

---

---

**GÉOMETRIE  
LICENCE**  
**Notes de L5G 1999-2000**

Chris Peters

Université de Grenoble I  
Saint-Martin d'Hères, France

25 Mai 2000

---

---

# Sommaire

Chapitre 0. Introduction .....	1
Chapitre 1. Géométrie affine .....	2
§ 1. Transformations affines .....	2
§ 2. Espaces affines .....	2
§ 3. Transformations affines : le cas général .....	4
§ 4. Sous-espaces affines .....	5
§ 5. Barycentres et applications .....	6
Chapitre 2. Géométrie euclidienne .....	12
§ 1. Isométries et similitudes .....	12
§ 2. Isométries planes et les triangles .....	13
§ 3. Trajectoire de billard .....	17
Chapitre 3. Géométrie Projective .....	22
§ 1. Introduction .....	22
§ 2. Principe de dualité .....	22
§ 3. Transformations projectives, preuve du théorème de Pappos .....	24
§ 4. Desargues .....	25
§ 5. La droite projective .....	27
§ 6. Le plan projectif, perspectives .....	28
Chapitre 4. Quadriques .....	33
§ 1. Formes quadratiques .....	33
§ 2. Quadriques sous les groupes affines et euclidiens .....	34
§ 3. Coniques dans le plan projectif complexe .....	37

# Chapitre 0. Introduction

Le cours traite quelques sujets de la géométrie élémentaire : sujets provenant de la géométrie affine, euclidienne et projective.

Les trois premiers chapitres donnent une introduction globale à ces géométries, chaque fois terminant avec un résultat marquant. Pour la géométrie affine ce sont les théorèmes de Menelaos (1.5.8) et De Ceva (1.5.7).

Le trajectoire de billard est le thème du troisième chapitre avec le résultat final Th. 2.3.3. Pour la géométrie projective les théorèmes de Pappos (3.2.3) et le “Cross Axis Theorem” (3.6.9) peuvent être vus comme marquants.

Ensuite on classe les quadriques dans l’espace affine, euclidienne ou projective et on traite plus en détail les coniques projectives. Ici le théorème marquant est le théorème de Pascal (4.3.6).

## Références

[B] Berger, M.: Géométrie 1–5, Cedic/Fernand Natan (1979),

**Commentaire** C’est un texte classique. Utile pour la préparation au CAPES et l’Agrégation; contient beaucoup de matériel y inclus quelques exercices. Niveau un peu trop élevé pour la Licence.

[S] Samuel, P.: Projective Geometry, Springer (1988),

**Commentaire** Il existe aussi un texte en français. Niveau assez bien adapté au cours malgré du fait qu’il n’y a presque rien sur la géométrie euclidienne. Pas d’exercices.

# Chapitre 1. Géométrie affine

Dans ce chapitre on fixe un corps  $K$  et un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sur ce corps.

## § 1. Transformations affines

### 1.1. Définition.

1. Soit  $e \in E$ . La **translation** définie par  $e$  est l'application  $x \mapsto x + e$ .
2. Une **transformation affine** (non-singulière) de  $E$  est une transformation linéaire (inversible) suivi d'une translation.

Soient  $S$  et  $T$  deux applications linéaires de  $E$  et  $e, f \in E$ . On calcule

$$S(Tx + e) + f = S \circ T(x) + (Se + f)$$

donc :

**1.2. Lemme.** *La composition de deux transformations affines est une transformation affine.*

Si de plus  $S$  est inversible  $y = Tx + e$  équivaut  $x = S^{-1}y - S^{-1}e$  et donc :

**1.3. Lemme.** *Une transformation affine non-singulière est inversible.*

Combiné avec la remarque précédente cela montre que les transformation affines non-singulières de  $E$  forment un groupe

$$\text{GA}(E) = \{\text{Groupe affine de } E\}$$

Si on choisit une base  $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  la transformation  $S$  sera représentée par une matrice  $A = (A_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$  et  $A$  sera inversible si  $S$  l'est. Le vecteur  $e$  est représenté par une matrice colonne  $\vec{e}$  et l'application affine  $x \mapsto y = Sx + e$  est donnée par  $\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{e}$ . Si on représente cela par la matrice

$$t_{\mathcal{E}}(S, e) := \begin{pmatrix} A & \vec{e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le calcul

$$\begin{pmatrix} B & \vec{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \vec{e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & B\vec{e} + \vec{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montre :

**1.4. Proposition.** *Le groupe affine  $\text{GA}(E)$  s'envoie par  $t_{\mathcal{E}}$  de façon isomorphe au sous-groupe  $\text{GA}_n(K)$  de  $\text{GL}_{n+1}(K)$  formé des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} A & \vec{e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A \in \text{GL}(n, k)$ .*

### 1.5. Exemples.

1. **Homothétie** de centre  $a$  et de rapport  $\lambda$  est définie par  $x \mapsto a + \lambda(\vec{ax})$ .
2. Une rotation du plan  $\mathbb{R}^2$  de centre  $a$  et angle  $\varphi$  est définie par  $x \mapsto a + A(\vec{ax})$  où  $A$  est une rotation linéaire d'angle  $\varphi$ .

## § 2. Espaces affines

Si on fait opérer les applications affines, l'origine perd son rôle de point préféré. En fait une translation de  $E$  transforme 0 en n'importe quel point et vice versa. Le langage à utiliser ici est celui d'opération de groupe.

**2.1. Définition.** Soit  $G$  un groupe et  $E$  un ensemble. Une application  $G \times E \rightarrow E$ , désignée  $(g, e) \mapsto g \cdot e$  est une **opération de groupe** si

1.  $1 \cdot e = e$  pour tout  $e \in E$ ,
2.  $(g \cdot g')(e) = g \cdot (g' \cdot e)$  pour tout couple  $g, g' \in G$  et  $e \in E$ .

L'ensemble des  $g \in G$  fixant  $x \in X$  est le **groupe d'isotropie** de  $x$ .

L'action est **fidèle** si  $ge = e$  pour tout  $e \in E$  implique  $g = 1$  et l'action est **transitive** si pour tout couple  $e, e' \in E$  il existe  $g \in G$  avec  $g \cdot e = e'$ .

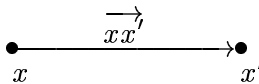
**2.2. Lemme.** Soit  $G$  abélien. On suppose que  $G$  agit de façon fidèle et transitive sur un ensemble  $E$ . Alors aucun point  $e \in E$  n'est fixe que par 1  $\in G$ . Donc si  $e, e' \in E$  il y a un **unique** élément  $g \in G$  qui transforme  $e$  en  $e'$ .

*Démonstration.* Soit  $e' \in E$  quelconque et supposons que  $ge = e'$ . Alors si  $he = e'$  on a  $g^{-1}he' = g^{-1}hge = he = e'$  par commutativité et donc  $g^{-1}h = 1$  par fidélité. ■

L'exemple de base est l'action du groupe additif  $\vec{E}$  de  $E$  sur  $E$  comme translations. En fait, si  $X$  est n'importe quel ensemble sur lequel  $\vec{E}$  agit fidèlement et transitivement, l'ensemble  $X$  est en relation bijective avec  $E$ : on fixe un point  $x \in X$  et chaque point  $x' \in X$  s'écrit de façon unique comme

$$x' = e \cdot x = x + \vec{e}.$$

On écrit ça aussi comme  $\vec{e} = \overrightarrow{xx'}$ .



