

Module MAT 233
Année 2007–2008

José Bertin et Chris Peters

23 septembre 2008

Table des matières

1	Courbes paramétrées	5
1.1	Propriétés locales des courbes paramétrées	7
1.2	Vecteur tangent, tangente	10
1.3	Forme au voisinage d'un point	14
1.4	Branches infinies	17
1.5	Construction des courbes paramétrées planes	18
1.6	Courbes planes en coordonnées polaires	21
1.7	Longueur d'arc	29
1.8	Courbure des courbes planes	32

Chapitre 1

Courbes paramétrées

Introduction : Représentation paramétrique

Dans de nombreuses situations, Mécanique, Physique, et bien sûr en Mathématiques, on est conduit à étudier un point de \mathbb{R}^n qui se déplace en fonction d'un paramètre, qui en général le temps. Il décrit une trajectoire, ou une "courbe", la dimension n de l'espace est le nombre de paramètres du "point". On étudie dans ce chapitre les premiers aspects des courbes planes ($n = 2$). Ci-dessous un exemple populaire, la *Cardioïde*

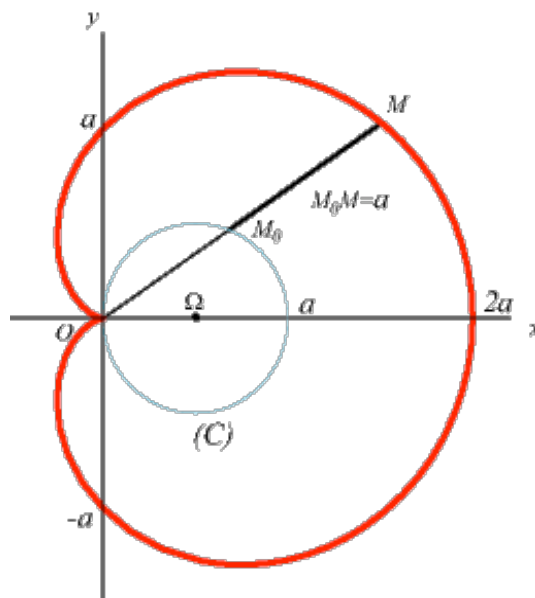


FIG. 1.1 – Cardioïde

Dans le plan de coordonnées cartésiennes x, y , on sait écrire l'équation **cartésienne** d'une droite : $ax+by+c = 0$. On sait classiquement représenter paramétriquement

la même droite :

$$t \mapsto t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite. On peut prendre $(\alpha, \beta) = (b, -a)$. Le vecteur (a, b) donne la direction normale de la droite.

Un cercle de centre (a, b) de rayon $r > 0$ est visuellement assimilé à l'ensemble des points $M = (x, y)$ à la distance r de $O = (a, b)$. D'où l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Le cercle admet une représentation paramétrique simple

$$x = a + r \cos t, y = b + r \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

Noter que plus que l'image, le cercle lui-même, cette représentation donne la position du point de paramètre t . De la même manière on peut *étudier* de nombreuses courbes planes données, soit par une équation paramétrique, soit une équation cartésienne (plus compliqué). L'ellipse de centre $(0, 0)$ et de longueurs d'axes $a > b > 0$ a par exemple pour représentation paramétrique

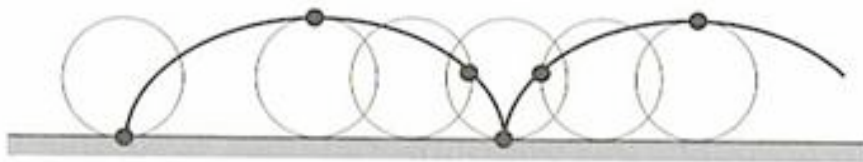
$$x = a \cos t, y = b \sin t$$

et pour équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Un exemple que nous étudierons en détail dans la suite est la fameuse **cycloïde** qui sous forme paramétrique est la courbe plane

$$x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t)$$

Cette courbe décrit la trajectoire d'un point fixe d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite, par exemple la valve d'une roue de vélo. Si le cercle roule à l'intérieur (resp. extérieur) d'un autre cercle, le point décrit une courbe appelée (hypo)cycloïde, resp. (epi)cycloïde. Ces courbes connues depuis longtemps (Galilée, Roberval, Bernoulli, ...), sont liées à de nombreux problèmes.

Par exemple saisir "cycloïde" sur Google, permet de se convaincre de l'universalité de ces courbes. On pourra utiliser le lien vers l'encyclopédie Wikipedia, ou le site mathcourbe pour des figures dynamiques, ainsi qu'une notice historique.



★ Comme dans le cas classique, graphe d'une fonction $y = f(x)$, étudier une courbe donnée paramétriquement revient à traiter dans l'ordre les points suivants :

1. étudier les variations des fonctions coordonnées (tableau des variations),

2. étudier les branches infinies (asymptotes)
 3. procéder à une étude locale autour de certains points "singuliers",
 4. effectuer éventuellement une étude globale-locale, longueur, courbure, etc..
- On va d'abord s'occuper des points 1) à 3).

1.1 Propriétés locales des courbes paramétrées

On se place dans \mathbb{R}^n avec un système de coordonnées

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

et muni de la structure euclidienne usuelle. On pourra être amené à effectuer des changements de coordonnées (dans le cours \mathbb{R}^2 essentiellement).

Définition 1.1.1. 1) Soit I une partie de \mathbb{R} (réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints). Une **courbe paramétrée** tracée dans \mathbb{R}^n et définie sur I , est la donnée d'une fonction (vectorielle)

$$\mathbf{f} : t \mapsto \mathbf{f}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

On dit que t est le **paramètre** (communément le temps), et que l'image $\mathbf{f}(I) \subset \mathbb{R}^n$ le **graphe** ou **trajectoire**. Si $n = 2$, on parle de courbe plane, et si $n = 3$ de courbe dans l'espace; au-delà on ne dit plus rien!. Pour une courbe plane, on écrira le plus souvent $\mathbf{f} : t \mapsto (x(t), y(t))$, et pour courbe de l'espace $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, ceci pour éviter les indices.

2) La courbe $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ est **continue** (resp. **dérivable**, k -fois dérivable), si les fonctions coordonnées $x_i(t)$ sont continues (resp. dérivables, k -fois dérivables).

A partir de maintenant $n = 2$.

Les coordonnées sont notées (x, y) , et (\vec{i}, \vec{j}) est le repère orthonormé canonique du plan \mathbb{R}^2 .

Exemple 1.1.2. La courbe paramétrée $t \mapsto (t, y(t))$ est le graphe de la fonction scalaire $x \mapsto y(x)$. La question classique de l'étude du graphe d'une fonction scalaire d'une variable $x \mapsto y = f(x)$ rentre dans le cadre présent. On notera qu'en général une courbe plane n'est pas le graphe d'une fonction scalaire. Par exemple la courbe $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$ représente la droite passant par le point (x_0, y_0) et de vecteur directeur (a, b) . C'est le graphe d'une fonction scalaire que si $a \neq 0$.

Exemple 1.1.3 (La cycloïde). C'est un exemple apprécié de courbe paramétrée. Une **cycloïde** est en toute généralité la courbe décrite par un point fixe d'un *cercle qui roule sans glisser sur ou dans un autre cercle*, ce cercle fixe pouvant être une droite. Traitons d'abord ce dernier cas.

Soit un cercle C de rayon r qui roule sans glisser (dans le sens positif) sur l'axe des x . On fixe un point M de C , et on étudie la trajectoire de ce point lors du glissement. On peut supposer que pour $t = 0$, $M = M(0) = (0, 0)$ est à l'origine. Il faut choisir un paramètre. Soit I le centre du cercle qui roule, noter qu'il reste sur la droite $y = r$, et soit H le point de contact de ce cercle avec l'axe des x . La

position de M est fixée par l'angle $t = (\widehat{IM, IH})$ qui est "l'angle de roulement", donc tel que

$$rt = \overline{OH}$$

abscisse de H . Il est facile de trouver les coordonnées de $M(t)$ en fonction de t (le faire), on trouve :

$$x(t) = r(t - \sin t), y(t) = r(1 - \cos t)$$

Indication : pour calculer les coordonnées de $M(t)$, on peut d'abord se placer dans le repère de centre I , le centre du cercle. Alors

$$M(t) = r \left(t + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right), 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \right)$$

d'où le résultat.

Exemple 1.1.4 (L'(hypo)cycloïde H_q). Maintenant on considère le roulement (sans glissement) d'un cercle γ de rayon $r \in [0, 1]$ à l'intérieur du cercle unité. Le nom remonte semble t'il à Galilée.

On pose $q = \frac{1}{r} > 1$. On fixe un point M de γ , il décrit dans le mouvement une (hypo)cycloïde, dont on cherche une représentation paramétrique. On prend comme paramètre l'angle polaire $\theta \in \mathbb{R}$ (ou $[0, 2\pi]$) du point de contact $H(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ du cercle γ avec le cercle fixe. On suppose que $M(0) = H(0) = (1, 0)$.

i) Les coordonnées du centre $I(\theta)$ de γ au temps θ sont

$$((1 - r) \cos \theta, (1 - r) \sin \theta)$$

ii) Si $\varphi = \widehat{M(\theta), H(\theta)}$, la longueur de l'arc $M(\theta)H(\theta)$ de γ qui est $r\varphi$ doit être égale à la longueur de l'arc $\theta = H(0)H(\theta)$ du cercle unité, donc la relation

$$\theta = r\varphi$$

iii) On peut trouver les coordonnées de $M(\theta)$ comme suit. Posons

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

On a $\overrightarrow{I(\theta)M(\theta)} = r(\cos \varphi \vec{u} - \sin \varphi \vec{v})$. D'autre part

$$\overrightarrow{OI(\theta)} = (1 - r)(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

De la relation de Chasles $\overrightarrow{OM(\theta)} = \overrightarrow{OI(\theta)} + \overrightarrow{I(\theta)M(\theta)}$ on tire par substitution

$$f(\theta) = \overrightarrow{OM(\theta)} = ((1 - r) \cos \theta + r \cos(\varphi - \theta), (1 - r) \sin \theta - r \sin(\varphi - \theta))$$

En conclusion, si on fait le choix de θ comme paramètre

$$f(\theta) = \left((1 - r) \cos \theta + r \cos\left(\frac{\theta}{r} - \theta\right), (1 - r) \sin \theta - r \sin\left(\frac{\theta}{r} - \theta\right) \right)$$

Pour $r = \frac{1}{3}$, la représentation paramétrique est

$$x = \frac{2}{3} \cos \theta + \frac{1}{3} \cos 2\theta, y = \frac{2}{3} \sin \theta - \frac{1}{3} \sin 2\theta$$

On montrera à titre d'exercice que si $r = \frac{1}{4}$, la fonction $f(\theta)$ admet la forme simple

$$M(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$$

On parle alors de la courbe H_4 comme d'une **astroïde**.

Explicitons le vecteur tangent au point de paramètre θ . Un calcul élémentaire conduit à

$$f'(\theta) = r(1-r) \left(-\sin \theta - \sin\left(\frac{1-r}{r}\theta\right), \cos \theta - \cos\left(\frac{1-r}{r}\theta\right) \right)$$

Sous forme complexe, et pour utilisation ultérieure, on trouve

$$f'(\theta) = ir(1-r)(e^{ir\theta} - e^{-i\frac{1-r}{r}\theta})$$

Le cas $r = \frac{1}{2}$ est particulier, on trouve comme courbe le diamètre $[-1, 1]$ du cercle fixe, dit diamètre de La Hire. Voici deux exemples H_3 et $H_{\frac{3}{11}}$, l'indice q signifie que $r = \frac{1}{q}$. On reviendra sur H_3 et H_4 (l'astroïde).

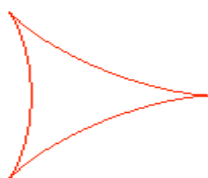


FIG. 1.2 – Hypocycloïde H_3 ou astéroïde

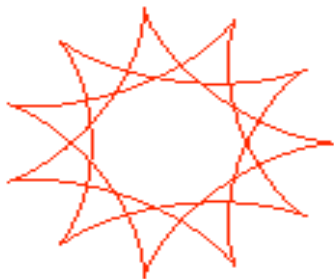


FIG. 1.3 – Hypocycloïde H_{14}

* En général on évitera de confondre une courbe paramétrée $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ avec sa représentation graphique ou image $f(I) \subset \mathbb{R}^n$. Une courbe paramétrée est une fonction $t \mapsto \mathbf{f}(t)$, relativement à laquelle on va s'autoriser cependant une certaine flexibilité, à savoir la possibilité de **changer le paramètre** (voir section de dessous). Donc on fixe le principe selon lequel changer le paramètre ne **change pas la courbe**.

