un nombre fini arbitraire ($= n$) de variables est comme suit :

Définition 2.2.3. Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, où $U \subset \mathbb{R}^n$, donc de variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ (il est commode de remplacer les n variables par une notation vectorielle). La fonction f est continue en $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|x - a\| < \alpha \implies x \in U \text{ et } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Si f est continue en tout point de U , alors f est dite continue sur U . On notera que comme d'habitude f continue en a est équivalent à $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si $g = (g_1, \dots, g_n)$ est une fonction vectorielle de p variables, définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et donc à valeurs dans \mathbb{R}^n , on dira qu'elle est *continue* si les n fonctions composantes g_j ($1 \leq j \leq n$) le sont. Le théorème suivant est essentiel, car il permet de prouver la continuité des fonctions dans de nombreux cas.

Théorème 2.2.4. Soit une fonction continue de n variables $f : V \rightarrow \mathbb{R}$; soit aussi $g = (g_1, \dots, g_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle continue de p variables. On suppose que $g(U) \subset V$. Alors la fonction composée (qui est définie) $f \circ g$ est continue.

Démonstration : La preuve est identique aux notations près, à celle connue des fonctions d'une variable. Exprimons la continuité de f au point $b \in V$ tout d'abord. On se donne $\epsilon > 0$, alors il lui correspond $\alpha > 0$ tel que $B_\alpha(b) = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y - b\| < \alpha\} \subset V$ (boule ouverte), et

$$\|y - b\| < \alpha \implies |f(y) - f(b)| < \epsilon$$

On suppose que $b = g(a)$, $a \in U$. Exprimons de même la continuité de g en a . On prend pour " ϵ ", $\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, alors il lui correspond $\beta > 0$ tel que pour tout j ,

$$\|x - a\| < \beta \implies |g_j(x) - g_j(a)| < \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$$

Il en résulte que sous ces conditions on peut écrire

$$\|g(x) - g(a)\| = \sqrt{\sum_j |g_j(x) - g_j(a)|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha^2}{n}} = \alpha$$

Donc si $\|x - a\| < \beta$, par addition des deux inégalités on a :

$$|f(g(x)) - b| < \epsilon$$

ce qui traduit la continuité de $g \circ f$ en tout $a \in U$, et donc sur U . \square

Remarque. Si f et g sont des fonctions continues sur U , il en est de même de $\alpha f + \beta g, fg, f^r g^s$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $r, s \in \mathbb{N}$.

Si f et g sont continues sur U , et si $g(x) \neq 0, \forall x \in U$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur U .

Exemple 2.2.5. Montrons que la fonction $f(x, y)$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$. En un point autre que $(0, 0)$, on peut voir f comme composée de $(u, v) \mapsto \frac{u}{v}$ (définie en dehors de $v = 0$), et de $u = x^2 + xy + y^2, v = x^2 + y^2$. Il suffit alors de prouver que $(u, v) \mapsto \frac{u}{v}$ est continue en tout point (a, b) tel que $b \neq 0$. Cela découle de la remarque 1.1.1, on en donne ci-dessous une preuve directe. On a

$$\frac{u}{v} - \frac{a}{b} = \frac{(u-a)b - a(v-b)}{bv}$$

Donc si $(u-a)^2 + (v-b)^2 < \alpha$, et si $\alpha \leq \frac{b}{2}$, on a

$$\left| \frac{(u-a)b - a(v-b)}{bv} \right| < \frac{\sqrt{\alpha} (|a| + |b|)}{b^2/2}$$

Il suffit pour conclure de choisir α tel que $\frac{\sqrt{\alpha} \sup(|a|, |b|)}{b^2/2} < \epsilon$

Montrons que la continuité en un point peut être caractérisée en termes de suites convergentes. Rappelons qu'une suite ξ_k de \mathbb{R}^n converge vers $\xi \in \mathbb{R}^n$ si $\|\xi_k - \xi\| \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$. Alors

Théorème 2.2.6. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, et $a \in U$. La fonction f est continue en a ssi pour toute suite $\xi_k \in U$, avec $\xi_k \rightarrow a$, alors $f(\xi_k) \rightarrow f(a)$.

Démonstration : Supposons f continue en a . Soit $\epsilon > 0$, d'où on tire l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que $\|x - a\| < \alpha, x \in U \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Il existe k_0 tel que si $k \geq k_0$ alors $\|\xi_k - a\| < \alpha$. Donc $|f(\xi_k) - f(a)| < \epsilon$, en d'autres termes $f(\xi_k) \rightarrow f(a)$.

Prouvons la réciproque. On raisonne par l'absurde, donc on suppose que f n'est pas continue en a . Ainsi pour un certain $\epsilon > 0$, et pour tout $k \geq 1$, il existe $\xi_k \in U$ tel que $\|\xi_k - a\| < \frac{1}{k}$ et $|f(\xi_k) - f(a)| > \epsilon$. Mais la suite ξ_k converge vers a , donc l'hypothèse nous dit que $f(\xi_k)$ doit converger vers $f(a)$, ce qui est absurde, vu que $|f(\xi_k) - f(a)| > \epsilon$ pour tout k . \square

Une caractérisation élégante de la continuité qui évite un usage intensif des " ϵ " est :

Proposition 2.2.7. Une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (U ouvert de \mathbb{R}^n) est continue ssi pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n (contenu dans U).

Démonstration : C'est en fait une reformulation de la définition. Il suffit de prouver l'assertion si V est une boule ouverte de \mathbb{R}^m , car par définition un ouvert est une réunion de boules ouvertes. Mais dans ce cas c'est exactement ce que dit la définition. Dans le cas général, $V = \cup_{i \in I} B_i$ est une réunion (finie ou non) de boules ouvertes, et $f^{-1}(V) = f^{-1}(B_i)$ est donc une partie ouverte! \square

Le théorème suivant est une extension du résultat analogue pour une variable, la preuve pourra faire le thème d'un d'exercice en T.D. Une partie *fermée bornée* $C \subset \mathbb{R}^n$, sera (définition provisoire) une partie qui est définie par un nombre fini d'inégalités larges, et qui est bornée (contenue dans une boule de rayon fini).

Théorème 2.2.8 (Weierstrass). *Soit une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de domaine de définition $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit C une partie fermée et bornée (on dit alors compacte) de \mathbb{R}^n telle que $C \subset U$. Alors $\sup_{(x \in C)} f(x)$ existe, et ce maximum est atteint en un point au moins de C .*

Démonstration : On va utiliser le fait que ce résultat fondamental est connu si $n = 1$ (cours L1). Montrons d'abord l'existence d'un maximum, i.e $\sup_{x \in C} f(x) = M < \infty$. Supposons le contraire, donc $M = \infty$. cela veut dire qu'il existe une suite de points de C , notée $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ telle que $f(x^k) \rightarrow \infty$ (la fonction est non bornée!). Examinons la suite formée par les premières coordonnées, donc $(j \rightarrow x_j^k)$. Comme c'est une suite bornée (hypothèse), on sait qu'il existe une sous-suite de cette suite qui est convergente!, disons vers $a_1 \in \mathbb{R}$. Quitte à considérer la sous-suite de la suite initiale (x^k) , relative à ces nouveaux indices, on peut sans perte de généralité supposer que $x_1^k \rightarrow a_1$. On procède de la même manière avec la suite (x_2^k) , etc. Donc finalement on peut se ramener à la situation favorable telle que pour tout indice $1 \leq j \leq n$, on $x_j^k \rightarrow a_j \in \mathbb{R}$.

Mais la partie C étant fermée, la limite a reste dans C . De plus f est continue en a , et de la définition résulte que $f(x^k) \rightarrow f(a)$ donc on doit avoir $M = f(a) = \infty$ ce qui est absurde!

Montrons que la borne supérieure est atteinte en un point de C . Dans le cas d'une variable, c'est un résultat (fondamental) connu. Dans le cas de plusieurs variables, le raisonnement qui précède, donne de fait le résultat, car $x^k \rightarrow a \in C$, et par continuité de f , on peut affirmer que $f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = M$. \square

En raisonnant avec $-f$, on prouve que $\inf_{x \in C} f(x) = -\sup_{x \in C} (-f(x))$ existe et est atteint en un point au moins de C .

Exercices

1. La définition de la continuité est-elle perturbée si on remplace $<$ par \leq dans l'énoncé? La fonction de l'exemple de dessus est-elle continue en $(0, 0)$?

Solution : on va faire tendre (x, y) vers $(0, 0)$ dans une direction donnée, cela signifie qu'on prend $y = hx$, et qu'on fait tendre x vers zéro, de sorte que $(x, hx) \rightarrow$

$(0, 0)$. On note que $f(x, hx) = \frac{1 + h + h^2}{1 + h^2}$, expression qui ne dépend pas de x .

La continuité en $(0, 0)$ force à avoir $\frac{1 + h + h^2}{1 + h^2} = 1$, contrainte vérifiée que si $h = 0$. Il n'y a donc pas continuité en $(0, 0)$.

2. Prouver avec des epsilon l'affirmation de la remarque 1.3, à savoir que si f et g sont continues sur U , et si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$, alors $\mapsto \frac{f}{g}$ est continue sur U .

3. Soit C le segment de droite de \mathbb{R}^2 , donné par $x + y = 1, x, y \geq 0$. Montrer que c'est une partie fermée bornée. Trouver la borne supérieure de $f(x, y) = xy$ sur C .

Solution : Posons $x = t + \frac{1}{2}$, de sorte que $f(x, y) = x(1 - x) = t^2 - \frac{1}{4}$. On est amené à trouver la borne supérieure de la fonction $g: t \rightarrow t^2 - \frac{1}{4}$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Le graphe de la fonction $g(t)$ est une parabole "renversée", la borne supérieure = maximum est atteinte au sommet, point d'abscisse $t = 1$, soit $x = \frac{1}{2}$. Donc : le rectangle de périmètre fixé d'aire maximum est le carré

2.3 Dérivabilité

2.3.1 Dérivées partielles

Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, supposée définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$.

Définition 2.3.1. 1) On appelle *dérivée partielle* par rapport à la i -ème variable de f en a , et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (on rencontre aussi la notation $f_{x_i}(a)$), la dérivée en a_i (si elle existe) de la fonction de la seule variable x_i , $x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$, ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h}$$

2) Plus généralement, on appelle dérivée partielle de f dans la *direction du vecteur* h , la dérivée (si elle existe) de la fonction $t \mapsto f(a + th)$ en $t = 0$. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ correspond à $h = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 1 en position i . La dérivée partielle dans la direction de h , au point a , est notée

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a)$$

on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a + th)$$

Exemples 2.3.2. Pour calculer une dérivée partielle en la variable x_i , on considère dans le calcul les autres variables comme des *constantes*, ce qui traduit le fait que

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

1) $f(x, y, z) = (x + y)^2$; alors $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + y)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

2) Soit $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$; elle est définie pour $x \neq y$. Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

3) Soit la fonction $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4y}}$. Elle est définie sur le demi-plan $y > 0$. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{-(x-1)}{2y} e^{-\frac{(x-1)^2}{4y}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{-1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-1)^2}{4y^{5/2}} \right) e^{-\frac{(x-1)^2}{4y}}$$

2.3.2 Dérivabilité

Rappelons que pour une fonction d'une variable $x \mapsto f(x)$, définie sur I , la dérivée de f en $x = a$ lorsqu'elle existe est caractérisée par le fait que pour $h \rightarrow 0$:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + o(|h|)$$

ou encore de manière symbolique $\delta f = f'(a)\delta x + o(\delta x)$. Rappelons que le symbole $o(h)$ signifie que ce terme est *négligeable* devant l'expression qui précède. De manière précise :

$$\varphi(h) =_{(h \rightarrow 0)} o(h) \iff \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

En particulier l'existence de la dérivée en a implique de facto la continuité en a . Cela n'est plus totalement vrai en plusieurs variables, si on se limite à la seule existence des dérivées partielles (voir exercice ci-dessous)

Le concept de dérivée partielle fait référence à un système de variables fixé. Une notion plus intrinsèque et donc plus utile, la *différentiabilité*, est la suivante :

Définition 2.3.3. Une fonction $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ de domaine de définition $U \subset \mathbb{R}^n$ est dite différentiable (on dit aussi dérivable) en $a \in U$, si pour $\|h\| \rightarrow 0$, il existe n réels p_1, \dots, p_n , avec

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n p_i h_i = o(\|h\|)$$

Les p_i sont uniques, et l'application linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h \mapsto \sum_{i=1}^n p_i h_i$ est appelée la différentielle de f en a .

