

Géométrie (DKMAT368)
Notes de 2008–2009

Chris Peters

Table des matières

1	Géométrie Affine	7
1.1	Transformations affines	7
1.2	Espaces affines	8
1.3	Transformations affines : le cas général	11
1.4	Sous-espaces affines	12
1.5	Barycentres et applications	13
1.6	Transformations affines spécifiques	15
1.7	QUIZ sur le Chapitre 1	17
1.8	Problèmes, Chapitre 1	17
2	Géométrie euclidienne	21
2.1	Isométries et similitudes	21
2.2	Isométries planaires et les triangles	24
2.3	Trajectoire de billard	29
2.4	QUIZ sur le Chapitre 2	31
2.5	Problèmes, Chapitre 2	31
3	Quadriques	33
3.1	Formes quadratiques ; quelques rappels	33
3.2	Quadriques	34
3.3	Coniques	37
3.4	Cercles	41
3.5	QUIZ sur le Chapitre 3	42
4	Géométrie Projective	43
4.1	Introduction	43
4.2	Principe de dualité	44
4.3	Transformations projectives	45
4.4	La droite projective	47
4.5	Le plan projectif, perspectives	48
4.6	Coniques dans le plan projectif	53
4.7	QUIZ sur le Chapitre 4	55
4.8	Problèmes, Chapitre 4	56

Introduction

Le cours traite quelques sujets de la géométrie élémentaire : sujets provenant de la géométrie affine, euclidienne et projective.

Les chapitres 1, 2, 4 donnent une introduction globale à ces géométries, chaque fois terminant avec un résultat marquant. Pour la géométrie affine ce sont les théorèmes de Menelaos (1.5.5) et De Ceva (1.5.4) ; pour le Chapitre 2 dévoué à la géométrie euclidienne c'est le théorème 2.3.3 sur les trajectoires de billard ; pour la géométrie projective les théorèmes de Pappos (§ 4.3) et le "Cross Axis Theorem" (4.5.9) peuvent être vus comme marquants.

Dans un chapitre intermédiaire (Chap. 3) on classe les quadriques dans l'espace affine et euclidienne et on traite plus particulièrement les coniques dans le plan euclidien ; dans le Chapitre 4 on revient au cas des coniques dans la situation projective. Ici un théorème marquant est le théorème de Pascal (4.6.6).

Références

[B] Berger, M. : Géométrie 1–5, Cedic/Fernand Natan (1979),

Commentaire : C'est un texte classique. Utile pour la préparation au CAPES et l'Agrégation ; contient beaucoup de matériel y inclus quelques exercices. Niveau assez élevé.

[S] Samuel, P. : Projective Geometry, Springer (1988),

Commentaire : Il existe aussi un texte en français. Niveau assez bien adapté au cours malgré du fait qu'il n'y a presque rien sur la géométrie euclidienne. Pas d'exercices.

Chapitre 1

Géométrie Affine

Dans ce chapitre on fixe un corps K .

1.1 Transformations affines

On fixe deux espaces vectoriels E, F de dimension finie sur K .

- Définition 1.1.1.** 1. Soit $e \in E$. La *translation* définie par e est l'application $t_e : x \mapsto x + e$.
2. Une *transformation affine* (non-singulière) $E \rightarrow F$ est une transformation linéaire (invertible) suivi d'une translation de F , i.e. on a $x \mapsto Sx + f$, $S : E \rightarrow F$ linéaire et $f \in F$.

Remarque 1.1.2. i. On peut *changer d'origine* :

$$Sx + f = S(x - e') + (Se' + f) \quad (1.1)$$

ce qui montre que si on change d'origine 0 à e' la partie linéaire S reste inchangée (l'application linéaire devient $x - e' \mapsto S(x - e')$).

ii. Si $E = F$ une application affine s'écrit donc $t_e \circ S$ avec $e \in E$ et $S : E \rightarrow E$ linéaire. Il est à noter que $t_e \circ S \neq S \circ t_e$ en général : on a

$$t_e \circ S = S \circ t_{e'} \iff e = Se'$$

car le membre droite vaut $S(x + e') = Sx + Se'$. On voit que $t_e \circ S = S \circ t_e$ précisément quand $e = Se$, i.e. e est un point fixe de S .

Lemme 1.1.3. *La composition de deux transformations affines de E est une transformation affine.*

Démonstration : Soient S et T deux applications linéaires de E et $e, f \in E$. On calcule

$$S(Tx + e) + f = S \circ T(x) + (Se + f). \quad \square$$

Quant aux applications inversibles, on a :

Lemme 1.1.4. *Une transformation affine non-singulière est inversible.*

Démonstration : Si S est inversible $y = Sx + e$ équivaut $x = S^{-1}y - S^{-1}e$. \square

Exemples 1.1.5. 1. Une *homothétie* de centre a et de rapport λ est définie par $x \mapsto a + \lambda(x - a)$. Cela s'écrit comme composition $t_a \circ (\lambda \text{id}) \circ t_{-a}$ et donc par le Lemme 1.1.3 c'est une application affine.

2. Une rotation du plan \mathbb{R}^2 de centre a et angle φ est définie par $x \mapsto a + R_\varphi(x - a)$ où R_φ est une rotation linéaire d'angle φ .

Les lemmes 1.1.3, 1.1.4 disent que l'ensembles des transformations affines non-singulières de E forment un groupe

$$\text{GA}(E) = \{\text{Groupe affine de } E\}$$

Si on choisit une base $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$ de E la transformation S sera représentée par une matrice $\mathbf{S} = (S_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ et \mathbf{S} sera inversible si S l'est. Le vecteur e est représenté par une matrice colonne \mathbf{e} et l'application affine $x \mapsto y = Sx + e$ est donnée par $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{e}$. Si on représente cela par la matrice

$$t_{\mathcal{E}}(S, e) := \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

le calcul

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{f} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{TS} & \mathbf{Te} + \mathbf{f} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

montre :

Proposition 1.1.6. *Le groupe affine $\text{GA}(E)$ s'envoie par $t_{\mathcal{E}}$ de façon isomorphe au sous-groupe $\text{GA}_n(K)$ de $\text{GL}_{n+1}(K)$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{S} \in \text{GL}(n, K)$ et $\mathbf{e} \in K^n$.*

1.2 Espaces affines

Si on fait opérer les applications affines, l'origine perd son rôle de point préféré. En fait une translation de E transforme 0 en n'importe quel point et vice versa. Le langage à utiliser ici est celui d'opération de groupe.

Définition 1.2.1. Soit G un groupe et E un ensemble. Une application $G \times E \rightarrow E$, désignée $(g, e) \mapsto g \cdot e$ est une *opération de groupe* si

1. $1 \cdot e = e$ pour tout $e \in E$,
2. $(g \cdot g')(e) = g \cdot (g' \cdot e)$ pour tout couple $g, g' \in G$ et $e \in E$.

L'ensemble G_x des $g \in G$ fixant $x \in X$ est un groupe, le *groupe d'isotropie* de x .

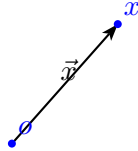
L'action est *fidèle* si $ge = e$ pour tout $e \in E$ implique $g = 1$ et l'action est *transitive* si pour tout couple $e, e' \in E$ il existe $g \in G$ avec $g \cdot e = e'$.

Lemme 1.2.2. *Soit G abélien. On suppose que G agit de façon fidèle et transitive sur un ensemble E . Alors aucun point $e \in E$ n'est fixe que par $1 \in G$. Donc si $e, e' \in E$ il y a un unique élément $g \in G$ qui transforme e en e' .*

Démonstration : Soit $e' \in E$ quelconque et supposons que $ge = e'$. Pour $h \in G_e$, l'élément ghg^{-1} fixe le point e' . Cela montre $G_e = gG_{e'}g^{-1}$. Par commutativité $G_e = G_{e'}$; l'action étant fidèle, cela entraîne que $G_e = 1$ pour tout $e \in E$. Enfin, supposons que $g'e = e'$. Donc $g^{-1}g'e = g^{-1}e' = e$, c.à.d. $g^{-1}g' \in G_e = 1$, i.e. $g = g'$. \square

L'exemple de base est l'action du groupe additif \vec{E} de E sur E comme translations. En fait, si X est n'importe quel ensemble sur lequel E agit fidèlement et transitivement, l'ensemble X est en relation bijective avec \vec{E} : on fixe un point $o \in X$ et chaque point $x \in X$ s'écrit de façon unique comme $x' = \vec{x} \cdot o$. On écrit cela plutôt de façon additive : $x = o + \vec{x}$. Un espace affine est donc ensemblistement un espace vectoriel muni d'une l'action fidèle et transitive du groupe \vec{E} de ces translations. On oublie donc l'addition des points de E mais il y a une action de \vec{E} écrite comme

$$x = o + \vec{x}.$$



Cette discussion mène à la définition suivante :

Définition 1.2.3. Un *espace affine* E modelé sur l'espace vectoriel \vec{E} (on dit aussi que \vec{E} est l'*espace directeur*) consiste en un ensemble E (en bijection avec l'ensemble \vec{E}) muni d'une action fidèle et transitive du groupe additif de \vec{E} . On écrit l'action comme ci-dessus : $o \mapsto o + \vec{x}$. Les éléments $\vec{x} \in \vec{E}$ sont appelés *les vecteurs de E* . Si $x = o + \vec{x}$ on dit que o, x est le point initial, respectivement le point final de \vec{x} .

Exemples 1.2.4.

1. Chaque espace vectoriel E fournit un *modèle standard* d'un espace affine : on prend pour E l'ensemble sous-jacent à l'espace vectoriel et pour \vec{E} l'espace lui-même agissant sur lui-même par translations. Dans ce modèle, le vecteur $\overrightarrow{xx'}$ s'identifie à $x' - x$.
2. Les *sous-espaces affines* d'un espace vectoriel E sont les ensembles qu'on obtient en translatant un sous-espace linéaire F de l'espace E .

Un tel espace est donc de la forme $e + F$, $e \in E$. Le groupe additif \vec{F} de F agit sur cet ensemble par translations et c'est une action fidèle et transitive.

3. Une exemple du même type : soit $f : E \rightarrow K$ une fonction linéaire sur un espace vectoriel E . Alors $f^{-1}a$, $a \in K$ est un espace affine modelé sur $f^{-1}(0)$.
4. Si (E, \vec{E}) et (F, \vec{F}) sont deux espaces affines, le produit $E \times F$ admet l'action du groupe $\vec{E} \oplus \vec{F}$. Ainsi on obtient le *produit* $(E \times F, \vec{E} \oplus \vec{F})$.
5. Soit (E, \vec{E}) un espace affine et \vec{F} un sous-espace de \vec{E} . On introduit une relation d'équivalence sur E :

$$e \sim e' \iff \overrightarrow{ee'} \in \vec{F}.$$

Soit E/\vec{F} l'ensemble des classes d'équivalence. On désigne la classe de e par $[e]$ ou bien $e + \vec{F}$. Le groupe \vec{E}/\vec{F} agit sur cet ensemble. Soit $\vec{e}' \in E$. Alors

$$[e] \mapsto [e + \vec{e}']$$

ne dépend que de la classe $\vec{e}' + \vec{F}$ et définit une action de \vec{E}/\vec{F} sur l'ensemble E/\vec{F} . Cette action est transitive et fidèle, donc $(E/\vec{F}, \vec{E}/\vec{F})$ est un espace affine, *l'espace quotient* de (E, \vec{E}) par \vec{F} .

6. Soient E un espace vectoriel et $b_0, \dots, b_m \in E$. Le plus petit sous-espace affine de E contenant ces points est noté $[b_0, \dots, b_m]$. Cet espace est modelé sur le sous-espace \vec{F} de \vec{E} engendré par les $\overrightarrow{b_0 b_k}$.

Comme pour les espaces vectoriels, les espaces affines peuvent être munies des coordonnées. On dit que $\{b_0, \dots, b_n\}$ est un *repère affine* si $\{\overrightarrow{b_0 b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0 b_n}\}$ est une base de \vec{E} . Pour $x \in E$ on peut donc écrire

$$x = b_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k \overrightarrow{b_0 b_k}.$$

Avec $a \in E$ arbitraire ça s'écrit aussi

$$x = a + \overrightarrow{ab_0} + \sum_{k=1}^n \xi_k [\overrightarrow{b_0 a} + \overrightarrow{ab_k}] = a + \underbrace{[1 - \sum_{k=1}^n \xi_k]}_{\xi_0} \overrightarrow{ab_0} + \sum_{k=1}^n \xi_k \overrightarrow{ab_k}.$$

Les ξ_k sont les *coordonnées bary-centriques* par rapport à $\{b_0, \dots, b_n\}$. On a $\sum_{k=0}^n \xi_k = 1$. Puisqu'elles ne dépendent pas de a on écrit aussi

$$x = \sum_{k=0}^n \xi_k b_k.$$

1.3 Transformations affines : le cas général

Soient E et F deux espaces affines. On dit qu'une transformation $T : E \rightarrow F$ est *affine* si pour tout $e \in E$, l'application $\vec{T}_e : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ introduite par

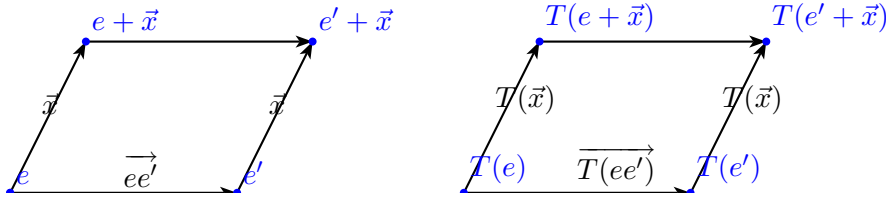
$$T(e + \vec{x}) = T(e) + \vec{T}_e(\vec{x}) \quad \text{c.à.d.} \quad \vec{T}_e(\vec{x}) = \overrightarrow{T_e T(e + \vec{x})}$$

est une application linéaire.

Remarque. Dans le modèle standard E et F sont deux K -espaces vectoriels. Une application affine est de la forme $x \mapsto Sx + f$ avec S linéaire. Ici on a choisi $e = 0$, l'origine et $\vec{T}_0 = S$. La formule (1.1) de changement d'origine $0 \mapsto e$ montre que $\vec{T}_0 = \vec{T}_e$. Cela reste vrai en général :

Lemme 1.3.1. \vec{T}_e ne dépend pas de e , disons $\vec{T} = \vec{T}_e$ et on a :

$$Tx' = Tx + \vec{T}(\overrightarrow{xx'}).$$



Démonstration : On utilise que \vec{T}_e est linéaire. Donc

$$\vec{T}_e(\vec{x}) = \vec{T}_e(\overrightarrow{ee'} + \vec{x} - \overrightarrow{ee'}) = \vec{T}_e(\overrightarrow{ee'} + \vec{x}) - \vec{T}_e(\overrightarrow{ee'}).$$

Par définition c'est égale à

$$\overrightarrow{T_e T(e' + \vec{x})} - \overrightarrow{T_e T(e')} = \overrightarrow{T(e')T(e' + \vec{x})} = \vec{T}_{e'}(\vec{x}).$$

Finalement, $Tx' = Tx + \overrightarrow{T_x T x'}$ et $\overrightarrow{T_x T x'} = \vec{T}(\overrightarrow{xx'})$ par définition. \square

On fixe un origine $o \in E$. Si $x = o + \vec{x}$, alors

$$Tx = To + \vec{T}(\vec{x}).$$

L'application T est complètement déterminée par la connaissance des images d'un repère : Soit $\{b_0 = o, b_1, \dots, b_n\}$ un repère de E et $b_k = o + \vec{b}_k$. Par l'algèbre linéaire, \vec{T} est déterminé par $\vec{T}(\vec{b}_1), \dots, \vec{T}(\vec{b}_n)$ et donc T est déterminé par $To, Tb_k = To + \vec{T}(\vec{b}_k)$, $k = 1, \dots, n$.

On notera que si $o \in F$ est une origine, on a $To = o + \overrightarrow{To}$. Alors, utilisant un repère $\{c_0 = o, \dots, c_m\}$ de F avec $c_k = o + \vec{c}_k$, on peut décrire T moyennant les deux objets suivants :

- la matrice \mathbf{T} de \vec{T} par rapport aux bases $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ de \vec{E} et $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ de F

- le vecteur \mathbf{e} de coordonnées de \vec{To} par rapport à la base $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ de F .