Soit une application $\varphi(s) : J \rightarrow I$, J étant toujours un intervalle, ou une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On dit que l'on a un *changement de paramètre* si φ est une *bijection* de J sur I , et si φ et la fonction réciproque φ^{-1} (qui est définie) sont dérivables. On sait que cela sera le cas si $\varphi'(s) \neq 0 \forall s \in J$

(souvent cette dérivée aura un signe constant sur J , par exemple si J est un intervalle). La fonction composée $s \rightarrow \mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\varphi(s))$ est une nouvelle courbe paramétrée dite déduite de $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ par **changement de paramètre** $t = t(s)$. On verra qu'il n'y a pas lieu de distinguer les deux courbes $t \rightarrow \mathbf{f}(t)$ et $s \rightarrow \mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\varphi(s))$. Dans la section suivante on verra qu'il y a sous certaines conditions un paramètre "plus beau" que les autres : *la longueur d'arc*.

Exemple 1.1.5. Soit la courbe paramétrée (plane) $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, avec $I = \mathbb{R}$. Posons $t = \operatorname{tg} \frac{s}{2}$, avec $J =]-\pi, \pi[$. Du fait des relations

$$\sin s = \frac{2\operatorname{tg} \frac{s}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}}, \quad \cos s = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}}$$

on voit que la courbe $(x(t), y(t))$ n'est autre que le cercle privé du point $(-1, 0)$. On peut observer que le point de paramètre s , est le second point d'intersection de la droite passant par $(-1, 0)$, d'angle polaire $\frac{s}{2}$ avec cercle. Faire le dessin !

Exercices : § 1.1

1. Soit la courbe plane $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$ ($t > 0$). Montrer que par un changement de paramètre, cette courbe se transforme en $x = 2 \operatorname{ch} s$, $y = 2 \operatorname{sh} s$.

Solution Posons $t = e^s$; alors vu que $\operatorname{ch} s = \frac{e^s + e^{-s}}{2} = \frac{e^{2s} + 1}{2e^s}$ et $\operatorname{sh} s = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = \frac{e^{2s} - 1}{2e^s}$, le résultat est clair.

2. Décrire paramétriquement de deux manières différentes la branche $x > 0$ de l'hyperbole équilatère $xy = 1$. Indication : l'une des représentations peut être $x(t) = \operatorname{ch} t$, $y(t) = \operatorname{sh} t$.

3. Le cercle (de rayon 1) $x = \cos t$, $y = \sin t$ est-il le graphe d'une fonction scalaire ?
Solution : Non, car si on considère le graphe de $x \mapsto f(x)$, qui est la courbe paramétrée $t \mapsto (t, f(t))$, on voit que toute droite verticale $x = t = cte$ coupe le graphe en un seul point. Ce n'est pas le cas pour un cercle.

4. Ecrire l'équation de la droite D' passant par $(1, 1)$ et perpendiculaire à la droite $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$. En donner une représentation paramétrique.

Solution : $ax + by = a + b$. Une représentation paramétrique est $x = bt + 1$, $y = -at + 1$.

1.2 Vecteur tangent, tangente

On fixe une courbe paramétrée $t \rightarrow \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ définie sur I . Rappelons que la dérivée de $\mathbf{f}(t)$ (ou $x(t)$) au point de paramètre t , est $\mathbf{f}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. La dérivée k -ième, si elle est définie, est $\mathbf{f}^{(k)}(t_0) = (x_1^{(k)}(t_0), \dots, x_n^{(k)}(t_0))$, ou sous forme de vecteur colonne ($n = 2$)

$$\mathbf{f}^{(k)}(t_0) = \begin{pmatrix} x^{(k)}(t_0) \\ y^{(k)}(t_0) \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.1. 1- Le point $t = t_0$ de courbe $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ est dit **régulier** (resp. **stationnaire**) si $\mathbf{f}'(t_0) \neq 0$ (resp. $= 0$).

2 - La **tangente** en un point régulier de paramètre t_0 , est la droite passant par $\mathbf{f}(t_0)$ de vecteur directeur $\mathbf{f}'(t_0)$. Le vecteur $\mathbf{f}'(t_0)$ est le vecteur tangent au point de paramètre t_0 , souvent appelé le **vecteur vitesse** en t_0 . Le vecteur tangent est donc un vecteur directeur de la tangente.

* On prendra garde au fait que le vecteur tangent au point de paramètre t_0 dépend réellement du paramétrage, mais pas sa direction (voir dessous).

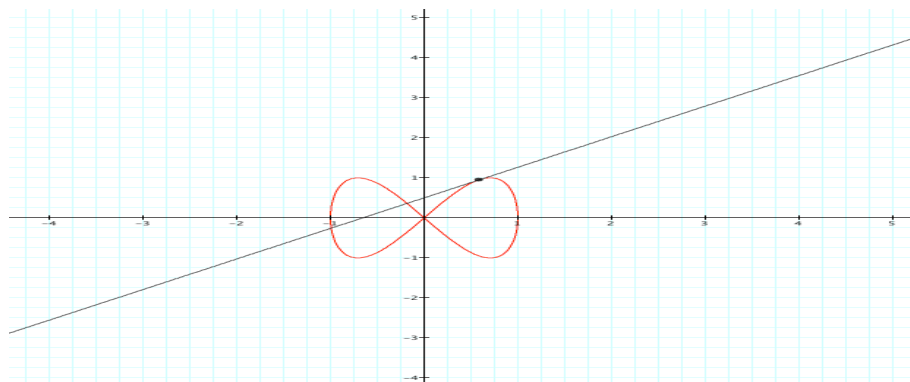


FIG. 1.4 – Tangente à une Lemniscate (voir exercice 5)

Remarque. 1- L'équation paramétrique de la tangente est

$$t \mapsto (x_1(t_0) + tx'_1(t_0), \dots, x_n(t_0) + tx'_n(t_0))$$

Noter que si $n \geq 3$, une droite ne peut être définie par une seule équation, donc sera plus commodément décrite par une équation paramétrique.

2- Si on effectue un changement de paramètre $t = t(s)$, alors on a

$$\boxed{\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times \frac{dt}{ds}}$$

qui exprime un changement du vecteur vitesse mais pas de la direction, donc la tangente est insensible à un changement de paramètre, comme il se doit.

3- Le vecteur vitesse (= vecteur tangent) admet l'interprétation (= définition) usuelle

$$\boxed{\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t \neq t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}}$$

On peut donc écrire pour $|t - t_0|$ petit $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{f}'(t_0) + o(|t - t_0|)$.

Exemple 1.2.2. Soit l'hyperbole équilatère $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{t}$ ($t \neq 0$). La tangente au point de paramètre t_0 a pour vecteur directeur $(1, -\frac{1}{t_0^2})$, son équation cartésienne est $x - \frac{y}{t_0^2} = t_0 - \frac{1}{t_0^3}$.

Si on considère le vecteur vitesse (= vecteur tangent) à l'Astroïde H_4 dans la représentation paramétrique donnée au-dessus, on trouve pour ses coordonnées

$$x'(\theta) = -3 \cos^2 \theta \sin \theta, \quad y'(\theta) = 3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

C'est un vecteur proportionnel à $(-\cos \theta, \sin \theta)$. Noter que les points singuliers sont les quatre points sur les axes.

Remarque. (Pour le Chapitre 2) Il arrive que la courbe paramétrée $f : x = x(t), y = y(t)$ soit donnée par une **équation cartésienne**, qui est une fonction de deux variables $F(x, y)$ telle que

$$F(x(t), y(t)) = 0 \quad (\forall t \in I)$$

La fonction F est supposée de classe C^1 au moins.

Proposition 1.2.3. *Supposons qu'au point (x_0, y_0) de paramètre t_0 , le gradient de F est non nul, alors un vecteur normal (orthogonal au vecteur tangent) est proportionnel au vecteur*

$$\text{grad}F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Démonstration : On a identiquement en t , $F(x(t), y(t)) = 0$, donc $\frac{d}{dt}(F(x(t), y(t))) = 0$. Par l'expression de cette dérivée de fonctions composées, on trouve

$$x'(t_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(t_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Or cette relation exprime bien l'orthogonalité des deux vecteurs invoqués. \square

Exemple 1.2.4. Soit l'hypocycloïde (exemple 1.3) avec le choix de $r = \frac{1}{n}$ ($n \geq 3$). Les points singuliers sont donnés par l'équation d'annulation du vecteur tangent

$$e^{\frac{i\theta}{n}} = e^{-\frac{i(n-1)\theta}{n}} \iff e^{in\theta} = 1$$

Il y a n points stationnaires sur le cercle fixe, sommets du polygone régulier à n sommets.

On fixe $n = 2$. On fait l'hypothèse que la fonction $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $k \geq 1$ au point t_0 , c'est à dire x et y ont de telles dérivées. Alors la formule de Taylor bien connue pour les fonctions scalaires d'une variable est encore valable (sous une certaine forme) pour les fonction vectorielles d'une variable. Rappelons que pour une fonction *scalaire* $t \mapsto \mathbf{f}(t)$, définie sur $[t_0, t_0 + h]$, et k fois dérivable sur $]t_0, t_0 + h[$, et pour un certain $\theta = \theta(h) \in]0, 1[$:

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = \mathbf{f}(t_0) + h\mathbf{f}'(t_0) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} h^{k-1} \mathbf{f}^{(k-1)}(t_0) + \frac{1}{k!} h^k \mathbf{f}^{(k)}(t_0 + \theta h)$$

en particulier cela donne pour $|h|$ petit

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = \mathbf{f}(t_0) + h\mathbf{f}'(t_0) + \frac{1}{2} h^2 \mathbf{f}''(t_0) + \dots + \frac{1}{k!} h^k \mathbf{f}^{(k)}(t_0) + o(1)|h|^k$$

La notation $o(1)$ signifie une fonction vectorielle qui tend vers zéro si $h \rightarrow 0$. Cette version de la formule de Taylor équivaut à l'application de la formule de Taylor à chaque composante de $\mathbf{f}(t)$, soit

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{1}{2} h^2 x''(t_0) + \dots + \frac{1}{k!} h^k x^{(k)}(t_0) + o(1)|h|^k$$

et

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + \dots + \frac{1}{k!}h^ky^{(k)}(t_0) + o(1)|h|^k$$

On utilisera surtout les développements à l'ordre 2 et 3. Par exemple à l'ordre trois,

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = x(t_0) + h\mathbf{f}'(t_0) + \frac{h^2}{2}\mathbf{f}''(t_0) + \frac{h^3}{3!}\mathbf{f}'''(t_0) + o(1)|h|^3$$

Exemple 1.2.5. Soit l'hyperbole équilatère $x(t) = t, y(t) = \frac{1}{t}$. La formule de Taylor à l'ordre n au point t_0 , s'écrit

$$\mathbf{f}(t_0+h) = \mathbf{f}(t_0) + h \begin{pmatrix} 1 \\ -t_0^{-2} \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2t_0^{-3} \end{pmatrix} + \dots + h^n \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^n n! t_0^{-(n+1)} \end{pmatrix} + o(1)|h|^n$$

Exercices : § 1.2

1. La **Lemniscate** : On considère l'hyperbole équilatère $xy = 1$. En un point M de l'une des branches de l'hyperbole, on considère la tangente. Soit alors la droite normale à la tangente issue de l'origine. Cette normale coupe la tangente en N . Montrer que lorsque M varie, N décrit une courbe dont on explicitera une représentation paramétrique, en fonction d'un paramètre de son choix. Cette courbe est une "lemniscate".

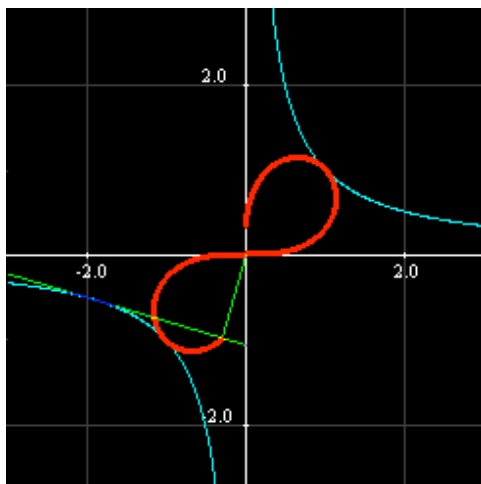
Solution : le vecteur tangent en le point de paramètre t_0 est $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t_0^2} \end{pmatrix}$, une

direction normale est donc $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_0^2} \\ 1 \end{pmatrix}$. L'équation cartésienne de la tangente est

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - t_0^{-1}}{-t_0^{-2}}$$

soit $(x - t_0) + t_0(yt_0 - 1) = 0$. La droite normale issue de l'origine est donnée paramétriquement par $x = \alpha t_0^2, y = \alpha$ (α est le paramètre). Le point N a pour coordonnées

$$N = \left(\frac{2t_0^{-1}}{t_0^2 + t_0^{-2}}, \frac{2t_0}{t_0^2 + t_0^{-2}} \right)$$



1.3 Forme au voisinage d'un point

Soit $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ la courbe de paramètre t . On suppose dans la suite que les dérivées existent à tous les ordres invoqués. Soit $t_0 \in I$; l'étude locale en t_0 est basée sur l'idée suivante. On suppose que pour un $p \geq 1$

$$\boxed{\mathbf{f}'(t_0) = \dots = \mathbf{f}^{(p-1)}(t_0) = 0, \quad \vec{u} = \mathbf{f}^{(p)}(t_0) \neq 0}$$

Les cas que nous rencontrerons sont $p = 1$ (point régulier), $p = 2$ (point stationnaire ordinaire). Supposons ensuite que $q > p$ est le **plus petit entier** tel que le vecteur $\vec{v} = \mathbf{f}^{(q)}(t_0)$ soit non proportionnel à $\vec{u} = \mathbf{f}^{(p)}(t_0)$. On suppose que q existe. La formule de Taylor donne l'approximation suivante à l'ordre q pour $|h|$ petit de $\mathbf{f}(t_0 + h)$:

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = \mathbf{f}(t_0) + \left(\frac{h^p}{p!} + \alpha_{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + \alpha_{q-1} \frac{h^{q-1}}{(q-1)!} \right) \vec{u} + \frac{h^q}{q!} \vec{v} + o(1)|h|^q$$

avec pour $p+1 \leq k \leq q-1$, $\mathbf{f}^{(k)}(t_0) = \alpha_k \vec{u}$.