On retiendra le sens de la définition :

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Si f est différentiable en tout point de U , on dit qu'elle est différentiable (sur U). Dans ce cas on doit voir les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ comme des fonctions définies sur U .

De cette définition on tire immédiatement les **règles de calcul** suivantes :

$$\begin{aligned} d_a(\lambda f + \mu g) &= \lambda d_a f + \mu d_a g \\ d_a f g &= f(a) d_a g + g(a) d_a f \\ \text{Si } g(a) \neq 0, d_a \left(\frac{f}{g} \right) &= \frac{g(a) d_a f - f(a) d_a g}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

Dérivabilité implique continuité :

Théorème 2.3.4. Si f est différentiable en a , alors f est continue en a , de plus les dérivées partielles existent et on a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = p_i$; plus généralement la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$ existe et

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \sum_{i=1}^n p_i h_i = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Démonstration : La définition de la différentiabilité montre clairement que si $h \rightarrow 0$, alors $f(x) \rightarrow f(a)$, du fait que la différence $f(x) - f(a)$ qui s'exprime $\sum_i p_i h_i + o(\|h\|)$ se majore en valeur absolue par (penser à l'inégalité de C.S)

$$\|p\| \|h\| + o(\|h\|)$$

expression qui tend vers zéro!!

Il suffit de traiter la dérivée directionnelle, vu que les dérivées partielles sont des cas particuliers. On effectue la substitution $h \mapsto th$ ($t \in \mathbb{R}$), h fixé, dans la définition. Il est clair que si $t \rightarrow 0$, alors

$$f(a + th) - f(a) = \sum_{i=1}^n p_i h_i + o(t)$$

La définition usuelle de la dérivée d'une variable donne la conclusion. \square

Question : comment peut-on garantir qu'une fonction est différentiable en un point donné!?

Il y a une réponse (assez) facile à tester.

Théorème 2.3.5. *Sous les hypothèses de dessus, si d'une part les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent dans un voisinage de a dans U (veut dire pour un certain $\alpha > 0$, pour tout $x \in U$, $\|x - a\| < \alpha$), et sont continues au point a , alors f est différentiable en a .*

Avant de donner la preuve d'abord un

Rappel : (La formule des accroissements finis) Soit une fonction $f(x)$ de la variable x , définie et continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur $]a, b[$. Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.

Preuve du théorème 2.3.5. La preuve demande un peu de concentration, et on remarquera qu'il suffit de supposer toutes les dérivées partielles continues sauf au plus une. On n'aura pas à retenir ce raffinement. La preuve est rédigée avec deux variables pour alléger, mais elle est générale. Les notations sont adaptées au cas de deux variables, et faciles à généraliser. On peut écrire la variation de f sous la forme

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) + f(a, b + k) - f(a, b)$$

Supposons par exemple que $\frac{\partial f}{\partial x}$ soit définie continue dans un voisinage de a dans U . Par définition de la dérivabilité en x , non seulement au point (a, b) , mais sur tout une boule de centre (a, b) ($=$ pour $\sqrt{h^2 + k^2}$ petit), on peut utiliser la formule des accroissements finis pour la fonction de la variable x , avec $y = b + k$ fixé. Cela donne

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + k)$$

pour un certain θ , $0 \leq \theta \leq 1$.

Comme la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie continue sur un voisinage de (a, b) , on peut supposer qu'elle est définie continue en tout $(a + th, b + k)$, $0 \leq t \leq 1$. Cela nous autorise à écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + o(1)$$

Le terme résiduel $o(1)$ signifiant une fonction qui tend vers zéro si $\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$. On a aussi par définition de la dérivée partielle

$$f(a, b + k) - f(a, b) = k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + o(|k|)$$

Par addition des deux expressions on obtient

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + h \circ (1) + \circ(k)$$

Comme il est clair que l'expression $h \circ (1) + \circ(k)$ est de la forme $\circ(\sqrt{h^2 + k^2})$, on a exactement le résultat souhaité (On utilise $|h|, |k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$). \square

On sait que la règle de calcul la plus utile lors des opérations de dérivation est la règle donnant la dérivée d'une fonction composée. Cette règle s'étend au cas de plusieurs variables, et en fait diffère peu dans sa formulation du cas d'une variable. Le résultat est important. On considère la situation rencontrée au-dessus, soit

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}, g = (g_1, \dots, g_n), U \subset \mathbb{R}^p$$

On suppose que $a \in U, b = g(a) \in V$, et que f et g sont différentiables en b (resp. a).

Théorème 2.3.6. *La fonction composée $f \circ g : V \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a . Sa différentielle est* $d(f \circ g)_a = df_b \circ dg_a$.

En d'autres termes on a les formules de dérivation des fonctions composées ($u = f(y), y_i = g_j(x)$) :

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)$$

Démonstration : Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la preuve est conceptuellement aisée. Si $h \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}^p$ sont de norme petite, alors on peut écrire (= définition)

$$f(b+k) = f(b) + df_b(k) + \alpha(k), \alpha(k) = \circ(\|k\|)$$

et de même $g(a+h) = g(a) + dg_a(h) + \beta(h), \beta(h) = \circ(\|h\|)$. Pour simplifier posons

$$\nabla_g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_p}(a) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Examinons le terme $\gamma(h) = dg_a(h) + \beta(h) = \nabla_g \cdot h + \beta(h)$ ($\nabla_g \cdot h$ est le produit scalaire). L'inégalité de C.S donne

$$|dg_a(h)| \leq \|\nabla_g\| \|h\|$$

Ce terme tend donc vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$, de manière précise, $\gamma(h) = \|h\|O(1)$. On revient à la première expression, dans laquelle on prend $k = \gamma(h)$, de sorte que $g(a+h) = b+k$. Alors on trouve par substitution

$$\begin{aligned} (f \circ g)(a+h) &= f(b+k) = df_b(dg_a(h) + \beta(h)) + \alpha(\gamma(h)) \\ &= df_b(dg_a(h)) + df_b(\beta(h)) + \alpha(\gamma(h)) \end{aligned}$$

Pour conclure, il faut vérifier que le terme $df_b(\beta(h)) + \alpha(\gamma(h))$ est un $\circ(h)$. C'est une somme de deux termes, qui sont tous deux des $\circ(h)$. Le premier par l'inégalité de C.S

$$\|df_b(\beta(h))\| \leq \|\nabla_f\| \|h\|$$

le second par définition de α et de ce qu'on a dit sur γ . En comparant on a bien le résultat souhaité

$$d(f \circ g)_a(h) = df_b(dg_a(h))$$

□

Exemple 2.3.7. Soit la fonction $\varphi(x, y, z) = \sqrt{1 + \sin(x+y)^2 + \sin(y+z)^2}$. Elle est définie sur \mathbb{R}^3 . On la regarde comme une fonction composée de la manière suivante

$$\varphi : (x, y, z) \mapsto (u, v) = g(x, y, z) \mapsto w = f(u, v)$$

On a donc

$$u = g_1(x, y, z) = \sin(x+y), \quad v = g_2(x, y, z) = \sin(y+z), \quad w = f(u, v) = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$$

Calculons les dérivées partielles respectives (on peut voir f comme une fonction composée aussi) :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$$

et aussi en utilisant la notation abrégée ($u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$)

$$u_x = \cos(x+y), \quad u_y = \cos(x+y), \quad u_z = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = \sin(y+z), \quad v_z = \cos(y+z)$$

Donc

$$\phi_x = f_u u_x + f_v v_x = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \cos(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\sqrt{1 + \sin(x+y)^2 + \sin(y+z)^2}} \cos(x+y).$$

Les autres sont laissées en exercice.

Exemple 2.3.8. Soit la fonction déterminant $f(x_{ij}) = \det(x_{ij})$, donc définie sur \mathbb{R}^{n^2} . On va prouver que la différentielle de f au point 1_n (matrice identité) est la forme linéaire trace :

$$d(\det)_1(h) = \text{Tr}(h).$$

Pour cela on développe $\det(1_n + h)$. Un peu d'observation montre que

$$\det(1_n + h) = \sum_i h_{ii} + O(\|h\|)$$

Le résultat en découle ! Il est possible de calculer la dérivée partielle $\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}$ au point 1_n , le résultat est δ_{ij} (symbole de Kronecker). (le faire comme exercice).

Gradient

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow R$ une fonction différentiable en $a \in U$ (resp. sur U).

Définition 2.3.9. Le vecteur

$$\text{grad}_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n$$

est appelé le *gradient* de la fonction au point a . Si la fonction est dérivable sur U , la fonction vectorielle $\text{grad} f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de composantes $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ est la fonction (mieux champ de vecteurs) gradient de f .

La différentielle de f en a admet l'expression suivante :

$$df_a(h) = \text{grad}_a(f) \cdot h \quad (\text{produit scalaire})$$

Exemple 2.3.10. 1) Soit la fonction $f(x, y, z) = xyz$ (volume d'un cube de côtés $x, y, z > 0$). On a

$$\text{grad} f = (yz, xz, xy)$$

2) Soit dans le plan un triangle ABC (non plat), et dont les côtés ont pour longueur a, b, c . Soit la fonction

$$f(a, b, c) = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Rappel : S est l'aire du triangle, et p le demi-périmètre. Cette fonction n'est pas définie sur \mathbb{R}^3 , car on sait qu'il y a des contraintes sur a, b, c , essentiellement la longueur d'un côté ne peut dépasser la somme des longueurs des deux autres. Donc l'ouvert de définition U de f est :

$$|b - c| < a < b + c, \quad a, b, c > 0$$

Exemple 2.3.11. On considère un point $\Omega \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées (a_1, \dots, a_n) . On pose $U = \mathbb{R}^n - \{\Omega\}$. On définit la fonction distance de $M \neq \omega$, qui si $M = (x_1, \dots, x_n)$ est

$$f(M) : f(x_1, \dots, x_n) = \|M\Omega\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

Il est facile de justifier que f est différentiable sur U . Son gradient en M admet une expression simple. En effet $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i - a_i}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}}$. Donc

$$\boxed{\text{grad} f(M) = \frac{\overrightarrow{\Omega M}}{\|\Omega M\|}}$$

et pour la différentielle :

$$df(M)(h) = \frac{(\overrightarrow{\Omega M}, h)}{\|\Omega M\|}$$

2.3.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Les dérivations partielles sont-elles permutables ?