En effet, si \mathbf{x} est le vecteur (colonne) de coordonnées de \vec{x} , le vecteur $\mathbf{e} + \mathbf{T}\mathbf{x}$ est le vecteur de coordonnées de $\vec{To} + \vec{T}\vec{x}$. Donc, si on fixe deux repères de E et de F , l'ensemble des applications affines de E dans F s'identifie à

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} / \mathbf{T} \in M_{n+1, m+1}(K); \mathbf{e} \in K^n \right\}.$$

Ici on rappelle que $M_{p,q}(K)$ est l'ensemble des matrices de taille (p, q) avec coefficients dans K .

De plus, si $E = F$ les applications affines non-singulières s'identifient à

$$\text{GA}_n(K) := \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+1}(K) / \mathbf{T} \in \text{GL}_n(K); \mathbf{e} \in K^n \right\}.$$

1.4 Sous-espaces affines

Soit E un espace affine modelé sur \vec{E} . Un *sous-espace affine* de E est un sous-ensemble de la forme $e + \vec{F} = \{e + \vec{f} / \vec{f} \in \vec{F}\}$ où \vec{F} est un sous-espace vectoriel de \vec{E} . La *dimension* du sous-espace affine $e + \vec{F}$ est la dimension de l'espace linéaire \vec{F} .

Cette notion coïncide avec la notion d'une sous-espace affine d'un espace vectoriel si on utilise le modèle standard.

- Exemples 1.4.1.**
1. Une droite est un sous-espace de dimension 1, un hyperplan est un sous-espace de dimension $\dim E - 1$.
 2. Si $S \subset E$ est un sous-ensemble de E , l'espace affine $[S]$ engendré par S est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant S . Si $S = \{e_0, \dots, e_d\}$ on a :

$$[S] = \left\{ e_0 + \sum_{k=1}^d \lambda_k \vec{e_0 e_k} / \lambda_k \in K \right\}.$$

Remarque. Un sous-espace affine contient chaque droite passant par deux de ces points. La réciproque n'est vraie que si K est un corps de caractéristique $\neq 2$.

Lemme 1.4.2. *Une transformation affine transforme un sous-espace affine de dimension d en un sous-espace de dimension $\leq d$. Si la transformation est non-singulière elle conserve la dimension.*

Démonstration :

$$T(e + \vec{f}) = Te + \vec{T}\vec{f}$$

et donc $T(e + \vec{F}) = Te + \vec{T}\vec{F}$ et l'assertion découle du fait que $\vec{T}\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\leq d$ avec égalité si \vec{T} est inversible. \square

Voici quelques propriétés concernant l'intersection des sous-espaces affines.

Définition 1.4.3. Soient F_1, F_2 deux sous-espaces d'un affine E .

- 1) On dit que F_1 et F_2 sont parallèles, $F_1 // F_2$ si $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$.
- 2) On dit que F_1 et F_2 sont faiblement parallèles, si $\vec{F}_1 \subset \vec{F}_2$.

On peut facilement montrer :

Lemme 1.4.4.

- 1) Deux sous-espaces parallèles distincts sont disjoints ;
- 2) Par chaque point d'un espace affine passe un unique sous-espace affine parallèle à un sous-espace affine donné ;
- 3) Deux sous-espaces affines $F_1 = e_1 + \vec{F}_1$, $F_2 = e_2 + \vec{F}_2$ tels que $\vec{E} = \vec{F}_1 \oplus \vec{F}_2$ ont un unique point en commun.
- 4) Les transformations affines préservent le parallélisme.

1.5 Barycentres et applications

On a vu que pour un repère $\{b_0, \dots, b_n\}$ de E chaque point x s'écrit de façon unique $x = a + \sum_{k=0}^n \lambda_k \vec{ab}_k$, $\sum \lambda_k = 1$ ou bien :

$$x = \sum_{k=0}^n \lambda_k b_k.$$

On dit aussi que x est le *barycentre des b_k avec masses λ_k* . Si $F = [b_0, \dots, b_m]$ et $\{b_0, \dots, b_m\}$ est un repère de F , alors les barycentres sont tous dans F et réciproquement chaque point est un barycentre des b_k , $k = 0, \dots, m$.

Lemme 1.5.1. Une transformation affine transforme le barycentre de m points à masses donnés au barycentre de l'image aux mêmes masses.

Exemples 1.5.2. 1. Le point milieu d'un segment (pourvu que $\text{car}(k) \neq 2$).

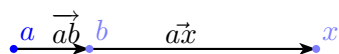
2. Le point $\frac{1}{m+1}(e_0 + \dots + e_m)$ est le *centre de gravité* des points $\{e_k\}$. (ici $\text{car}(k) = 0$.)

Proposition 1.5.3 (Principe des rapports signés). Soient a, b, x trois points alignés avec $a \neq b$. Alors $\lambda \in K$ t.q.

$$x = a + \lambda \vec{ab}$$

est désigné par

$$\frac{\vec{ax}}{\vec{ab}} \quad (\text{Rapport signé}).$$

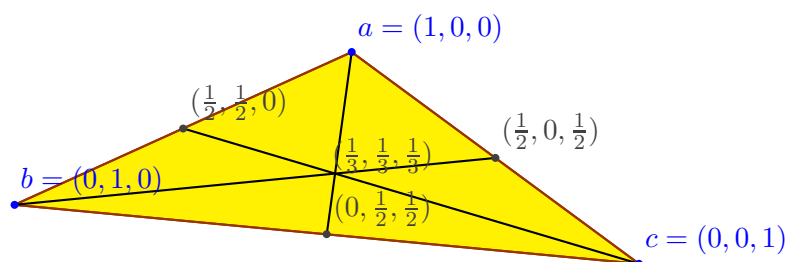


Chaque transformation affine conserve le rapport signé.

Applications

Ici k est un corps de caractéristique 0.

1. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

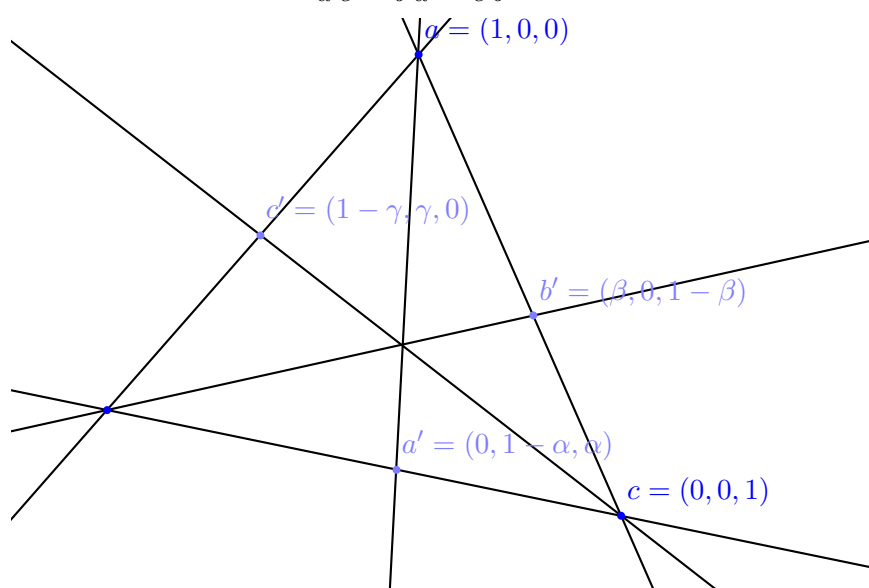


Pour le démontrer on note que c'est vrai pour un triangle équilatérale (principe de symétrie). Or, chaque triangle se transforme en un triangle équilatérale par une transformation affine ; ce transformation conserve les points milieu ainsi que les concurrences. De façon équivalente, on le montre directement par un calcul en coordonnées barycentriques.

2. Le théorème de DE CEVA :

Théorème 1.5.4. Les droites aa' , bb' et cc' sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\vec{a'b}}{\vec{a'c}} \times \frac{\vec{b'c}}{\vec{b'a}} \times \frac{\vec{c'a}}{\vec{c'b}} = -1.$$

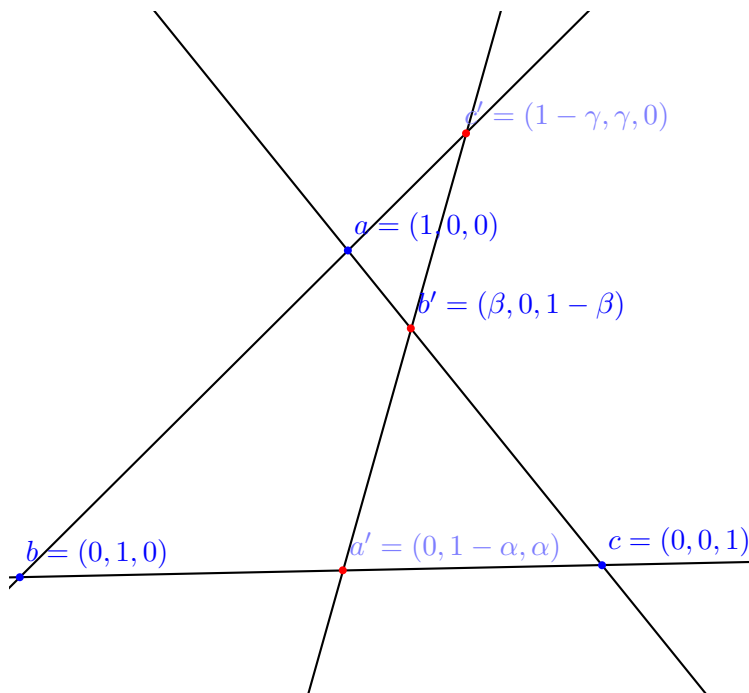


La démonstration est un calcul en coordonnées barycentriques utilisant les coordonnées des points $\{a, a', b, b', c, c'\}$ dans la figure.

3. Le théorème de MENELAOS :

Théorème 1.5.5. *Les points a', b', c' sont alignés si et seulement si*

$$\frac{\vec{a'b}}{\vec{a'c}} \times \frac{\vec{b'c}}{\vec{b'a}} \times \frac{\vec{c'a}}{\vec{c'b}} = 1.$$



La démonstration est un autre calcul en coordonnées barycentriques utilisant les coordonnées des points $\{a, a', b, b', c, c'\}$ dans la figure.

1.6 Transformations affines spécifiques

Soit $T : E \rightarrow E$ une application affine. Alors T peut ou ne peut pas avoir des point fixes. Mais on a :

Lemme 1.6.1. *Si l'ensemble F des points fixes n'est pas vide, alors $F = o + \vec{F}$, où soit $\vec{F} = \{0\}$, soit \vec{F} est l'espace propre de \vec{T} pour la valeur propre $= 1$. En particulier, $F = \{o\}$, un seul point, si et seulement si \vec{T} n'a pas 1 comme valeur propre.*

Démonstration : Supposons que o est un point fixe de T . Ecrivant $x = o + \vec{x}$ on a bien $Tx = To + \vec{T}(\vec{x}) = o + \vec{T}(\vec{x})$. Donc $Tx = x \iff (\vec{T} - \text{id})(\vec{x}) = (\vec{x})$ c.à.d. \vec{x} est vecteur propre de \vec{T} avec valeur propre 1 $\iff o \neq x$. \square

Exemple 1.6.2. 1. Une homothétie de rapport 1 est l'identité et donc on a une infinité de points fixes. Les homothéties avec rapport $\neq 1$ sont des exemples avec un seul point fixe, leur centre. Si on compose deux homothéties de rapport λ et λ' le résultat est une homothétie de rapport $\lambda\lambda'$ si $\lambda\lambda' \neq 1$ et une translation si $\lambda\lambda' = 1$ (pourquoi?).

Une homothétie est inversible \iff le rapport est différent de 0. De telles homothéties ensemble avec les translations forment un groupe $H \subset \text{GA}(E)$, le groupe des *homothéties-translations*. Le groupe H est caractérisé de façon suivante :

$T \in H \iff$ elle transforme toute droite à une droite parallèle.

On le voit comme suivant : si T transforme chaque droite à une droite parallèle, alors chaque $\vec{e} \in \vec{E}$ est vecteur propre de \vec{T} et donc $\vec{T} = \lambda \text{id}$. Cette caractérisation montre bien qu'il s'agit d'un groupe, c.à.d. le composé d'une translation et une homothétie est une homothétie.

2. Un sous-espace affine F et un supplémentaire \vec{G} de \vec{F} déterminent deux transformations affines :

- La *projection* $p : E \rightarrow E$ sur F parallèlement à \vec{G} ;
- La *symétrie* $s : E \rightarrow E$ par rapport à F parallèlement à \vec{G} ;

Les deux sont définies à partir des applications $\vec{p}, \vec{s} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ connues de l'algèbre linéaire. En fait $\vec{p}(\vec{f} \oplus \vec{g}) = \vec{f}$ et $\vec{s}(\vec{f} \oplus \vec{g}) = (\vec{f} \oplus -\vec{g})$. Si $F = a + \vec{F}$, on pose $p(x) = a + \vec{p}(\vec{ax})$ et pareil pour s .

Plus généralement, on met $\vec{s}_\alpha(\vec{f} \oplus \vec{g}) = \vec{f} \oplus \alpha\vec{g}$ et $s_\alpha(x) = a + \vec{s}_\alpha(\vec{ax})$. On appelle s_α un *affinité* de base F , direction \vec{G} et rapport α . L'application s_α est une application affine avec F comme ensemble des points fixes.

Supposons que T n'a pas de point fixe. Alors :

Lemme 1.6.3.

- 1) Il existe $\vec{b} \in \vec{E}$ telle que $\vec{b} + \vec{T}$ ait un point fixe.
- 2) La collection de telles \vec{b} forment une sous-espace affine de \vec{E} parallèle à $\text{Im}(\vec{T} - \text{id})$.
- 3) L'action de \vec{b} commute à $T \iff \vec{T}(\vec{b}) = \vec{b}$, c.à.d. $\vec{b} \in \text{Ker}(\vec{T} - \text{id})$.
- 4) Si $\text{Ker}(\vec{T} - \text{id}) \cap \text{Im}(\vec{T} - \text{id}) = \{0\}$, alors il y a une unique \vec{b} qui satisfait 1) et 3)

Démonstration : 1) Si $Ta = a - \vec{b}$, alors $\vec{b} + Ta = a$ montre que $\vec{b} + T$ a a pour point fixe.

2) Si \vec{c} est telle que $\vec{c} + T$ fixe $d \in E$, alors

$$Td + \vec{c} = Ta + \vec{T}(\vec{ad}) + \vec{c} = a - \vec{b} + \vec{c} + \vec{T}(\vec{ad}) = d = a + \vec{ad}$$

et donc $\vec{b} - \vec{c} = [\vec{T} - \text{id}](\vec{ad})$, i.e. $\vec{b} - \vec{c} \in \text{Im}(\vec{T} - \text{id})$.

3) On calcule que $T(x + \vec{b}) = Ta + \vec{T}(\vec{b} + \vec{ax}) = Ta + \vec{T}\vec{b} + \vec{T}(\vec{ax})$ et donc cela équivaut $Tx + \vec{b} = Ta + \vec{T}(\vec{ax}) + \vec{b} \iff \vec{T}\vec{b} = \vec{b}$.

4) Découle de 2) et 3). □

1.7 QUIZ sur le Chapitre 1

1. Soit E un espace affine modelé sur \vec{E} .
 - (a) Une transformation affine de E admet toujours un inverse. Vrai ou faux ?
 - (b) Soient $a, b \in E$ deux points distincts et soit S l'homothétie de rapport 2 qui envoie a sur b . Quelle assertion est vraie :
 - i. Le centre de S est $a - \vec{ab}$.
 - ii. Le centre de S est $a + 2\vec{ab}$.
2. Soit L une droite, P un plan et H un hyperplan. On suppose que $L // H$ et $L // P$, alors $P // H$. Vrai ou faux ?
3. Soit E un espace affine de dimension n et F, G deux sous-espaces différents de codimension 1.
 - (a) $F \cap G$ est de codimension 2. Vrai ou faux ?
 - (b) Soit T un automorphisme affine de E telle que $TF = G$. Un tel T existe toujours et est unique. Vrai ou faux ?
4. Soient A, B, C trois points différents avec centre de gravité Z . Alors $Z \neq A, B, C$. Vrai ou faux ?