**Figure 1.**

Dire qu'on considère  $E$  comme un espace sans point préféré revient à dire qu'on ne regarde que l'ensemble  $E$  des points de l'espace vectoriel avec l'action fidèle et transitive du groupe  $\vec{E}$  de ces translations. On oublie donc l'addition des points de  $E$ , mais on écrit plutôt l'action de  $\vec{E}$  comme

$$x \mapsto x + \vec{e}.$$

Donc l'écriture  $x + \vec{e} + \vec{f}$  veut dire  $x + (\vec{e} + \vec{f}) = (x + \vec{e}) + \vec{f} = (x + \vec{f}) + \vec{e}$ . Cette discussion mène à la définition suivante :

**2.3. Définition.** Un **espace affine**  $E$  modelé sur l'espace vectoriel  $\vec{E}$  consiste en un ensemble  $E$  (en bijection avec l'ensemble  $\vec{E}$ ) muni d'une action fidèle et transitive du groupe additif de  $\vec{E}$ . On écrit l'action comme ci-dessus:  $x \mapsto x + \vec{e}$ .

## 2.4. Exemples.

1. Chaque espace vectoriel  $E$  fournit un **modèle standard** d'un espace affine: on prend pour  $E$  l'ensemble sous-jacent à l'espace vectoriel et pour  $\vec{E}$  l'espace lui-même agissant sur lui-même par translations.
2. Les **sous-espaces affines** d'un espace vectoriel  $E$  sont les ensembles qu'on obtient en translatant un sous-espace linéaire  $F$  de l'espace  $E$ . Un tel espace est donc de la forme  $e + F$ ,  $e \in E$ . Le groupe additif  $\vec{F}$  de  $F$  agit sur cet ensemble par translations et c'est une action fidèle et transitive.
3. Une exemple du même type: soit  $f : E \rightarrow K$  une fonction linéaire sur un espace vectoriel  $E$ . Alors  $f^{-1}a$ ,  $a \in K$  est un espace affine.
4. Si  $(E, \vec{E})$  et  $(F, \vec{F})$  sont deux espaces affines, le produit  $E \times F$  admet l'action du groupe  $\vec{E} \oplus \vec{F}$ . Ainsi on obtient le **produit**  $(E \times F, \vec{E} \oplus \vec{F})$ .
5. Soit  $(E, \vec{E})$  un espace affine et  $\vec{F}$  un sous-espace de  $\vec{E}$ . On introduit une relation d'équivalence sur  $E$ :

$$e \sim e' \iff \overrightarrow{ee'} \in \vec{F}.$$

Soit  $E/\vec{F}$  l'ensemble des classes d'équivalence. On désigne la classe de  $e$  par  $[e]$  ou bien  $e + \vec{F}$ . Le groupe  $\vec{E}/\vec{F}$  agit sur cet ensemble. Soit  $e' \in E$ . Alors

$$[e] \mapsto [e + e']$$

ne dépend que de la classe  $e' + \vec{F}$  et définit une action de  $\vec{E}/\vec{F}$  sur l'ensemble  $E/\vec{F}$ . Cette action est transitive et fidèle, donc  $(E/\vec{F}, \vec{E}/\vec{F})$  est un espace affine, l'**espace quotient** de  $(E, \vec{E})$  par  $\vec{F}$ .

Si on se donne des points  $b_0, \dots, b_m$  dans un espace affine  $E$ , alors ces points engendrent un **sous-espace affine**  $[b_0, \dots, b_m]$  de  $E$ . Par définition c'est le plus petit sous-espace de  $E$  contenant ces points. On peut l'écrire

$$[b_0, \dots, b_m] = \{b_0 + \sum_k \lambda_k \overrightarrow{b_0 b_k} ; \lambda_k \in K\}.$$

Cet espace  $F$  est donc modelé sur le sous-espace  $\vec{F}$  de  $\vec{E}$  engendré par les  $\overrightarrow{b_0 b_k}$ . Si c'est une base de ce sous-espace, on dit que  $\{b_0, \dots, b_m\}$  est une **repère affine** de  $F$ .

## § 3. Transformations affines : le cas général

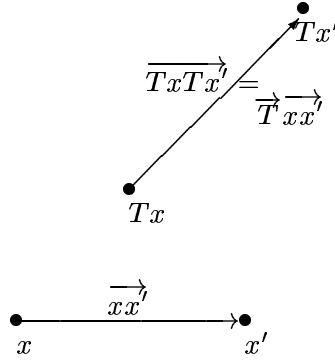
Soient  $E$  et  $F$  deux espaces affines. On dit qu'une transformation  $T : E \rightarrow F$  est **affine** si, fixant  $x \in E$ , l'application

$$\begin{aligned} \vec{T}_x : \vec{E} &\rightarrow \vec{F} \\ \vec{e} &\mapsto \overrightarrow{T_x T(x + \vec{e})} \end{aligned}$$

est une application linéaire.

**3.1. Lemme.**  $T_x$  ne dépend pas de  $x$  et on peut donc écrire

$$Tx' = Tx + \vec{T}(xx').$$



**Figure 2.**

*Démonstration.* On utilise que  $T_x$  est linéaire. Donc  $\vec{T}_x(\vec{x}'y) = \vec{T}_x(-\vec{x}'x + \vec{x}'y) = -\vec{T}_x\vec{x}'x + \vec{T}_x\vec{x}'y$ . Par définition c'est égale à  $-\overrightarrow{T_x T_x'x} + \overrightarrow{T_x T_x'y} = \overrightarrow{T_x' T_x'y} = \vec{T}_{x'}(\vec{x}'y)$ . ■

**3.2. Remarque.** Si  $E = F$  c'est la même définition qu'avant.

Si on utilise des repères  $\{b_0, \dots, b_n\}$  de  $E$  et  $\{c_0, \dots, c_m\}$  de  $F$  on peut décrire  $T$  en utilisant la matrice  $A$  de  $\vec{T}$  par rapport aux bases  $\{\vec{b}_1\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_n\vec{b}_0\}$  de  $\vec{E}$  et  $\{\vec{c}_1\vec{c}_0, \dots, \vec{c}_m\vec{c}_0\}$  de  $F$  et le vecteur  $\vec{e}$  de coordonnées de  $\overrightarrow{c_0 T b_0}$  par rapport à la base  $\{\vec{c}_1\vec{c}_0, \dots, \vec{c}_m\vec{c}_0\}$  de  $F$  car

$$Tx = Tb_0 + \vec{T}\vec{b}_0x = c_0 + \overrightarrow{c_0 T b_0} + \vec{T}\vec{b}_0x$$

et donc, si  $\vec{x}$  est le vecteur de coordonnées de  $\vec{b}_0x$ , le vecteur  $A\vec{x} + \vec{e}$  est le vecteur de coordonnées de  $\overrightarrow{c_0 T x}$ .

Donc, l'ensemble des applications affines de  $E$  dans  $F$  s'identifie à

$$\text{Aff}_{n,m}(K) := \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; A \in M_{n+1,m+1}(K); \vec{e} \in K^n \right\}.$$

Ici on rappelle que  $M_{p,q}(K)$  est l'ensemble des matrices de taille  $(p, q)$  avec coefficients dans  $K$ .

De plus, si  $E = F$  les applications affines non-singulières s'identifient à

$$\text{GA}_n(K) := \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Gl}_{n+1}(K) ; A \in \text{Gl}_n(K); \vec{e} \in K^n \right\}.$$

## § 4. Sous-espaces affines

Soit  $E$  un espace affine modelé sur  $\vec{E}$ . Un **sous-espace affine** de  $E$  est un sous-ensemble de la forme  $e + \vec{F} = \{e + \vec{f} ; f \in \vec{F}\}$  où  $\vec{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$ . La **dimension** du sous-espace affine  $e + \vec{F}$  est la dimension de l'espace linéaire  $\vec{F}$ .