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n -variables définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent dans un voisinage V de $a \in U$ (une boule ouverte par exemple). Si $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$ existe, on dira que cette dérivée itérée est la *dérivée partielle seconde* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$. Noter la position des indices qui indique dans quel ordre on effectue cette double dérivation. Si $i = j$, on écrit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

On peut inverser le rôle des deux indices, et si cette opération est définie, considérer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. Si $i \neq j$, il est possible que dans des cas marginaux

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

rendant le calcul des dérivées d'ordre supérieur problématique, i.e. dépendant de l'ordre des dérivations. Cependant le résultat suivant sauve la situation :

Théorème 2.3.12. *Sous les conditions précédentes, on suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent dans un voisinage de a , et sont différentiables en a . Alors on a l'égalité (dite théorème de Schwarz) :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \forall 1 \leq i, j \leq n$$

En particulier cela sera vrai si les dérivées partielles secondes existent dans un voisinage de a , et sont continues en a . On notera souvent f_{xy} , f_{xx} au lieu de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, etc

Exemple 2.3.13. Soit $f(x, y) = e^{xy}$. On $f_x = ye^{xy}$, $f_y = xe^{xy}$. Par suite

$$f_{yx} = e^{xy} - xye^{xy} = f_{yx}, f_{xx} = y^2 e^{xy}, f_{yy} = x^2 e^{xy}$$

Démonstration : Noter que l'hypothèse entraîne que les dérivées partielles f_{x_i} existent et sont continues dans un voisinage de a (différentiabilité \Rightarrow continuité), donc f est différentiable. Les dérivées partielles étant aussi des fonctions différentiables, la fonction est dite 2-fois différentiable au point a . Comme la propriété cherchée ne fait intervenir que deux variables, on peut sans perte de généralité se limiter à une fonction de deux variables $f(x, y)$. Soit alors la fonction définie pour $\|h\|$ petit :

$$\phi(h) = f(a+h, b+h) - f(a, b+h) - f(a+h, b) + f(a, b)$$

soit

$$\begin{array}{ccc} f(a, b+h) & \rightarrow & f(a+h, b+k) \\ \uparrow & & \uparrow \\ f(a, b) & \rightarrow & f(a+h, b) \end{array}$$

On en cherche le comportement si $h \rightarrow 0$; on va voir qu'il est gouverné par l'une ou l'autre des dérivées partielles secondes $f_{xy}(a, b)$, $f_{yx}(a, b)$, ce qui conduira à l'égalité. On peut écrire

$$\phi(h) = \varphi(a+h) - \varphi(a)$$

où $\varphi(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe dans un voisinage de (a, b) , donc φ est dérivable dans un voisinage de a , et par application de la formule des accroissements finis (on vérifiera que les hypothèses pour utiliser cette formule sont bien remplies), on peut écrire si $|h|$ petit

$$\phi(h) = h\varphi'(a+\alpha h)$$

pour un certain $\alpha \in]0, 1[$. Mais il est clair que

$$\varphi'(a+\alpha h) = f_x(a+\alpha h, b+h) - f_x(a+\alpha h, b)$$

On utilise maintenant la différentiabilité en (a, b) de f_x , cela conduit à :

$$f_x(a+\alpha h, b+h) = f_x(a, b) + \alpha h f_{xx}(a, b) + h f_{yx}(a, b) + o(h)$$

et aussi à $f_x(a+\alpha h, b) = f_x(a, b) + \alpha h f_{xx}(a, b) + o(h)$. Cela donne

$$\phi(h) = h\varphi'(a+\alpha h) = h^2 f_{yx}(a, b) + h o(h) = h^2 f_{yx}(a, b) + o(h^2)$$

Noter que d'une autre manière on peut écrire $\phi(h) = \psi(b+h) - \psi(b)$ avec $\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$. Le même raisonnement (on écrira les détails) conduit au résultat inversé

$$\phi(h) = h^2 f_{xy}(a, b) + h o(h)$$

Par comparaison $h^2(f_{xy}(a, b) - f_{yx}(a, b)) = o(h^2)$, $\Rightarrow f_{xy}(a, b) - f_{yx}(a, b) = \frac{o(h^2)}{h^2}$. Cela veut dire que le terme de droite tend vers zéro si $h \rightarrow 0$, donc forcément à la limite on a l'égalité

$$f_{xy}(a, b) - f_{yx}(a, b) = 0$$

C'est le résultat annoncé. \square

On peut itérer les dérivations partielles, sous réserve de leur existence.

Définition 2.3.14. Si $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$, on définit

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}, = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} \right)$$

On parle d'une dérivée partielle p -ième, ou d'ordre p . Avec un peu de concentration, il n'est pas difficile de se convaincre que

Théorème 2.3.15. *Si les dérivées partielles d'ordre p existent et sont continues au voisinage de a , alors la dérivée itérée*

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}$$

est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations partielles successives. On dit sous cette hypothèse que la fonction est de classe C^k .

Sous les conditions du théorème on est autorisé à noter

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

signifiant qu'on dérive i_1 fois en x_1, \dots, i_n fois en x_n . Les dérivations s'effectuent dans un ordre arbitraire.

Exemple 2.3.16.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial x \partial y \partial y}$$

Remarque. Quelques problèmes de notation : Une fonction de la forme

$$f(x, y) = \sum_{i, j} a_{i, j} x^i y^j$$

(somme finie) est appelée *fonction polynomiale* (ou polynôme). Un terme $x^i y^j$ est dit monôme de degré $i + j$. Plus généralement, une fonction de n variables $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ est appelée monôme de degré $i_1 + \dots + i_n$. Une fonction de la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

est dite fonction polynôme. Les $a_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{R}$ sont les coefficients de f ; on parle de la suite (i_1, \dots, i_n) comme d'un multi-indice, de degré $i_1 + \dots + i_n$.

Les dérivées partielles d'une telle fonction se calculent par une règle simple :

Proposition 2.3.17. On a si $1 \leq p \leq n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_p} (x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}) = i_p x_1^{i_1} x_{p-1}^{i_{p-1}} x_p^{i_p-1} x_{p+1}^{i_{p+1}} \dots x_n^{i_n}.$$

Exemple 2.3.18. $\frac{\partial}{\partial y} x^4 y^6 z^2 = 6x^4 y^5 z^2$

Proposition 2.3.19. Si $f(x) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$, on a

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}(0, \dots, 0) = i_1! \dots i_n! a_{i_1, \dots, i_n}$$

□

En particulier les coefficients d'une fonction polynôme sont déterminés de manière unique par la fonction. Il est commode d'utiliser pour un *multi-indice* la notation "compacte" $i = (i_1, \dots, i_n)$ et de poser $|i| = i_1 + \dots + i_n$, $i! = i_1! i_2! \dots i_n!$, et

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} = \frac{\partial^i f}{\partial x^i}$$

Définition 2.3.20. Supposons la fonction de n variables $f(x_1, \dots, x_n)$ définie sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'elle est k ($k \geq 2$) fois différentiable en $a \in U$, si d'une part elle est différentiable sur un voisinage de a (i.e. en les x tels que $\|x - a\|$ petit), et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont $(k-1)$ -fois différentiables en a . Elle est k -fois différentiable sur U , si elle l'est en tout point de U . On dit que f est k -fois continument dérivable sur U , si les dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre k , et sont des fonctions continues. Noter que k -fois continument dérivable \Rightarrow k -fois différentiable.

Formule de Taylor

La formule de Taylor pour les fonctions d'une variable s'étend à plusieurs variables. On note pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$.

Théorème 2.3.21. Supposons la fonction de n variables $f(x_1, \dots, x_n)$ définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$. On suppose qu'elle est $k+1$ fois différentiable dans un voisinage de a . Si $\|h\|$ est petit, alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a) h^\alpha + \sum_{|\beta|=k+1} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}(a+\theta h) h^\beta$$

Démonstration : On se limite au seul cas qui sera utilisé, à savoir l'ordre $k+1 = 2$. Notons que dans ce cas la formule s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h)$$

Pour mettre d'accord ces deux écritures, il faut simplement remarquer que si on se reporte aux notations :

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a+\theta h) h^\alpha$$

En effet la somme de droite porte sur les indices

$$(0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0) \text{ et } (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Posons

$$\varphi(t) = f(a + th) - f(a) - t \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Cette fonction est définie sur $[0, 1]$ si $\|h\|$ petit. On a $\varphi(0) = 0$, et par un calcul de dérivation de fonctions composées

$$\varphi'(t) = \sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) - \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

donc en $t = 0$, $\varphi'(0) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

La formule de Taylor (à l'ordre deux) pour la fonction d'une variable $\varphi(t)$, dit qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\varphi(1) = \frac{1}{2}\varphi''(\theta)$. Le calcul de $\varphi''(t)$ donne

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + th)$$

Le résultat en découle. Le cas général se prouve de la même manière. \square

Remarque. Si la fonction f est 2-fois continument dérivable en a (= dans un voisinage de a), alors si $\|h\|$ petit :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2)$$

Exemples 2.3.22. 1. Si f est de classe C^2 en $(0, 0)$, on peut écrire de manière condensée

$$f(x, y) = f(0, 0) + px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2 + y^2)$$

avec $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, \dots , $t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$. On utilisera cette expression pour l'examen des extrema.

2. La formule du binôme admet une généralisation

$$f(x) = (x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{p_1 + \dots + p_n = k} \frac{k!}{p_1! p_2! \dots p_n!} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$$

On retrouve dans cette formule le fait que les dérivées partielles en 0 d'ordre $p \leq k$ de $f(x)$ sont nulles, sauf si $p = k$, alors $\frac{\partial^k f}{\partial^{i_1} x_1 \partial^{i_2} x_2 \dots \partial^{i_n} x_n}(0, \dots, 0) = k!$.

3. A titre d'exemple, on va expliciter la partie quadratique dans la formule de Taylor pour la fonction distance de M à un point fixe Ω (voir exemple 3.5). On a $f(M) : f(x_1, \dots, x_n) = \|M\Omega\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$, et la différentielle est $df(M)(h) = \frac{(\overline{\Omega M}, h)}{\|\overline{\Omega M}\|}$. On veut évaluer l'expression

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) h_i h_j$$

On a $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i - a_i}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}}$, donc si $i \neq j$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = -\frac{(x_j - a_j)(x_i - a_i)}{\|\Omega M\|^3}$$

et si $i = j$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M) = \frac{\|\Omega M\|^2 - (x_i - a_i)^2}{\|\Omega M\|^3}$$

En conclusion

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) h_i h_j = \frac{\|\Omega M\|^2 \|h\|^2 - (\overrightarrow{\Omega M}, h)^2}{\|\Omega M\|^3}$$

Fonctions implicites

Soit une fonction $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ définie et différentiable sur $U \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a souvent besoin de résoudre l'équation en la variable x_{n+1} , d'inconnues x_1, \dots, x_n ,

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$$

De manière précise, on se donne $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, avec $(a, b) \in U$, et $f(a, b) = 0$. On cherche une fonction $\phi(x_1, \dots, x_n)$ définie dans un voisinage de a , telle que

$$\phi(a) = b, \quad f(x, \phi(x)) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

On dit que la fonction $\phi(x)$ est donnée *implicitement* par l'équation $f = 0$.

Exemple 2.3.23. Soit $n = 1$, et $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Si $a = 0, b = 1$, on peut prendre $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Si $a = 0, b = -1$, on prend $\phi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

On ne cherchera pas à donner des conditions d'existence de la fonction ϕ , mais seulement à faire un peu d'expérimentation sur de telles fonctions.