1.8 Problèmes, Chapitre 1

1. Soit $\{A, B, C\}$ un repère affine d'un plan affine sur un corps k de caractéristique $\neq 2$. On fixe $a, b \in k - \{0, 1\}$. Dans les coordonnées barycentriques induites on a les six points

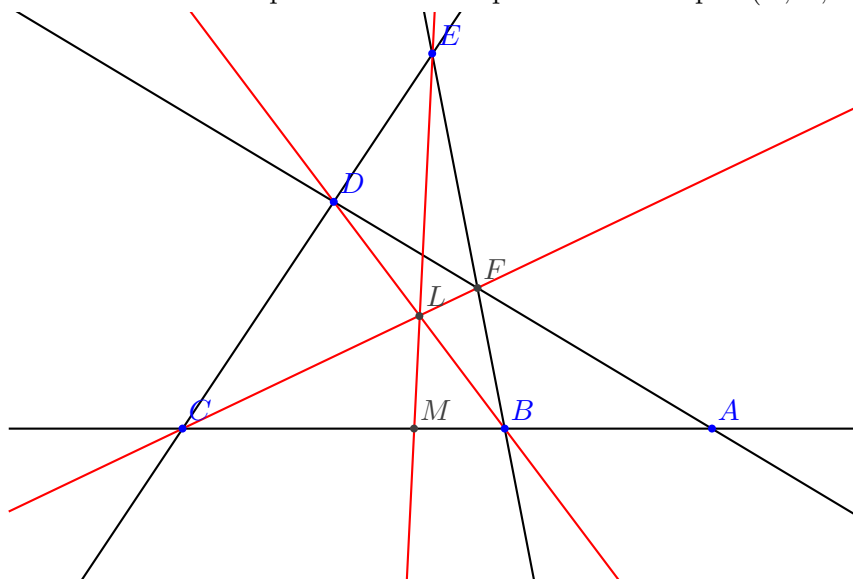
$$\begin{aligned}
 I &= (0, a, 1 - a), & J &= (1 - a, 0, a), & K &= (a, 1 - a, 0) \\
 I' &= (0, b, 1 - b), & J' &= (1 - b, 0, b), & K' &= (b, 1 - b, 0)
 \end{aligned}$$

- (a) Déterminer les équations des trois droites IJ', JK' et KI' .
- (b) Calculer leurs points d'intersection et le centre de gravité du triangle formé par ces trois points.
- (c) Généraliser cela à la situation où on a trois droites avec des équations

$$\begin{aligned}
 Ax + By + Cz &= 0 \\
 Bx + Cy + Az &= 0 \\
 Cx + Ay + Bz &= 0
 \end{aligned}$$

où $A, B, C \in k$ pas tous égaux.

2. On considère dans le plan affine \mathbb{R}^2 un quadrilatère complet (A, B, C, D, E, F) .



Le but de cet exercice est de montrer que A, M, B et C sont en division harmonique en utilisant le théorème de Menelaos.

- (a) Appliquer le théorème de Menelaos aux triangles BEC, EBM et EMC coupés resp. par les droites AD, FC et DB .
- (b) Dédire que

$$\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} \times \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = -1.$$

3. On utilise le même quadrilatère et on introduit :
- Les milieux I, J resp. K des segments $\overline{AE}, \overline{BD}$ et \overline{CF} ;
 - Les homothéties h, h_1 resp. h_2 de rapports de centre A, E resp. E et avec les rapports suivantes : h est de rapport 2, h_1 envoie F à B et h_2 envoie C à D .
 - Les points $\alpha = h(K)$ et $\beta = h(J)$.

Le but de cet exercice est de montrer que I, J, K sont alignés.

- (a) Montrer que les droites $\alpha C, \beta B$ et FD sont parallèles.
- (b) Dédire que $h_1 \circ h_2$ envoie la droite $C\alpha$ sur la droite $B\beta$.
- (c) De façon pareille montrer que $h_2 \circ h_1$ envoie la droite αF sur la droite βD .
- (d) Montrer que h_1 et h_2 commutent. Dédire (utiliser b) et c)) que $h_2 \circ h_1(\alpha) = \beta$ et que les trois points E, α, β sont alignés
- (e) Conclure en appliquant h .
4. Soient A, B et C trois points distincts alignés et A', B', C' trois points distincts qui sont pas sur la droite AB . On utilise les coordonnées barycentrique par rapport à A, B', C . On supposera $A' = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1)$,

$B = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ et $C' = (a, b, c)$. On pose $M = BC' \cap B'C$, $N = CA' \cap AC'$ et $P = BA' \cap AB'$.

- (a) Déterminer les équations des droites BC' , $B'C$, AB' , $A'B$, BA' et AB' .
- (b) Calculer les coordonnées barycentriques des points M, N, P .
- (c) Montrer que ces trois points sont alignés $\iff A', B'$ et C' le sont.

Chapitre 2

Géométrie euclidienne

Dans ce chapitre on ne considère que des espaces vectoriels réels de dimension finie.

2.1 Isométries et similitudes

Soit E un *espace euclidien*, i.e. un espace vectoriel réel muni d'un produit euclidien $(-, -)$, c.à.d. un accouplement bilinéaire symétrique positif non-dégénéré. Les applications linéaires de E qui conservent ce produit sont appelées les *transformations orthogonales*. Elles préservent les distances, angles, orthogonalité etc. Réciproquement on a :

Rappel 2.1.1. Une transformation est orthogonale \iff elle préserve les distances.

Une transformation orthogonale est toujours inversible et l'inverse est aussi orthogonale. Puisque la composition de deux applications orthogonales est orthogonale on a donc un groupe

$$O(E) = \{T \in GL(E) / T \text{ orthogonal}\}.$$

Un *espace affine euclidien* E est un espace affine modelé sur un espace euclidien \vec{E} . La distance $\|\vec{xy}\|$ entre deux points x et y sera notée \overline{xy} .

Définition 2.1.2. Une *isométrie* est une transformation affine qui préserve les distances.

Lemme 2.1.3. T est une isométrie $\iff \vec{T} \in O(\vec{E})$.

Démonstration : On écrit $Tx = Te + \vec{T}(\vec{ex})$ et donc $\|\vec{xy}\| = \overline{xy} = \overline{TxTy} = \|\vec{T}\vec{xy}\|$ pour chaque $x, y \in E$ et donc $\vec{T} \in O(\vec{E})$. \square

Les isométries de E forment un groupe $\text{Iso}(E)$ et chaque isométrie conserve les distances, les angles etc.

Définition 2.1.4. Une isométrie T est un *déplacement* ou un *isométrie directe* si $\det(\vec{T}) = 1$, i.e. sa partie linéaire est une rotation. Si $\det(\vec{T}) = -1$ on l'appelle *anti-déplacement* ou *isométrie indirecte*.

Plus loin on a besoin des *similitudes* d'un espace affine E réelle. Une similitude est une application affine de la forme $T = \vec{a} + \vec{T}$ avec $\vec{T} = \lambda \vec{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{S} \in O(E)$. Le nombre λ est le *rapport* de T . Les similitudes de E forment un groupe $\text{Sim}(E)$.

On a la caractérisation suivante des similitudes :

Lemme 2.1.5. $T \in \text{Sim}(E) \iff \overline{TxTy}/\overline{xy} = \overline{Tx'Ty'}/\overline{x'y'}$ pour n'importe quel quadruple $x, x', y, y' \in E$.

Exemples 2.1.6. 1. Les translations sont des isométries directes.

2. La homothétie de rapport λ de centre $a \in E$ (voir Exemple 1.1.5) est une similitude de rapport λ .
3. Une rotation de centre $a \in \mathbb{R}^2$ est une isométrie directe.
4. Soit $F = a + \vec{F}$ un sous-espace affine de E et $\sigma_{\vec{F}}$ la symétrie orthogonale par rapport à \vec{F} . Alors la symétrie orthogonale par rapport à F est

$$\sigma_F(x) = a + \sigma_{\vec{F}}(\vec{ax}).$$

Donc les points fixes de σ_F sont formés de F . Une telle symétrie est (in)directe si $\dim E - \dim F$ est (im)paire. Un cas spécial d'une symétrie indirecte est le cas où F est un hyperplan. On dit dans ce cas que σ_F est une *réflexion* par rapport à F .

On pose

$$\text{Fix}(T) = \{x \in E / Tx = x\},$$

l'ensemble des points fixes de T . Alors une réflexion est caractérisée comme suit :

Lemme 2.1.7. Une isométrie $T : E \rightarrow E$ est une réflexion $\iff \text{Fix}(T)$ est un hyperplan.

Démonstration : Soit $F = \text{Fix}(T)$ un hyperplan et $x \in E$, mais $x \notin F$. Soit G la droite qui passe par x orthogonale à F et soit $y = F \cap G$. Alors $TG = G$ et Tx est le point symétrique de x par rapport à y . Donc $Tx = \sigma_F(x)$. \square

Remarque 2.1.8. Soient $P, Q \in E$ deux points différents et M le milieu de PQ . L'hyperplan H orthogonal à PQ passant par M s'appelle *l'hyperplan médiateur de PQ* . En fait, H est l'ensemble des points équidistant à P et Q car la réflexion σ_H en H échange P et Q et donc pour tout $R \in H$ on a $\overline{PQ} = \overline{\sigma_H(P)\sigma_H(R)} = \overline{QR}$.

On peut toujours écrire une isométrie comme composition d'au plus $(n+1)$ réflexions, où $n = \dim E$:

Proposition 2.1.9. *Soit $T \neq \text{id}$ une isométrie et soit $F = \text{Fix}(T)$ le sous-espace affine de ses points fixes. Si $\dim F = r$ ($= -1$ si $F = \emptyset$), alors $T = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_s$, $1 \leq s \leq n - r$, σ_j une réflexion.*

Démonstration : La preuve est par récurrence sur $\text{codim}(F) = n - \dim F$, le cas $\text{codim}(F) = 1$ étant le Lemme 2.1.7. On suppose que $TP \neq P$. Soit H l'hyperplan médiateur de $PT(P)$ et soit σ la réflexion par rapport à H . Alors si $Q \in F$, on a $\overline{PQ} = \overline{T(P)T(Q)} = \overline{T(P)Q}$ et donc $Q \in H$, et donc F est fixé par $\sigma \circ T$. D'autre part $P \notin H$ mais P est un point fixe de $\sigma \circ T$. Il suit que l'ensemble des points fixes de $\sigma \circ T$ contient F strictement. Par récurrence $\sigma \circ T = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_t$, $1 \leq t \leq n - (r + 1)$ et donc $T = \sigma \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_t$, une composition de $\leq n - r$ réflexions. \square

En général une isométrie T n'a pas de point fixe. On va appliquer Lemme 1.6.3. Ici on peut utiliser :

Lemme 2.1.10. *Soit A une application orthogonale d'un espace euclidien E de dimension finie. Alors on a une écriture en somme directe*

$$E = \text{Ker}(A - I) \oplus \text{Im}(A - I).$$

Démonstration : Les dimensions des deux espaces s'additionnent bien à $\dim E$. Il suffit donc de montrer que leur intersection est $\{0\}$. Or, si $x = Ay - y \in \text{Im}(A - \text{id})$, alors pour $z \in \text{Ker} A - I$ on a $(z, Ay - y) = (z, Ay) - (z, y) = (Az, Ay) - (z, y) = 0$ car A est orthogonale. Donc $\text{Ker} A - I$ et $\text{Im} A - I$ sont orthogonaux. \square

Donc Lemme 1.6.3. s'applique et on trouve tout de suite :

Théorème 2.1.11. *Soit T une isométrie d'un espace affine E de dimension finie. Il y a un unique vecteur \vec{b} telle que*

- 1) T commute à la translation par \vec{b} ,
- 2) l'isométrie $\vec{b} + T$ admet des points fixes ; $\vec{b} \in \vec{F} := \text{Ker}(\vec{T} - I)$ et les points fixes forment un sous-espace affine parallèle à \vec{F} . En particulier ce sous-espace lui-même reste stable par $T : T$ y induit une translation par $-\vec{b}$. Ce sous-espace on l'appelle le centre de T .

Exemples 2.1.12. 1. Si $T = \sigma_F$ est une symétrie orthogonale par rapport à $F = e + \vec{F}$, l'ensemble des points fixes est F et $\vec{b} = 0$.

2. Pour $n = 2$, le centre de T est de
 - dimension 0 $\iff T$ est une rotation de centre a par un angle $\theta \neq 0$;
 - dimension 2 $\iff T$ est une translation ;
 - dimension 1, disons une droite affine L $\iff T$ est une symétrie orthogonale par rapport à L suivi d'une translation parallèle à L . On l'appelle *symétrie glissée*. Dans ce cas la distance $d(x, Tx)$ est minimale $\iff x \in L$.

Ces exemples nous indiquent comment classifier les isométries en dimension 2 :

Centre	nature	description
plan	déplacement	translation
droite	anti-déplacement	symétrie glissée
point	déplacement	rotation

En dimension 3 on a trois types de centre : un point, une droite, un plan où bien l'espace totale.

- Exemples 2.1.13.** – Une symétrie en un point a un seul point fixe. C'est un cas spécial d'une *anti-rotation* : une rotation suivi d'une réflexion en un plan orthogonal à l'axe de rotation. Le centre est le point fixe.
- Une rotation autour d'une droite D a D pour ensemble fixe (= le centre). C'est un cas spécial d'une *vissage* : une rotation autour d'une droite D suivi d'une translation parallèle à D . Le centre est D .
 - Une réflexion a un plan P comme ensemble de points fixes (=le centre). C'est un cas spécial d'une symétrie glissée : une réflexion en un plan P suivi d'une translation parallèle à P . Le centre est P .
 - Une translation T a l'espace entier comme centre c'est l'ensemble des points fixes $\iff T = \text{id}$.

Voici la classification des isométries de l'espace :

Centre	nature	description
espace	déplacement	translation
plan	anti-déplacement	symétrie glissée
droite	déplacement	vissage
point	anti-déplacement	anti-rotation

2.2 Isométries planaires et les triangles

Définition 2.2.1. Deux sous-ensembles planaires sont *isomorphes* s'il y a une isométrie qui envoie l'un dans l'autre. Deux sous-ensembles planaires sont *similaires* s'il y a une similitude qui envoie l'un sur l'autre.

Il y a deux critères classiques pour l'isométrie et la similitude :

Lemme 2.2.2. (a) Deux triangles comme dans la figure ci-dessus sont *isomorphes* \iff l'une des conditions suivantes sont vraies :

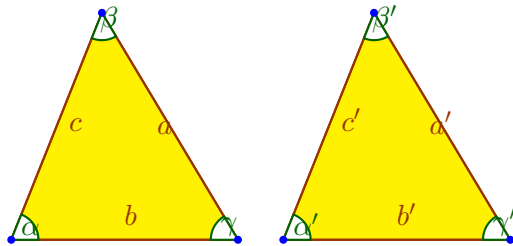
- 1) $a = a', b = b', c = c'$ (3 côtés égaux = ccc) ;
- 2) $\alpha = \alpha', b = b', c = c'$ (2 côtés égaux ainsi que l'angle entre les côtés = cac) ;

3) $\alpha = \alpha', \beta = \beta', c = c'$ (une côté et les angles adjacentes sont égaux=aca).
 (b) Les deux triangles sont similaires \iff l'une des conditions suivantes sont vraies :

1)* $(a : b : c) = (a' : b' : c')$ (le rapports des côtés égaux) ;

2)* $\alpha = \alpha', b : c = b' : c'$ le rapport entre deux côtés égaux ainsi que l'angle entre les côtés).