Cette notion coïncide avec la notion d'une sous-espace affine d'un espace vectoriel si on utilise le modèle standard.

### 4.1. Exemples.

1. Une droite est un sous-espace de dimension 1, un hyperplan est un sous-espace de dimension  $\dim E - 1$ .
2. Si  $S \subset E$  est un sous-ensemble de  $E$ , l'espace affine  $[S]$  engendré par  $S$  est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant  $S$ . Si  $S = \{e_0, \dots, e_d\}$  alors

$$[S] = \left\{ e_0 + \sum_{k=1}^d \lambda_k \overrightarrow{e_k e_0} ; \lambda_k \in K \right\}.$$

Donc cette notion coïncide avec la notion introduite avant.

**4.2. Remarque.** Un sous-espace affine contient chaque droite passant par deux de ces points. La réciproque n'est vraie que si  $K$  est un corps de caractéristique  $\neq 2$ .

**4.3. Lemme.** Une transformation affine transforme un sous-espace affine de dimension  $d$  en un sous-espace de dimension  $\leq d$ . Si la transformation est non-singulière elle conserve la dimension.

*Démonstration.*

$$T(e + \vec{f}) = Te + \vec{T}f$$

et donc  $T(e + \vec{F}) = Te + \vec{T}\vec{F}$  et l'assertion découle du fait que  $\vec{T}\vec{F}$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $\leq d$  avec égalité si  $\vec{T}$  est inversible. ■

Voici quelques propriétés concernant l'intersection des sous-espaces affines.

**4.4. Définition.** Soient  $F_1, F_2$  deux sous-espaces d'un affine  $E$ .

- 1) On dit que  $F_1$  et  $F_2$  sont parallèles,  $F_1 // F_2$  si  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ .
- 2) On dit que  $F_1$  et  $F_2$  sont faiblement parallèles, si  $\vec{F}_1 \subset \vec{F}_2$ .

On a clairement

**4.5. Lemme.**

- 1) Deux sous-espaces parallèles distincts sont disjoints;
- 2) Par chaque point d'un espace affine passe un unique sous-espace affine parallèle à un sous-espace affine donné;
- 3) Deux sous-espaces affines  $F_1 = e_1 + \vec{F}_1$ ,  $F_2 = e_2 + \vec{F}_2$  tels que  $\vec{E} = \vec{F}_1 \oplus \vec{F}_2$  ont un unique point en commun.
- 4) Les transformations affines préservent le parallélisme.

## § 5. Barycentres et applications

Pour motiver la notion, considérons d'abord le cas d'un sous-espace affine  $P$  d'un espace vectoriel  $E$  où  $P$  est le sous-espace affine qui passe par les points  $e_0, \dots, e_m$ . Chaque point de  $P$  s'écrit

$$z = e_0 + \sum_k \lambda_k \overrightarrow{e_0 e_k}$$

et cet écriture est unique si les points  $\{e_0, \dots, e_m\}$  forment un repère affine. Dans  $E$  cela s'écrit aussi

$$z = (1 - \sum_k \lambda_k) e_0 + \sum_k \lambda_k e_k$$

et donc si on pose  $\lambda_0 = (1 - \sum_{k=1}^m \lambda_k)$  on a une écriture  $z = \sum_{k=0}^m \lambda_k e_k$ ,  $\sum_{k=0}^m \lambda_k = 1$ . On dit que  $z$  est le barycentre des  $e_k$  à poids  $\lambda_k$ .

On souhaite généraliser cela pour un espace affine  $E$ .

**5.1. Définition.** Soit  $\{e_0, \dots, e_m\}$  un sous-ensemble d'un espace affine  $E$  et  $x_i \in K$ ,  $i = 0, \dots, m$   $m + 1$  valeurs avec somme égal à 1, alors le **barycentre** des  $e_k$  avec masses  $x_k$  est le point

$$x = e + \sum_{i=0}^m x_i \overrightarrow{e e_i}$$

où  $e \in E$  est n'importe quel point.



On vérifie que  $x$  ne dépend pas du choix du point  $e$  : un autre choix  $e'$  donne

$$e' + \sum_{i=0}^m x_k \overrightarrow{e'e_k} = e' + \sum_{i=0}^m x_k (\overrightarrow{ee_k} + \overrightarrow{e'e}) = e' + \overrightarrow{e'e} + \sum_{i=0}^m x_k \overrightarrow{ee_k} = e + \sum_{i=0}^m x_k \overrightarrow{ee_k}$$

car  $\sum_{k=0}^m x_k = 1$ .

**5.2. Notation.** Le barycentre des  $e_k$  avec masses  $x_k$ ,  $k = 0, \dots, m$  s'écrit  $x_0 e_0 + \dots + x_m e_m$ .

Les barycentres sont tous dans le sous-espace  $[e_0, \dots, e_m]$  engendré par les  $e_k$  et réciproquement chaque point de ce sous-espace s'écrit

$$e_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k \overrightarrow{e_k e_0}$$

et c'est un barycentre à masses  $\{1 - \sum_{k=1}^m \lambda_k, \lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ .

Si  $\{e_0, \dots, e_m\}$  est un repère affine de l'espace  $F = [e_0, \dots, e_m]$ , alors chaque point de  $F$  est un barycentre des  $e_k$  à masses uniques : les coordonnées barycentriques du point.

**5.3. Lemme.** Une transformation affine transforme le barycentre de  $m$  points à masses donnés au barycentre de l'image aux mêmes masses.

#### 5.4. Exemples.

1. Le point milieu d'un segment.
2. Le point  $\frac{1}{m+1}(e_0 + \dots + e_m)$  est le **centre de gravité** des points  $\{e_k\}$ .

**5.5. Principe des rapports signés.** Soient  $a, b, x$  trois points alignés avec  $a \neq b$ . Alors  $\lambda \in K$  t.q.

$$x = a + \lambda \overrightarrow{ab}$$

est désigné par

$$\frac{\overrightarrow{ax}}{\overrightarrow{ab}} \quad (\text{Rapport signé}).$$

Chaque transformation affine conserve le rapport signé.

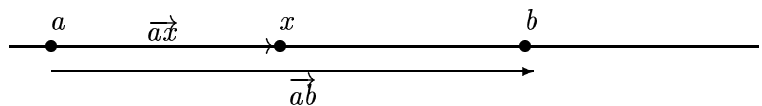


Figure 3.

#### 5.6. Applications.

1. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

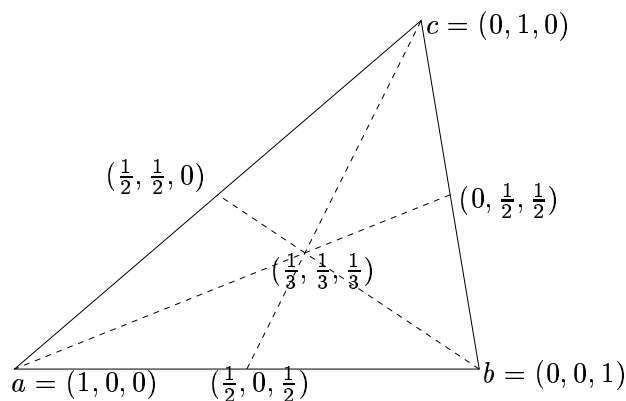


Figure 4. Les médianes sont concourantes

Pour le démontrer on note que c'est vrai pour un triangle équilatérale (principe de symétrie). Or, chaque triangle se transforme en un triangle équilatérale par une transformation affine; ce transformation conserve les points milieu ainsi que les concurrences. De façon équivalente, on le montre directement par un calcul en coordonnées barycentriques.