Théorème 2.3.24. Avec les notations de dessus, supposons que $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a, b) \neq 0$. Alors *i) (existence) Il existe $r > 0$, et une solution $\phi(x)$ définie pour $\|x - a\| < r$, $\phi(a) = b$. ii) La différentielle de ϕ est :*

$$d\phi_a(h_1, \dots, h_n) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a, b)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) h_i \right)$$

Démonstration : On part de l'égalité $f(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)) = 0$ supposée satisfaite dans un voisinage de a . On dérive par rapport à x_i , ($1 \leq i \leq n$), au point a . la règle de dérivation des fonctions composées donne :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a, b) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(a)$$

Donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a, b)}$$

Le résultat en découle. □

Si $n = 1$, et en écrivant l'équation $f(x, y) = 0$, la formule de dessus donne $\phi'(a) = -\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$.

Exemple 2.3.25 (du cercle à la sphère). Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. On a $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 2c$. Donc si $c \neq 0$, on peut résoudre l'équation implicite $f(x, y, z) = 0$ au voisinage de (a, b) . Si $c > 0$, la solution est $z = \varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Elle est définie si $(x - a)^2 + (y - b)^2 < 1$. L'interprétation géométrique d'une telle fonction est de donner une représentation paramétrique de la sphère unité de centre l'origine, au voisinage du point (a, b, c) . On y reviendra dans la section suivante.

Exercices

1. Soit la fonction $f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 1$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ bien que f ne soit pas continue en $(0, 0)$. La dérivée en $(0, 0)$ dans la direction de $(1, 1)$ existe-t-elle ?
2. Soit la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 1$. Elle est continue partout mais n'est pas continue en $(0, 0)$. Rappelons la raison : si on fait $y = x \neq 0$, on a $f(x, x) = \frac{3}{2}$ donc $f(x, x)$ ne converge pas vers 1 si $x \rightarrow 0$. Cependant on a $f(x, 0) = 1$ pour tout x , donc $f_x(0, 0) = 0$, et de même $f_y(0, 0) = 0$. Ces dérivées partielles existent en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 . Par exemple en $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f_x(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si on fait $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, on a $f_x(x, y) = \frac{\cos \theta \cos(2\theta)}{\rho}$. Si pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ fixé, on fait $\rho \rightarrow 0$, on voit que le résultat ne converge pas vers 0. La fonction est pour de multiples raisons (!) non différentiable en $(0, 0)$.

3. Soit la fonction définie si $p \in \mathbb{N}$ sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = y^p \sin \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0, = 0 \text{ si } y = 0$$

Pour quelles valeurs de p cette fonction est i) continue sur \mathbb{R}^2 . ii) différentiable iii) de classe C^1 .

4. Soit $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 + x^3 y^3 + y^3 z^3 + x^3 z^3$. Vérifier que $6f(x, y, z) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}$.
5. Montrer que la fonction $u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{x-t-a}{2}\right)^2}$ est solution de l'équation (Kdv) $\partial_t u + \partial_{xxx}^3 u - 6u \partial_x u = 0$.
6. (Utilisation des coordonnées polaires) Soit la fonction (changement de variables)

$$\phi: (r, \theta) \mapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$

définie sur \mathbb{R}^2 , mais inversible seulement sur un ouvert $]0, \infty[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Soit une fonction différentiable $f(x, y)$, alors on obtient pour les dérivées partielles $\frac{\partial f \circ \phi}{\partial r}, \frac{\partial f \circ \phi}{\partial \theta}$ (en notation abrégée)

$$f'_r = \frac{\partial f}{\partial r} = f'_x \cos \theta + f'_y \sin \theta, \quad f'_\theta = -r f'_x \sin \theta + r f'_y \cos \theta$$

Soit une fonction différentiable sur \mathbb{R}^2 telle que

$$y f'_x = x f'_y$$

Montrer qu'il existe une fonction $g(r)$ (dérivable) telle que $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$.
Indication : utiliser la remarque 2.1.

7. Calculer la fonction gradient pour la fonction S (Aire d'un triangle) donnée ci-dessus. Réponse : $S'_a = \frac{2ap^2 - abc}{4\sqrt{S}}$, $S'_b = \frac{2bp^2 - abc}{4\sqrt{S}}$, $S'_c = \frac{2cp^2 - abc}{4S}$

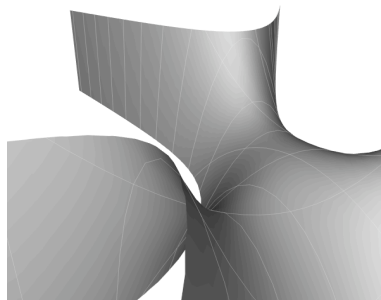


FIG. 2.4 – Graphe de la fonction aire

8. (Equation des cordes vibrantes) Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 au moins, qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Montrer que relativement aux variables $\xi = x - y$, $\eta = x + y$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

En déduire qu'il existe des fonctions d'une variable φ, ψ de classe C^2 au moins telles que $f(x, y) = \varphi(x - y) + \psi(x + y)$.

2.4 Points stationnaires et problèmes d'extremum

On fixe une fonction différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.4.1. i) Le point $a \in U$ est dit *stationnaire* si $df_a = 0$, ou de manière équivalente $\text{grad}_a(f) = 0$, ou encore $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = 1, \dots, n$.

ii) On dit que f a en a un maximum local (resp. minimum) si pour un certain $r > 0$

$$\|x - a\| < r \implies x \in U \implies f(x) \leq f(a) \text{ (resp. } f(x) \geq f(a))$$

En complète analogie avec le cas d'une variable, on a l'implication suivante :

Proposition 2.4.2. Si $a \in U$ correspond à un extremum (max ou min) local, alors a est stationnaire ($df_a = 0$).

Démonstration : On suppose que a est un maximum local (pour minimum, remplacer f par $-f$). Rappelons que cela signifie qu'il existe $r > 0$ tel que $\|x - a\| < r \implies x \in U$ et $f(x) \leq f(a)$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$. La fonction d'une variable t , définie par $\varphi(t) = f(a + th)$ est définie pour $|t| < \frac{r}{\|h\|}$ et $\varphi(t) \leq \varphi(0)$. Donc par le même principe, mais dans le cas connu d'une variable, on doit avoir $\varphi'(0) = 0$. Mais $\varphi'(0) = df_a(h)$, donc $df_a(h) = 0, \forall h$, ce qui est le résultat. \square

On sait que la réciproque est fautive pour une seule variable. Pour un exemple en deux variables, prendre $f(x, y) = xy$. Alors $\text{grad}_{0,0} f = (0, 0)$. Mais ce point n'est ni un maximum local ni un minimum local du fait que si $x > 0, y > 0$ et $|x|, |y|$ aussi proches de zéro qu'on veut, alors $f(x, y) > 0$, tandis que $f(-x, y) < 0$.

Revenons au cas général. La formule de Taylor à l'ordre deux dit que si a est stationnaire, alors pour $\|h\| \ll (\text{petit})$, la fonction se comporte comme le polynôme de Taylor à l'ordre deux en les variables h_1, \dots, h_n :

$$Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

Ce polynôme est un exemple de *forme quadratique*, quadratique voulant dire qu'il ne contient que des monômes de degré deux. Par exemple dans le cas de deux variables x, y , on a au point (a, b) :

$$Q(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a, b) h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a, b) k^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) h k$$

expression qu'on peut mettre sous la forme $Q(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2$, avec

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a, b), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a, b)$$

L'écriture générale d'une forme quadratique en les variables h_1, \dots, h_n est

$$Q(h) = \sum a_{i,j} h_i h_j, \quad a_{i,j} = a_{j,i}$$

La matrice $A = (a_{i,j})$ dite associée à la forme quadratique est symétrique. Dans notre problème

$$a_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Cette matrice est dite matrice *Hessienne* de f en a .

Définition 2.4.3. Une forme quadratique $Q(h)$ est dite *définie positive* (resp. définie négative) si pour tout $h \neq 0$, on a $Q(h) > 0$ (resp. $Q(h) < 0$).

Exemple 2.4.4. Pour une forme de deux variables $Q(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2$, il est connu depuis la classe de première que Q définie positive $\iff r > 0$ et $s^2 - rt < 0$, et Q définie négative $\iff r < 0$, et $s^2 - rt < 0$.

Proposition 2.4.5. *Supposons que a soit un point stationnaire. Soit alors $Q(h)$ le polynôme de Taylor à l'ordre deux en a (se réduit à la partie quadratique).*

- Q défini positif $\implies a$ est un minimum local strict ($f(x) > f(a)$ si $\|x\| \leq \epsilon$ et $x \neq a$).
- Q défini négatif $\implies a$ est un maximum local strict.

Démonstration : On peut se limiter au premier cas, car le second s'y ramène en considérant $-f$. Notons que la formule de Taylor implique que

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + o(\|h\|)$$

Les fonctions $Q(h)$ et $\|h\|^2$ sont homogènes et quadratiques en h et donc $q(h) := Q(h)/\|h\|^2$ est constant le long d'une droite qui passe par 0. Il suffit de regarder les valeurs sur la sphère unité $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Mais la sphère est compacte et donc la fonction strictement positive $h \mapsto q(h)$ admet un minimum $c > 0$. On conclut que pour $\|h\|$ petit

$$f(a+h) - f(a) = Q(h) + o(\|h\|^2) \geq c\|h\|^2 + o(\|h\|^2) > 0.$$

□

Exemples 2.4.6. 1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ définie si $x^2 + y^2 < 1$. Le point $(0, 0)$ est stationnaire, et

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Un calcul supplémentaire donne $r = f_{xx}(0, 0) = t = f_{yy}(0, 0) = -1$, $s = f_{xy}(0, 0) = 0$. Donc le point $(0, 0)$ correspond à un maximum local, ce qui est clair sur la graphe de f (hemi-sphère supérieur).

2) Soit la fonction *volume* d'un parallélépipède rectangle dans \mathbb{R}^n de côtés $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$. Donc

$$f(x) = x_1 \cdots x_n$$

On suppose que le périmètre $p = \sum_{i=1}^n x_i$ est fixé ($= p$). Cherchons les points stationnaires éventuels de cette fonction de $(n-1)$ variables x_1, \dots, x_{n-1}

$$\phi(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_{n-1} \left(p - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)$$

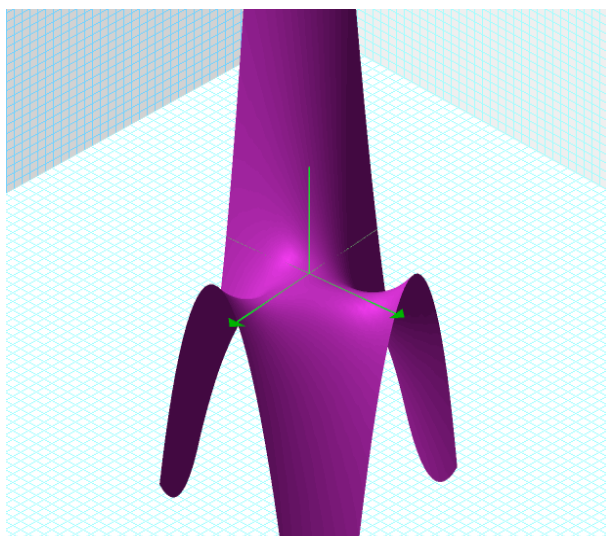
(exemple d'un problème d'extremum avec contrainte). On trouve de suite que

$$\phi_{x_i} = x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_{n-1} (x_n - x_i)$$

Le chapeau signifiant que la variable est omise. Le seul point stationnaire est obtenu pour $x_1 = \dots = x_{n-1} = x_n = \frac{p}{n}$, donc pour l'hypercube. Etudions la nature de ce point. Posons $x_i = \frac{p}{n} + y_i$ ($1 \leq i \leq n-1$). Alors

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p}{n} + y_i \right) \left(\frac{p}{n} - \sum_i y_i \right) \\ &= \frac{p^n}{n^n} + \left(\frac{p}{n} \right)^{n-1} \left(\sum_{i \neq j} y_i y_j - \sum_i y_i \left(\sum_j y_j \right) \right) = \frac{p^n}{n^n} - \left(\frac{p}{n} \right)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \right) \end{aligned}$$

Le point stationnaire est donc un maximum local, qui est unique. Comme la fonction ϕ admet un maximum global, du fait de la continuité, le point est ce maximum global.