3)* $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ (2 angles égales) ;

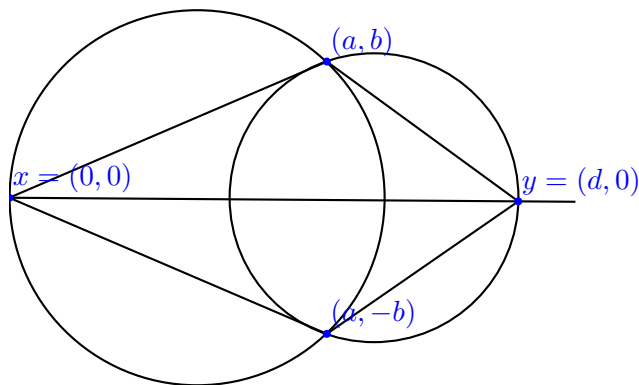


Démonstration : on a clairement que $(a, i) \Rightarrow (b, i)^*$, $i = 1, 2, 3$ et donc il suffit de montrer a).

2) et 3) sont clair, tandis que la démonstration de 1) se base sur le Lemme suivant. \square

Lemme 2.2.3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ avec distance d . Si $r + R \geq d$ il y a précisément 2 points ayant la distance r à x et R à y . Ces deux points sont symétriques par rapport à la droite xy .

Démonstration : On peut supposer $x = (0, 0)$ et $y = (d, 0)$. Les points (a, b) cherchés satisfont



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= r^2 \\ (a - d)^2 + b^2 &= R^2 \end{aligned}$$

avec les solutions

$$a = \frac{1}{2} \left(d + \frac{r^2 - R^2}{d} \right)$$

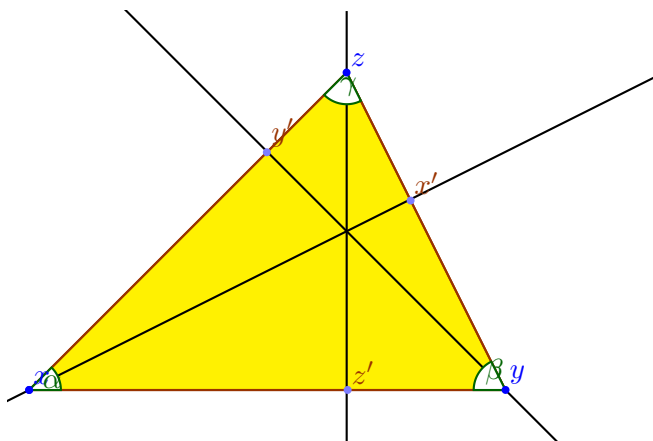
$$b = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{(R+r)^2 - d^2} (d^2 - (R-r)^2). \quad \square$$

Les résultats suivants sont aussi classiques :

Lemme 2.2.4.

- a) Dans un triangle la somme des angles est π ;
- b) Un triangle est isocèle \iff 2 angles sont égaux ;
- c) Un triangle est équilatère \iff 3 angles sont égaux ;
- d) Les droites suivantes sont concourantes :
 - Les 3 hauteurs ;
 - les trois bissectrices ;
 - les trois médianes.
 - les trois médiatrices.

Démonstration : La preuve de a), b) et c) est immédiate. Pour la concurrence des trois hauteurs on utilise De Ceva (voir la figure ci-dessous)



Si $x, y \in \mathbb{R}^2$ la distance entre x et y est notée \overline{xy} . On met

$$a = \overline{xy}$$

$$b = \overline{zx}$$

$$c = \overline{yz}$$

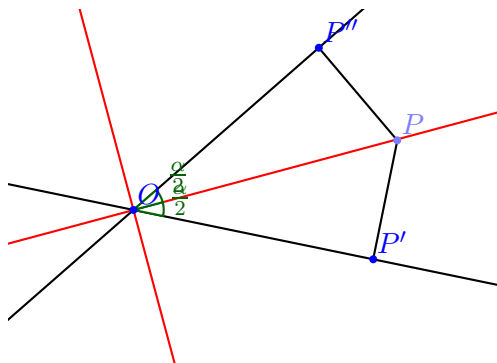
et donc

$$\begin{aligned}\overline{z'x} &= b \cos \alpha \\ \overline{z'y} &= c \cos \beta \\ \overline{x'y} &= a \cos \beta \\ \overline{x'z} &= b \cos \gamma \\ \overline{y'z} &= c \cos \gamma \\ \overline{y'x} &= a \cos \alpha\end{aligned}$$

et puisque $\frac{\overline{z'x}}{\overline{z'y}} \cdot \frac{\overline{x'y}}{\overline{x'z}} \cdot \frac{\overline{y'z}}{\overline{y'x}} = 1$ De Ceva montre la concurrence des droites xx', yy', zz' .

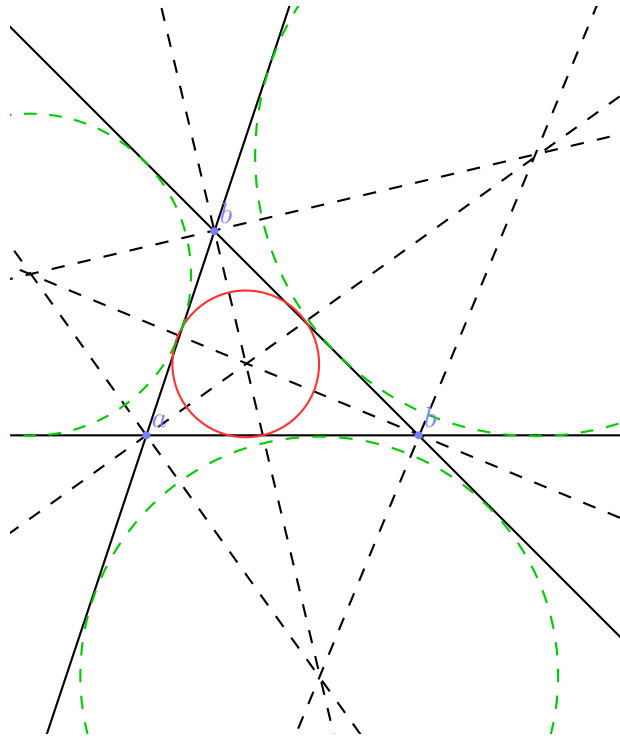
La concurrence des bissectrices utilise :

Lemme 2.2.5. *Les deux bissectrices formés par les deux angles d'un couple de droites qui s'intersectent forment le lieu des points ayant les mêmes distances aux droites.*



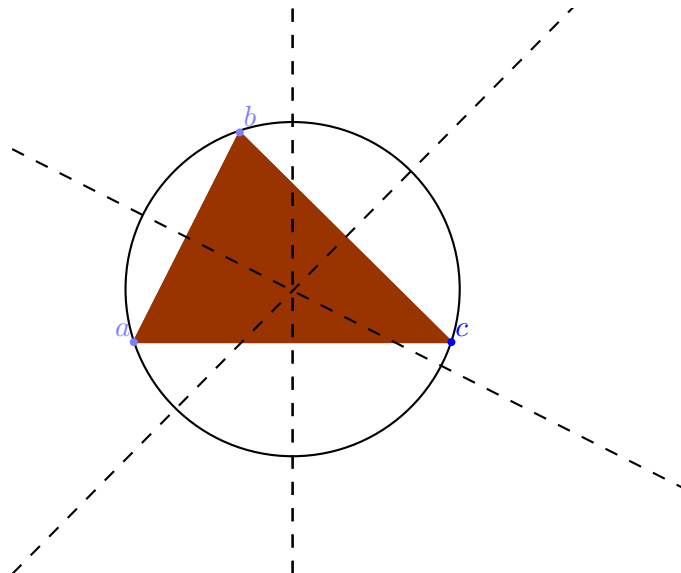
Il s'en suit que le point d'intersection de deux bissectrices d'un triangle donné a les mêmes distances aux trois côtés du triangle et donc le troisième bissectrice doit passer par ce point aussi.

On a déjà vu que les trois médianes sont concourantes § 1.5. Pour les médiatrices c'est évident : par Remarque 2.1.8 la médiatrice d'un segment AB est l'ensemble des points équidistants à A et B . Donc les trois médiatrices se rencontrent dans un seul point : le point équidistant aux sommets du triangle. \square



Remarque.

Le point d'intersection des 3 bissectrices est le centre du *cercle inscrit*.
Si on considère aussi les bissectrices extérieures on trouve 3 points d'intersection de plus : les centres des 3 cercles *exo-inscrits*.



Le point d'intersection des médiatrices est le centre du *cercle circonscrit*.

2.3 Trajectoire de billard

On termine ce chapitre avec un sujet moins classique : les trajectoires de billard tracés dans l'intérieur d'un triangle dont tous les angles sont aigus. On entend par un *trajectoire de billard* un triangle inscrit dont chaque bissectrice extérieure est une des côtés du triangle d'origine. C'est la trajectoire suivi par un billard dans le triangle ou par un rayon de lumière caché dans l'intérieur du triangle.

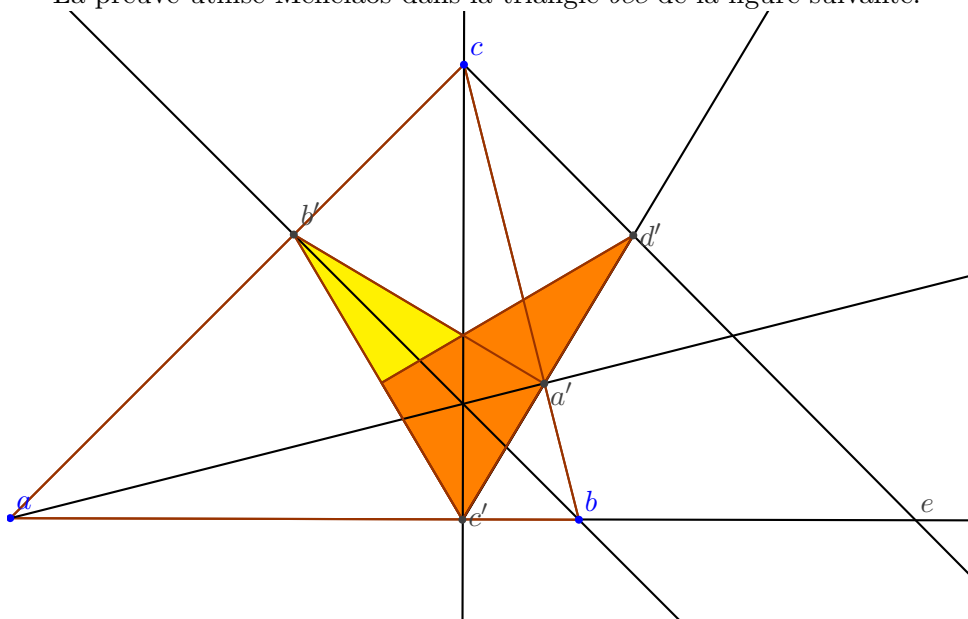
Dans la construction intervient :

Définition 2.3.1. Le *triangle des pieds de hauteur* d'un triangle est le triangle inscrit dont les sommets sont les pieds de hauteurs, i.e. les point sur les côtés où les hauteurs intersectent les côtés opposées.

Le point clé est :

Proposition 2.3.2. Les côtés d'un triangle sont les bissectrices extérieur du triangle des pieds de hauteur. En particulier, le triangle des pieds de hauteur est une trajectoire de billard.

La preuve utilise Menelaos dans la triangle bec de la figure suivante.



Ici on a effectué la symétrie S par rapport à la droite cc' et donc $d' = S(b')$ et $e = S(a)$. Il suit que cc' est la bissectrice de l'angle $b'dd'$. Il suffit donc de montrer les points c', d', a' sont colinéaires. Pour montrer cela, on note que

$$\frac{\overline{a'c}}{\overline{a'b}} \cdot \frac{\overline{c'd}}{\overline{c'e}} \cdot \frac{\overline{d'e}}{\overline{d'c}} = \frac{\overline{a'c}}{\overline{a'b}} \cdot \frac{\overline{c'd}}{\overline{c'a}} \cdot \frac{\overline{b'a}}{\overline{b'c}} = 1$$

par De Ceva dans le triangle (a, b, c) puisque les droites aa', bb', cc' sont concourantes. Donc par Menelaos dans le triangle bec , les points c', d', a' sont

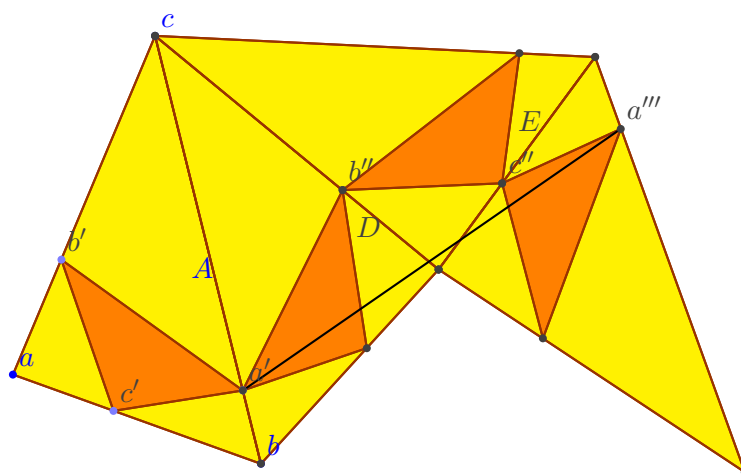
colinéaires. Donc cc' est une bissectrice intérieure de T et par conséquent, ae est la bissectrice extérieure de l'angle $b'c'a'$. Pareil pour les autres bissectrices extérieures.

Théorème 2.3.3. *Dans un tel triangle il y a une unique trajectoire de billard et cette trajectoire réalise le minimum des périmètres des triangles inscrits. Cette trajectoire est formée par les côtés du triangle des pieds de hauteur.*

Démonstration :

1) On note d'abord que si on a une trajectoire de billard $a'b'c'$ inscrit dans abc , alors les côtés de $a'b'c'$ sont uniquement déterminé. Par exemple, on voit facilement, que la droite $a'c'$ est laissée invariant par $\tau = \sigma_{ab} \circ \sigma_{ac} \circ \sigma_{bc}$, le produit des symétries par rapport aux côtés du triangle abc ; donc la côté $a'c'$ est le centre de τ . Il suit qu'une trajectoire de billard est forcément unique. En particulier cette trajectoire de billard est forcément formée par les côtés du triangle des pieds de hauteur.

2) Il reste à montrer que la trajectoire formée des côtés du triangle des hauteurs de pieds réalise le *minimum des périmètres*. On utilise la figure suivante :



On pose

$$A = bc$$

$$B = ac$$

$$C = ab$$

et on désigne par S la symétrie par rapport à la droite $D := \sigma_A B$, par T la symétrie par rapport à la droite $E := S \circ \sigma_A C$. On a

$$S = \sigma_D = \sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_A \quad (2.1)$$

$$T = \sigma_E = S \circ \sigma_A \circ \sigma_C \circ \sigma_A \circ S \quad (2.2)$$

La symétrie σ_A envoie le triangle abc sur la triangle adjacente à droite, la symétrie S l'envoie sur la suivante à droite et ensuite T l'envoie sur le triangle en bas. De (2.1), respectivement (2.2) on déduit :

$$\begin{aligned} S \circ \sigma_A &= \sigma_A \circ \sigma_B \\ U := T \circ S \circ \sigma_A &= \sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C \end{aligned}$$

et on note que l'axe de cette dernière transformation est une des côtés du triangle des pieds de hauteur. Si on part d'un triangle inscrit $c'a'b'$ quelconque, alors le périmètre équivaut

$$\overline{a'b''} + \overline{b''c''} + \overline{c''a''} \geq \overline{a'a''} = \overline{a'Ua'}.$$

Comme on a vu (Exemple 2 de 2.1.12), cette dernière distance est minimal $\iff \langle a', a'' \rangle = L$ est le centre de U . Dans ce cas a' est un pied de hauteur. Le périmètre minimal est réalisé si les points b'' et c'' appartiennent à L également et dans ce cas b' et c' sont des pieds de hauteurs. \square

2.4 QUIZ sur le Chapitre 2

1. Vrai ou faux ?
 - (a) Deux triangles équilatères sont isomorphes.
 - (b) Deux cercles sont similaires.
 - (c) Le triangle de pieds de hauteur d'un triangle équilatère est équilatère.
2. On se met dans un plan euclidien. Vrai ou faux ?
 - (a) Deux symétries commutent.
 - (b) Le produit de deux symétries admet un point fixe.
3. On se met dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Vrai ou faux ?
 - (a) Une isométrie est le produit de ≤ 3 symétries planaires.
 - (b) Une isométrie indirecte admet toujours un point fixe.