Nous allons voir comment exploiter ce développement pour en tirer des informations sur le comportement local de $\mathbf{f}(t)$ pour $|t - t_0| \rightarrow 0$. Par construction les vecteurs \vec{u}, \vec{v} forment une base (pas orthonormée en général) de \mathbb{R}^2 . Au moyen d'un changement de coordonnées, on peut supposer (pour une meilleure visualisation) que $\mathbf{f}(t_0) = (0, 0)$, et

$$\boxed{\vec{u} = (a, 0), \quad a > 0, \quad \vec{v} = (b, c), \quad c \neq 0}$$

De la sorte la tangente est l'axe des x . Distinguons plusieurs cas. 1) $p = 1, q = 2$ (**Point régulier-non inflexion**). La tangente existe, et le vecteur dérivée seconde (**accélération**) est *non proportionnel* au vecteur vitesse. La formule de Taylor à l'ordre deux donne

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = \mathbf{f}(t_0) + h\vec{u} + \frac{h^2}{2} \vec{v} + o(1)|h|^2$$

de manière équivalente

$$x(t_0 + h) = ah + b\frac{h^2}{2} + o(1)|h|^2, \quad y(t_0 + h) = c\frac{h^2}{2} + o(1)|h|^2$$

La différence : fonction - tangente

$$\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0) - h\vec{u} = \frac{h^2}{2} \vec{v} + o(1)|h|^2$$

montre que la courbe reste confinée dans le demi-plan délimité par la tangente dans lequel pointe le vecteur accélération \vec{v} . 2) $p = 1, q = 3$ (**Point régulier-Inflexion ordinaire**). Les vecteurs $u = \mathbf{f}'(t_0)$ et $\mathbf{f}''(t_0)$ sont proportionnels. Le même raisonnement que dans le cas 1) donne (avec $a, d \neq 0$) :

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = h \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{6} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + o(1)|h|^3$$

soit au niveau des coordonnées :

$$x(t_0 + h) = ah + \frac{b}{2}h^2 + c\frac{h^3}{6} + o(1)|h|^3, \quad y(t_0 + h) = d\frac{h^3}{6} + o(1)|h|^3$$

Pour h petit le signe de $y(t_0 + h)$ est celui de hd , donc la courbe *traverse* la tangente en $f(t_0)$, i.e change de signe selon que $h > 0$, ou $h < 0$. On parle dans ce cas d'une **inflexion ordinaire**, et de la tangente comme une tangente d'inflexion.

Par exemple le graphe de $t \mapsto \sin t$ a une inflexion en $t = 0$. La tangente est la première bissectrice. Le développement de Taylor de $\mathbf{f}(t) = (t, \sin t)$ en $t = 0$ à l'ordre n est

$$\mathbf{f}(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(1)t^n$$

3) $p = 2, q = 3$ (**rebroussement ordinaire de première espèce**). Les vecteurs $\mathbf{f}''(t_0)$ et $\mathbf{f}'''(t_0)$ sont indépendants. La formule de Taylor à l'ordre trois donne

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{6} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + o(1)h^3, \quad (a, c \neq 0)$$

soit pour les coordonnées

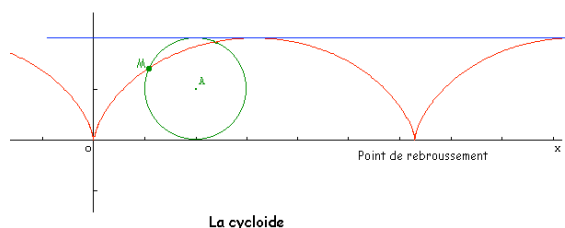
$$x(t_0 + h) = a\frac{h^2}{2} + b\frac{h^3}{6} + o(h)|h|^3, \quad y(t_0 + h) = c\frac{h^3}{6} + o(1)|h|^3$$

Donc relativement à la perpendiculaire en $x(t_0)$ à la droite de vecteur directeur \vec{u} , on voit que le signe de $x(t_0 + h)$ reste constant, donné par celui de a , dès lors la courbe reste d'une même côté de cette perpendiculaire, mais en regardant le signe de $y(t_0 + h)$, donné par h^3c , on voit que quand h change de signe, la courbe traverse la droite de vecteur directeur u (qu'on peut assimiler à une tangente). La courbe s'écrase si $t \rightarrow 0$ sur la droite de direction u . L'explication est que $\frac{y}{x} \sim t \rightarrow 0$. Le dessin typique est fourni par la cycloïde.

Soit la cycloïde $x(t) = t - \sin t, y(t) = 1 - \cos t$. On note que $\mathbf{f}(t + 2\pi) = \mathbf{f}(t) + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, fait qui dit que le point de paramètre $t + 2\pi$ est le translaté de 2π dans la direction Ox du point $\mathbf{f}(t)$. On peut donc se limiter à étudier \mathbf{f} sur $[-\pi, \pi]$. Comme $x(-t) = -x(t), y(-t) = y(t)$, l'axe Oy est un axe de symétrie. On trouve

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$$

donc il y a un point stationnaire en $t = 2k\pi$. Examinons le point $t = 0$. On a $x''(t) = \sin t, y''(t) = \cos t$, donc $p = 1$, et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En dérivant une fois de plus, on trouve $x'''(t) = \cos t, y'''(t) = -\sin t$. Donc $q = 3$, et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il y a donc en ce point un rebroussement de première espèce.



Exemple 1.3.1. (L'hypocycloïde à 3 points de rebroussements H_3) Elle est donnée par (exemple 1.3)

$$x = \frac{2}{3} \cos \theta + \frac{1}{3} \cos 2\theta, \quad y = \frac{2}{3} \sin \theta - \frac{1}{3} \sin 2\theta$$

Les points singuliers sont les racines cubiques de l'unité $1, j, j^2$ ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$). Comme la courbe est invariante par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, il suffit d'examiner le point de paramètre $\theta = 0$, soit le point $(1, 0)$. On prend un développement limité à l'ordre trois de x et y :

$$x = 1 - \frac{5}{2}\theta^2 + o(\theta^3), \quad y = \frac{7\theta^3}{6} + o(\theta^3)$$

On trouve bien un point de rebroussement de première espèce. 4) $p = 2, q = 4$ (**rebroussement ordinaire de seconde espèce**) La formule de Taylor donne

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = \left(\frac{h^2}{2} + \alpha_3 \frac{h^3}{6} \right) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^4}{4!} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + o(1)h^4 \quad (a, c \neq 0)$$

soit pour les coordonnées

$$x(t_0 + h) = a \frac{h^2}{2} + o(1)|h|^3, \quad y(t_0 + h) = c \frac{h^4}{4!} + o(1)|h|^4$$

A la différence du cas de première espèce, le signe de $y(t_0 + h)$ est fixé par le signe de $c \neq 0$. Donc la courbe pour h petit reste d'un même côté de la droite de direction u (axe des x), et "s'écrase" sur elle si $t \rightarrow 0$. La raison est identique au cas 1-ère espèce, i.e. $\frac{y}{x} \rightarrow 0$. Par exemple $x(t) = t^2, y(t) = \sin(t^4 + t^5)$ en $t = 0$. Observer que $\sin(t^4 + t^5) \sim t^4$ si $t \rightarrow 0$

Exercices : § 1.3

- Vérifier que la courbe $t \mapsto (t^2 + t^3, t^4 + t^5)$ a un seul point stationnaire pour $t = 0$. En faire l'étude.

Solution : calcul élémentaire. On a $x'(t) = 2t + 3t^2 = t(2 + 3t), y'(t) = 4t^3 + 5t^4 = t^3(4 + 5t)$. Si $x'(t) = 0$ alors $t = 0$, ou $t = -\frac{2}{3}$. Comme $-\frac{2}{3}$ n'annule pas $4 + 5t$, le seul point stationnaire est pour $t = 0$. On a de suite $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{f}(t) = (t^2 + t^3)u + (t^4 + t^5)v$. On a un point de rebroussement de seconde espèce en $t = 0$.

- Soit pour un quelconque $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la courbe notée \mathcal{C}_n décrite par

$$x(t) = \cos nt + n \cos t, \quad y(t) = \sin nt + n \sin t$$

- Que dire de \mathcal{C}_1 ?
- Donner en fonction de n le nombre de points stationnaires, et en préciser la nature.

1.4 Branches infinies

Définition 1.4.1. On dit qu'une courbe paramétrée $t \rightarrow \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ présente **une branche infinie** en $t = t_0$, si d'une part $\mathbf{f}(t)$ est définie sur un intervalle $(a, t_0[$, ou $]t_0, b)$, ou les deux, et si pour $t \rightarrow t_0$, $t \neq t_0$, $\|\mathbf{f}(t)\| \rightarrow \infty$.

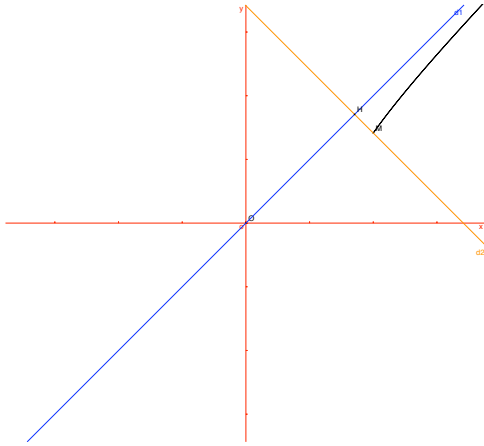
Si $\mathbf{f}(t) = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ cela veut donc dire que pour une coordonnée au moins, on a $x_i(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow t_0$, $t \neq t_0$.

Dans la suite on suppose $n = 2$ (Courbes planes)

Définition 1.4.2. On dit que la courbe $(x(t), y(t))$ a une **direction asymptotique** en t_0 , si soit $\lim_{t \rightarrow t_0, t \neq t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \ell \in \mathbb{R}$ existe, ou bien $|\frac{y(t)}{x(t)}| \rightarrow \infty$. Dans le premier cas on dit que la droite $y = \ell x$ est la direction asymptotique, et dans le second cas c'est la droite $x = 0$, axe des y .

S'il y a une direction asymptotique (droite δ passant par l'origine), on dit qu'une droite Δ parallèle à δ est une **asymptote**, si en notant $h(t)$ la projection orthogonale de $\mathbf{f}(t)$ sur Δ :

$$\lim_{t \rightarrow t_0, t \neq t_0} \|\mathbf{f}(t) - h(t)\| = 0$$



D'une autre manière, soit Δ_t la droite parallèle à δ passant par $\mathbf{f}(t)$. Si cette droite *tend* vers une position limite pour $t \rightarrow t_0$, cette position limite est Δ . Sinon si Δ_t s'éloigne à l'infini, on dit qu'on a une **branche parabolique** dans la direction de δ .

Les exemples permettront de bien comprendre la manière d'étudier une branche infinie. Dans la pratique on procède ainsi. Si $x(t)$ tend vers une valeur finie a et $y(t)$ tend vers l'infini, on dit que la droite $x = a$ est asymptote, et vice-versa si $y(t) \rightarrow b \in \mathbb{R}$. On suppose maintenant que *simultanément* $|x(t)|$ et $|y(t)|$ tendent vers ∞ . Si $\ell = 0$, on a une branche parabolique dans la direction de l'axe des x , et une branche parabolique dans la direction de Oy si $\ell = \infty$.

Exemple typique la parabole $x = t^2$, $y = t$. De même si $\ell = \infty$, il y a une branche parabolique dans la direction de l'axe des y , exemple tout aussi typique, la parabole $x = t$, $y = t^2$.

Supposons maintenant ℓ fini. La projection orthogonale $h(t)$ de $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ sur la droite $y = \ell x + d$ est (calcul classique laissé en exercice)

$$h(t) = (\alpha \ell + x(t), -\alpha + y(t)), \quad \alpha = \frac{-y + \ell x + d}{1 + \ell^2}$$

En particulier $\|\mathbf{f}(t) - h(t)\|^2 = \frac{(y - \ell x - d)^2}{1 + \ell^2}$. En conséquence la droite $y = \ell x + d$ est asymptote \iff

$$\lim_{t \rightarrow t_0, t \neq 0} y - \ell x - d = 0.$$

En résumé :

Proposition 1.4.3. *S'il y a une direction asymptotique finie ℓ en $t \rightarrow t_0$, et si $\lim_{t \rightarrow t_0, t \neq 0} y - \ell x = d$, la droite $y = \ell x + d$ est asymptote.*

Pour trouver l'équation de l'asymptote, on peut prendre un développement dit "asymptotique" de $x(t)$ et de $y(t)$ lorsque $t \rightarrow t_0$. Cela revient à prendre (par exemple) un développement en puissance de t , pour faire apparaître les termes qui tendent vers l'infini (en $\frac{1}{t}$), et à les comparer.