2. Le théorème de :

5.7. DE CEVA. Les droites  $aa'$ ,  $bb'$  et  $cc'$  sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \times \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \times \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1.$$

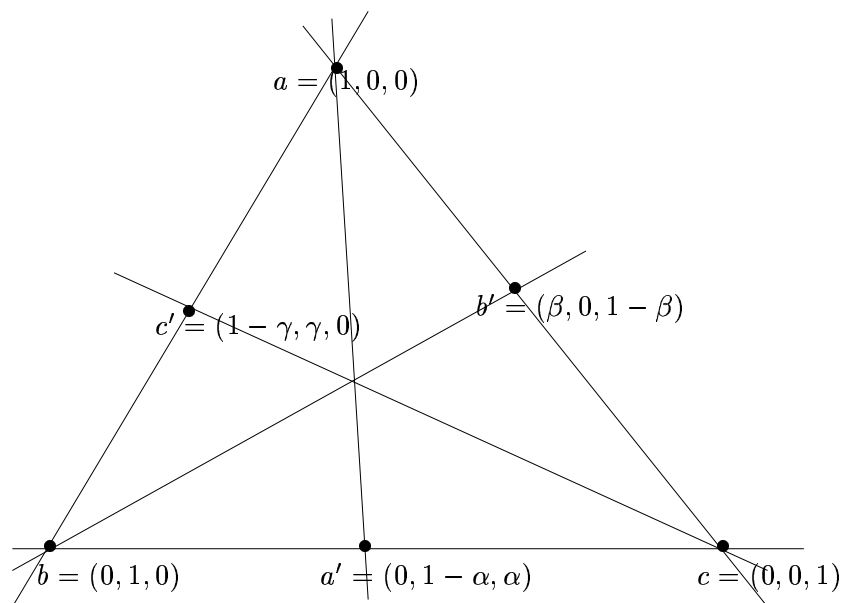


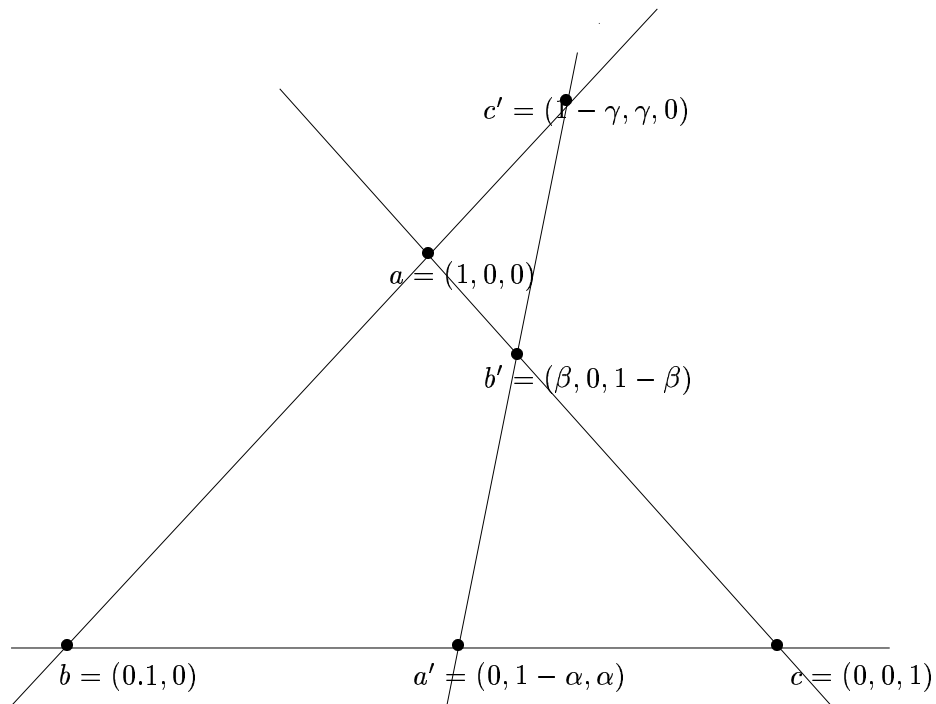
Figure 5. De Ceva

La démonstration est un calcul en coordonnées barycentriques utilisant les coordonnées des points  $\{a, a', b, b', c, c'\}$  dans la figure.

3. Le théorème de :

5.8. MENELAOS. Les points  $a', b', c'$  sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \times \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \times \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1.$$



**Figure 6. Menelaos**

La démonstration est un autre calcul en coordonnées barycentriques utilisant les coordonnées des points  $\{a, a', b, b', c, c'\}$  dans la figure.

## QUIZ sur le Chapitre 1

1. Soit  $E$  un espace affine modelé sur  $\vec{E}$ .
  - a) Une transformation affine de  $E$  admet toujours un inverse. Vrai ou faux ?
  - b) Soient  $a, b \in E$  deux points distincts et soit  $S$  l'homothétie de rapport 2 qui envoie  $a$  sur  $b$ .
    - i) Le centre de  $S$  est  $a - \vec{ab}$ .
    - ii) Le centre de  $S$  est  $a + 2\vec{ab}$ .
  - c) Soit  $L$  une droite,  $P$  un plan et  $H$  un hyperplan. On suppose que  $L // H$  et  $L // P$ , alors  $P // H$ . Vrai ou faux ?
2. Soit  $E$  un espace affine de dimension  $n$  et  $F, G$  deux sous-espaces différents de codimension 1.
  - a)  $F \cap G$  est de codimension 2. Vrai ou faux ?
  - b) Soit  $T$  un automorphisme affine de  $E$  telle que  $TF = G$ . Un tel  $T$  existe toujours et est unique. Vrai ou faux ?
3. Soient  $A, B, C$  trois points différents avec centre de gravité  $Z$ . Alors  $Z \neq A, B, C$ . Vrai ou faux ?

## Problèmes, Chapitre 1

1. Soit  $\{A, B, C\}$  un repère affine d'un plan affine sur un corps  $k$  de caractéristique  $\neq 2$ . On fixe  $a, b \in k \setminus \{0, 1\}$ . Dans les coordonnées barycentriques induites on a les six points

$$\begin{aligned} I &= (0, a, 1 - a), & J &= (1 - a, 0, a), & K &= (a, 1 - a, 0) \\ I' &= (0, b, 1 - b), & J' &= (1 - b, 0, b), & K' &= (b, 1 - b, 0) \end{aligned}$$

- a) Déterminer les équations des trois droites  $IJ', JK'$  et  $KI'$ .
- b) Calculer leurs points d'intersection et le centre de gravité du triangle formé par ces trois points.
- c) Généraliser cela à la situation où on a trois droites avec des équations

$$Ax + By + Cz = 0$$

$$Bx + Cy + Az = 0$$

$$Cx + Ay + Bz = 0$$

où  $A, B, C \in k$  pas tous égaux.