2.5 Problèmes, Chapitre 2

1. Soit E un plan euclidien et $\ell, m \subset E$ deux droites non-parallèles.
 - (a) Déterminer quand les symétries par rapport à ℓ et m commutent.
 - (b) Déterminer quand σ_ℓ commute avec une translation
 - (c) Montrer que σ_ℓ et σ_m sont conjugués dans le groupe des isométries directes de E .
2. Soit E l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et ℓ l'axe $x = y = 0$. Soit R_φ une rotation autour de ℓ d'angle φ .

- (a) Montrer qu'il y a deux possibilités. Donner les matrices correspondantes.
- (b) Soit $\vec{a} = (1, 1, 1)$. déterminer la droite m laissée globalement invariante par l'application $x \mapsto R_\varphi(x) + \vec{a}$.

Chapitre 3

Quadriques

Dans ce chapitre travaille dans un espace vectoriel E sur un corps K de caractéristique $\neq 2$.

3.1 Formes quadratiques ; quelques rappels

Définition 3.1.1.

1. Une fonction

$$\varphi : E \times E \rightarrow K$$

est *bilinéaire* si elle est linéaire par rapport aux deux arguments ; si de plus $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ on dit que φ est *symétrique*.

2. La fonction

$$\begin{aligned} q : E &\rightarrow K \\ x &\mapsto \varphi(x, x) \end{aligned}$$

est appelée *la forme quadratique associée*.

Puisque la caractéristique de K est différent de 2 on a :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (q(x + y) - q(x) - q(y)). \quad (3.1)$$

Donc q détermine φ par (3.1). On appelle φ *forme polaire* de q .

Supposons que $\dim E = n$ et que $\{x_1, \dots, x_n\}$ sont les coordonnées du point x par rapport à une base. Alors, on peut écrire :

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice symétrique. Si x est représenté par le vecteur colonne X et si de plus y est donné par le vecteur colonne Y on a donc

$$q(x) = {}^T X A X$$

$$\varphi(x, y) = {}^T Y A X.$$

Si A est diagonale on dit que q_A est une *forme diagonale*.

Par un changement de coordonnées $X = PY$ la forme q se transforme comme ceci :

$$q(x) = {}^T X A X = {}^T Y ({}^T P A P) Y.$$

On dit que les formes q_A et q_B sont *équivalentes*. On a vu en LIC2 :

Lemme 3.1.2.

1. Après un changement de base convenable chaque matrice symétrique est équivalente à une matrice diagonale. De plus, si $K = \mathbb{R}$ chaque forme q est équivalente à la forme diagonale

$$x_1^2 + \cdots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \cdots + x_{r+s}^2)$$

et la signature (r, s) est *uniquement déterminée par la forme q* .

2. Après un changement orthogonale une forme quadratique est équivalente à une la forme diagonale ayant les valeurs propres de A sur la diagonale.

Exemples 3.1.3.

1) Pour $n = 2$ on trouve donc que $q \neq 0$ est équivalente à un des formes suivantes

$$\begin{array}{ll} x_1^2 + x_2^2 & \text{(forme définie positive)} \\ -(x_1^2 + x_2^2) & \text{(forme définie negative)} \\ x_1^2 - x_2^2 & \text{(forme indéfinie non-dégénérée)} \\ x_1^2 & \text{(forme dégénérée).} \end{array}$$

2) Dans le plan euclidien on trouve qu'après une rotation ou une symétrie par rapport à une droite une forme quadratique prend une des formes suivantes :

$$\begin{array}{lll} \pm(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2), & a_1, a_2 > 0 & \text{(forme définie)} \\ a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2, & a_1, a_2 > 0 & \text{(forme indéfinie non-dégénérée)} \\ \pm a_1 x_1^2, & a_1 > 0 & \text{(forme dégénérée).} \end{array}$$

3.2 Quadriques

On passe maintenant aux formes de degré 2 pas forcément homogènes

$$f(x) := q(x) + \ell(x) + c$$

avec q une forme quadratique, ℓ une forme linéaire et $c \in K$ une constante. L'ensemble

$$\{x \in E / f(x) = 0\}$$

est appelé une hypersurface quadrique ou bien simplement une *quadrique*. Si $\dim E = 2$ on l'appelle *conique*.

Soit $\dim E = n$ et soient $x_j, j = 1, \dots, n$ les coordonnées de $x \in E$ par rapport à une base et de vecteur colonne correspondent X . Alors, on a vu que $q(x) = {}^T X A X$ où A est une matrice symétrique. Il existe un vecteur colonne B telle que $\ell(x) = {}^T B X = {}^T X B$ et donc

$$f(x) = {}^T X A X + {}^T B X + c.$$

La question centrale de ce paragraphe est de trouver une forme normale pour f . Commençons avec une application linéaire de matrice P . Elle va changer f comme ceci :

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= {}^T Y \hat{A} Y + {}^T \hat{B} Y + c, \\ \hat{A} &= {}^T P A P, \\ \hat{B} &= {}^T P B. \end{aligned} \quad (3.2)$$

On conclut : P fait transformer la partie homogène de degré 2 comme si f était homogène, mais P peut changer la partie linéaire. Si on applique Lemme 3.1.2 on trouve donc que pour un choix convenable de P , la forme $q(x)$ sera diagonale. Pour E un espace euclidien, on pourra supposer que P est orthogonale.

On veut ensuite calculer l'effet d'une translation par le vecteur colonne K , i.e. on pose $X = Y + K$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= {}^T Y A Y + {}^T \hat{B} Y + \hat{c}, \\ \hat{B} &= B + 2AK, \\ \hat{c} &= {}^T K A K + {}^T B K + c. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Conclusion : une translation ne peut changer que la partie linéaire.

Exemple 3.2.1. Soit $q(x) = \sum_k a_k x_k^2$ et $\ell(x) = \sum_k b_k x_k$ où tout les coefficients sont non-nulles. Alors, on écrit $q(x) + \ell(x) = \sum_k a_k (x_k + \frac{1}{2}(b_k/a_k))^2 - b_k^2/(4a_k)$ (complétion du carré) et donc, si on met $X = Y + B$ où B est le vecteur colonne avec coefficients $\frac{1}{2}(b_k/a_k)$, on peut transformer $q(x) + \ell(X) + c$ en la forme $q(y) + \hat{c}$, i.e.

$$\hat{f}(y) = \sum a_k y_k^2 + \hat{c}.$$

Si $a_1, \dots, a_r \neq 0$, mais $r < n$ on a deux possibilités : soit $b_j = 0$ pour $j > r$ ou bien certains de b_j avec $j > r$ sont non-nulles. Dans le premier cas le calcul qu'on vient de faire s'applique. Sinon, on aura :

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=1}^r a_k y_k^2 + \sum_{k>r} a_k x_k + \hat{c}.$$

Si on pose

$$\sum_{k>r} a_k x_k + \hat{c} = y_{r+1}$$

cela définit une nouvelle variable et on trouve la forme

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=1}^r a_k y_k^2 + y_{r+1}.$$

Cet exemple nous mène à l'étude de comportement des formes linéaires sous un changement de variables.

Lemme 3.2.2. *Soit $\ell(x) = \sum a_k x_k$ avec $a_1 \neq 0$. Alors il existe une transformation linéaire inversible $x \mapsto y = P(x)$ qui transforme $\ell(x)$ en $\ell(y) = y_1$ où $y = (y_1, \dots, y_n)$. Si $K = \mathbb{R}$ et E est euclidien, alors on peut trouver une transformation orthogonale qui transforme $\ell(x)$ en $\ell(y) = \mu y_1$, $\mu \neq 0$.*

Démonstration : La matrice

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

transforme $\ell(x)$ en y_1 . Si E est euclidien avec le produit standard, on remplace la première ligne \vec{a} par $\vec{e}_1 := \vec{a}/(\|\vec{a}\|)$ et on peut compléter en une base orthogonale $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de E . Les vecteurs \vec{e}_j placés en j -ième ligne définissent une application orthogonale qui transforme $\ell(x)$ en $\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} y_1$. \square

En résumé, on voit comment procéder pour simplifier la forme de $f = q + \ell + c$: d'abord appliquant Lemme 3.1.2, avec P convenable on diagonalise q , donc $\hat{q}(y) = \sum_{k=1}^r a_k y_k^2$. Ensuite on applique une translation pour soit remplacer la partie $\ell(x)$ par une nouvelle constante, soit par une multiple d'une seule variable.

Si E est euclidienne on peut prendre soin que cette dernière transformation est orthogonale et ne change que les variables y_k , $k > r$ ce qui entraîne que $q(y)$ ne change pas. On a montré :

Proposition 3.2.3. *Après une transformation affine appropriée, une forme quadratique prend une des formes suivantes*

$$\sum_{k=1}^r a_k y_k^2 + b, \quad a_k \in K^*, b \in K$$

$$\sum_{k=1}^r a_k y_k^2 + a_{r+1} y_{r+1}, \quad a_k \in K^*.$$

Si E est euclidien, ces deux formes sont réalisables utilisant une isométrie convenable.

On reprend l'exemple 3.1.3 :

Exemple 3.2.4. Pour les coniques (non-vides) on trouve les formes normales suivantes

$$\begin{aligned} a_1x_1^2 + a_2x_2^2 &= c, & a_1, a_2, c > 0 & & \text{(ellipse)} \\ a_1x_1^2 - a_2x_2^2 &= c, & a_1, a_2, c > 0 & & \text{(hyperbole)} \\ a_1x_1^2 - a_2x_2^2 &= 0, & a_1, a_2 > 0 & & \text{(deux droites non-parallèles)} \\ a_1x_1^2 &= c, & a_1 > 0 & & \text{(deux droites parallèles)} \\ a_1x_1^2 &= x_2 & & & \text{(parabole).} \end{aligned}$$

3.3 Coniques

Représentations paramétriques

On travaille dans K , un corps de caractéristique $\neq 2$. Une conique C non-dégénérée s'écrit comme $ax^2 + by^2 = c$ ou bien comme $y = ax^2$, $a, b, c \in K^*$. On suppose que C contient au moins un point $P = (p, q)$ ce qui est automatique dans le deuxième cas (prendre $P = (0, 0)$). On a

Lemme 3.3.1. Une quadrique non-vide admet une paramétrisation rationnelle $t \mapsto (p(t), q(t))$, $t \in K$, c.à.d. $p(t), q(t)$ sont des fonctions rationnelles.

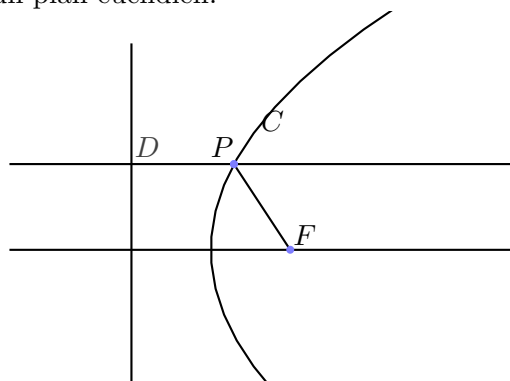
Démonstration : Dans le deuxième cas on prend $t \mapsto (t, at^2)$. Dans le premier cas on prend une droite $y - q = t(x - p)$ qui passe par P de pente t et on trouve une deuxième point d'intersection :

$$(p(t), q(t)) := \left(p + \frac{-2(ap + bqt)}{a + bt^2}, q + \frac{-2t(ap + bqt)}{a + bt^2} \right)$$

□

Deux approches synthétiques

On travaille dans un plan euclidien.



Proposition 3.3.2. Soit D une droite de E et $F \in E$ un point pas sur D . Soit

$$C = \left\{ P \in E / \frac{d(P, F)}{d(P, D)} = e \right\}.$$

Alors, pour $e < 1$ c'est une ellipse, pour $e = 1$ une parabole et pour $e > 1$ une hyperbole. On appelle D la directrice du conique et F le foyer de C .

Démonstration : On travaille dans un repère orthogonal telle que $F = (c, 0)$ et $D = \{x = d\}$. Alors avec $P = (x, y)$ on trouve $d(P, F)^2 = (x - c)^2 + y^2$ et $d(P, D) = (x - d)^2$ ce qui donne l'équation suivante pour C :

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - d)^2.$$

On a donc une conique. Pour $e = 1$ on peut simplifier cette équation en posant $c = \frac{1}{2}p$, $d = -c$. On trouve l'équation

$$y^2 = 2px, \quad (3.4)$$

une parabole. Pour $e \neq 1$ on peut simplifier l'équation en posant $c = ae$ et $d = \frac{a}{e}$. On trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad (3.5)$$

ce qui donne une ellipse si $e < 1$: on pose $b^2 = a^2(1 - e^2)$ pour arriver à

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.6)$$

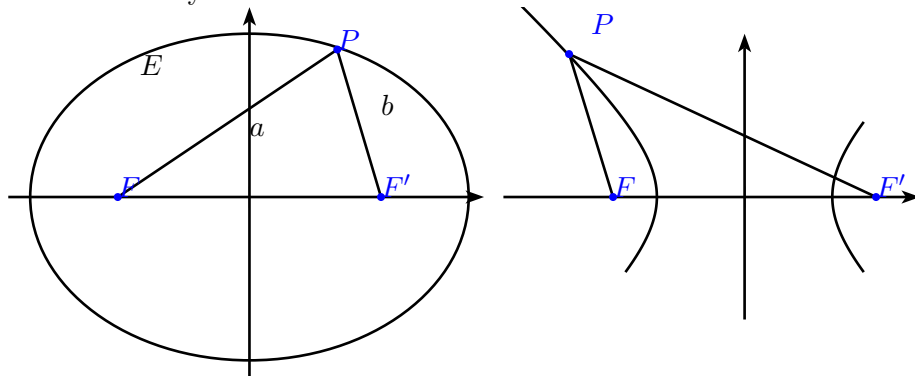
Si $e > 1$ on pose $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ et on arrive à l'équation d'une hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \square \quad (3.7)$$

Dans l'équation (3.4) on appelle p le *paramètre* du parabole. Dans (3.6) et (3.7) a et b sont les *demi-axes* et e dans (3.5) est l'*excentricité*. On voit que l'équation (3.5) est symétrique par rapport à l'origine. On appelle l'origine le *centre* du conique. Il y a donc deux foyers $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ et deux directrices $D = \left\{x = \frac{a^2}{c}\right\}$ et $D' = \left\{x = -\frac{a^2}{c}\right\}$. Si a, b sont donnés, on trouve e et c par

$$|1 - e^2| = \frac{b^2}{a^2}, \quad c = ae.$$

Il y a une autre caractérisation des coniques d'excentricité $e \neq 1$ en termes de leurs foyers :



Proposition 3.3.3. Soient F, F' deux points distincts du plan E de distance $2c$. Pour tout $a > c$ l'ensemble

$$\{P \in E / d(P, F) + d(P, F') = 2a\}$$

est une ellipse de foyers F, F' et pour tout $a < c$ positif l'ensemble

$$\{P \in E / |d(P, F) - d(P, F')| = 2a\}$$

est une hyperbole de foyers F, F' .