Exemple 1.4.4. $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Notons qu'il y a une branche infinie en $t \rightarrow \pm\infty$ (il y a branche infinie si $t \rightarrow 0$ aussi, mais comme la courbe est invariante par $t \mapsto \frac{1}{t}$, et est symétrique par rapport à l'axe des x , on peut se limiter à $t \geq 1$). On peut écrire pour $t \rightarrow \infty$: $y(t) = t\sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}$, et par un développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}$ par rapport à $u = \frac{1}{t} \rightarrow 0$, on peut écrire

$$y(t) = t\left(1 + \frac{1}{2t^4} + o\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^4}\right) = t + \frac{1}{2t^3} + \frac{1}{t^3} \circ (1)$$

Donc $y(t) = x(t) + O\left(\frac{1}{t}\right)$, et l'asymptote est en conséquence $y = x$.

1.5 Construction des courbes paramétrées planes

Soit la courbe $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$. La démarche à suivre pour construire cette courbe est la suivante; noter qu'elle prolonge celle classique pour étudier le graphe $x \rightarrow (x, y(x))$ de la fonction scalaire $x \rightarrow y(x)$:

1. on trouve le domaine de définition de \mathbf{f} (le domaine de définition commun à $x(t)$ et $y(t)$), et les axes de symétrie éventuels;
2. on étudie le sens de variation de $x(t)$ et $y(t)$, en général par le signe de $x'(t)$ et de $y'(t)$;
3. on détermine les branches infinies et les asymptotes éventuelles;
4. on détermine les points spéciaux, inflexions, rebroussements);
5. on peut étudier la concavité éventuelle;

Exemple 1.5.1. Soit la courbe $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{2t^2}$.

1. $I = \mathbb{R} - \{0\}$

2. $x'(t) = \frac{t^2-1}{t^2}$, $y'(t) = \frac{t^3-1}{t^3}$;

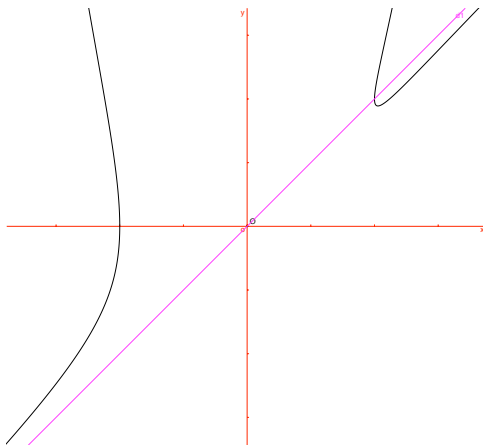
3. tableau des variations ;

4. asymptotes ; Les branches infinies sont pour $t \rightarrow \pm\infty$ et $t \rightarrow 0$. Si $t \rightarrow 0$, alors $\frac{y}{x} \sim \frac{1}{2t} \rightarrow \infty$. La direction asymptotique est la droite verticale $x = 0$ (axe des y), et dans les deux cas $t \rightarrow 0, t < 0$, $t \rightarrow 0, t > 0$, comme x et y tendent vers l'infini, et que $\frac{y}{x} \rightarrow \pm\infty$, il y a une branche parabolique dans la direction de l'axe Oy ;

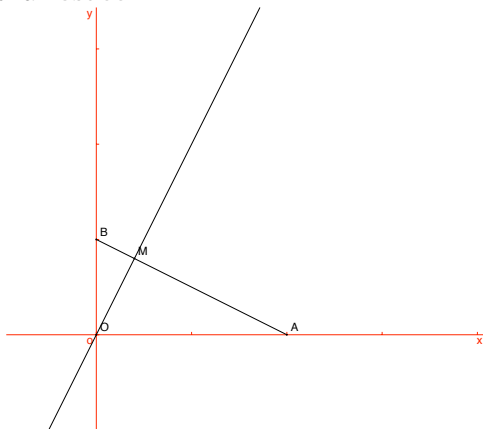
Remarque La phrase "branche parabolique" est sur cet exemple précise car si $t \rightarrow 0$, $y \sim \frac{x^2}{2}$. La parabole asymptote est $y = \frac{x^2}{2}$. Si $t \rightarrow \pm\infty$, on a $y \sim x$ donc la direction asymptotique est $y = x$. Comme $y - x = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$ on voit que l'asymptote est la droite $y = x$.

5. points stationnaires L'unique point stationnaire est pour $t = 1$. On a $x''(t) = \frac{2}{t^3}$, $y''(t) = \frac{3}{t^4}$, et $x'''(t) = \frac{-6}{t^4}$, $y'''(t) = \frac{12}{t^5}$. Donc $(x''(1), y''(1)) = (2, 3)$, et $(x'''(1), y'''(1)) = (6, 12)$ vecteur non proportionnel à $(2, 3)$. On a un rebroussement de 1-ère espèce :

6. graphe :



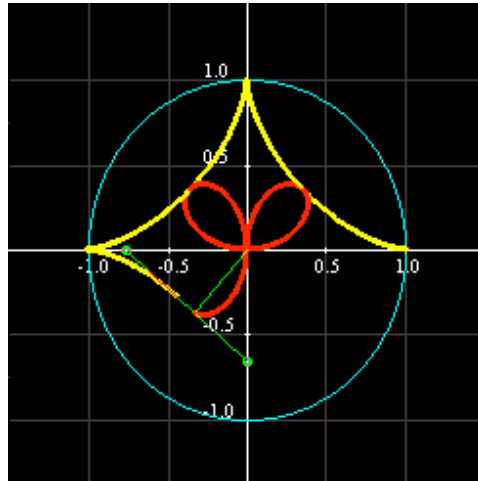
Exemple 1.5.2. La rosace : Dans le plan euclidien de coordonnées x, y , on considère deux points mobiles A sur Ox , et B sur Oy tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$. Soit la projection orthogonale M de $O = (0, 0)$ sur la droite AB . Le point M décrit une courbe appelée la **rosace**.



Exercices : § 1.4

1. Trouver une représentation paramétrique de la "rosace" (une définition de la rosace comme courbe paramétrée). Faire le dessin. Observer que la droite AB est tangente à une Astroïde.

Solution : Si on pose $A = (t, 0)$, $B = (0, b)$, on trouve facilement que $H = (b^2t, bt^2)$ avec $b^2 + t^2 = 1$. La courbe a en fait deux branches selon que $b = \sqrt{1-t^2}$, ou $b = -\sqrt{1-t^2}$. On peut se limiter à la première. Alors la courbe est donnée par $x = t(1-t^2)$, $y = t^2\sqrt{1-t^2}$ ($t \in]-1, 1[$). Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à Oy . Donc on peut se limiter à $t \in [0, 1[$. Le vecteur tangent au point de paramètre t est $(1-3t^2, \frac{2t-3t^3}{\sqrt{1-t^2}})$, avec une tangente horizontale en $t = 0$ (à l'origine). Sur $[0, 1[$ le point qui annule x' est $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et le point t_2 qui annule y' est (outre $t = 0$, $t_2 = \sqrt{2/3}$). Si $t \rightarrow 1$, la courbe tend vers $(0, 0)$, avec une tangente qui a pour position limite l'axe Oy . La figure est alors

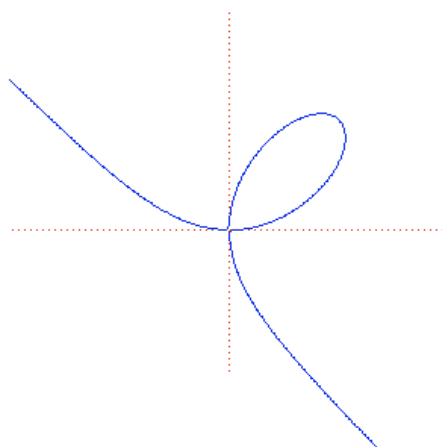


2. Etudier et construire la courbe (Folium de Descartes)

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

Solution :

Folium of Descartes



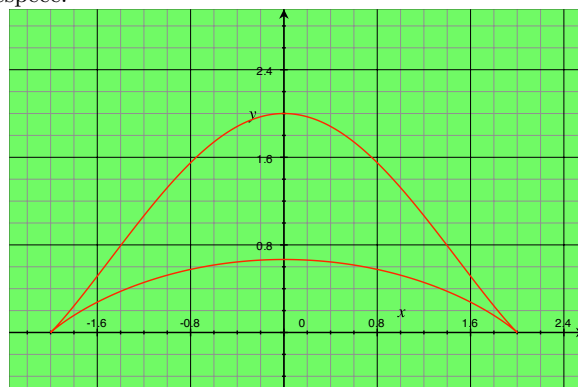
3. Equations des asymptotes à la courbe $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.

Solution : $x = \frac{-1}{2}$, $2x - 4y - 3 = 0$.

4. Graphe de la courbe $x = 2 \sin t$, $y = \frac{2 \cos^2 t}{2 + \cos t}$.

Solution : Le domaine de définition est \mathbb{R} . Il n'y a pas de branches infinies. Par périodicité, on peut limiter l'étude à $[-\pi, \pi]$. Comme par $t \rightarrow -t$ x change de signe mais pas y , Oy est un axe de symétrie. On trace la courbe sur $t \in [0, \pi]$. Le calcul de x' et de y' montre que $t = \pi/2$ conduit à un point singulier.

Pour étudier le point singulier $t = \pi/2$, le mieux est de prendre un développement limité de x et y en h , avec $t = \pi/2 + h$. On trouve alors un point de rebroussement de 1-ère espèce.



5. Dans l'exemple de l'exercice 2 de la section 1.3, expliciter les symétries de C_n .

1.6 Courbes planes en coordonnées polaires

Représentation paramétrique en coordonnées polaires

L'utilisation des coordonnées polaires permet une approche simplifiée pour certaines courbes paramétrées. Cette section est une suite de remarques et d'exemples en complément à l'étude générale. On se place toujours dans le plan

euclidien \mathbb{R}^2 muni du repère orthonormé canonique (O, i, j) , avec x, y les coordonnées correspondantes, qui sera éventuellement identifié au plan complexe. En effet on va passer des coordonnées (x, y) aux coordonnées **polaires** (r, θ) liées par

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Définition 1.6.1. Une courbe est dite définie paramétriquement en coordonnées polaires, si on a deux fonctions (supposée dérivables autant de fois que nécessaire) $r(t)$ et $\theta(t)$ telles que

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

soit

$$\boxed{x(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \theta(t)}$$

C'est en fait simplement un *exemple de représentation paramétrique*. On notera qu'on impose pas $r(t) \geq 0$!. Cela permet comme on va le voir un traitement spécifique de la courbe.

Exemple 1.6.2 (Droite ne passant pas par l'origine). Soit l'équation cartésienne de la droite

$$ax + by = c \neq 0, \quad a^2 + b^2 = 1$$

Posons $a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$, alors si $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, on obtient

$$r \cos(\theta - \alpha) = c \iff \frac{c}{r} = \cos(\theta - \alpha)$$

La représentation paramétrique en coordonnées polaires est

$$\boxed{\theta = t, \quad r(t) = \frac{c}{\cos(t - \alpha)}}$$

il est souvent préférable de garder l'équation sous la forme $\frac{1}{r} = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{c}$, le paramètre étant l'angle polaire θ .

Exemple 1.6.3 (Cercle de centre l'origine). Si le rayon est $\rho > 0$, le cercle a pour équation paramétrique en polaires

$$\boxed{r(\theta) = \rho = cte}$$

Exemple 1.6.4 (Le Limaçon de Pascal). Soit le cercle de centre $I = (a, 0)$ de rayon a . Une droite d'angle polaire θ passant par l'origine coupe le cercle en O et un autre point N ($N = O$ si la droite est verticale), avec

$$\overrightarrow{ON} = (2a \cos \theta)(\cos \theta, \sin \theta)$$

Soit le point M situé sur la demi-droite OM tel que

$$\overrightarrow{OM} = (2a \cos \theta + b)(\cos \theta, \sin \theta), \quad b > 0$$

Lorsque θ varie entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, le point $M(\theta)$ décrit une courbe dite le "Limaçon de Pascal". Son équation paramétrique en coordonnées polaires est donc

$$t = \theta, \quad r(\theta) = 2a \cos \theta + b$$

Dans le cas général, étudions le vecteur tangent à la courbe représentée par

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \theta(t)$$

Définissons un repère orthonormé (qui dépend de t) par :

$$\vec{u}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad \vec{v}(t) = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$$

Alors en dérivant par rapport à t , on trouve

Proposition 1.6.5. *Le vecteur tangent au point de paramètre t est :*

$$\mathbf{t}(t) = r'(t) \vec{u}(t) + r(t) \theta'(t) \vec{v}(t)$$

Supposons $\theta(t) = t$. On a alors :

1. on a un point stationnaire ssi $r(\theta) = r'(\theta) = 0$. Le point est donc l'origine $O = (0, 0)$.
2. Les directions tangentielles à l'origine (éventuelles) sont les droites d'angles polaires θ , solution de $r(\theta) = 0$.