2. On considère dans le plan affine  $\mathbb{R}^2$  un quadrilatère complet  $(A, B, C, D, E, F)$ .

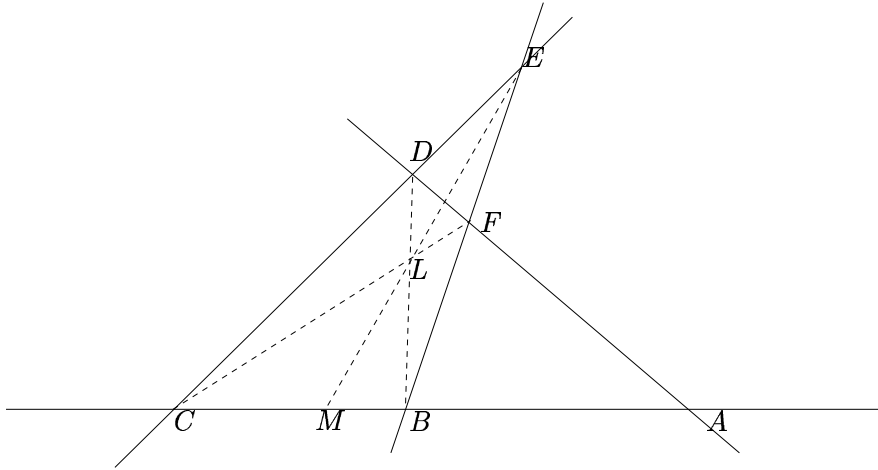


Figure 7. Quadrilatère complet

Le but de cet exercice est de montrer que  $A, M, B$  et  $C$  sont en division harmonique en utilisant le théorème de Menelaos.

- a) Appliquer le théorème de Menelaos aux triangles  $BEC, EBM$  et  $EMC$  coupés resp. par les droites  $AD, FC$  et  $DB$ .
- b) Dédire que

$$\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} \times \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = -1.$$

3. On utilise le même quadrilatère et on introduit :

- Les milieux  $I, J$  resp.  $K$  des segments  $\overline{AE}, \overline{BD}$  et  $\overline{CF}$ ;
- Les homothéties  $h, h_1$  resp.  $h_2$  de rapports de centre  $A, E$  resp.  $E$  et avec les rapports suivantes :  $h$  est de rapport 2,  $h_1$  envoie  $F$  à  $B$  et  $h_2$  envoie  $C$  à  $D$ .
- Les points  $\alpha = h(K)$  et  $\beta = h(J)$ .

Le but de cet exercice est de montrer que  $I, J, K$  sont alignés.

- a) Montrer que les droites  $\alpha C, \beta B$  et  $FD$  sont parallèles.
  - b) Dédire que  $h_1 \circ h_2$  envoie la droite  $C\alpha$  sur la droite  $B\beta$ .
  - c) De façon pareille montrer que  $h_2 \circ h_1$  envoie la droite  $\alpha F$  sur la droite  $\beta D$ .
  - c) Montrer que  $h_1$  et  $h_2$  commutent. Dédire (utiliser b) et c)) que  $h_2 \circ h_1(\alpha) = \beta$  et que les trois points  $E, \alpha, \beta$  sont alignés
  - d) Conclure en appliquant  $h$ .
4. Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts alignés et  $A', B', C'$  trois points distincts qui sont pas sur la droite  $AB$ . On utilise les coordonnées barycentrique par rapport à  $A, B', C$ . On supposera  $A' = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ ,  $B = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  et  $C' = (a, b, c)$ . On pose  $M = BC' \cap B'C$ ,  $N = CA' \cap AC'$  et  $P = BA' \cap AB'$ .
- a) Déterminer les équation des droites  $BC', B'C, AB', A'B, BA'$  et  $AB'$ .
  - b) Calculer les coordonnées barycentriques des points  $M, N, P$ .
  - c) Montrer que ces trois points sont alignés ssi  $A', B'$  et  $C'$  le sont.

## Chapitre 2. Géométrie euclidienne

Dans ce chapitre on ne considère que des espaces vectoriels réels de dimension finie.

### § 1. Isométries et similitudes

Soit  $E$  un **espace euclidien**, i.e. un espace vectoriel réel muni d'un produit euclidien  $(-, -)$ , c.à.d. un accouplement bilinéaire symétrique positif non-dégénéré. Les applications linéaires de  $E$  qui conservent ce produit sont appelées les **transformations orthogonales**. Elles préservent les distances, angles, orthogonalité etc. Réciproquement on a :

**1.1. Rappel.** Une transformation est orthogonale ssi elle préserve les distances.

Une transformation orthogonale est toujours inversible et l'inverse est aussi orthogonale. Puisque la composition de deux applications orthogonales est orthogonale on a donc un groupe

$$O(E) = \{T \in \text{Gl}(E) ; T \text{ orthogonal}\}.$$

Un espace **affine euclidien**  $E$  est un espace affine modelé sur un espace euclidien  $\vec{E}$ . La distance  $\|\vec{xy}\|$  entre deux points  $x$  et  $y$  sera notée  $\overline{xy}$ .

**1.2. Définition.** Une **isométrie** est une transformation affine qui préserve les distances.

**1.3. Lemme.** Une isométrie est de la forme  $x \mapsto Te + \vec{T}\vec{ex}$  avec  $\vec{T} \in O(\vec{E})$ .

*Démonstration.* On écrit  $Tx = Te + \vec{T}(\vec{ex})$  et donc  $\|\vec{xy}\| = \overline{xy} = \overline{TxTy} = \|\vec{T}\vec{xy}\|$  pour chaque  $x, y \in E$  et donc  $\vec{T} \in O(\vec{E})$ . ■

Les isométries de  $E$  forment un groupe  $\text{Iso}(E)$  et chaque isométrie conserve les distances, les angles etc.

Plus loin on a besoin des **similitudes** d'un espace affine  $E$  réelle. Une similitude est une application affine de la forme  $x \mapsto Ta + \vec{T}\vec{ax}$  avec  $\vec{T} = \lambda\vec{S}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{S} \in O(E)$ . Le nombre  $\lambda$  est le **rapport** de  $T$ . Les similitudes de  $E$  forment un groupe  $\text{Sim}(E)$ .

On a la caractérisation suivante des similitudes :

**1.4. Lemme.**  $T \in \text{Sim}(E)$  ssi  $\overline{TxTy}/\overline{xy} = \overline{Tx'Ty'}/\overline{x'y'}$  pour n'importe quel quadruplet  $x, x', y, y' \in E$ .

#### 1.5. Exemples.

1. Les translations sont des isométries.
2. La homothétie de rapport  $\lambda$  avec centre  $a \in E$  (voir Exemple 1.1.5) est une similitude du rapport  $\lambda$ .
3. Une rotation avec centre  $a \in \mathbb{R}^2$ .
4. Si  $E$  est euclidien  $E = F \oplus F^\perp$ , la symétrie orthogonale par rapport à  $F$  est l'application

$$\sigma_F(f', f'') = (f', -f''), \quad f' \in F, f'' \in F^\perp$$

5. Si  $E$  est affine euclidien,  $F = e + \vec{F}$  un sous-espace affine, la symétrie orthogonale par rapport à  $F$  est

$$\sigma_F(x) = a + \sigma_{\vec{F}}(\vec{ax}).$$

Donc les points fixes de  $\sigma_F$  sont formés de  $F$ .

En général une isométrie n'a donc pas de point fixe, mais si  $T = \vec{T} + \vec{a}$ , la composée  $T - \vec{a}$  a un point fixe. On cherche à trouver (dans le modèle standard) toutes ces translations  $\vec{b}$  t.q.  $T + \vec{b}$  ait un point fixe :

$$Tx + \vec{b} = Ax + \vec{a} + \vec{b} = x \Leftrightarrow (A - I)(x) = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} \in \text{Im}(A - I).$$

Donc il faut choisir  $\vec{b}$  telle que la somme  $\vec{a} + \vec{b}$  se trouve dans l'image de  $A - I$ .