FIG. 2.5 – Fonction *volume* ($n = 2$)

3) Soit la fonction $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$. On trouve que les dérivées partielles sont

$$f_x = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y)$$

$$f_y = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y)$$

Considérons cette fonction comme définie sur $U = \{(x, y), 0 < x, y, x + y < \pi\}$ (angles d'un triangle non plat). Alors $x = y = \frac{\pi}{3}$ est un point stationnaire.

¶. Si on suppose seulement la forme quadratique semi-définie positive (resp. négative), i.e. $s^2 - tr \leq 0$ (resp. $s^2 - tr \geq 0$), alors on ne peut conclure en général. Soit par exemple la fonction $f(x, y) = x^2 + y^3$. Elle a un point stationnaire en $(0, 0)$, avec $r = 1, s = t = 0$. Il n'y a pas d'extrema local en ce point. Avec la fonction $f(x, y) = x^2 + y^4$, il y a un minimum (global) mais pas strict.

Exemples 2.4.7. 1) On reprend la fonction *aire* d'un triangle de côtés a, b, c et de $1/2$ - périmètre fixé $p = 1$. On a donc un problème qui ne dépend que de deux variables a, b , car $c = 2 - a - b$. La fonction aire est $S(a, b) = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$. La fonction est définie indéfiniment dérivable si $a, b, c \geq 0$. On notera que le produit sous la racine carrée est > 0 !. En effet supposons $a = 1 + \alpha \geq 1$, alors $b + c = 1 - \alpha \leq 1$. D'autre part les inégalités classiques entre longueurs des côtés d'un triangle donnent si $c = 1 - \gamma$

$$b = 2 - a - c = \gamma - \alpha \geq a - c = \alpha + \gamma$$

Ce qui est absurde. Un calcul immédiat donne

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{(1-b)(2-2a-b)}{2S}, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{(1-a)(2-2b-a)}{2S}$$

Cela montre que les points stationnaires sont les $(a, b, c = 2 - a - b)$ tels que

$$(2b + a)(2 - b) = 2 = (2a + b)(2 - a)$$

On en déduit $(b - a)(1 - a - b) = 0$. Comme $c > 0$, la seule solution est $a = b$, donc $a = b = c = \frac{2}{3}$. Cela correspond au triangle équilatéral. Montrons que c'est un maximum. Pour cela, il suffit que ce point est un maximum de la fonction $S^2 = (1 - a)(1 - b)(a + b - 1)$. On trouve facilement les valeurs suivantes pour r, s, t :

$$r = t = -\frac{2}{3}, s = -\frac{1}{3}$$

Le critère dit que l'on a bien un maximum local strict. Comme application, montrons l'inégalité suivante satisfaite pour tout triangle de côtés a, b, c :

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$$

avec égalité ssi le triangle est équilatéral ($a = b = c$). Solution : on observe que le problème est homogène en p , car la fonction S est homogène de degré deux, soit (si $\lambda > 0$) :

$$S(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^2 S(a, b, c)$$

On peut donc supposer d'abord $p = 1$. Alors ce qui précède donne un maximum pour S , à savoir $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Si $p \neq 1$, on change par $(a, b, c) \mapsto (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, avec $\lambda = p^{-1} = \frac{2}{a+b+c}$. On en déduit

$$\frac{4}{(a + b + c)^2} S \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

donc (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$S \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}(a + b + c)^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Comme le maximum est strict, en se souvenant du cas d'égalité dans l'inégalité CS, on a bien que l'égalité est vraie ssi le triangle est équilatéral. Comme suite à cet exemple on traitera l'exercice de dessous.

2) Le point de Fermat d'un triangle. Soit un triangle (rectangle pour simplifier) de sommets $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$. Soit la fonction de deux variables (x, y) avec $M = (x, y)$:

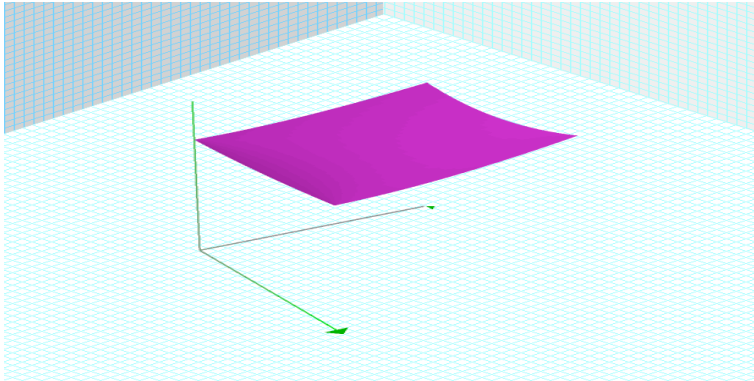
$$f(x, y) = \|M0\| + \|MA\| + \|MB\|$$

Montrer qu'elle a un unique minimum atteint en un point intérieur au triangle (point de Fermat).

On considère un triangle dans le plan, de sommets A, B, C , supposés non alignés. Pour un point $M = (x, y)$ du plan on forme la fonction

$$f(x, y) = \|AM\| + \|BM\| + \|CM\|$$

Solution : La fonction f est définie continue sur \mathbb{R}^2 , mais est de classe C^∞ que sur $U = \mathbb{R}^2 - \{A, B, C\}$. On veut exprimer la différentielle (ou le gradient) de f

FIG. 2.6 – Le graphe de $f(x)$, avec son minimum

en M . On suppose $A = (a', a'')$, $B = (b', b'')$, $C = (c', c'')$. Alors un calcul direct donne (on peut aussi utiliser le calcul plus général de l'exemple 3.5)

$$f(x, y) = \sqrt{(x - a')^2 + (y - a'')^2} + \sqrt{(x - b')^2 + (y - b'')^2} + \sqrt{(x - c')^2 + (y - c'')^2}$$

On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x - a'}{\sqrt{(x - a')^2 + (y - a'')^2}} + \frac{x - b'}{\sqrt{(x - b')^2 + (y - b'')^2}} + \frac{x - c'}{\sqrt{(x - c')^2 + (y - c'')^2}}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y - a''}{\sqrt{(x - a')^2 + (y - a'')^2}} + \frac{y - b''}{\sqrt{(x - b')^2 + (y - b'')^2}} + \frac{y - c''}{\sqrt{(x - c')^2 + (y - c'')^2}}$$

Donc $df(x, y) \cdot (h, k) =$

$$\frac{(x - a')h + (y - a'')k}{\|AM\|} + \frac{(x - b')h + (y - b'')k}{\|BM\|} + \frac{(x - c')h + (y - c'')k}{\|CM\|}$$

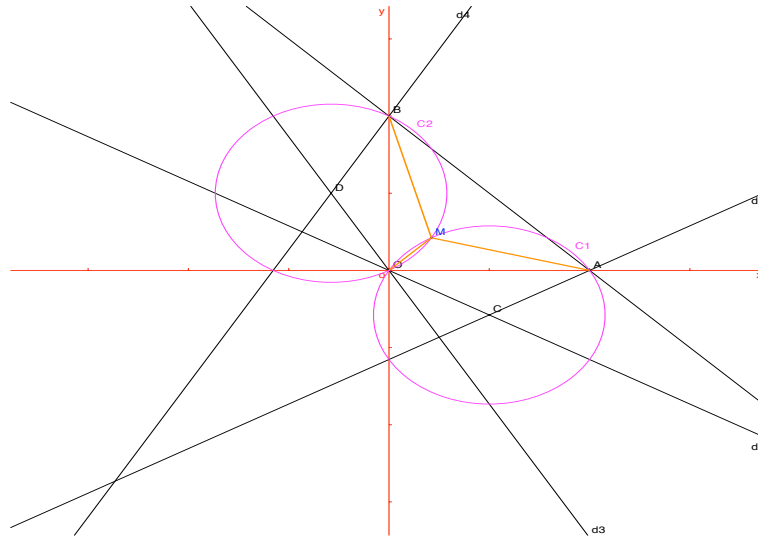
D'une autre manière

$$\text{grad } f(x, y) = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|AM\|} + \frac{\overrightarrow{BM}}{\|BM\|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{\|CM\|}$$

Revenons au problème posé. D'abord il est facile d'observer par un argument géométrique que le minimum de f , s'il existe est atteint en un point intérieur au triangle. Si M est extérieur, et si par exemple la demi-droite AM coupe un côté du triangle en M' , on a $f(M) \geq f(M')$. En effet en tenant compte du fait que dans un triangle la somme des longueurs de deux côtés est supérieure à la longueur du troisième

$$f(M) = \|AM\| + \|BM\| + \|CM\| \geq \|BC\| + \|AM\| \geq f(M')$$

A l'intérieur du triangle, qui représente une partie fermée bornée, la fonction f , strictement positive, doit avoir un minimum, atteint. Le problème est de le

FIG. 2.7 – Le point de Fermat M pour le triangle OAB ($a = b = 1$)

justifier par le calcul, et de le localiser. On cherche les points critiques de f , ceux qui annulent la différentielle (= gradient). Le calcul de dessus dit qu'en un tel point

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\|AM\|} + \frac{\overrightarrow{BM}}{\|BM\|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{\|CM\|} = 0$$

Observons que cette somme est en fait une somme de trois vecteurs de longueur un!. Or il est un exercice facile qui dit que si $\|u\| = \|v\| = 1$, alors

$$\|u + v\| = 1 \iff \widehat{(u, v)} = \frac{2\pi}{3}$$

Ainsi en un point critique M , les trois angles $(\widehat{MO, MA})$, $(\widehat{MA, MB})$, $(\widehat{MO, MB})$ sont égaux à $\frac{2\pi}{3}$. Ainsi le point M , est le point à l'intérieur du triangle qui "voit" les trois côtés sous l'angle $\frac{2\pi}{3}$; deux suffisent. Cela donne un procédé de construction de M . En effet M doit être le second point d'intersection de deux cercles, C_A de centre Ω_A , passant par O, A , et $(\Omega_A \widehat{O, \Omega_A A}) = \frac{\pi}{3}$, définition analogue pour C_B . Le point M est donc unique. On observera que le point M est en un sommet, par exemple A , si les deux cercles ne se coupent pas à l'intérieur du triangle, donc si l'angle en ce sommet est $\geq \frac{2\pi}{3}$. Que le point M soit un minimum est confirmé par le fait que la forme quadratique $Q(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2$, partie quadratique de la formule de Taylor est ≥ 0 , car si on reporte à l'exemple 3.11, Q est une somme de trois contributions ≥ 0 , du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.4.1 Complément : Extrémum lié

On rencontre en général des problèmes de recherche d'extrema non pas sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, mais sur une partie fermée $F \subset U$. On suppose pour simplifier

que F est la partie définie par l'équation

$$F = \{x \in U, g(x) = 0\}$$

g étant une fonction différentiable sur U . On recherche donc le (ou les) maximum ou minimum de $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, sur F , dit extrema lié ou relatif.

Théorème 2.4.8. *On suppose que en un point $a \in F$, la fonction g a une différentielle (gradient) non nulle. Pour que ce point soit un extrema relatif de f , il est nécessaire que l'on ait une relation de dépendance linéaire*

$$df(a) = \lambda dg(a), (\lambda \in \mathbb{R})$$

On dit que λ est un multiplicateur de Lagrange.