Démonstration : Pour le dernier point, on note que si $r(\theta) = 0$ (et $r'(\theta) \neq 0$), alors le vecteur tangent est proportionnel à $u(\theta)$. \square

Remarque. • Supposons $\theta = t$. Si la courbe définie paramétriquement par $r = r(\theta)$ a un point d'inflexion en $M(\theta)$ (point régulier) alors

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$$

au point θ . On doit en effet écrire que les vecteurs vitesse et accélération sont colinéaires, le résultat découle du calcul qui précède, joint à l'exercice de dessus. L'inflexion ordinaire, la seule considérée dans ce cours, correspond au cas $p = 1, q = 3$ de la section 2.4. Pour avoir une inflexion ordinaire il faut donc en plus s'assurer en plus de la relation de dessus que $q = 3$.

• Si la courbe passe par l'origine, donc $r(\theta) = 0$ a une solution au moins, la tangente en O , correspondante à θ_0 , tel que $r(\theta_0) = 0$, est la droite de pente θ_0 . En effet, $\frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \operatorname{tg} \theta \rightarrow \operatorname{tg} \theta_0$ si $\theta \rightarrow \theta_0$ (∞ si $\cos \theta_0 = 0$). La tangente a donc pour pente θ_0 ou ∞ .

Représentation graphique

Dorénavant on suppose $\theta = t$. La représentation graphique d'une courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$, utilise quelques aménagements par rapport à la méthode générale. On évite en général de repasser aux coordonnées cartésiennes !. L'exception est l'étude des points singuliers. On doit donc en général

- i) Examiner les symétries éventuelles de la courbe, pour réduire le domaine d'étude.
- ii) Etudier les branches infinies éventuelles $|r(\theta)| \rightarrow \infty$ si $\theta \rightarrow \theta_0$.

iii) S'appuyer sur le signe et les variations de $r(\theta)$ avec parfois l'étude de quelques tangentes particulières (parallèles aux axes en général) pour conclure le tracé de la courbe.

Précisons la manière de développer ces trois points.

Pour i) cela sera clair sur un exemple, les propriétés de périodicité de $r(\theta)$, fournissent une invariance par rotation.

Pour ii) on notera que $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$, donc la direction asymptotique est donnée par le vecteur $\vec{u}(\theta_0)$, i.e la direction d'angle polaire θ_0 . Pour vérifier s'il y a une asymptote correspondant à cette direction, on doit projeter orthogonalement $M(\theta)$ en $H(\theta)$ sur la droite direction asymptotique (qui passe par l'origine) et montrer que $\|M(\theta)H(\theta)\|$ a une limite si $\theta \rightarrow \theta_0$. Pour évaluer cette distance, il est commode d'exprimer $\overrightarrow{OM}(\theta)$ sur la base orthonormée directe

$$\vec{u}_0 = \cos \theta_0 \vec{i} + \sin \theta_0 \vec{j}, \vec{v}_0 = -\sin \theta_0 \vec{i} + \cos \theta_0 \vec{j}$$

On a par inversion de ces relations

$$\vec{i} = \cos \theta_0 \vec{u}_0 - \sin \theta_0 \vec{v}_0, \vec{j} = \sin \theta_0 \vec{u}_0 + \cos \theta_0 \vec{v}_0$$

Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(\theta) &= r(\theta) (\cos \theta (\cos \theta_0 \vec{u} - \sin \theta_0 \vec{v}) + \sin \theta (\sin \theta_0 \vec{u} + \cos \theta_0 \vec{v})) \\ &= r(\theta) ((\cos(\theta - \theta_0)u_0 + \sin(\theta - \theta_0)v_0)) \end{aligned}$$

On obtient la distance cherchée en prenant la valeur absolue de la composante sur v_0 :

$$\|MH\| = |r(\theta) \sin(\theta - \theta_0)|$$

expression qui doit donc avoir une limite pour qu'il ait une asymptote de direction d'angle polaire θ_0 . Dans ce cas, si

$$\boxed{\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = h}$$

la droite asymptote est celle d'équation $((-, -) = \text{produit scalaire})$

$$\boxed{(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_0) = h}$$

Par exemple si $\theta_0 \equiv 0 \pmod{\pi}$, la direction asymptotique est Ox , et il y a asymptote si

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} y(\theta) = r(\theta) \sin \theta = d$$

existe. Si $\theta_0 \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$, on notera que d'une autre manière, et plus directement (section précédente), il y a asymptote ssi

$$y - x \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{r(\theta) \sin(\theta - \theta_0)}{\cos \theta_0} \rightarrow d$$

l'asymptote est la droite $\boxed{y = \operatorname{tg} \theta_0 x + d}$.

Symétries

Il est fréquent qu'une courbe définie en coordonnées polaires $r = r(\theta)$ présente des symétries, invariance par une rotation, et (ou) symétrie relativement à une droite passant par l'origine.

Proposition 1.6.6. *Si $r(\theta + \alpha) = r(\theta) \forall \theta$, ce qui implique pour le domaine de définition $I + \alpha = I$, alors la courbe est invariante par rotation d'angle α .*

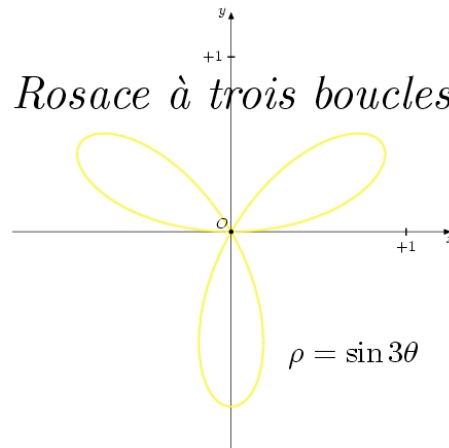
Démonstration : Ecrivons $f(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$. la rotation d'angle alpha a pour expression $z \mapsto e^{i\alpha}z$. Donc $e^{i\alpha}f(\theta) = r(\theta)e^{i(\alpha+\theta)}$ et par l'hypothèse $= r(\theta+\alpha)e^{i(\alpha+\theta)} = f(\theta + \alpha)$. \square

La symétrie relativement à la droite d'angle polaire α est $z \mapsto e^{2i\alpha}\bar{z}$ (le vérifier).

Proposition 1.6.7. *Si $r(2\alpha - \theta) = r(\theta)$, la courbe admet la droite d'angle polaire α pour axe de symétrie.*

Démonstration : On a $e^{2i\alpha}\overline{r(\theta)e^{i\theta}} = r(\theta)e^{i(2\alpha-\theta)}$, qui donne par l'hypothèse $= r(2\alpha - \theta)e^{i(2\alpha-\theta)} = f(2\alpha - \theta)$. \square

Exemple 1.6.8 (La fleur à trois pétales (ou rosace à trois boucles)). Elle est donnée par l'équation polaire $r(\theta) = \sin 3\theta$.



On observe d'abord que r est périodique de période 2π , et que $r(-\theta) = -r(\theta)$, donc $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des y . On a aussi $r(\theta + \frac{2\pi}{3}) = r(\theta)$, donc $M(\theta + \frac{2\pi}{3})$ se déduit de $M(\theta)$ par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, en fait la périodicité de r est de $\frac{2\pi}{3}$. On peut ainsi limiter l'étude à un intervalle d'amplitude $\frac{\pi}{3}$, par exemple $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ la fonction $r(\theta)$ est positive, croissante sur $[0, \frac{\pi}{6}]$, décroissante sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, avec un maximum en $\frac{\pi}{6}$. Noter que si $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$

$$r(\frac{\pi}{3} - \theta) = \sin(\pi - 3\theta) = r(\theta).$$

Donc la droite d'angle polaire $\theta = \frac{\pi}{6}$ est un axe de symétrie pour la partie du graphe limitée à $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$, en fait pour toute la courbe. Il se déduit de Oy par rotation, et pour cette raison la droite d'angle polaire $\theta = \frac{5\pi}{6}$ est aussi un axe de symétrie. Enfin en $\theta = 0$, la tangente est l'axe des x . On peut imaginer le graphe d'abord sur $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$, puis par les symétries et la rotation, le prolonger.

Noter que les tangentes au point $O = (0, 0)$ sont données par les solutions de l'équation $\sin 3\theta = 0$, donc sont d'angle polaire $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ modulo π .

Exemple 1.6.9. *La spirale logarithmique* Elle est donnée par $r = e^{m\theta}$, $m > 0$. Cette courbe est liée au mathématicien Suisse Jacques Bernoulli. Dans la cathédrale de Bâle, on trouve la pierre tombale, qui suggère semble t'il, une spirale d'Archimède!



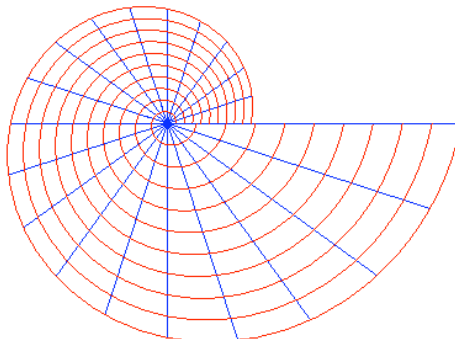
Pour $m = 0$, c'est le cercle unité. On voit que $r(\theta) \rightarrow \infty$ si $\theta \rightarrow \infty$, et $r(\theta) \rightarrow 0$ si $\theta \rightarrow -\infty$. De plus r est croissante. L'observation importante qui permet d'avoir une vision plus précise du tracé de la courbe est que le vecteur tangent au point de paramètre θ est

$$\mathbf{t}(\theta) = e^{m\theta}(m\vec{u} + \vec{v}).$$

Il fait donc avec \vec{u} un angle constant V , tel que

$$\cos V = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Au point de paramètre $\theta = 0$, le vecteur tangent est $(m, 1)$. Par ailleurs la courbe coupe l'axe des x si $\cos \theta = 0$, donc pour $\theta = k\pi$. Le point correspondant tend vers l'infini si $k \rightarrow \infty$, et vers zéro si $k \rightarrow -\infty$. La courbe *spirale* autour de l'origine en s'éloignant lorsque $\theta \rightarrow \infty$.



Compléments : courbes de Lissajous



Les courbes de Lissajous, classiquement visibles sur un oscilloscope, sont comme indiqué dans l'introduction les courbes $\mathcal{L}_{a,b}$ données paramétriquement par

$$x = \sin t, \quad y = \sin(at + b), \quad t \in \mathbb{R}$$

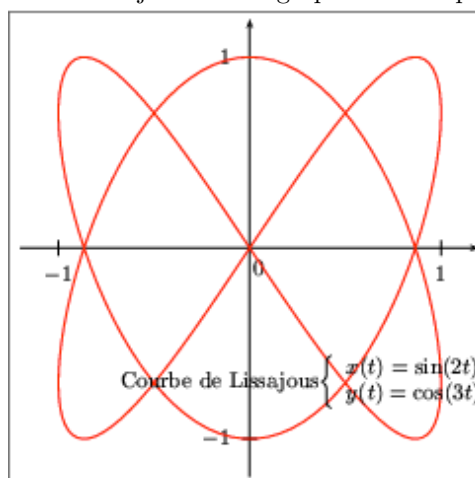
pour deux paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Le design de ces courbes est sensible à la valeur des constantes a, b . Ce qui est commun à toutes ces courbes, est le fait qu'elles sont contenues dans la "boite" $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (écran de l'oscilloscope). Si $a = 1, b = \pi/2$, on a le cercle unité. Si a n'est pas rationnel ($a \notin \mathbb{Q}$), la courbe devient compliquée, elle est "dense" dans le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. On va se concentrer sur la courbe $\mathcal{L}_a(b = 0)$, et le cas typique $a = 3/2$. Dans cet exemple, on note tout d'abord que $f(t)$ est 4π -périodique, on peut donc se limiter à l'étudier sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Comme par $t \mapsto -t$, x et y changent de signe, manifeste d'une symétrie par rapport à l'origine, on se limite à $[0, 2\pi]$. Enfin, par $t \mapsto 2\pi - t$, x change de signe, et y ne change pas, montrant que l'axe Oy est un axe de symétrie. On se limite finalement à $[0, \pi]$. La tableau des variations de x est clair.

t	0	$\pi/2$	π
x'	+	0	-
x	0	1	-1

Regardons celui de y . On a $x'(t) = \cos t$, $y'(t) = \frac{3}{2} \cos \frac{3}{2}t$. Il est visible qu'il n'y a pas de point singulier. Pour $t \in [0, \pi]$, les points à tangente horizontale sont $t = \frac{\pi}{3}$, et à tangente verticale $t = \frac{\pi}{2}$. Le tableau des valeurs de y est

y'	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π
y	0	1	0	-1

Les informations obtenues justifient le graphe suivant pour $\mathcal{L}_{3/2}$



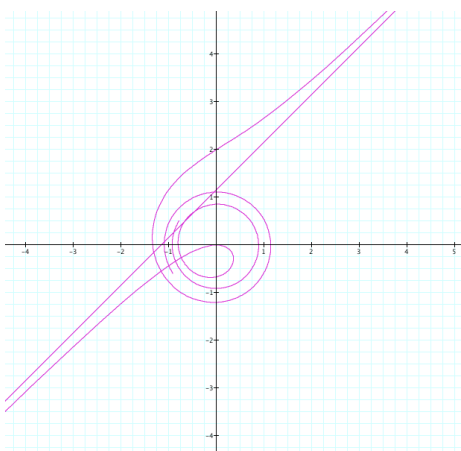
Prouvons pour les curieux que si $a \notin \mathbb{Q}$, alors lorsque t parcourt \mathbb{R} , la courbe \mathcal{L}_a "recouvre" le carré $[-1, 1]^2$. De manière plus précise, tout point du carré peut être approché d'aussi près que l'on veut par un point de la courbe de Lissajous \mathcal{L}_a , cette courbe est *dense* dans le carré. On a besoin de la propriété importante suivante des réels :