Si de plus,  $T$  est une isométrie on a un choix particulière si on exige de plus que  $T$  commute à la translation  $\vec{b}$ . En fait, c'est le cas ssi  $A\vec{b} = \vec{b}$  et cela détermine  $\vec{b}$  si  $A$  est orthogonale :

**1.6. Lemme.** *Soit  $A$  une application orthogonale d'un espace euclidien  $E$  de dimension finie. Alors on a une écriture en somme directe*

$$E = \text{Ker}(A - I) \oplus \text{Im}(A - I).$$

*Démonstration.* Les dimensions des deux espaces s'additionnent bien à  $\dim E$ . Il suffit donc de montrer que leur intersection est  $\{0\}$ . Or, si  $x = Ay - y \in \text{Ker } A$ , alors pour  $z \in \text{Ker } A - I$  on a  $(z, Ay - y) = (z, Ay) - (z, y) = (Az, Ay) - (z, y) = 0$  car  $A$  est orthogonale. Donc  $\text{Ker } A - I$  et  $\text{Im } A - I$  sont orthogonaux. ■

En particulier dans le cas si-dessus on obtient donc une écriture unique

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}, \quad \vec{c} \in \text{Im}(A - I), \vec{b} \in \text{Ker}(A - I)$$

qui détermine le vecteur  $\vec{b}$  de façon unique. De plus, les points fixes de  $x \mapsto Ax + \vec{a} + \vec{b}$  sont tous de la forme  $x_0 + \text{Ker}(A - I)$ . Pour un modèle quelconque on montre de façon pareille :

**1.7. Théorème.** *Soit  $T$  une isométrie d'un espace affine  $E$  de dimension finie. Il y a un unique vecteur  $\vec{b}$  telle que*

- 1)  $T$  commute à la translation  $\vec{b}$ ,
- 2) l'isométrie  $T + \vec{b}$  admet des points fixes.

*Le point  $\vec{b}$  appartient à  $\vec{F} := \text{Ker}(\vec{T} - I)$  et les points fixes forment un sous-espace affine parallèle à  $\vec{F}$ . En particulier ce sous-espace lui-même reste stable par  $T : T$  y induit une translation par  $\vec{b}$ . On l'appelle le **centre de  $T$** .*

**1.8. Exemples.**

1. Si  $T = \sigma_F$  est une symétrie orthogonale par rapport à  $F = e + \vec{F}$ , l'ensemble des points fixes est  $F$  et  $\vec{b} = 0$ .
2. Pour  $n = 2$ , le centre de  $T$  est de dimension 0 ssi  $T$  est une rotation de centre  $a$  par un angle  $\theta \neq 0$ , le centre est de dimension 2 ssi  $T$  est une translation et le centre est une droite affine  $L$  ssi  $T$  est une symétrie orthogonale par rapport à  $L$  suivi par une translation parallèle à  $L$ . Dans ce cas la distance  $d(x, Tx)$  est minimale ssi  $x \in L$ .
3. Une rotation du plan euclidien suivi par une translation est de nouveau une rotation. Déterminer le centre et l'angle!

## § 2. Isométries planes et les triangles

**2.1. Définition.** Deux sous-ensembles planaires sont **isomorphes** s'il y a une isométrie qui envoie l'un dans l'autre. Deux sous-ensembles planaires sont **similaires** s'il y a une similitude qui envoie l'un sur l'autre.

Il y a deux critères classiques pour l'isométrie et la similitude :

**2.2. Lemme.**

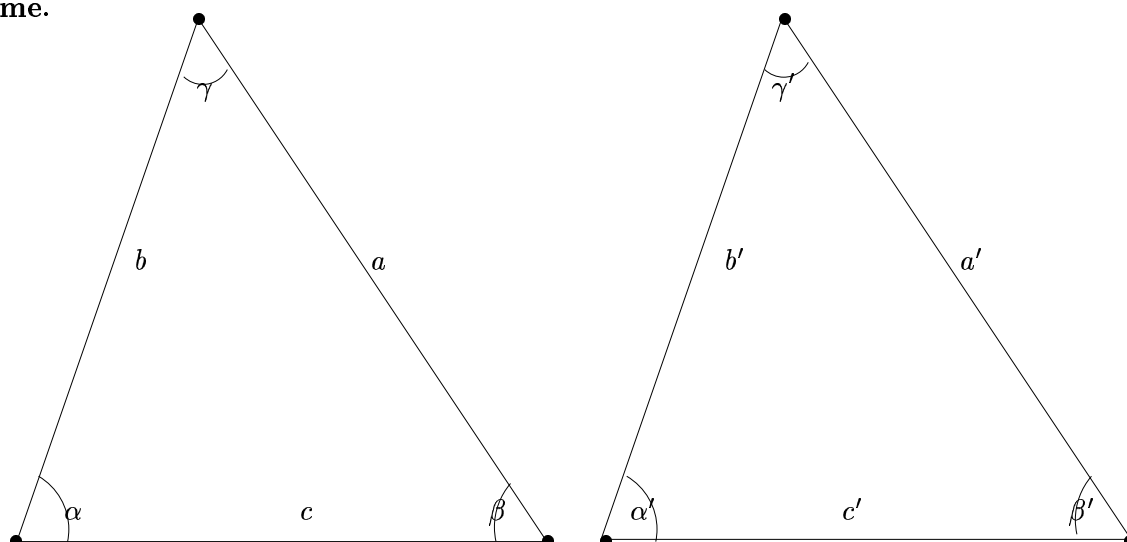


Figure 8. Triangles congruents

Deux triangles comme dans la figure ci-dessus sont isomorphes ssi l'une des conditions suivantes sont vraies :

- 1)  $a = a', b = b', c = c'$  (3 côtés égaux);
- 2)  $\alpha = \alpha', b = b', c = c'$  (2 côtés égaux ainsi que l'angle entre les côtés);
- 3)  $\alpha = \alpha', \beta = \beta', c = c'$  (une côté et les angles adjacents sont égaux).

Les deux triangles sont similaires ssi l'une des conditions suivantes sont vraies :

- 1)\*  $(a : b : c) = (a' : b' : c')$  (le rapports des côtés égaux);
- 2)\*  $\alpha = \alpha', b : c = b' : c'$  le rapport entre deux côtés égaux ainsi que l'angle entre les côtés).
- 3)\*  $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$  (2 angles égaux);

Démonstration.  $i) \Rightarrow i)^*, i = 1, 2, 3$ .

2) et 3) sont clair, tandis que la démonstration se base sur le Lemme suivant. ■

**Lemme.** Soient  $x, y \in \mathbb{R}^2$  avec distance  $d$ . Si  $r + R \geq d$  il y a précisément 2 points ayant la distance  $r$  à  $x$  et  $R$  à  $y$ . Ces deux points sont symétriques par rapport à la droite  $xy$ .