Démonstration : Pour une ellipse avec deux directrices D, D' on a $d(P, F) = ed(P, D)$ et $d(P, F') = ed(P, D')$. Donc $d(P, F) + d(P, F') = ed(D, D') = 2a$. Réciproquement, si $d(P, F) + d(P, F') = 2a$ on a pour $P = (x, y)$:

$$\begin{aligned} [d(P, F) + d(P, F')] \quad & | \quad [d(P, F) - d(P, F')] = d(P, F)^2 - d(P, F')^2 \\ & = [(x - c)^2 + y^2] - [(x + c)^2 + y^2] = -4xc \end{aligned}$$

et donc $d(P, F) - d(P, F') = -2ex$. On trouve $d(P, F) = \frac{1}{2}[d(P, F) + d(P, F')] + \frac{1}{2}[d(P, F) - d(P, F')] = a - ex$ d'où

$$(x - c)^2 + y^2 = d(P, F)^2 = (a - ex)^2$$

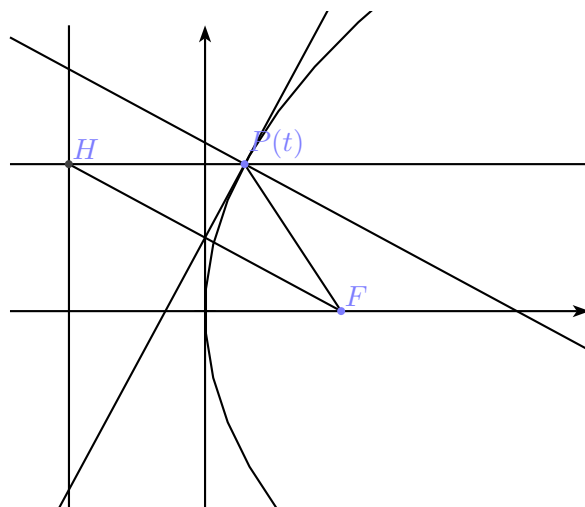
ce qui donne $(1 - e^2)x^2 + y^2 = b^2$ puisque $ec = a$ et $a^2 - b^2 = c^2$, ou encore, en divisant par b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La preuve pour l'hyperbole est analogue. □

Tangentes

On travaille dans le plan euclidien.



1) Tangentes à la parabole $y^2 = 2px$. On utilise la paramétrisation $P(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$ et donc $P'(t) = \left(\frac{t}{p}, 1\right)$. Calculons les produits scalaires entre $P'(t)$ et les vecteurs (de même longueur) \overrightarrow{PF} et \overrightarrow{PH} où $P \in D$ est sur la directrice telle que $\overrightarrow{PH} \perp D$. On trouve la même chose et donc :

Lemme 3.3.4. *Le tangent en P à une parabole est la bissectrice de l'angle HPF .*

Cela explique comment une antenne parabolique fonctionne : les rayons d'une source orthogonaux à D après réflexion se concentrent dans le foyer F et donc le signal d'origine sera amplifié de façon optimale.

2) Tangentes à une ellipse ou hyperbole. D'abord une remarque générale : soit $t \mapsto \overrightarrow{x}(t)$ une courbe paramétrée dans le plan euclidien E et $a \in E$, alors la dérivée du distance $d(a, x) = \overline{ax} = \|\overrightarrow{ax}\| = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\|$ se calcule ainsi :

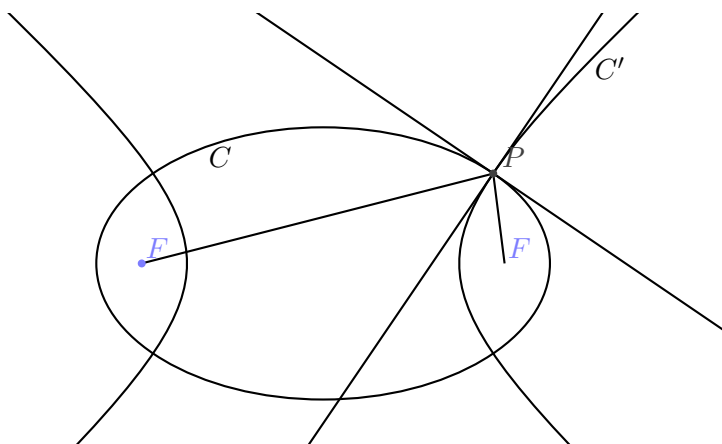
$$(\overline{ax})' = [\sqrt{(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}]' = \frac{(\overrightarrow{x}', \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{\sqrt{(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}} = \left(\overrightarrow{x}', \frac{\overrightarrow{ax}}{\overline{ax}}\right).$$

On note que $\frac{\overrightarrow{ax}}{\overline{ax}}$ est un vecteur de longueur 1. Pour une ellipse, avec $a = F$, respectivement $a = F'$, dérivant la relation $\overline{PF} + \overline{PF'}$ on trouve donc :

$$\left(\frac{\overrightarrow{FP}}{\overline{FP}} + \frac{\overrightarrow{F'P}}{\overline{F'P}}, \frac{d}{dt} \overrightarrow{P}(t)\right) = 0$$

La normale \overrightarrow{n} à l'ellipse étant orthogonale à la tangente $\frac{d}{dt} \overrightarrow{P}(t)$ cela signifie que \overrightarrow{n} est la bissectrice de l'angle $\widehat{FPF'}$.

Dans le cas de l'hyperbole un même calcul montre que la tangente (et pas la normale) est la bissectrice de $\widehat{FPF'}$.



Si on fixe les 2 foyers F, F' , il y a une seule ellipse C et une seule hyperbole C' qui passe par un point P n'appartenant pas au segment FF' . Variant P on couvre le plan donc par deux familles de sections coniques deux à deux orthogonales.

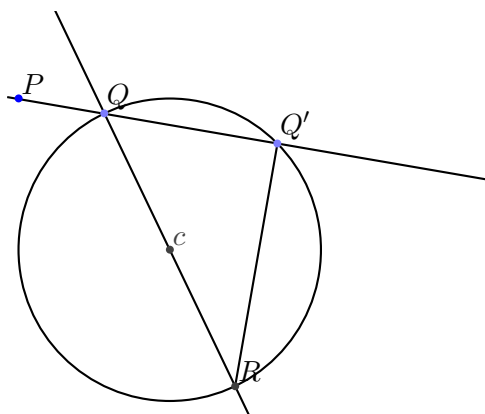
3.4 Cercles

Soit C un cercle de centre c et de rayon r . Une droite D coupe C soit en aucune point, soit un seul point et D est la tangente en P , or bien on a deux points d'intersection. Cela se voit facilement : soit $d = d(c, D)$ la distance de c à D . Alors, si $d > r$ toutes les points de D ont une distance $> r$ à c et $D \cap C = \emptyset$. Si $d = r$ le point $P \in D$ telle que $\overrightarrow{cP} \perp D$ a distance $d = r$ à c et c'est le seul point de C sur D . Si $d < r$ il y a deux points sur C et sur D à distance r de a , ces deux points sont symétriques par rapport à cP .

On discute maintenant deux résultats classiques :

Proposition 3.4.1. *Soit C un cercle de centre c et de rayon r , P un point du plan euclidien et D une droite passant par P . Si $D \cap C = \{Q, Q'\}$ le produit scalaire $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ'})$ ne dépend pas du droite, mais uniquement du couple (C, P) , et est appelé la puissance $p_C(P)$ de P par rapport à C*

Démonstration :

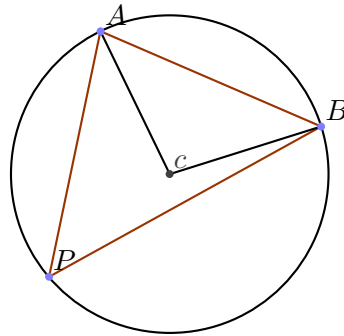


Soit $R \in C$ le point diamétralement opposé à P . Alors

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ'}) &= (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{Q'R}) \\ &= (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) \\ &= (\overrightarrow{Pc} + \overrightarrow{cQ}, \overrightarrow{Pc} - \overrightarrow{cQ}) \\ &= \overrightarrow{cP}^2 - r^2. \end{aligned}$$

□

On a : $p_C(P) = 0 \iff P \in C$, $p_C(P) > 0 \iff P$ est extérieur au cercle et donc $p_C(P) < 0 \iff P$ est à l'intérieur du cercle.



Proposition 3.4.2 (Théorème de l'angle inscrit). *Soient A, B, P trois points sur une même cercle de centre c . Alors l'angle \widehat{APB} est la moitié de l'angle \widehat{AcB} qu'elle supporte.*

Démonstration : Soit d_1 la médiatrice de AP et d_2 celle de PB , Soit σ_j la réflexion en d_j , $j = 1, 2$. Alors $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation d'angle 2 fois l'angle \widehat{APB} . D'autre part $\tau(c) = c$ et $\tau(B) = A$ donc cette angle est \widehat{AcB} . \square

3.5 QUIZ sur le Chapitre 3

1. Une quadrique de \mathbb{C}^3 contient une droite ;
2. une quadrique de rang 1 dans \mathbb{R}^3 n'est pas vide ;
3. il y a toujours une transformation affine qui transforme une quadrique non-dégénérée de \mathbb{R}^3 dans une autre quadrique non-dégénérée donnée.

Chapitre 4

Géométrie Projective

4.1 Introduction

On veut élargir le plan affine de tel sorte qu'il contient aussi des points "à l'infini" afin que deux droites parallèles se coupent en un point à l'infini. Dans le nouveau plan, appelé *plan projectif* \mathbb{P}^2 deux droites distinctes se coupent toujours en un unique point.

De façon formelle :

Définition 4.1.1. Soit E un K -espace vectoriel. Alors

1. L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des droites qui passent par $0 \in E$.
2. Un sous-espace projectif est un ensemble de la forme $\mathbb{P}(F)$ où F est un sous-espace de E .
3. Si $\dim E = n + 1$ est finie, alors on dit que $\mathbb{P}(E)$ est de dimension n .

Si E est de dimension finie $n + 1$ et on a des coordonnées $\{x_0, \dots, x_n\}$ par rapport à une base, un point $[x]$ de $\mathbb{P}(E)$ est représenté par les rapports $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ d'un point $x = (x_0, \dots, x_n)$ non-nulle sur la droite $[x]$ engendré par ce point. Ces rapports sont les *coordonnées homogènes*. Si un de ces coordonnées est non-nulle, par exemple x_0 , on peut donc écrire

$$(x_0 : \dots : x_n) = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0})$$

et

$$U_0 := \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) / x_0 \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \text{le hyperplan } x_0 = 1.$$

Donc $\mathbb{P}(E)$ est la réunion d'un espace affine de dimension n avec les points à l'infini : les points avec $x_0 = 0$ qui forment un hyperplan, i.e. un sous-espace projectif de dimension $n - 1$.

Si au lieu de prendre le hyperplan $x_0 = 1$ on prend $x_0 + \dots + x_n = 1$ on retrouve les coordonnées barycentriques dans cet espace affine par rapport

aux $(n+1)$ points $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$. Chaque droite $(x_0 : \dots : x_n)$ coupe ce plan dans l'unique point

$$\left(\frac{x_0}{\sum x_k}, \dots, \frac{x_n}{\sum x_k} \right).$$

Les droites t.q. $\sum x_k = 0$ correspondent aux points à l'infini.

Exemples 4.1.2. 1. La droite projective \mathbb{P}^1 contient la droite affine des points $(1 : x)$ avec un seul point $(0 : 1)$ à l'infini rajouté.

2. Le plan projectif \mathbb{P}^2 est le plan affine des points $(1 : x : y)$ où on a rajouté des points à l'infini $(0 : a : b)$ correspondants aux droites $-bx + ay = c$. En coordonnées homogènes une droite est donnée par une équation $cx_0 + bx_1 - ax_2 = 0$ avec $(0 : a : b)$ l'unique point à l'infini. Deux droites distinctes se coupent toujours car un système de 2 équations homogènes en 3 variables admet toujours une solution non-triviale.

4.2 Principe de dualité

Soit E un K -espace vectoriel de dimension $n+1$. On désigne par E^\vee l'espace dual de E . Si $\{e_0, \dots, e_n\}$ est une base de E , alors les coordonnées $\{x_0, \dots, x_n\}$ définissent la base duale de E^\vee . Alors $f \in E^\vee$ s'écrit de façon unique comme

$$f = a_0x_0 + \dots + a_nx_n$$

et les points $\{f = 0\}$ définissent un hyperplan de E . Puisque $\{f = 0\}$ et $\{\lambda \cdot f = 0\}$ définissent le même hyperplan, les hyperplans de E sont en rapport bi-univoque avec les points de l'espace projectif $\mathbb{P}(E^\vee)$. L'ensemble $\mathbb{P}(E)^\vee$ des hyperplans de $\mathbb{P}(E)$ s'identifie donc à $\mathbb{P}(E^\vee)$. Les coordonnées homogènes $(a_0 : \dots : a_n)$ de $\mathbb{P}(E)^\vee$ et $(x_0 : \dots : x_n)$ de $\mathbb{P}(E)^\vee$ sont liées par l'équation

$$a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$$

de l'hyperplan.

Pour un sous-espace $\mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$ on introduit

$$\mathbb{P}(F)^\vee := \{H \in \mathbb{P}(E)^\vee / H \supset \mathbb{P}(F)\}.$$

Si F^0 est l'annulateur de F :

$$F^0 = \{f \in E^\vee / f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in F\}$$

on vérifie tout de suite que $\mathbb{P}(F^0) = \mathbb{P}(F)^\vee$ et donc

$$\dim \mathbb{P}(F)^\vee = \dim F^0 - 1 = \dim E - \dim F = n - \dim F = n - \dim \mathbb{P}(F) - 1.$$

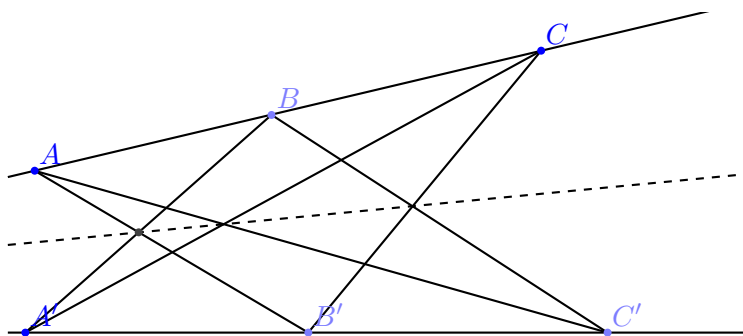
Avec deux sous-espaces projectives P_1, P_2 on introduit leur liaison $P_1 + P_2$, le plus petit sous-espace projectif contenant P_1 et P_2 . On a

Lemme 4.2.1. $(P_1 + P_2)^\vee = P_1^\vee \cap P_2^\vee$.

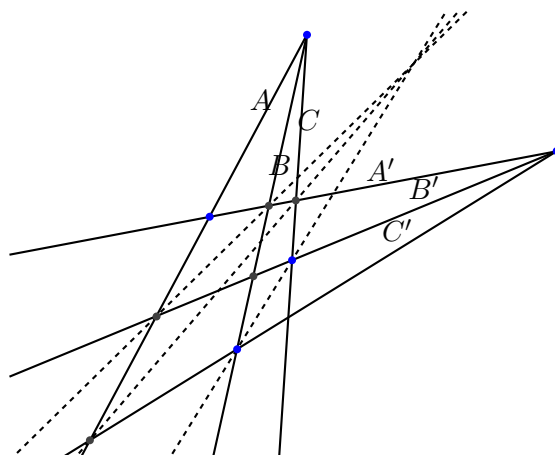
On obtient alors une principe importante :

Corollaire 4.2.2 (Principe de Dualité). *Si dans une proposition formulée en termes de sous-espaces, dimension, intersection et liaison, alors on obtient la proposition duale en changeant les mots “sous-espace de dimension m ” par “sous-espace de codimension $m + 1$ ”, “liaison” par “intersection” et si en plus on renverse les inclusions.*

Par exemple le théorème de Pappos :



se dualise comme :



On verra la démonstration du théorème de Pappos dans le paragraphe suivant.