Proposition 1.6.10. *Soit une partie $G \subset \mathbb{R}$, telle que $0 \in G$, $G+G = G$. Alors soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = \mathbb{Z}a$, soit tout $x \in \mathbb{R}$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par un élément de G (on dit que G est partout dense).*

Démonstration : Soit \overline{G} l'ensemble des limites de suites formées d'éléments de G . Alors \overline{G} est une partie fermée, toute suite convergente de points de \overline{G} a une limite dans \overline{G} . Si $x_n \in \overline{G} \rightarrow x$ et $y_n \in \overline{G} \rightarrow y$, alors $x_n + y_n \rightarrow x + y$, en conséquence $\overline{G} + \overline{G} = \overline{G}$. Si $G = a\mathbb{Z}$, il est clair que $\overline{G} = G$. Dans le cas contraire, on doit montrer que $\overline{G} = \mathbb{R}$. Il suffit de prouver que $\mathbb{Q} \subset \overline{G}$, car \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} . \square

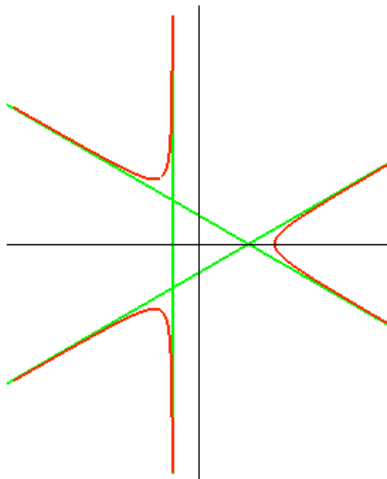
Exercices : § 1.6

1. Etudier et représenter la courbe $r = \sin \frac{3\theta}{2}$.
2. Montrer que si $r(-\theta) = -r(\theta)$, l'axe Oy est un axe de symétrie.
3. Représenter graphiquement le limaçon de Pascal $r(\theta) = \cos \theta + 1$.
4. (Examen juin 2006) Etudier les branches infinies de la courbe $r = \frac{\theta}{\theta - \pi/4}$. Tracer la courbe. **Solution**



5. (Le trèfle équilatère) Etudier (branches infinies, et graphe) la courbe donnée en coordonnées polaires par $r = \frac{1}{\cos 3\theta}$. Expliciter l'équation cartésienne.

Solution



6. Montrer que \mathcal{L}_a est une courbe fermée (pour un certain α on a $f(t+\alpha) = f(t) \forall t$) si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$.
7. Montrer que le vecteur accélération est

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = (r'' - r\theta'^2) \overrightarrow{u} + (r\theta'' + 2r'\theta') \overrightarrow{v}$$

Cas particulier $\theta = t$. **Solution** : On dérive une fois de plus l'expression donnant $\mathbf{f}'(t)$, cela donne

$$\mathbf{f}''(t) = r''(t)u + (-r'\theta' \sin \theta - r\theta'^2 \cos \theta)i + (r\theta' \cos \theta' - r\theta'^2 \sin \theta)j + (r'\theta' + r\theta'')v$$

en notant (i, j) le repère standard. On exprime les relation donnant i et j en fonction de u, v , et on a le résultat

Solution : On résoud $r(\theta) = 0$, on trouve $\theta = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$, on applique la proposition 1.3.

8. (CC 2006) Soit la courbe définie en coordonnées polaires par

$$r = \log(1 + \theta^2) \quad (\log = \ln)$$

- i) Montrer que la courbe a un point stationnaire dont on discutera la nature.
- ii) Montrer que l'axe Ox est un axe de symétrie. Tracer la courbe relativement à l'intervalle $\theta \in [-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}]$.

solution :

1.7 Longueur d'arc

Revenons brièvement à un cadre général. Soit une courbe paramétrée $t \rightarrow \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ définie sur I . On supposera sans le redire que $\mathbf{f}(t)$ est dérivable à dérivée continue, éventuellement dérivable à un ordre assez grand en fonction des besoins. En toute valeur du paramètre t , le **vecteur tangent** $\frac{d\mathbf{f}}{dt}$ est défini, sa **longueur** est

$$\left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'(t)^2}$$

Définition 1.7.1. Soit un arc de courbe paramétrée $t \rightarrow \mathbf{f}(t)$, et soit $a, b \in I$ (on ne suppose pas $a < b$). L'intégrale

$$\int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n x'_i(t)^2} dt$$

est appelée la **longueur de l'arc** (noté $L_{(a,b)}(\mathbf{f})$). Si $t_0 \in I$, la fonction

$$t \mapsto L_{[t_0,t]}(\mathbf{f}) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}'(u)\| du$$

est dite fonction longueur d'arc. Les propriétés de la fonction longueur d'arc, découlent de la formule de changement de variable dans une intégrale définie :

Formule de changement de variable : Soit une fonction définie continue $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \cong [a, b]$, $\alpha < \beta$, $a < b$ un changement de variable. Alors ¹

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \int_\alpha^\beta \mathbf{f}(\varphi(s)) |\varphi'(s)| ds$$

On remarquera que si on effectue un changement de variable $s \mapsto t = t(s) : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$, avec $\alpha < \beta$, $a < b$, alors soit $t'(s) > 0$ ($\forall s$) et t est une fonction croissante, soit $t'(s) < 0$ ($\forall s$) et t est décroissante.

Proposition 1.7.2. 1) (Additivité par rapport à l'arc) On suppose que $a, b, c \in I$. Alors

$$L_{(a,b)}(\mathbf{f}) = L_{(a,c)}(\mathbf{f}) + L_{(c,b)}(\mathbf{f})$$

2) (invariance par changement de paramètre) Soit $s \mapsto t(s)$, $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} [a, b]$ ($\alpha < \beta$, $a < b$) un changement de paramètre (on impose $t'(s) \neq 0 : \forall s$), alors

$$\int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\mathbf{f}(t(s))}{ds} \right\| ds = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\| dt$$

Démonstration : Le point 1) est clair car il ne fait que traduire la propriété d'additivité de l'intégrale définie ordinaire par rapport aux bornes d'intégration.

2) C'est le point le plus important. Notons la propriété de dérivation des fonctions composées

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{f}(t(s))) = \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \times t'(s)$$

donc en prenant la longueur des deux membres, on obtient

$$\left\| \frac{d\mathbf{f}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| |t'(s)|$$

On reporte dans l'intégrale et on trouve en invoquant la formule de changement de variable

$$\int_{(\alpha,\beta)} \left\| \frac{d\mathbf{f}(t(s))}{ds} \right\| ds = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| |t'(s)| ds = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| dt$$

□

On traduit cette proposition en disant que la longueur d'un arc de courbe paramétrée ne dépend réellement que de la **courbe**, et non du choix du paramétrage. Cela justifie qu'on appelle γ une courbe, et $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ une représentation. Changer le paramétrage, ne change pas la courbe. On parlera de longueur d'arc de γ .

¹Attention, on ne suppose pas $\varphi'(s) > 0$, donc les bornes peuvent être échangées par $s \mapsto t(s)$.

Exemple 1.7.3. Soit à calculer la longueur de l'arc de cercle de rayon un, d'angle au centre θ . On choisit une représentation paramétrique de l'arc de cercle, par exemple $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. C'est donc l'intégrale

$$\int_0^\theta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^\theta dt = \theta$$

Exemple 1.7.4. Calculons la longueur d'arc d'une arche de cycloïde, c'est à dire sur $[0, 2\pi]$. La fonction longueur d'arc est

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \int_0^t \sqrt{4 \sin^2 t/2} dt$$

et le sinus étant ≥ 0 , $s(t) = 2 \int_0^t \sin t/2 dt = 4(-\cos t/2 + 1)$. La longueur de l'arche est 8.

Définition 1.7.5. Soit une courbe $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ définie sur un intervalle $J = (a, b)$. On dit que la courbe est **paramétrée par la longueur d'arc** si pour tout $t \in J$, $\|\frac{d\mathbf{f}}{dt}\| = 1$. On notera que cela entraîne qu'il n'y a pas de point stationnaire.

Exemple 1.7.6. Le cercle unité dans son paramétrage $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ est paramétré par la longueur d'arc. En effet $x'^2 + y'^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Pour expliquer la terminologie, notons que si la courbe $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ est paramétrée par la longueur d'arc, disons sur $J = (a, b)$, alors si $t_0 \in J$, l'intégrale qui donne la longueur de d'arc de t_0 à $t \geq t_0$ est

$$\int_{t_0}^t \|\frac{d\mathbf{f}}{dt}\| dt = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

et $-t + t_0$ si $t \leq t_0$. Donc le paramètre $\pm t$ mesure bien la longueur d'arc, à une constante de normalisation près, qui dépend de l'origine t_0 .

Proposition 1.7.7. On suppose la courbe régulière (sans point stationnaire) définie sur $J = (a, b)$. Alors la courbe peut être paramétrée par la longueur d'arc. D'une autre manière, on peut prendre pour paramètre la longueur d'arc $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{f}'(t)\| dt$.

Si s et τ sont deux paramétrages par la longueur d'arc, alors on a $s = \pm\tau + c$ pour une certaine constante c .

Démonstration : Soit la fonction longueur d'arc $t \rightarrow s(t) = \int_a^t \|\frac{d\mathbf{f}}{dt}\| dt$ (on pourrait changer la borne d'intégration a en un point $t_0 \in J$ arbitraire). Du fait que le vecteur tangent est non nul en tout point, on a

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{f}'(t)\| \neq 0$$

La fonction $t \rightarrow s(t)$ est alors une bijection croissante de $J = [a, b]$ sur son image, qui est un intervalle $[0 = \alpha, \beta]$. De plus cette fonction est dérivable ainsi que sa fonction réciproque, qu'on peut noter sans risque de confusion $s \rightarrow t(s)$ (penser au théorème sur les fonctions réciproques). Il s'agit de voir que si on prend comme paramètre s (la longueur d'arc), à la place de t , alors $\|\frac{d\mathbf{f}}{ds}\| = 1$. Mais

$$\|\frac{d\mathbf{f}}{ds}\| = \|\frac{d\mathbf{f}}{dt} \times t'(s)\| = \|\frac{d\mathbf{f}}{dt}\| \times \|\frac{dt}{ds}\|^{-1} = 1$$

Montrons le second point. Soient deux paramètres s, τ tels que

$$\|\frac{d\mathbf{f}}{ds}\| = \|\frac{d\mathbf{f}}{d\tau}\| = 1$$

On regarde s comme une fonction de τ . Comme $\frac{d\mathbf{f}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{f}}{ds} \times s'(\tau)$, on voit en passant aux normes que $|s'(\tau)| = 1$. Comme la fonction $s'(\tau) = \pm 1$ est supposée continue sur un certain intervalle, on a soit $s'(\tau) = 1$ soit $s'(\tau) = -1$ ($\forall \tau$). Donc $s(\tau) = \pm\tau + cte$. \square

Dans la suite la lettre s est réservée (c'est une habitude!) à un paramétrage par la longueur d'arc, donc tel que $\|\frac{d\mathbf{f}}{ds}\| = 1$.

Exemple 1.7.8. Soit le cas particulier du graphe $t \mapsto \mathbf{f}(t) = (t, y(t))$ de la fonction $t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$. Alors $\|\mathbf{f}(t)\| = \sqrt{1 + y'(t)^2}$. Donc la longueur d'arc de t_0 à t est

$$\int_{t_0}^t \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

Exercices : § 1.7

1. Ecrire les expressions de x et y relativement à la longueur d'arc, dans le cas de l'arche de cycloïde ($t \in [0, \pi]$). **Solution** : $1 - \cos \frac{t}{2} = \frac{s}{4} \implies t = 2 \arccos(1 - \frac{s}{4})$
2. Calculer la longueur de l'arc de la spirale logarithmique $r = e^{-\theta}$ entre les points de paramètre 0 et ∞ , cette longueur est comme le calcul le montre finie!
3. Soit la parabole $x = t, y = t^2$. Calculer la longueur de l'arc entre $t = 0$ et $t = 1$. **Solution** : On a $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt$. Pour calculer cette intégrale, poser $2t = \text{sh } \alpha$.