Démonstration. On peut supposer  $x = (0, 0)$  et  $y = (d, 0)$ . Les points  $(a, b)$  cherchés satisfont

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= r^2 \\ (a - d)^2 + b^2 &= R^2 \end{aligned}$$

avec les solutions

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left( d + \frac{r^2 - R^2}{d} \right) \\ b &= \pm \frac{1}{2d} \sqrt{(R + r)^2 - d^2} (d^2 - (R - r)^2). \end{aligned}$$



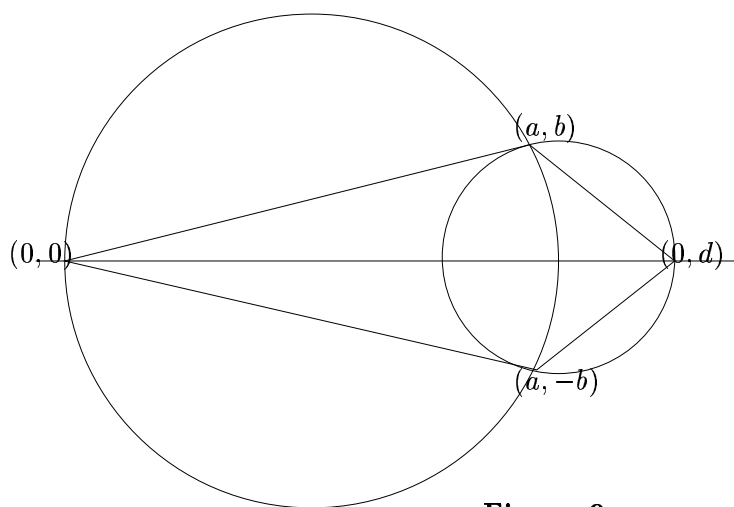


Figure 9.

Les résultats suivants sont aussi classique :

### 2.3. Lemme.

- a) Dans un triangle la somme des angles est  $\pi$ ;
- b) Un triangle est isocèle ssi 2 angles sont égaux;
- c) Un triangle est équilatère ssi 3 angles sont égaux;
- d) Les droites suivantes sont concourantes :
  - Les 3 hauteurs;
  - les trois bissectrices;
  - les trois médianes.

*Démonstration.* La preuve de a), b) et c) est immédiate. Pour la concurrence des trois hauteurs on utilise De Ceva (voir la figure ci-dessous)

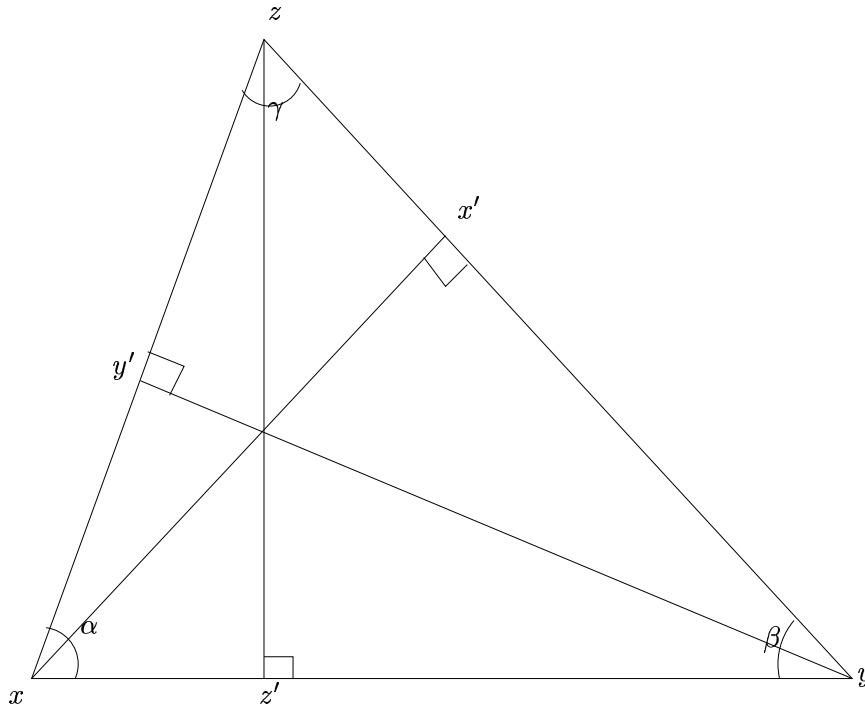


Figure 10. Les hauteurs sont concourantes

Si  $x, y \in \mathbb{R}^2$  la distance entre  $x$  et  $y$  est notée  $\overline{xy}$ . On met

$$\begin{aligned} a &= \overline{xy} \\ b &= \overline{zx} \\ c &= \overline{yz} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \overline{xz'} &= b \cos \alpha \\ \overline{z'y} &= c \cos \gamma \\ \overline{xy'} &= a \cos \alpha \\ \overline{y'z} &= c \cos \beta \\ \overline{x'y} &= a \cos \beta \\ \overline{zx'} &= b \cos \gamma \end{aligned}$$

et puisque  $\frac{\overline{xz'}}{\overline{z'y}} \cdot \frac{\overline{xy'}}{\overline{y'z}} \cdot \frac{\overline{x'y}}{\overline{zx'}} = 1$  De Ceva montre la concurrence des droites  $xx', yy', zz'$ .

La concurrence des bissectrices utilise :

**2.4. Lemme.** Les deux bissectrices formés par les deux angles d'un couple de droites qui s'intersectent forment le lieu des points ayant les mêmes distances aux droites.

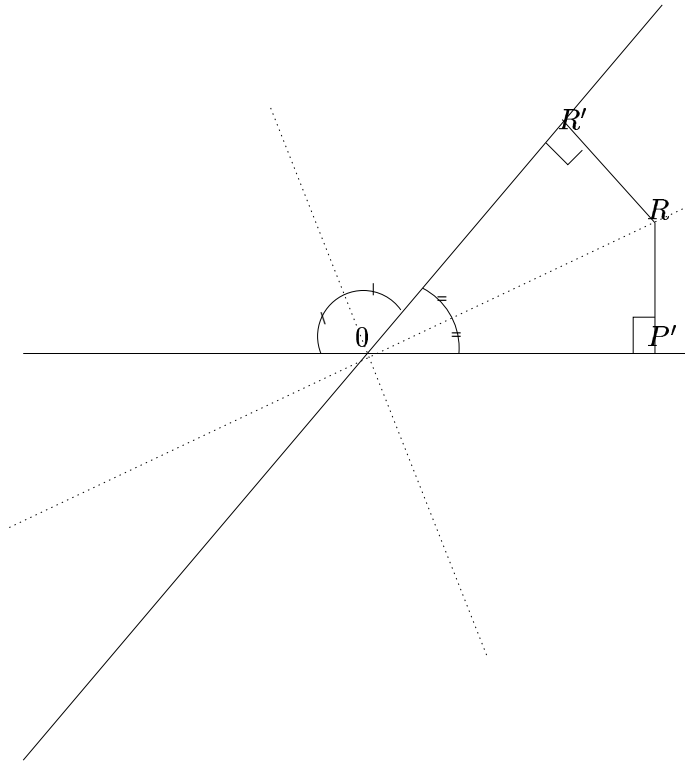


Figure 11. Bissectrices

Il s'en suit que le point d'intersection de deux bissectrices a les mêmes distances aux trois côtés et donc la troisième bissectrice doit passer par ce point aussi.

On a déjà vu que les trois médianes sont concourants. ■

### § 3. Trajectoire de billard

On termine ce chapitre avec un sujet moins classique : les trajectoires de billard tracés dans l'intérieur d'un triangle dont tous les angles sont aigus. On entend par un **trajectoire de billard** une triangle inscrit dont chaque bissectrice extérieure est une des côtés du triangle d'origine. C'est la trajectoire suivi par un billard dans le triangle ou par un rayon de lumière caché dans l'intérieur du triangle.

Dans la construction intervient :

**3.1. Définition.** Le **triangle des pieds de hauteur** d'un triangle est le triangle inscrit dont les sommets sont les pieds de hauteurs, i.e. les point sur les côtés où les hauteurs intersectent les côtés opposées.