4.3 Transformations projectives, preuve du théorème de Pappos

Puisque une application linéaire T de E transforme droites passant par 0 en droites passant par 0 , T induit une application $T : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$,

l'application *projective associée*. Deux applications linéaires T, T' définissent la même application projective $\iff T' = \lambda T, \lambda \in K^*$ et on introduit le *groupe linéaire projectif*

$$\mathrm{PGL}(E) = \mathrm{GL}(E)/K^* \mathrm{id}_E.$$

Théorème 4.3.1. *Soit E de dimension $n + 1$. Alors une application projective T est uniquement déterminée par les images de $(n + 2)$ points ayant la propriété que chaque $(n + 1)$ -uplet entre eux soit indépendant.*

Démonstration : Soit $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ une base de E t.q. $T'[e_k] = T[e_k], k = 0, \dots, n$ pour deux applications projectives T, T' . Donc

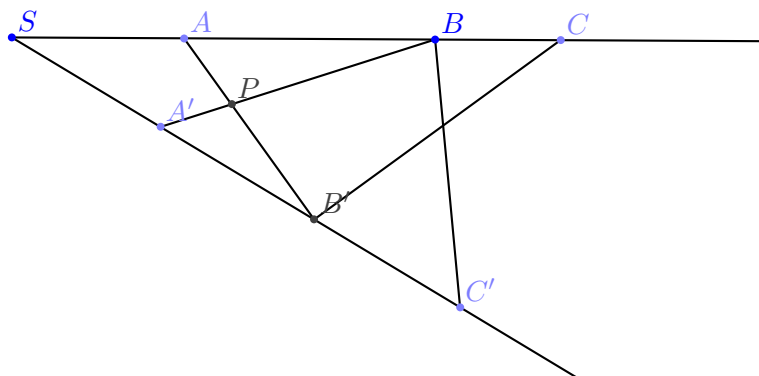
$$T'e_k = \lambda_k T e_k$$

Un point

$$e_{n+1} = \sum a_i e_i$$

a la propriété que $e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1}$ est une base pour n'importe quel $k = 0, \dots, n \iff a_k \neq 0$. Si $T'[e_{n+1}] = T[e_{n+1}]$ on trouve un $\sigma \in K$ t.q. $a_k \lambda_k = \sigma a_k, k = 1, \dots, n$ et puisque $a_k \neq 0$ on a donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \sigma$ et $T = \sigma T'$, i.e. T et T' définissent la même transformation projective. \square

Une telle collection de $(n + 2)$ points s'appelle *repère projectif*. Il y a donc une unique transformation projective qui transforme un repère en un autre. On peut appliquer cela pour prouver Pappos :



On prend $A = (1 : 0 : 0)$, $A' = (0 : 1 : 0)$ et $S := L \cap M = (0 : 0 : 1)$,

$$P := AB' \cap A'B = (1 : 1 : 1).$$

On calcule ensuite $B = (1, 0, 1)$ et $B' = (0 : 1 : 1)$. Si on met $C = (c : 0 : 1)$, $C' = (0 : c' : 1)$ on a

$$\begin{aligned} B'C &:= \{x_0 + cx_1 - cx_2 = 0\} \\ BC' &:= \{c'x_0 + x_1 - c'x_2 = 0\} \\ AC' &:= \{x_1 - c'x_2 = 0\} \\ A'C &:= \{x_0 - cx_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} Q &:= B'C \cap BC' = (c(c' - 1) : c'(c - 1) : cc' - 1) \\ R &:= AC' \cap A'C = (c : c' : 1). \end{aligned}$$

Finalement les points P, Q, R sont colinéaires car

$$\det \begin{pmatrix} 1 & c(c' - 1) & c \\ 1 & c'(c - 1) & c' \\ 1 & cc' - 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \square$$

4.4 La droite projective

Trois points distincts $\{A, B, C\}$ de \mathbb{P}^1 s'envoient aux trois points distincts par une application projective. On peut les envoyer par disons T à $\infty = (0 : 1)$, $0 = (1 : 0)$ et $1 = (1 : 1)$. Si D est un quatrième point $T(D) = \beta \in K \cup \{\infty\}$ s'appelle le *birapport* $\beta = [A, B, C, D]$.

Lemme 4.4.1. Soit $A = (a_0 : a_1)$, $B = (b_0 : b_1)$, $D = (c_0 : c_1)$ et $D = (d_0 : d_1)$, alors

$$[A, B, C, D] = \frac{\det \begin{pmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}} \bigg/ \frac{\det \begin{pmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix}}$$

Démonstration : Pour simplifier on traite le cas des points *affines* $A = (1 : a)$, $B = (1 : b)$, $C = (1 : c)$ et $D = (1 : d)$. On cherche $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec les propriétés que $TA = \infty$, $TB = 0$ et $TC = 1$. On trouve

$$T = \begin{pmatrix} a(c - b) & -(c - b) \\ -b(c - a) & c - a \end{pmatrix}$$

et

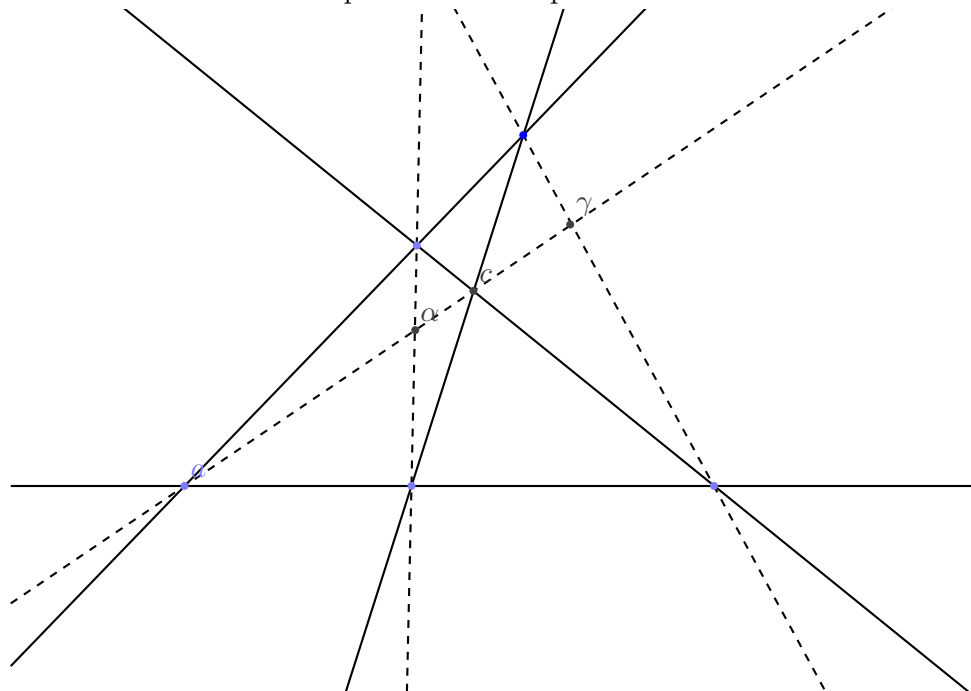
$$TD = \frac{(c - a)(d - b)}{(c - b)(d - a)} = \frac{c - a}{c - b} \bigg/ \frac{d - a}{d - b}. \quad \square$$

Un cas spécial est

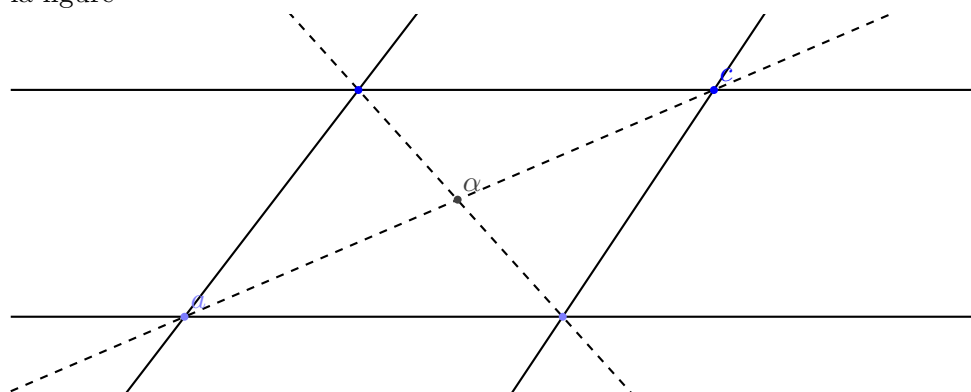
Définition 4.4.2. Supposons que la caractéristique de K est différent de 2. On dit que A, B et C, D se *divisent de façon harmonique* si $[A, B, C, D] = -1$.

Exemples 4.4.3. 1. Les points $-a, a$ et $0, \infty$ se divisent de façon harmonique.

2. On considère dans \mathbb{P}^2 un quadrilatère complet :



On a $[a, c, \alpha, \gamma] = -1$ car par une transformation projective on trouve la figure



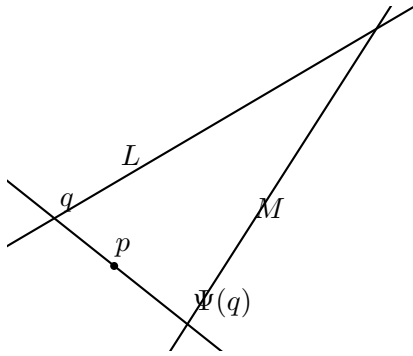
4.5 Le plan projectif, perspectives

Soit $p \in \mathbb{P}^2$ et L une droite qui ne passe pas par p . On rappelle que p^\vee désigne la collection des droites $\ell \subset \mathbb{P}^2$ passant par p : c'est une droite dans $(\mathbb{P}^2)^\vee$.

Définition 4.5.1. La bijection *tautologique*

$$\phi : p^\vee \rightarrow L$$

est définie par $\phi(\ell) = \ell \cap L$.



Lemme 4.5.2. *La bijection tautologique est une application projective*

Démonstration : Soit $p = (0 : 0 : 1)$ et $L = \{x_2 = 0\}$. Une droite ℓ qui passe par p a l'équation

$$a_0x_0 + a_1x_1 = 0$$

et $(a_0 : a_1) \in p^\vee$ peuvent être considéré comme des coordonnées homogènes. On trouve

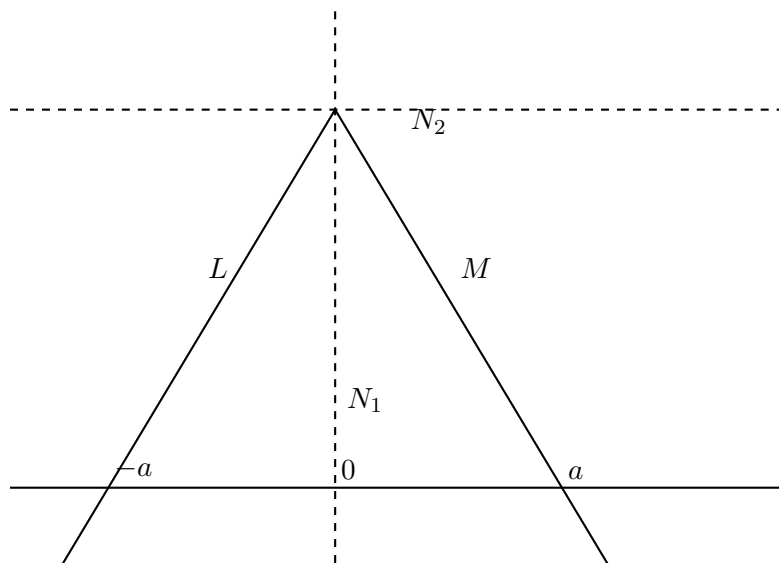
$$L \cap \ell = \{(-a_1 : a_0 : 0)\}$$

et donc $\phi(a_0 : a_1) = (-a_1 : a_0)$ si on prend (x_0, x_1) comme coordonnées homogènes sur L . \square

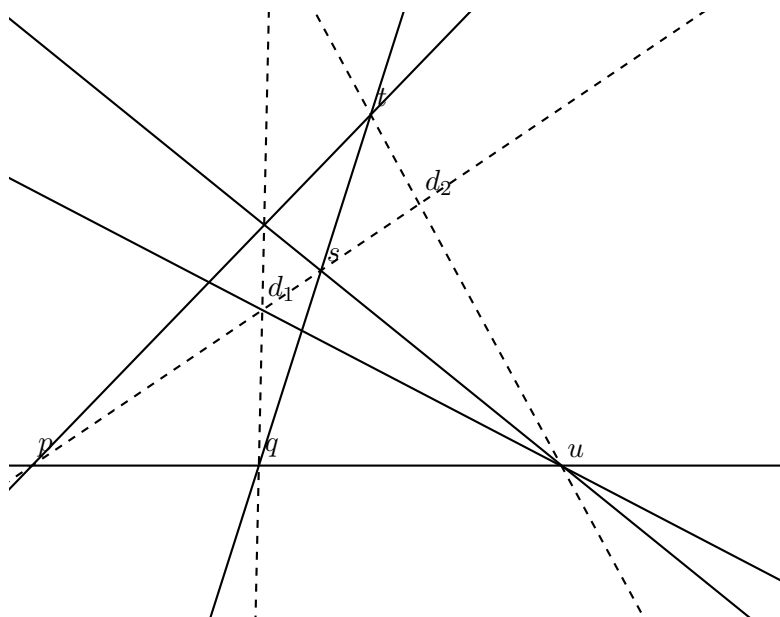
Corollaire-Définition 4.5.3. *Soient $\ell_j, j = 1, 2, 3, 4$ quatre droites passant par p et $a_j = \ell_j \cap L$. Alors le birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ne dépend pas de L . On le notera*

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4].$$

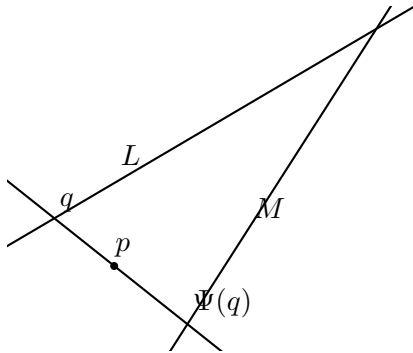
Exemples 4.5.4. 1. Soient L et M deux droites non-parallèles dans le plan euclidien et soit $p = L \cap M$ leur point d'intersection. Soient B_1 et B_2 les deux bissectrices de l'angle LM . Alors $[L, M, B_1, B_2] = -1$. Voir la figure ci-dessus.



2. Soit $\{p, q, r, s\}$ un repère de \mathbb{P}^2 . On pose $d_1 = ps \cap rq$, $t = pr \cap sq$, $u = pq \cap rs$ et $d_2 = ps \cap ut$. Alors les droites $\{up, us\}$ sont en division harmonique par rapport aux droites $\{ud_1, ud_2\}$.



Maintenant on compare les bijections tautologiques $\phi_{p,L}$ et $\phi_{p,M}$ par rapport à (p, L) et (p, M) . L'application projective $\phi_{p,M} \circ \phi_{p,L}^{-1} : L \rightarrow M$ est par définition une perspective de centre p :



Définition-Lemme 4.5.5. La perspektivité $\psi : L \rightarrow M$ de centre $p \notin L \cup M$ est l'application projective qui à $q \in L$ associe $\psi(q) = qp \cap M$.

On a une caractérisation :

Lemme 4.5.6. Soient L, M deux droites distinctes de \mathbb{P}^2 . Une application projective $T : L \rightarrow M$ est une perspektivité $\iff T$ fixe l'intersection $o = L \cap M$.

Démonstration : Si T est une perspektivité par rapport à p alors $To = o$. Réciproquement, soient $p \neq q$ deux points différents de o soit $s = pTp \cap qTq$. L'application T et la perspektivité de centre s ont la propriété que p, q et o ont mêmes images. Les deux applications projectives sont donc égales. \square

Corollaire 4.5.7. Soient $\{o, a, b, c\}$ et $\{o, a', b', c'\}$ deux quadruplets de points alignés. Alors les droites aa', bb', cc' sont concourrantes $\iff [o, a, b, c] = [o, a', b', c']$.

Démonstration : Soit L la droite qui passe par $\{o, a, b, c\}$ et M la droite qui passe par $\{o, a', b', c'\}$. Si $[o, a, b, c] = [o, a', b', c']$, alors il y a une application projective $T : L \rightarrow M$ qui envoie les points o, a, b resp. c sur o, a', b' resp. c' . Donc T est une perspektivité de centre $s = aa' \cap bb' = aa' \cap cc'$. La réciproque est claire. \square

Dualement :

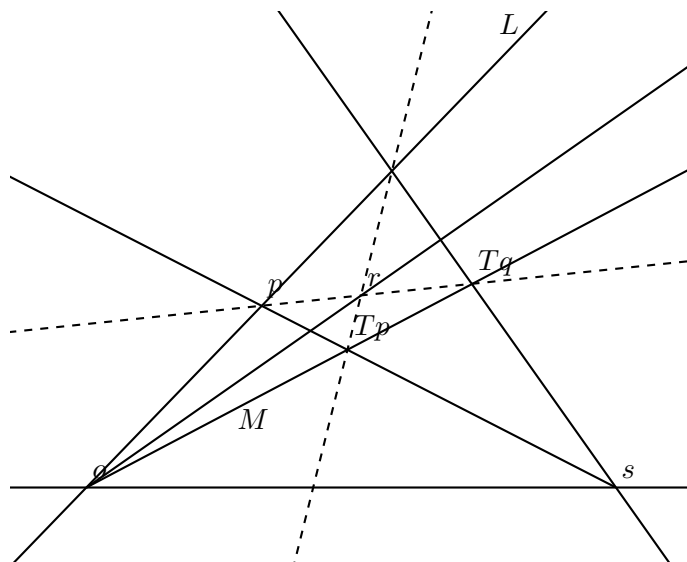
Corollaire 4.5.8. Soient $\{O, A, B, C\}, \{O, A', B', C'\}$ deux quadruplets de droites appartenant respectivement à un faisceau (c.à.d passant par le même point). Alors les points $A \cap A', B \cap B', C \cap C'$ sont alignés $\iff [O, A, B, C] = [O, A', B', C']$.