1.8 Courbure des courbes planes

Repère de Frenet

Par **repère (ou base) orthonormé** de \mathbb{R}^2 on veut dire un couple $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ de deux vecteurs tels que

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1, (e_1, e_2) = 0.$$

Les vecteurs e_1, e_2 forment alors une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 . Le repère dit *canonique* est $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$. Soit (u_1, u_2) un repère orthonormé.

$$u_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

On a donc $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, et $ab + cd = 0$. Par un calcul explicite on trouve que $(ad - bc)^2 = 1$: le déterminant de la matrice (u_1, u_2) est donc soit

- (+1), on dit que le repère est **direct**, ou définit l'orientation positive du plan (celle fixée originellement par le repère canonique).
- (-1), dans ce cas le repère définit l'orientation opposée, ou négative du plan.

Proposition 1.8.1. Soit un vecteur unitaire (de longueur un) $u_1 = (a, c)$. Il existe un unique vecteur (unitaire) $u_2 = (b, d)$ tel que (u_1, u_2) soit un repère direct ($\iff ad - bc = 1$). Noter que si on renverse l'ordre, le repère (u_2, u_1) est négatif.

Démonstration : L'équation $(v, u_1) = 0$ avec $\|v\| = 1$ a deux solutions, $\pm v$. Ces deux solutions correspondent à deux repères d'orientations opposées. On prend le vecteur v qui donne l'orientation positive. \square

Soit une courbe plane (ou arc de courbe) supposée sans point stationnaire, et définie sur un intervalle (a, b) . On prend

$$\mathbf{t}(t) = u_1 = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}$$

Noter que $u_1 = u_1(t)$, et que ce vecteur est le vecteur tangent unitaire, donnant l'orientation de la tangente. Soit alors $\mathbf{n}(t)$ l'unique vecteur unitaire normal à $\mathbf{t}(t)$, tel que le repère orthonormé $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t))$ soit direct. Le repère dépend de t !, il est dit *mobile*.

Définition 1.8.2. Le repère orthonormé direct $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t))$ est appelé le **repère de Frenet** de la courbe paramétrée γ en t , et $\mathbf{n}(t)$ la normale orientée (ou principale). Noter que si on change le paramétrage de la courbe, soit $t = t(u)$, alors le repère de Frenet ne change pas si $t'(u) > 0$, sinon est remplacé par $(-\mathbf{t}, -\mathbf{n})$ si $t'(u) < 0$; si la courbe est parcourue dans le sens opposé, le vecteur tangent unitaire change de sens, ainsi que la normale unitaire.

Exemple 1.8.3. 1) Pour le cercle unité $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$, paramétré par la longueur d'arc ($s = t$), on a

$$\mathbf{t}(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \mathbf{n}(t) = (-\cos t, -\sin t) = -\mathbf{f}(t)$$

2) Soit la courbe *graphe du sinus* $t \mapsto \mathbf{f}(t) = (t, \sin t)$. Elle est régulière en tout point. On a $\mathbf{f}'(t) = (1, \cos t)$. Donc $\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{1 + \cos^2 t}$. On a $\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}(1, \cos t)$, et $\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}(-\cos t, 1)$. \square

Courbure des courbes planes

La courbure est une information locale qui mesure si la courbe tourne peu ou beaucoup en un point. Cela explique, ce qui est clair par ailleurs, qu'un cercle est de courbure constante, et une droite de courbure nulle.

Soit toujours une courbe plane (ou arc de courbe) $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ supposée sans point stationnaire, et définie sur un intervalle (a, b) dérivable autant de fois que nécessaire. Par changement de paramètre $t = t(\alpha)$, on se restreint à un changement positif, i.e. tel que $t'(\alpha) > 0$ (respecte le sens de déplacement).

Supposons la courbe $\gamma : t \mapsto \mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ paramétrée par la longueur d'arc, donc on note $t = s$ le paramètre. La longueur de l'arc de s_0 à s_1 est $s_1 - s_0$. Soit le vecteur vitesse $\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{f}}{ds}$, définissant une fonction $s \mapsto \tau(s)$, ($\|\tau(s)\| = 1$). Rappelons que le vecteur accélération au point de paramètre s est $\mathbf{f}''(s) = \frac{d^2 \mathbf{f}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$.

Proposition 1.8.4. La courbe étant paramétrée par la longueur d'arc, le vecteur accélération est perpendiculaire au vecteur vitesse : $\boxed{(\mathbf{t}(s), \mathbf{f}''(s)) = 0}$

Démonstration : Il s'agit d'observer le fait simple, mais important, que la condition $\|\mathbf{f}'(s)\| = 1$ entraîne en tout point s la condition d'orthogonalité $x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) = 0$. utilisons le fait que le paramètre est la longueur d'arc, donc

$$\|\mathbf{f}'(s)\|^2 = x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1 \quad \forall s$$

Dérivons cette identité, cela donne :

$$2x'(s)x''(s) + 2y'(s)y''(s) = 0$$

d'où le résultat. \square

Si on fait appel au *repère de Frenet* $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$, on a donc une fonction $\kappa(s)$ bien définie par

$$\boxed{\mathbf{f}''(s) (= \mathbf{t}'(s)) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)}$$

Définition 1.8.5. On appelle $\kappa(s)$ la **courbure** de la courbe au point de paramètre s , et κ la fonction courbure. Si $\kappa(s) \neq 0$, on dit que $\rho(s) = \frac{1}{|\kappa(s)|}$ est le rayon de courbure au point de paramètre s (∞ si $\kappa(s) = 0$).

Remarque. Si on dérive une fois de plus, on a la **formule de Frenet** :

$$\boxed{\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)}$$

En effet si on dérive l'égalité $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)) = 0$, on trouve (justifier le résultat, en passant aux coordonnées) comme dans la proposition

$$(\mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)) + (\mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s)) = 0$$

Comme $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ par définition, par substitution, cela donne

$$(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s)) = -\kappa(s)(\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)) = -\kappa(s)$$

Si on dérive de même l'égalité $(\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)) = 1$, on trouve que $\mathbf{n}'(s) \perp \mathbf{n}(s)$ donc $\mathbf{n}'(s)$ est proportionnel à $\mathbf{t}(s)$. On a donc nécessairement

$$\boxed{\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)}$$

* Il faut noter que la courbure est sensible à l'orientation choisie. Si on change l'orientation, la fonction courbure change de signe. En effet si on prend comme paramètre $-s$, soit $g(s) = f(-s)$, alors $g'(s) = -\mathbf{t}(-s)\mathbf{n}$ donc le repère de Frenet devient

$$(-\mathbf{t}(-s), -\mathbf{n}(-s))$$

Alors $\frac{d}{ds}(-\mathbf{t}(-s)) = \kappa(-s)\mathbf{n}(-s)$ montre que la courbure est maintenant $-\kappa(-s)$, elle change de signe.

Exemple 1.8.6. Soit le cercle de rayon $r = 1$, centre $(0, 0)$, dans son paramétrage angulaire (par la longueur d'arc) usuel $x(\theta) = \cos \theta$, $y = \sin \theta$. On trouve

$$\mathbf{t}(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta), \mathbf{n}(\theta) = -(\cos \theta, \sin \theta)$$

Donc $\mathbf{f}''(\theta) = \mathbf{n}(\theta)$, de sorte que la courbure est constante égale à un.

Plus généralement, soit le cas du cercle de rayon $r > 0$. On prend encore le paramétrage $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Alors $\|\mathbf{f}'(\theta)\| = r$ donc θ n'est pas (si $r \neq 1$) le paramètre longueur d'arc!. Un paramétrage par la longueur d'arc est obtenu (fait général) par la fonction réciproque de $\theta \mapsto s = r\theta$, donc $\theta = \frac{s}{r}$. Donc

$$\mathbf{t}(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}\right), \mathbf{n}(s) = -\left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}\right)$$

Soit finalement

$$\mathbf{f}''(s) = \frac{1}{r}\mathbf{n}(s)$$

La courbure est donc constante égale à $\frac{1}{r}$, et le rayon de courbure constant en tout point égal à r !. On traitera la réciproque dessous.

Dans la pratique une courbe est en général donnée relativement à un paramètre qui n'est pas la longueur d'arc. D'autre part la fonction longueur d'arc impose le calcul d'une intégrale, donc peut être un calcul difficile, sinon infaisable. Pour calculer la courbure, il n'est pas nécessaire de passer à un paramétrage par la longueur d'arc. Le prix à payer est une formule plus compliquée.

Soit $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$ la même courbe, mais avec le paramètre $s =$ la longueur d'arc. Se souvenir qu'on a

$$t'(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

On a au point de paramètre $t = t(s)$, en notant que toute dérivation de x ou y est prise par rapport à t (est-ce suffisant pour éviter les confusions!) :

$$\mathbf{g}'(s) = \mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

et en dérivant une seconde fois par rapport à s ($\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \frac{d}{dt}$)

$$\mathbf{g}''(s) = \frac{-(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t))}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^2} \left(y'(t) + \frac{x'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2} \right) \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \kappa(t(s)) \mathbf{n}(t(s))$$

En effectuant le produit scalaire avec le vecteur normal

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

on trouve finalement

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

En résumé :

Proposition 1.8.7. *La courbure de la courbe plane régulière $t \mapsto (x(t), y(t))$ est*

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{\det(\mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t))}{\|\mathbf{f}'(t)\|^3}$$

On voit sur le numérateur de cette formule que $\kappa = 0$ implique que $\mathbf{f}''(t)$ est proportionnel à $\mathbf{f}'(t)$. C'est le cas en un point d'inflexion, et cela caractérise (essentiellement) les points d'inflexion. En fait en un point d'inflexion (ordinaire), il est facile de voir en se reportant à la définition que $\kappa(t) = ct + o(t)$, $c = cte$. Donc la courbure change de signe !.

Exemple 1.8.8. Soit le graphe $t \mapsto (t, y(t))$ de la fonction scalaire $t \mapsto y(t)$. La courbure est

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

Par exemple pour $y(t) = \sin t$, on trouve $\kappa(t) = \frac{-\sin t}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}}$. La courbure change de signe, en particulier est nulle en les points $t = 0 \pmod{\pi}$, qui sont des points d'inflexion comme on le voit immédiatement.

Le résultat amusant suivant justifie l'introduction de la courbure.

Proposition 1.8.9. *Les seules courbes paramétrées régulières, de courbure nulle sont les droites (ou segments de droites). Les seules courbes paramétrées régulières de courbure constante non nulle sont les (arcs de) cercles.*

Démonstration : Il est commode de choisir comme paramètre la longueur d'arc. Dans le premier cas, courbure nulle, on doit avoir $\mathbf{f}''(s) = 0$ ($\forall s$). Donc $x'(s) = a$ et $y'(s) = c$ sont constantes avec $a^2 + c^2 = 1$, et $x(s), y(s)$ sont des fonction linéaires

$$x(s) = as + b, y(s) = cs + d$$

Donc la courbe est une droite.

Si la courbure est constante $= \frac{1}{r}$, on a en conséquence $\mathbf{f}''(s) = \frac{1}{r} \mathbf{f}'(s)$, donc

$$x''(s) = -\frac{1}{r} x'(s), y''(s) = \frac{1}{r} y'(s)$$

On tombe sur une équation différentielle linéaire (système) d'ordre deux à coefficients constants. On verra dans le dernier chapitre que la solution est

$$x(s) = r \cos \frac{s}{r} + a, y(s) = r \sin \frac{s}{r} + b$$

qui est la représentation paramétrique d'un cercle de rayon $|r|$, de centre (a, b) . On peut obtenir la solution sans référence aux équations différentielles par un argument simple. Soit la fonction $\mathbf{f}(s) - r\mathbf{n}(s)$. En dérivant on obtient $\mathbf{f}'(s) - r\mathbf{n}'(s) = 0$ (voir remarque 1.5). Donc

$$\mathbf{f}'(s) - r\mathbf{n}(s) = cte = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

et comme $\|\mathbf{n}(s)\| = 1$, on trouve que $\mathbf{f}(s)$ est sur le cercle de centre (a, b) et de rayon r . \square

Exemple 1.8.10. La courbure de la courbe $x = a \cos t, y = b \sin t$ (ellipse) est obtenue par :

1) on calcule les dérivées à l'ordre un et deux

$$\mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}''(t) = \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -b \sin t \end{pmatrix}$$

2) On applique la formule donnant la courbure ; on trouve

$$\kappa(t) = \frac{2ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

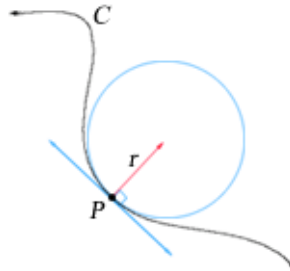
On voit sur cette expression que $\kappa(t)$ a un extremum (maximum ou minimum), si et seulement si la fonction $a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ a un extremum. En dérivant on trouve $(a^2 - b^2) \sin 2t$. Un extremum est donc obtenu pour $2t = 0 \pmod{\pi}$. Ce sont les extrémités des axes, qui correspondent aux *sommets* de l'ellipse. Pour la parabole $x = t, y = t^2$, on trouve

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

Définition 1.8.11. i) On appelle **sommet** d'une courbe, un point qui correspond à un extremum de la fonction κ ($\kappa'(t) = 0$).

ii) En un point de courbure non nulle (donc pas point d'inflexion) on appelle cercle **osculateur**, le cercle de rayon de courbure $\rho(t) (= r(t)) = \frac{1}{|\kappa(t)|}$,

et de centre le point $\Omega(t) = \mathbf{f}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t)$. Le centre est appelé centre de courbure au point de paramètre t . Lorsque t varie, le point $\Omega(t)$ décrit une courbe appelée la **développée** de la courbe initiale. On observera que le cercle osculateur ne dépend pas de l'orientation (sens de parcours) de la courbe. Les paramètres t et $-t$ conduisent au même cercle, cela du fait que la courbure change de signe, mais aussi le vecteur normal !.