Démonstration : Soit $a \in F$ un tel extrema. Supposons par exemple $\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Alors on sait (résultat admis) qu'il est possible de résoudre x_1 comme fonction de x_2, \dots, x_n au voisinage de a . Donc il existe une fonction $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ définie au voisinage de $b = (a_2, \dots, a_n)$, telle que identiquement

$$g(\varphi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = 0, \varphi(a_2, \dots, a_n) = a_1$$

Alors la fonction $f(\varphi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ a un extrema relatif en b . Le gradient de cette fonction est donc nul en b , cela donne pour $j \geq 2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(b) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$$

Si on insère le calcul des dérivées partielles de la fonction implicite φ , on a le résultat avec $\lambda = -\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$. □

Exercices

1. Vérifier qu'en utilisant l'écriture matricielle, on a $Q(h) = {}^t h A h$ (${}^t h$ = vecteur transposé = vecteur ligne).
2. Montrer que l'aire S d'un triangle de côtés a, b, c satisfait à

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (abc)^{2/3}$$

avec égalité ssi le triangle est équilatéral.

3. Trouver le minimum pour la fonction définie sur \mathbb{R}_+^n par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_i x_i \right) \left(\sum_i \frac{1}{x_i} \right)$$

4. Soit la fonction $f(x, y, z) = x + y + z + \frac{1}{xyz}$. Trouver les points critiques, et discuter leur nature éventuelle.
5. Soit la fonction $f(x, y) = 2xy - 2x^2y - xy^2$. Trouver les points critiques et discuter leur nature.

Corrigé On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 4xy - y^2 = y(2 - 4x - y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2x^2 - 2xy = 2x(1 - x - y)$. Les points critiques sont donnés par

$$y(2 - 4x - y) = 2x(1 - x - y) = 0$$

Ce sont les points O, A, C, M du dessin Fig. 2.8 Un examen des signes de f montre que le seul extremum possible local possible est M . Dans le triangle OAC , on a $f \geq 0$, donc M doit correspondre à un maximum local. Pour le confirmer, on calcule la matrice Hessienne en $M = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, on trouve la matrice

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

On a $\det H = rt - s^2 > 0$, mais comme $r < 0$, on tombe bien sur un maximum local $f(M) = 1/9$ (le deviner sur le graphe Fig. 2.9 de f).

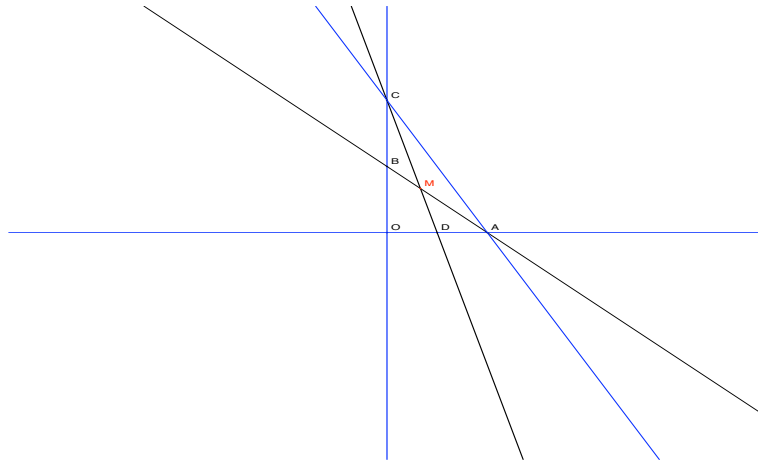


FIG. 2.8 – Les points critiques M, O, A, C

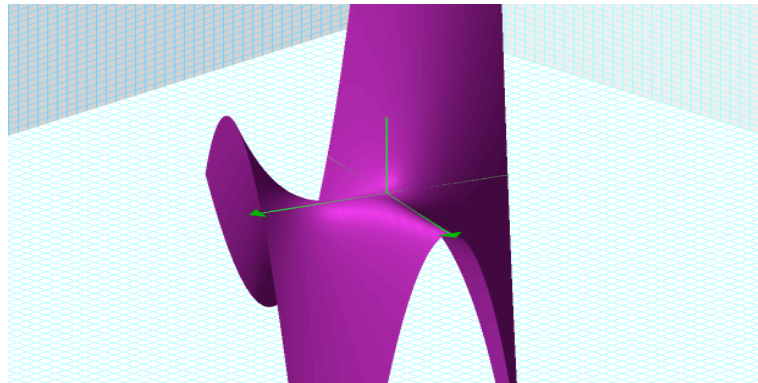


FIG. 2.9 – le graphe de $z = 2xy - 2x^2y - xy^2$

Chapitre 3

Calcul Integral

3.1 Intégrales doubles et triples

Construction

L'objectif est de définir sous des conditions raisonnables, et ensuite d'indiquer les méthodes de calcul de l'intégrale d'une fonction de deux variables $f(x, y)$, l'intégrale étant prise sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, notée

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Rappelons au préalable une définition possible de l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$, pour une fonction définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Comme cette intégrale est supposée mesurer l'aire algébrique limitée par le graphe de la courbe $y = f(x)$, l'axe des x , et les droites verticales $x = a$ et $x = b$, on est naturellement conduit à approcher cette aire par une somme d'aires de rectangles infinitésimaux. cela veut dire qu'on subdivise $[a, b]$ en sous intervalles

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, b]$$

avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. On parle d'une subdivision de l'intervalle d'intégration en n intervalles, le diamètre de la subdivision étant

$$\Delta_x = \max_{1 \leq i \leq n} x_i - x_{i-1}$$

A toute subdivision comme ci-dessus, et à tout choix de $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, on forme la somme (dite de Riemann)

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

On démontre, sous des hypothèses raisonnables, par exemple f est *continue par morceaux*, que ces sommes convergent lorsque le diamètre tend vers zéro, vers l'intégrale :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \longrightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Il est facile d'interpréter la somme de gauche comme une somme d'aires de petits rectangles, approximant à un ordre arbitraire l'aire de la portion du plan délimitée par le graphe de $y = f(x)$, et l'axe des x .

Passons à l'extension de cette construction aux fonctions de deux variables. Soit une partie D du plan, sur laquelle la fonction $f(x, y)$ est définie. On supposera que D est fermée et bornée, ce qui veut dire que D est définie par une collection finie ou non d'inégalités larges

$$\varphi_\alpha(x, y) \geq 0$$

(exemple : les points intérieurs d'un triangle $x, y \geq 0, x + y \leq 1$) et que $D \subset [a, b] \times [c, d]$, avec a, b, c, d convenables. On peut subdiviser comme ci-dessus $[a, b]$ et $[c, d]$, soit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

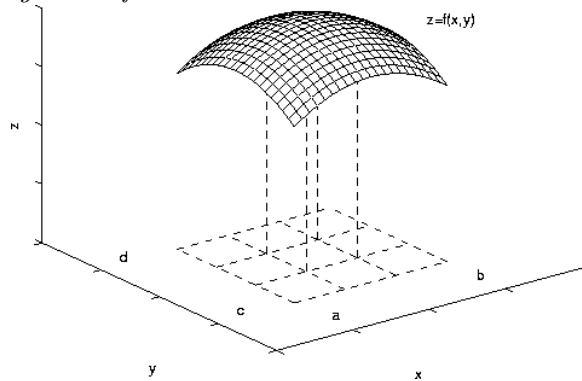
de sorte que $D = \cup_{i,j} D \cap [x_i - x_{i-1}] \times [y_j - y_{j-1}]$ Choisissons pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ un point $\xi_{i,j} \in D \cap [x_i - x_{i-1}] \times [y_j - y_{j-1}]$, et formons la somme

$$S = \sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})f(\xi_{i,j})$$

On démontre que si f est continue sur D , ces sommes convergent vers $I \in \mathbb{R}$, voulant dire que pour $\epsilon > 0$ donné, on a $|S - I| < \epsilon$, si Δ_x et Δ_y sont assez petits. Le réel I est noté

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

et appelé *l'intégrale* de f sur D .



Avant de faire la liste des propriétés élémentaires de cette intégrale, examinons deux exemples très simples.

Exemples 3.1.1. 1) On prend $D = [a, b] \times [c, d]$ (rectangle), et $f(x, y) = 1$ (fonction constante). Alors avec les notations de dessus, on a

$$S = \sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = (b - a)(d - c)$$

qui représente l'aire du rectangle D . Donc

$$\iint_D dx dy = \text{Aire}(D)$$

2) On prend encore pour D un rectangle, et pour f , la fonction produit

$$f(x, y) = g(x)h(y) \quad g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

g, h continues. Alors on trouve si $\xi_{i,j} = (a_i, b_j)$:

$$S = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})g(a_i) \right) \times \left(\sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1})h(b_j) \right)$$

somme qui converge visiblement vers

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

Donc

$$\iint_D g(x)h(y)dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

Les propriétés de l'intégrale sont (les fonctions considérées sont continues) :

Proposition 3.1.2. 1) (Linéarité) $\iint_D (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) dx dy = \lambda \iint_D f(x, y) dx dy + \mu \iint_D g(x, y) dx dy$.

2) (Positivité) Si $f \geq 0$ sur D , alors $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$ (égalité ssi $f = 0$); plus généralement

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

3) (Additivité par rapport au domaine d'intégration) Supposons $D = D_1 \cup D_2$, où D_1, D_2 sont fermés et bornés, et $D_1 \cap D_2$ est contenu dans une réunion (finie) d'arcs de courbes. Alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

La propriété 3) est déjà significative si $f = 1$. On posera

$$\boxed{\iint_D dx dy = \text{Aire}(D)}$$

alors

$$\text{Aire}(D_1 \cup D_2) = \text{Aire}(D_1) + \text{Aire}(D_2)$$

De même qu'une intégrale simple calcule une aire, une intégrale double calcule le *volume* de la portion d'espace limitée par le domaine D dans le plan (x, y) , et le graphe de $z = f(x, y)$.