Comme une deuxième application nous avons :

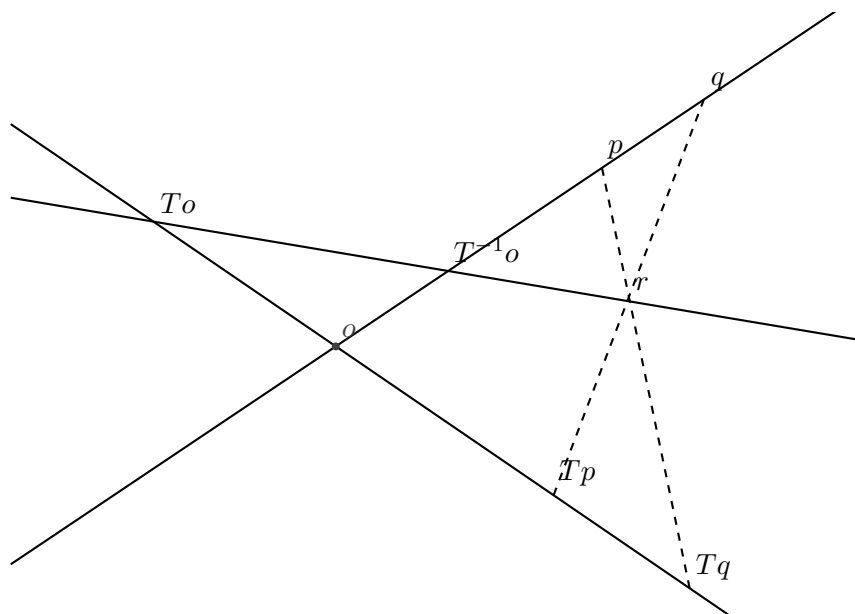
Théorème 4.5.9 (Cross Axis Theorem). Soient L, M deux droites différentes de \mathbb{P}^2 et $T : L \rightarrow M$ une application projective. Alors pour tout $p, q \in L$ les intersections $r = Tpq \cap Tqp$ appartiennent à une seule droite, l'axe de T .

Démonstration : Soit $o = L \cap M$.

Cas I. $To = o$. Donc, par le lemme précédent, T est une perspective de centre $s = pTp \cap qTq$. On met $R_1 = or$ et $R_2 = os$. Alors $[L, R_1, M, R_2] = -1$ par l'exemple précédente. Mais R_2 est une droite fixée et donc aussi R_1 et les points r y appartiennent.



Cas II. Sinon, aussi $T^{-1}o \neq o$. On a $[T^{-1}o, o, p, q] = [o, To, Tp, Tq] = [To, o, Tq, Tp]$. On définit $S : L \rightarrow M$ en exigeant que $S(T^{-1}o) = To$, $So = o$, $Sp = Tq$. Alors $Sq = Tp$ et S est une perspective de centre $r = pTq \cap qTp$ et r appartient à $(T^{-1}o)o$ qui ne dépend pas de p et q .



□

4.6 Coniques dans le plan projectif

Soit \mathbb{P}^2 le plan projectif à coordonnées homogènes (x_0, x_1, x_2) . On considère $x_0 = 0$ comme la droite à l'infini. Le plan affine à coordonnées (x, y) donc est le sous ensemble de \mathbb{P}^2 des points $\{(1, x, y)\}$. Une conique $q(x, y) = 0$ dans le plan affine se complète en une conique C d'équation $Q(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 q(x_1/x_0, x_2/x_0) = 0$. Si X est le vecteur colonne avec coordonnées (x_0, x_1, x_2) on peut l'écrire comme

$$Q(X) := {}^T X A X = 0.$$

Puisqu'on peut toujours diagonaliser Q on peut trouver une repère projective telle qu'une conique non-dégénérée s'écrit

$$x_0^2 + ax_1^2 + bx_2^2 = 0, \quad a, b \in K^*.$$

Si $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ on peut supposer $a = 1$ et $b = -1$, i.e. dans la partie affine c'est un cercle !

Pour $p = (p_0 : p_1 : p_2)$ on considère le vecteur colonne P correspondante. La droite ${}^T P A X = 0$ s'appelle *polaire de p* par rapport à C et on dit que $p, q \in \mathbb{P}^2$ sont *conjuguées* par rapport à C si p appartient à la polaire de q par rapport à C . Le point $p \in \mathbb{P}^2$ tel que L est sa polaire par rapport à C s'appelle le *pôle de L* .

Si on suppose que C est non-dégénérée et non-vidée, alors la tangente de C en $p \in C$ est la polaire de p . Si p appartient à sa polaire L , alors $p \in C$ et L est une tangente. Si $p \notin C$, et $r \in L \cap C$, on calcule facilement que $M := pr$ coupe C seulement en r et donc M est la tangente de C en r .

Lemme 4.6.1. *Soit $p \notin C$. Il y a deux tangentes qui passent par p .*

Démonstration : Soit L la polaire de p . Alors $L \cap C = \{r, s\}$ et pr et ps sont deux tangentes. Il faut vérifier que $s \neq r$: si $s = r$ la droite L est tangente et sa pôle p est sur C . Contradiction. \square

L'application

$$\begin{aligned} T_C : \mathbb{P}^2 &\rightarrow (\mathbb{P}^2)^\vee \\ p &\mapsto \text{polaire de } p \end{aligned}$$

est un exemple d'une *corrélation*. Par définition c'est une application induite par une matrice par rapport aux coordonnées homogènes $\{x_0, x_1, x_2\}$ de \mathbb{P}^2 et $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$ de $(\mathbb{P}^2)^\vee$. L'application T_C est donnée par $P \mapsto AP$ car l'équation de la droite polaire par rapport à $(p_0 : p_1 : p_2)$ avec vecteur colonne P associé est donné par $(AP)_0 x_0 + (AP)_1 x_1 + (AP)_2 x_2 = 0$.

L'application duale à T est :

$$\begin{aligned} T_C^\vee : (\mathbb{P}^2)^\vee &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ L &\mapsto \text{pôle de } L \end{aligned}$$

et on a visiblement $T \circ T_C^\vee = \text{id} = T_C^\vee \circ T$; T est une *involution*. La matrice de T_C^\vee est A^{-1} et le conique $L^T A^{-1} L = 0$ dans $(\mathbb{P}^2)^\vee$ s'appelle le *dual* de C , noté C^\vee et on dit que C et C^\vee sont *conjugués*.

Proposition 4.6.2. *Si C est non-dégénérée C^\vee l'est aussi et $L \in C^\vee$ ssi L est tangente à C .*

Démonstration : Par définition on a : $L \in C^\vee$ ssi $\vec{\xi}^T A^{-1} \vec{\xi} = 0$ ssi \vec{p} appartient à la droite donnée par $A^{-1} \vec{\xi}$. D'autre part, si L est donnée par le vecteur colonne $\vec{\xi}$, alors $T_C^\vee(L) \in \mathbb{P}^2$ est donné par $\vec{p} = A^{-1} \vec{\xi}$. Combinant ces deux propriétés, on a : $L \in C^\vee$ ssi $L \in T_{C^\vee} L$. Cela signifie que L passe par son pôle c.à.d. L est tangente à C . \square

On a une nouvelle principe de dualité :

Proposition 4.6.3 (Principe de dualité). *Si un théorème valable dans \mathbb{P}^2 est formulé en termes de points, droites, incidences, birapport, coniques, conjugaison, alors on obtient un théorème dans $(\mathbb{P}^2)^\vee$ en échangeant les mots "point" et "droite".*

Soit maintenant C une conique non-dégénérée dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. On fixe $u \in C$ et on considère pour $v \in C$ l'intersection $pq \cap C$. On peut supposer que $u = (1 : 0 : 0)$ et $v = (0 : 1 : 0)$ et que l'équation de C est $fx_2^2 + 2bx_0x_1 + 2cx_0x_2 + 2ex_1x_2 = 0$. La droite passant par u et v est paramétrée par $(\lambda, \mu, 0)$ et l'intersection est donnée par $2b\lambda\mu = 0$ et donc les seuls point d'intersections sont u et v . Il s'en suit que l'application

$$\begin{aligned} \pi_u : u^\vee &\rightarrow C \\ L &\rightarrow L \cap C \end{aligned}$$

est bijectif.

Lemme 4.6.4. *Soient $u, s \in C$, alors l'application $\pi_s^{-1} \circ \pi_u : u^\vee \rightarrow s^\vee$ est une application projective.*

Démonstration : Soit $p \in \mathbb{P}^2$ et L sa polaire. On prend $p \notin C$ et soient q et r les deux points d'intersections $L \cap C$ on suppose que $p = (1 : 0 : 0)$ et $q = (0 : 1 : 0)$, $r = (0 : 0 : 1)$. Si de plus $s \in C$ est un point arbitraire qu'on peut choisir $s = (1 : 1 : 1)$, l'équation de C devient $x_0^2 = x_1x_2$. On peut donc prendre $u = q$ et $v = r$. Les droites L par q ont l'équation $\lambda x_0 + \mu x_2 = 0$ et les droites L' par r ont l'équation $\lambda' x_0 + \mu' x_1 = 0$. On a $L \cap L' \in C$ ssi $\lambda\lambda' = \mu\mu'$ ce qui donne l'application projective $(\lambda : \mu) \mapsto (\mu : \lambda)$. \square

Corollaire-Définition 4.6.5. *Soient $a, b, c, d \in C$ et $p \in C$ arbitraire. Le birapport $[a, b, c, d] = [\pi_p a, \pi_p b, \pi_p c, \pi_p d]$ est indépendant du choix de p .*

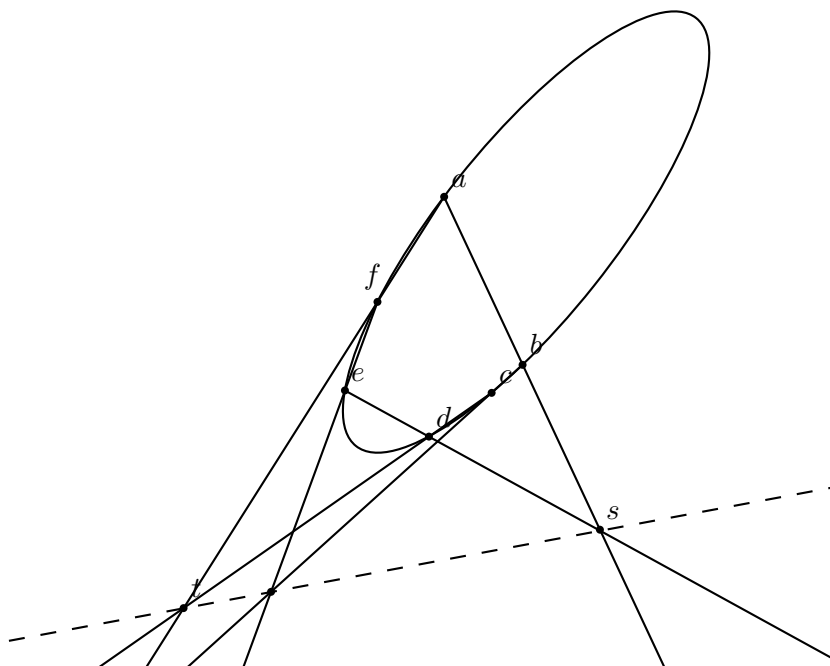
Comme application de cette notion nous démontrerons le :

Théorème 4.6.6 (Théorème de Pascal). *Soit C une conique non-dégénérée et $a, b, c, d, e, f \in C$ six points différents¹. Alors $ab \cap de$, $bc \cap ef$, $cd \cap fa$ sont alignés.*

Démonstration : Posons $x = bc \cap ed$, $y = cd \cap ef$, $z = ab \cap de$ et $t = af \cap dc$. D'après 4.5.3 on a

$$[z, x, d, e] = [ba, bc, bd, be] = [fa, fc, fd, fe] = [t, c, d, y],$$

et donc zt, xc, ey sont concourantes d'après le Corollaire 4.5.7. \square



4.7 QUIZ sur le Chapitre 4

Les énoncés suivantes sont elles vraies ou fausses :

1. Soient p_0, p_1, p_2 un triplet de points distincts d'une droite projective. Une transformation projective T telle que $Tp_0 = p_1, Tp_1 = p_2, Tp_2 = p_0$ est cyclique d'ordre trois.
2. Si 4 points d'une droite projective sont en division harmonique, ils le restent après permutation.
3. Soient L, M deux droites distinctes du plan projectif. Une application projective T du plan qui envoie L sur M doit fixer le point $L \cap M$.

Soit $C \subset \mathbb{P}_K^2$ (K corps de caractéristique $\neq 2$) un conique d'équation ${}^t XAX = 0$. Vrai ou faux ?

-
1. En fait ça reste vrai même si au plus 3 paires de points sont confondues

1. L'application de \mathbb{P}_K^2 vers le plan dual, définie par $p \mapsto$ polaire de p est inversible ;
2. le conique C est non-singulière si A est de rang 3 ;
3. si C contient au moins 2 points, C est en bijection avec \mathbb{P}_K^1 .

Soient $p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{P}_K^2$ cinq points, Vrai ou faux ?

1. Il existe un conique C qui passe par les cinq points p_k , $k = 1, \dots, 5$;
2. Ce conique est unique.

4.8 Problèmes, Chapitre 4

1. On se place sur la droite projective \mathbb{P}_K^1 avec coordonnées homogènes (x, y) . Soit $p = (0 : 1)$, $q = (1 : 0)$ et $r = (1 : 1)$. Déterminer la transformation projective T telle que $Tp = q, Tq = r, Tr = p$.
2. Soit T une transformation projective du plan projectif ayant un point p fixe et une droite L de points fixes. On suppose que $p \notin L$. On dit que T est une *collinéation centrale*.

(a) Montrer que chaque droite qui passe par p est globalement invariante.

(b) On utilise des coordonnées homogènes (x, y, z) . On suppose que $p = (0 : 0 : 1)$ et $L = \{z = 0\}$. Montrer que T est donnée par une

matrice diagonale $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Soit $q \neq p$ et $s = pq \cap L$. On pose

$$k := [p, s, q, Tq].$$

Montrer que $k = b/a$ et donc ne dépend pas du point q . On l'appelle *rapport de T* .

(c) Conclure qu'une collinéation centrale est complètement déterminée par ses point fixes et son rapport.

3. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$ et E un K -espace vectoriel de dimension n . Soit $q : E \rightarrow K$ une forme quadratique et φ la forme bilinéaire associée. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et soit $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale. On pose

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \varphi(e_i, e_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

- (a) Soit $x = \sum_j x_j e_j$ et X le vecteur colonne correspondant ; dito pour $y = \sum_j y_j e_j$ et Y . Montrer que $q(x) = {}^T X A X$ et $\varphi(x, y) = {}^T Y A X = {}^T X A Y$.

(b) Soit

$$\begin{aligned}\Phi : E &\rightarrow E^\vee \\ x &\mapsto \{y \mapsto \varphi(x, y)\}.\end{aligned}$$

Calculer la matrice de Φ par rapport aux bases données. Conclure que Φ est un isomorphisme si et seulement si φ est non-dégénérée.

(c) Maintenant on suppose que $n = 3$ et on va étudier l'application $[\Phi] : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E^\vee)$ induite par Φ . Montrer que l'image d'un point $p \in \mathbb{P}(E)$ sous cette application est la droite polaire de ce point par rapport au conique $C \subset \mathbb{P}(E)$ d'équation ${}^t X A X = 0$.