On peut donner une représentation paramétrique de la développée.

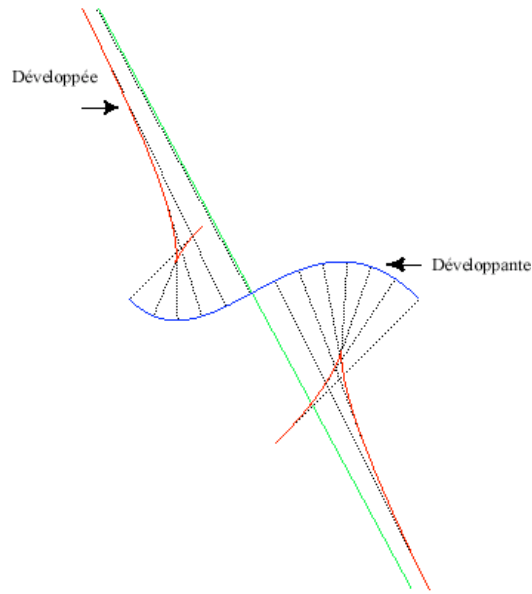
Proposition 1.8.12. La développée de la courbe $x = x(t), y = y(t)$ est

$$X(t) = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \quad Y(t) = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

Démonstration : Il suffit d'insérer les relations de la proposition 2.7. \square

Soit le cercle de centre (a, b) et de rayon r . Soit la représentation paramétrique $x = a + r \cos t$, $y = b + r \sin t$. On en déduit d'une part que $\kappa(t) = \frac{1}{r}$, et que le centre de courbure est (a, b) , le centre du cercle. Le cercle est son propre cercle osculateur (en tout point).

$$\mathbf{t}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}(t) = (-\cos t, -\sin t)$$



Si la courbe est donnée en coordonnées polaires, il y a une formule spécifique pour obtenir la courbure. La formule est la suivante :

Proposition 1.8.13. *On a*

$$\kappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

Démonstration : Pour la valider, notons qu'on a d'une part $x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2$. On calcule ensuite l'expression $x'y'' - y'x''$. On utilise pour cela, soit un calcul direct de \mathbf{f}'' , éventuellement le résultat de l'exercice 15. On trouve sans difficulté

$$\det(\mathbf{f}'(\theta), \mathbf{f}''(\theta)) = \det(r'u + rv, (r''r)u + 2r'v) = 2r'^2 - r(r''r) = 2r'^2 + r^2 - rr''$$

D'où la formule annoncée, par substitution dans la formule du théorème 1.9. \square

Remarque. Le vecteur tangent (en un point régulier) donne la direction de la tangente, qui est la droite qui a un "contact" d'ordre un au moins avec la courbe. L'interprétation de la courbure, et du cercle osculateur, est que ce dernier est le cercle qui a avec la courbe un contact d'ordre au moins 2, au point considéré. Ceci a une explication. Soit le courbe $t \mapsto \mathbf{f}(t)$, le point étant celui de paramètre $t = 0$. On suppose que le paramètre est la longueur d'arc, donc $\|\mathbf{f}'(t)\| = 1$; soit pour simplifier $\kappa = \kappa(0)$. Choisissons une représentation paramétrique du cercle osculateur, sous la forme

$$\mathbf{g}(t) = \Omega(0) + \frac{1}{\kappa} (-\cos(\kappa t)\mathbf{n}(0) + \sin(\kappa t)\mathbf{t}(0))$$

Pour le cercle, le paramètre t est aussi la longueur d'arc. On a $\mathbf{g}'(0) = \mathbf{f}'(0) = \mathbf{t}(0)$. On a aussi $\mathbf{g}''(0) = \kappa \mathbf{n}(0)$, c'est à dire

$$\mathbf{g}''(0) = \mathbf{f}''(0)$$

Ce qui montre que les développements de Taylor pour les fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} , relativement au paramètre convenablement choisi t , sont égaux jusqu'à l'ordre deux. C'est ce qui justifie la dénomination de cercle osculateur, pour la courbe $\mathbf{g}(t)$.

Montrer que la courbe développée de l'ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($a > b > 0$), est la courbe

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, Y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t$$

Justifier le fait que cette courbe possède 4 points de rebroussement (astroïde)

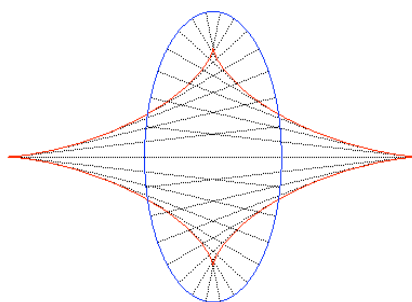


FIG. 1.5 – Développée de l'ellipse ($0 < a < b$)

Soit une courbe $s \mapsto \mathbf{f}(s)$ paramétrée par la longueur d'arc. On suppose qu'au point de paramètre s_0 , la fonction courbure $\kappa(s)$ a un extremum non dégénéré ($\kappa'(s_0) = 0$, $\kappa''(s_0) \neq 0$). Montrer que la développée a au point de paramètre s_0 un point de rebroussement de première espèce.

Solution : On choisit comme paramètre la longueur d'arc, qu'on note donc s . Les coordonnées de la développée sont alors

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) - \frac{y'(s)}{\kappa(s)} \\ y(s) + \frac{x'(s)}{\kappa(s)} \end{pmatrix}$$

On dérive, ce qui conduit en tenant compte de la définition de la courbure à

$$\begin{pmatrix} X'(s) \\ Y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(s) - \frac{y''(s)\kappa(s) - \kappa'(s)y'(s)}{\kappa(s)^2} \\ y'(s) + \frac{x''(s)\kappa(s) - \kappa'(s)x'(s)}{\kappa(s)^2} \end{pmatrix} = \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$$

Cela montre en particulier que le point de paramètre s_0 est stationnaire pour la développée. Dérivons une fois de plus pour analyser ce point

$$\begin{pmatrix} X''(s) \\ Y''(s) \end{pmatrix} = \frac{\kappa''(s)\kappa(s) - 2\kappa'(s)^2}{\kappa(s)^3} \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix} + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$$

En s_0 le vecteur $\begin{pmatrix} X''(s) \\ Y''(s) \end{pmatrix}$ est proportionnel à $\begin{pmatrix} X'(s) \\ Y'(s) \end{pmatrix}$. Pour conclure on doit

dériver encore une fois!. Posons pour simplifier les notations $\theta(s) = \frac{\kappa''(s)\kappa(s) - 2\kappa'(s)^2}{\kappa(s)^3}$

et $\eta(s) = \frac{\kappa''(s)\kappa(s) - \kappa'(s)^2}{\kappa(s)^2}$. Alors

$$\begin{pmatrix} X'''(s) \\ Y'''(s) \end{pmatrix} = \theta'(s) \begin{pmatrix} y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} + \theta(s) \begin{pmatrix} y''(s) \\ -x''(s) \end{pmatrix} + \eta(s) \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix}$$

Si on tient compte de la relation de définition $x'' = -\kappa y'$, $y'' = \kappa x'$, on voit que dans l'expression de la dérivée troisième de dessus la partie non proportionnelle à la dérivée première est

$$\kappa(s)\theta(s) \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} + \eta(s) \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$$

qui en s_0 se réduit à

$$\frac{2\kappa''(s)}{\kappa(s)} \begin{pmatrix} x'(s_0) \\ y'(s_0) \end{pmatrix}$$

vecteur non proportionnel au vecteur vitesse de la développée, c'est à dire au vecteur normal de la courbe de départ.

(La radiale d'une courbe). Soit une courbe paramétrée $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$. On fixe un point O , par exemple l'origine des coordonnées. On forme la courbe $t \mapsto P(t)$, où $P(t)$ est le point tel que Si $I = \Omega$ est le centre de courbure au point M de paramètre t , alors $\overrightarrow{OP(t)} = \overrightarrow{MI}$. Expliciter les coordonnées de $P(t)$. Montrer que la radiale d'une cycloïde est un cercle.

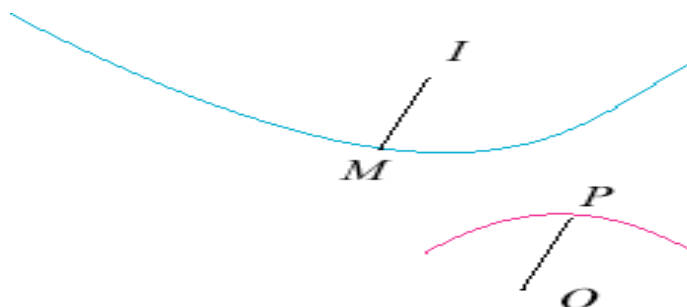


FIG. 1.6 – La radiale d'une courbe

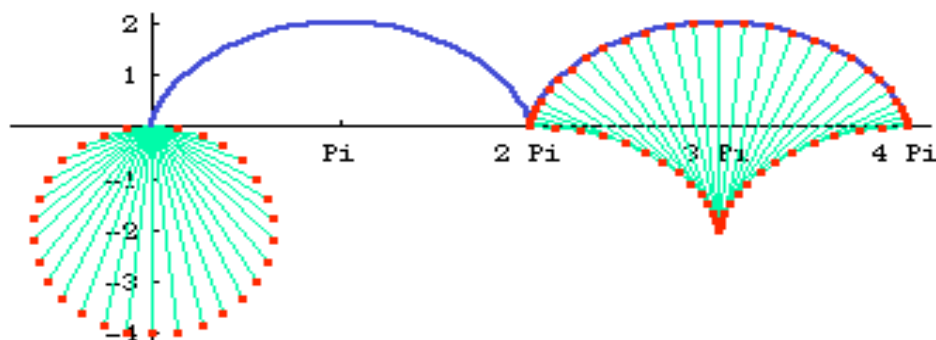


FIG. 1.7 – La radiale de la cycloïde

Exercices : § 1.8

1. On suppose que le repère $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ est direct. Montrer qu'il existe θ unique modulo 2π tel que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Cela prouve que le repère se déduit du repère canonique par la rotation vectorielle d'angle θ .

2. Trouver le repère de Frenet en tout point de la droite $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$. Expliciter le paramétrage par la longueur d'arc.

Solution : $s = \int_0^t \sqrt{5} dt = \sqrt{5}t$, $x = 1 + \frac{s}{\sqrt{5}}$, $y = 1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}$. $\rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$.

3. Soit la branche d'hyperbole décrite paramétriquement par $x = \operatorname{sh} t$, $y = \operatorname{ch} t$ (noter que $y^2 - x^2 = 1$). Expliciter le repère de Frenet. **Solution** : Le vecteur tangent est $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$, sa longueur est $\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t$. On a ainsi

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t}} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t}} \begin{pmatrix} -\operatorname{sh} t \\ \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

4. Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supposée de classe C^∞ . Soit la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = \int_0^t \varphi(u) \cos u du, \quad y(t) = \int_0^t \varphi(u) \sin u du$$

i) Expliciter le vecteur tangent au point de paramètre t , et caractériser les points stationnaires.

ii) En supposant que $\varphi(t) \neq 0$ pour tout t , exprimer la courbure $\kappa(t)$ en fonction de φ .

5. Soit la "spirale" : $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Calculer la longueur de l'arc de la totalité de la spirale, donc de $t = 0$ à $t = \infty$. Calculer la courbure en tout point.

Solution : On a $\|\mathbf{f}(t)\| = \sqrt{2}e^{-t}$. On doit donc calculer

$$\int_0^\infty \sqrt{2}e^{-t} dt = -\sqrt{2}e^{-t} \Big|_0^\infty = \sqrt{2}$$

La courbure est $\kappa(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}$. Noter qu'elle tend vers l'infini lorsque la courbe s'enroule autour de l'origine.

6. Montrer que les normales (la normale au point $\mathbf{f}(t)$ est la droite perpendiculaire à la tangente en ce point) à la courbe $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ sont tangentes à sa développée.

7. Calculer la courbure pour la branche d'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, ($x > 0$). En quel point (s) est-elle maximale ?

Solution : Le calcul de la courbure donne (application directe de la formule)

$\kappa(x) = \frac{2x^3}{(1+x^4)^{3/2}}$. En dérivant cette fonction de x , on trouve $\frac{6x^2 \kappa^{1/2} (1-x^4)}{\kappa^3}$. Le maximum de la courbure est atteint pour $x = 1$, ce qui correspond au point (1, 1).

8. Montrer que le rayon de courbure de la parabole $y = \frac{x^2}{2}$ est $\frac{1}{\cos^3 \theta}$ où θ est la pente de la tangente. Trouver l'équation du cercle osculateur de plus petit rayon.

9. Trouver le(s) sommet(s) de la courbe (point de courbure maximum ou minimum) $y = e^x$.