3.1.1 Méthodes de calcul : Fubini

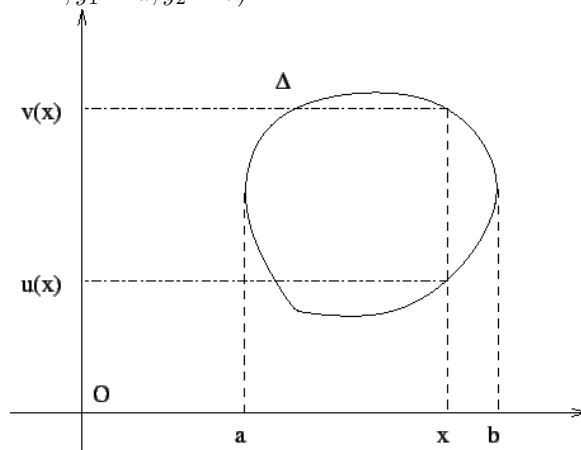
Le calcul d'une intégrale double dépend en complexité de la fonction, et aussi de la forme du domaine d'intégration. Un domaine est d'autant plus simple, qu'il est rectangulaire, ou "ressemble" à un rectangle. On rencontre les situations suivantes (rectangle déformé), qui seront énoncées sans démonstration :

1) $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, les fonctions $y_i(x)$ étant continues sur $[a, b]$. Dans ce cas, l'intégrale se ramène à un calcul itéré de deux intégrales simples

Proposition 3.1.3.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

On intègre par rapport à y , puis le résultat par rapport à x de a à b . Sur une figure : ($D = \Delta$, $y_1 = u$, $y_2 = v$)



De manière duale, si

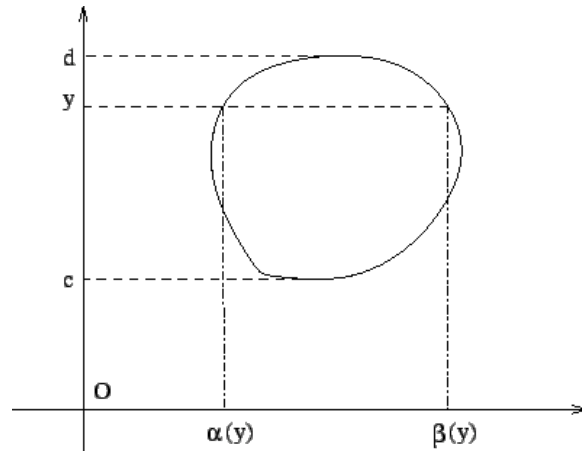
$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

on a

Proposition 3.1.4.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Soit la figure ($x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$)



Exemple 3.1.5 (Formule de Fubini). On prend pour D le rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$. Alors pour toute fonction continue sur D , on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

1) soit à calculer $\iint_D \cos(x + y) dx dy$ sur le triangle $D = \{(x, y), x, y \geq 0, x + y \leq \frac{\pi}{2}\}$. On peut voir D comme un triangle déformé en x ou en y . Par exemple $y_1(x) = 0, y_2(x) = \frac{\pi}{2} - x$. Donc

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x + y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2} - x} \cos(x + y) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx = |x + \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

2) Calculer $I = \iint_D xy dx dy$ sur $D = \{(x, y) | x, y \geq 0, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy dy \right) = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (2x^2 - x^3) dx = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

3.1.2 Formule de changement de variables

Comme dans le cas d'une variable, on souhaite effectuer un changement de variables dans le calcul d'une intégrale double. cela signifie qu'on a une fonction vectorielle de deux variables

$$\Phi = (\varphi, \psi) : \Delta \longleftarrow D, (u, v) \mapsto (x, y)$$

avec $\varphi = \varphi(u, v), \psi = \psi(u, v)$. On suppose que ces deux fonctions φ et ψ ont des dérivées partielles continues (classe C^1) sur Δ , et que Φ est une bijection

de Δ sur D . On forme la matrice dite *jacobienn*e de Φ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

On demande que le *jacobien* du changement de variables (déterminant de la matrice jacobienne) ne s'annule pas :

$$J(\Phi) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \neq 0$$

Théorème 3.1.6. *Sous les hypothèses précédentes, on a la formule (de changement de variables)*

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(\Phi)| \, du dv$$

La preuve de ce théorème important est omise (niveau L3). Pour justifier sa place dans ce cours, on va sur des exemples vite voir (comme dans le cas d'une variable) toute sa puissance. Le théorème s'applique même si les conditions sont satisfaites en tout point de Δ sauf peut être en un nombre fini de points exceptionnels.

Remarque. Si on effectue un changement linéaires des variables, $\varphi(x, y) = ax + cy$, $\psi(x, y) = bx + dy$, alors l'intégrale n'est modifiée que par le facteur (valeur absolue du déterminant)

$$|ad - bc|$$

Lorsque ce déterminant est une rotation, par exemple, l'intégrale est inchangée. De même, l'intégrale est invariante par une translation $x \mapsto x + \alpha$, $y \mapsto y + \beta$.

Intégration en coordonnées polaires

Dans ce cas la fonction $\Phi : \Delta \rightarrow D$ est

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Le jacobien est facile à calculer, on trouve $J = r$. Cela donne la formule d'intégration

$$\textbf{Proposition 3.1.7.} \quad \iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} f(r, \theta) r \, dr d\theta$$

Les coordonnées polaires sont pertinentes lorsque le domaine décrit en termes des coordonnées polaires devient une rectangle, ou un rectangle déformé. Soit le secteur angulaire

$$D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq \arg(x + iy) \leq \phi \ (0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$$

Avec la coordonnées polaires, il devient le rectangle $[0, R] \times [0, \phi]$. L'aire de ce secteur est donc

$$\iint_D dx dy = \iint_{[0, R] \times [0, \phi]} r \, dr d\theta = \int_0^{\phi} d\theta \times \int_0^R r dr = \frac{\phi R^2}{2}$$

Par exemple, soit à calculer $\iint_D x^2 dx dy$, avec D le 1/4 du disque de rayon un, soit $D = \{(x, y), x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. On voit que $\Delta = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Donc

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Un exemple classique qui justifie le passage aux coordonnées polaires, est le suivant : calculer $I_r = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, avec D le disque fermé de rayon r , centré en $(0, 0)$. Le passage aux coordonnées polaires donne (noter que les hypothèses sur Φ ne sont satisfaites au sens strict) :

$$\begin{aligned} I_r &= \iint_{[0,r] \times [0,2\pi]} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r e^{-r^2} dr \\ &= (2\pi) \times \frac{1}{2} (-e^{-r^2}) \Big|_0^r = -\pi(e^{-r^2} - 1) \end{aligned}$$

Si on fait tendre $r \rightarrow \infty$, on peut justifier que la limite π est identique à l'intégrale (sur un domaine non borné)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$$

On en tire le résultat utile $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

On a dit qu'une intégrale double calcule le volume de la portion d'espace comprise entre le graphe (dans \mathbb{R}^3), et le plan xy . Soit par exemple le volume de la demi-sphère unité située au-dessus du plan équateur. Donc la fonction est ici $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. On doit donc calculer sur le disque unité D

$$Vol = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

On trouve par l'intermédiaire du changement de variable $u = r^2$:

$$Vol = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = \pi \int_0^1 \sqrt{1 - u} du = \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \sqrt{(1 - u)^3} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

Centre de gravité d'une plaque massive

Soit un domaine D comme considéré au-dessus, et donnons nous une fonction $f(x, y) : D \rightarrow [0, \infty[$, considérée comme une distribution de masse. Le domaine D peut être vu comme une plaque massive, de masse totale

$$M = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Définition 3.1.8. Le point de coordonnées $x_G = \frac{1}{M} \iint_D x f(x, y) dx dy$, $y_G = \frac{1}{M} \iint_D y f(x, y) dx dy$ est dit centre de gravité de la plaque massive D .

Remarque. Montrons que si on translate la plaque par le vecteur $\vec{\xi} = (\alpha, \beta)$, alors le centre de gravité est translaté. On a déjà observé que l'intégrale est invariante par translation, donc la plaque D et la plaque translatée ont la même masse M . Il faut calculer

$$\iint_{D+\vec{\xi}} xf(x, y) dx dy$$

On effectue le changement de variables $x = u + \alpha, y = v + \beta$, alors l'intégrale de dessus devient

$$\iint_D (u + \alpha)f(u + \alpha, v + \beta) dudv = \alpha M + \iint_D uf(u + \alpha, v + \beta) dudv$$

Même calcul avec y_G . Après division par M on a le résultat.

Par exemple, soit D le disque de centre (a, b) de rayon R . Soit la distribution de masse homogène, égale à 1. Son centre de masse est le centre (a, b) . Pour le voir, on peut par translation se ramener à $a = b = 0$. Alors du fait que le disque est invariant par rotation, il est facile de se convaincre que le centre de masse doit être fixé par toute rotation, donc est le centre $(0, 0)$.

3.2 Intégrales curvilignes et intégrales doubles

3.2.1 Intégrales curvilignes

Soit une fonction vectorielle $\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$ définie sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R}^n$; qu'on interprète comme un *champ de vecteurs*

Soit γ une courbe paramétrée d'image contenue dans U . On peut former l'intégrale

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(x(t))x'_i(t) \right) dt$$

Noter la ressemblance avec les intégrales ordinaires $\int_a^b f(x)dx$. On appelle une telle intégrale une *intégrale curviligne*. Le terme sous le signe somme peut être identifié comme le produit scalaire (fonction de t)

$$(w \circ x, \text{grad } x)$$

¶ *Attention* : le choix d'un paramètre pour une courbe $\gamma : t \rightarrow x(t)$ induit une *orientation*, ou sens de déplacement (de parcours), de la courbe. On dit que le changement de paramètre $t = t(s)$ définit la même orientation (ou sens de parcours) si $t'(s) > 0$ ($\forall s$), i.e. $t(s)$ est une fonction croissante. Dans le cas contraire ($t'(s) < 0$), on dira que la courbe est parcourue dans le sens opposé. On notera qu'à orientation fixée, le paramètre *longueur d'arc* est unique à une translation près $s \rightarrow s + cte$.

Par exemple, le cercle unité $x = \cos t, y = \sin t$ dans son paramétrage usuel, est parcouru dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre. Le passage de t à $-t$ donne le sens inverse. Donc le cercle unité parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre est :

$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin(-t) = -\sin t$$

Autre exemple : soit la droite paramétrée $t \mapsto u + tv$ ($v \neq u \in \mathbb{R}^n$). La même droite mais parcourue en sens inverse est $t \mapsto u = tv!$.

Proposition 3.2.1. *L'intégrale curviligne*

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(x(t)) x'_i(t) \right) dt$$

ne dépend pas du paramètre choisi, pourvu que celui-ci préserve l'orientation. En d'autres termes si on change de paramètre $t = t(u)$, l'intégrale ne change pas si l'orientation est préservée ($t'(u) > 0$), sinon elle change de signe.

Démonstration : Soit $s \rightarrow t(s)$, $[\alpha, \beta] \cong [a, b]$ un changement de paramètre. La formule de changement de variable dans les intégrales donne

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(x(t)) x'_i(t) \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(x(t(s))) x'_i(t(s)) \right) |t'(s)| ds$$

Ce qui donne exactement le résultat en fonction du signe de $t'(s)$. \square

¶ Pour calculer une intégrale curviligne, on peut imaginer prendre pour paramètre la longueur d'arc, mais ce paramètre est souvent difficile (en dehors d'exemples simples) à rendre explicite, car il faut calculer une intégrale.

La notation habituelle (= convention) pour ce type d'intégrale (appelée *intégrale curviligne* le long de l'arc γ) est

$$\int_\gamma \left(\sum_{i=1}^n \omega_i dx_i \right) = \int_\gamma \gamma^*(\omega)$$

On parle dans les textes de Physique de *circulation d'un champ de vecteurs le long de l'arc* γ .

Exemple 3.2.2. Calculons $I = \int_\gamma (x^2 dx + xy dy)$ où γ est l'arc de parabole $y = x^2$ d'extrémités $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$. On prend comme paramètre t , de sorte que $x(t) = t$, $y(t) = t^2$. Donc $I = \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$.

Dans un cas très spécial mais important, l'intégrale $\int_\gamma (\sum_{i=1}^n \omega_i dx_i)$ ne dépend pas de la courbe, mais que des deux extrémités.

Proposition 3.2.3. *Supposons qu'il existe une fonction scalaire $U(x)$ définie sur U avec des dérivées partielles continues (potentiel) telle pour tout i , $\omega_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i}$. Alors pour toute courbe γ d'extrémités $p = x(a)$, $q = x(b)$, on a*

$$\int_\gamma \left(\sum_{i=1}^n \omega_i dx_i \right) dt = U(q) - U(p)$$

En particulier, l'intégrale est nulle si la courbe est fermée ($p = q$).

Démonstration : On a en se reportant à la définition

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(x(t)) x'_i(t) = \frac{d}{dt}(U(x(t)))$$

Donc $\int_\gamma (\sum_{i=1}^n \omega_i dx_i) = \int_a^b \frac{d}{dt}(U(x(t))) dt = U(q) - U(p)$. Le résultat en découle. On parle dans cette situation d'un *champ* (= ω) *dérivant d'un potentiel* (= U). \square

Exemple 3.2.4. Calculons le long du cercle unité C parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre l'intégrale curviligne

$$\oint_C \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$$

On prend le paramétrage $x = \cos t$, $y = \sin t$ du cercle unité. L'intégrale curviligne se réduit à

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$$

On en déduit que $\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ ne dérive pas d'un potentiel, car dans le cas contraire, du fait que $p = q$, l'intégrale serait nulle.

Lorsque $\omega_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ ($\forall i$) on a dans cette situation, un champ de gradient, ou un champ dérivant d'un potentiel (noté U). Noter qu'on a alors $\forall i, j$:

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$$

(champ à divergence nulle) car

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$$

On peut montrer que *sous certaines conditions (Poincaré)*, portant sur U , ces conditions sont suffisantes, donc le champ dérive d'un potentiel. Par exemple U est un disque. Elles ne le sont pas dans tous les cas car dans l'exemple 2.5, un calcul facile donne de suite

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Formule de Green

Rappelons le fait élémentaire suivant qui sert parfois de définition de l'intégrale définie : si f est définie continûment dérivable sur $[a, b]$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Les points a, b sont les extrémités du segment d'intégration. On peut se demander si ce principe se généralise pour les intégrales doubles. La réponse est oui, mais il y a malheureusement des complications techniques et conceptuelles. La première difficulté est de définir le bord du domaine d'intégration, qui intuitivement doit être une courbe. La seconde est de trouver ce qui doit remplacer la dérivation. Si D est un disque, ou un rectangle éventuellement déformé, on imagine facilement ce qui fait figure de bord, avec cependant un sens de parcours à préciser.

La règle pour orienter le bord, est celle qui lors du déplacement sur le bord doit laisser D à gauche!, on parle de *sens direct*. Le résultat qu'on peut imaginer est le théorème de *Gauss (ou de la divergence, ou de Green)* :

Théorème 3.2.5. Soit deux fonctions $f(x, y)$, $g(x, y)$ définies avec des dérivées partielles continues sur D . On suppose que le bord de D est l'image d'une courbe orientée (dans le sens direct) γ . Alors

$$\iint_D (g'_x(x, y) - f'_y(x, y)) dx dy = \oint_{\gamma} (f(x, y) dx + g(x, y) dy)$$

Démonstration : On se limite à une preuve dans un cas particulier, celui d'un rectangle déformé. Cela suffit pour éclairer ce résultat important.

On suppose que $D = \{(x, y), a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$. Coupons l'intégrale de gauche en deux.

$$\begin{aligned} \iint_D f'_y(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f'_y(x, y) dy \right) dx = \int_a^b (f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))) dx \\ &= \int_a^b f(x, y_2(x)) dx - \int_a^b f(x, y_1(x)) dx \end{aligned}$$

Notons γ_1 la courbe $x \mapsto (x, y_1(x))$, $x \in [a, b]$ et de manière analogue, mais avec l'orientation opposée, $\gamma_2 : x \mapsto (b + a - x, y_2(b + a - x))$, $x \in [0, b - a]$. La différence des deux intégrales de dessus devient (se souvenir de la définition d'une intégrale le long d'un arc)

$$- \oint_{\gamma_2} f dx - \oint_{\gamma_1} f dx$$

La courbe qui borde D contient les deux bords verticaux, qui sont comme courbes paramétrées (avec la bonne orientation) des segments de droites $\delta_a : x = a, y = y_2(a) - t, t \in [0, y_2(a) - y_1(a)]$, et $\delta_b : x = b, y = t \in [y_1(b), y_2(b)]$. Le bord de D en tant que courbe paramétrée orientée est

$$\partial D = \gamma = \gamma_1 + \delta_b + \gamma_2 + \delta_a$$

Il est clair si on se reporte à la définition que

$$\oint_{\delta_a} f dx = \oint_{\delta_b} f dx = 0$$

Il suffit de noter que $x = cte$ le long de ces courbes, donc cela donne une dérivée nulle, et donc une intégrale nulle. Examinons l'autre morceau, soit $\iint_D g'_x(x, y) dx dy$. Cette intégrale se réduit à

$$\int_a^b dx \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g'_x(x, y) dy \right)$$

On utilise un résultat sur la *dérivation des intégrales* définies en fonction d'un paramètre (admettre éventuellement ce résultat)

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(x, y) dy \right) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g'_x(x, y) dy + y'_2(x) g(x, y_2(x)) - y'_1(x) g(x, y_1(x))$$

En utilisant ce résultat, on peut transformer l'intégrale double en

$$\begin{aligned} & \int_a^b dx \left(\frac{d}{dx} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(x, y) dy - y_2'(x)g(x, y_2(x)) + y_1'(x)g(x, y_1(x)) \right) \\ &= \int_{y_1(b)}^{y_2(b)} g(b, y) dy - \int_{y_1(a)}^{y_2(a)} g(a, y) dy - \int_a^b y_2'(x)g(x, y_2(x)) dx + \int_a^b y_1'(x)g(x, y_1(x)) dx \\ &= \oint_{\gamma} g(x, y) dy \end{aligned}$$

En regroupant ces deux calculs, on a le résultat. \square

¶ Il est d'usage de considérer une fonction vectorielle $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ comme un champ de vecteurs, alors la fonction scalaire $f_x(x, y) + g_y(x, y)$ est dite *divergence* (notée $\text{div}(F)$, ou ∇F) de F . Alors avec le paramètre longueur d'arc

$$\iint_D \text{div} F = \oint_{\gamma} (-g dx + f dy) = \int_a^b (-gx'(s) + fy'(s)) ds$$

Comme le vecteur $n(s) = (y'(s), -x'(s))$ représente le vecteur normal (unitaire) à la courbe γ , bord de D , pointant vers l'extérieur de D , on peut écrire le théorème de Gauss sous la forme

$$\iint_D \text{div} F = \int_{\gamma} (F, n(s)) ds$$

Exemple 3.2.6. Si la courbe orientée γ est le bord de D , l'aire de D , donc $\iint_D dx dy$ se calcule aussi par $\oint_{\gamma} x dy$. Par exemple si γ est l'ellipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

Alors l'aire de l'intérieur de l'ellipse est

$$\oint_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = 2\pi ab$$

On observera que le calcul de l'aire directement par l'intégrale double donne évidemment le même résultat

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a dx \int_{-b \sin \arccos \frac{x}{a}}^{b \sin \arccos \frac{x}{a}} dy \\ &= 2b \int_{-a}^a \sin(\arccos \frac{x}{a}) dx = \int_{-a}^a 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \end{aligned}$$

en posant $x = a \sin \theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on trouve

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2ab \cos^2 \theta d\theta = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 2\pi ab$$

3.3 Intégrales triples

La définition de l'intégrale

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$$

de la fonction continue $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un voisinage $U \subset \mathbb{R}^3$ du domaine d'intégration D (fermé borné), est identique au cas de l'intégrale double, hormis le fait qu'un parallélépipède rectangle, remplace un rectangle. Les intégrales triples calculent des volumes

$$\boxed{\iiint_D 1 \, dx dy dz = \text{vol}(D)}$$

Le calcul d'une intégrale triple, utilise les mêmes recettes que pour le calcul d'une intégrale double, à savoir, intégrales simples itérées, ou changement de variables.

Pour illustrer la première méthode, on observera que les arguments donnés pour les intégrales doubles, montrent que l'intégrale sur un parallélépipède rectangle se réduit à trois intégrations successives. Soit $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz$$

On doit observer que $\int_e^f f(x, y, z) dz$ devient une fonction des variables $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, et qu'on peut écrire aussi

$$\int_e^f f(x, y, z) dz = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \left(\int_e^f f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Naturellement on peut inverser l'ordre des variables dans les intégrations successives. Ce principe s'étend à un parallélépipède *déformé*. Soit

$$D = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x), r(x, y) \leq z \leq s(x, y)\}$$

où p, q, r, s sont des fonctions continues. Le résultat qui sera utilisé est

Théorème 3.3.1. *Sous les conditions précédentes, l'intégration sur un parallélépipède déformé, se réduit à*

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} dy \int_{r(x, y)}^{s(x, y)} f(x, y, z) dz$$

¶ On prendra garde que dans l'expression de droite, un ordre des variables est fixé, en fait par la nature du parallélépipède déformé.

Exemple 3.3.2. Soit le tétraèdre $D \subset \mathbb{R}^3$ donné par

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x - y\}$$

Qui est bien du type parallélépipède déformé!. On calcule $I = \iiint_D x \, dx dy dz$. On trouve

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x-y} x dz = \int_0^1 dx \int_0^x x(x-y) dy$$

$$= \int_0^1 (x^2 y - x \frac{y^2}{2}) \Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$$

On peut voir le tétraèdre comme parallélépipède déformé d'une autre manière :

$$D = \{(x, y, z) / 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x - y\}$$

On prouvera à titre d'exemple que cette description conduit aussi au résultat.

Pour les intégrales triples, la formule de changement de variables s'énonce de la même manière. Soit un changement de variables $\varphi: (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$, transformant le domaine Δ en D . Soit le déterminant *jacobien*

$$J(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Alors énonçons sans démonstration :

Théorème 3.3.3 (Formule de changement de variables).

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} f(x, y, z) |J(u, v, w)| du dv dw$$

Exemple 3.3.4 (Coordonnées cylindriques). $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z$

On a $J = \rho$. Donc

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

Soit à calculer l'intégrale I de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur le domaine

$$D = \{(x, y, z) / z^2 \leq x^2 + y^2 \leq x\}$$

(faire un dessin!). Le domaine D se décrit agréablement en termes de coordonnées cylindriques. On a $D = \{(\rho, \theta, z) / -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \cos \theta, -\rho \leq z \leq \rho\}$. Dès lors

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} d\rho \int_{-\rho}^{\rho} \rho dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{6} \end{aligned}$$

Exercices

- Retrouver le fait que l'aire du parallélogramme $P = \{x\vec{u} + y\vec{v}, 0 \leq x, y \leq 1\}$, $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ est $|ad - bc|$.
- Soit le domaine D du plan défini par

$$D = \{(x, y), x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$$

- Dessiner D .
- Calculer $I = \iint_D xy dx dy$.

Solution On a $I = \int_0^1 x dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2} (2x - 2x^3) = \frac{1}{4}$.

3. Calculer $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ sur le disque D de centre l'origine, de rayon 1.
4. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la plaque $D = 1/2$ - disque unité supérieur, avec la distribution homogène égale à 1.
5. On suppose que $\omega_i = P_i(x, y)dx + Q_i(x, y)dy$ ($i = 1, 2$) dérive d'un potentiel. Prouver que $P_1 P_2 dx + Q_1 Q_2 dy$ dérive d'un potentiel \iff

$$(P_2 - Q_2) \frac{\partial P_1}{\partial y} = (Q_1 - P_1) \frac{\partial Q_2}{\partial x}$$

6. Montrer que $\omega = e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$ dérive d'un potentiel. Calculer $\oint_\gamma \omega$, si γ est le demi-cercle (unité) supérieur.
7. Soient $u(x, y), v(x, y)$ deux fonctions à dérivées partielles continues sur D . En utilisant la formule de Gauss, prouver la formule suivante, dans laquelle $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \nabla \text{grad}(u)$ désigne le laplacien :

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \oint_\gamma ((v u_y - u v_y) dx - (v u_x - u v_x) dy)$$

8. Calculer le volume du domaine D décrit par

$$D = \{(x, y, z) / y \geq z^2, z \geq y^2, 0 \leq x + y + z \leq 2\}$$