Le point clé est :

**3.2. Proposition.** *Les côtés d'un triangle sont les bissectrices extérieur du triangle des pieds de hauteur.*

La preuve utilise Menelaos dans la triangle *bec* de la figure suivante.

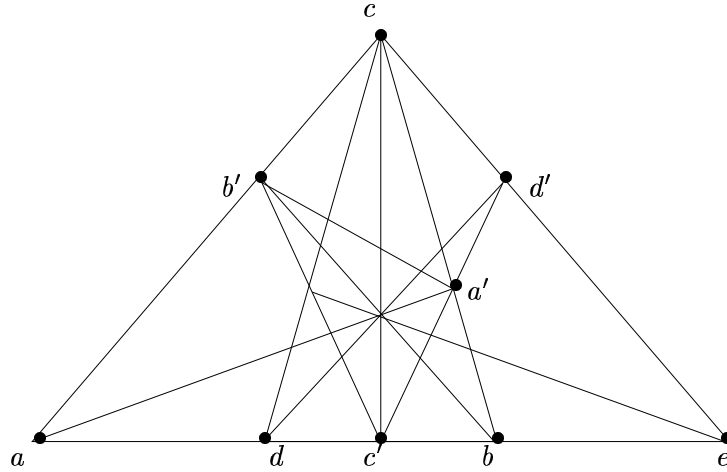


Figure 12. Triangle des pieds de hauteur et sa réflexion

En fait, on a

$$\frac{\overline{a'c}}{\overline{a'b}} \cdot \frac{\overline{c'b}}{\overline{c'e}} \cdot \frac{\overline{d'e}}{\overline{d'c}} = \frac{\overline{a'c}}{\overline{a'b}} \cdot \frac{\overline{c'b}}{\overline{c'a}} \cdot \frac{\overline{b'a}}{\overline{b'c}} = 1$$

par De Ceva dans le triangle  $(a, b, c)$  puisque les droites  $aa', bb', cc'$  sont concourantes. Donc les points  $c', d', a'$  sont colinéaires par Menelaos et la symétrie par rapport au droite  $cc'$  envoie  $d'c'$  sur  $c'b'$  et donc  $ae$  est la bissectrice extérieure de l'angle  $b'c'a'$ . Pareil pour les autres bissectrices extérieures.

**3.3. Théorème.** *Dans un tel triangle il y a une unique trajectoire de billard et cette trajectoire réalise le minimum des périmètres des triangles inscrits. Cette trajectoire est formée par les côtés du triangle des pieds de hauteur.*

*Démonstration.*

On note d'abord que si on a une trajectoire de billard  $a'b'c'$  inscrit dans  $abc$ , alors les côtés de  $a'b'c'$  sont uniquement déterminé. Par exemple, on peut montrer que  $a'c'$  est le centre du produit  $\sigma_{ab} \circ \sigma_{ac} \circ \sigma_{bc}$  des symétries par rapport aux côtés du triangle  $abc$ . Donc une trajectoire de billard est forcément unique.

On montre ensuite que la trajectoire formée des côtés du triangle des hauteurs de pieds réalise le minimum des périmètres. On utilise la figure suivante :

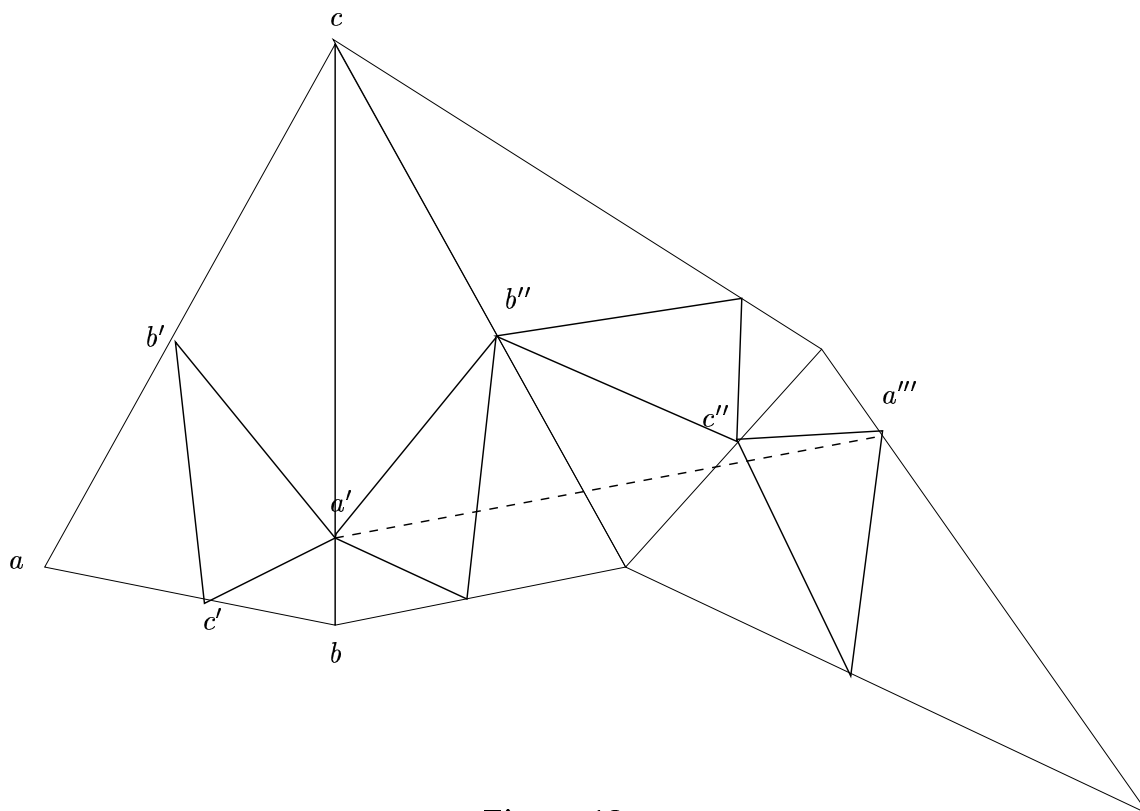


Figure 13.

On pose

$$A = bc$$

$$B = ac$$

$$C = ab$$

et on désigne par  $S$  la symétrie par rapport à la droite  $\sigma_A B$ , par  $T$  la symétrie par rapport à la droite  $S \circ \sigma_A C$ . La symétrie  $\sigma_A$  envoie le triangle  $abc$  sur la triangle adjacente à droite, la symétrie  $S$  l'envoie sur la suivante à droite et ensuite  $T$  l'envoie sur le triangle en bas. On calcule

$$S \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \sigma_B$$

$$U := T \circ S \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C$$

et on note que l'axe de cette dernière transformation est une des côtés du triangle des pieds de hauteur. Si on part d'un triangle inscrit  $c'a'b'$  quelconque, alors le périmètre équivaut

$$\overline{a'b''} + \overline{b''c''} + \overline{c''a'''} \geq \overline{a'a''} = \overline{a'Ua'}.$$

Comme on a vu (Exemple 2 de 2.1.8, cette dernière distance est minimal ssi  $a'$  appartient au centre de  $U$ . Dans ce cas  $a'$  est un pied de hauteur et par symétrie c'est pareil pour  $b'$  et  $c'$ , c.à.d. le minimum est réalisé pour le triangle des pieds de hauteurs.

Ensuite on montre qu'un triangle avec périmètre minimal est forcément une trajectoire de billard. Pour voir cela on utilise la remarque suivante:

**Observation.** Soit  $L \subset \mathbb{R}^2$  une droite et  $a, b \in \mathbb{R}^2$  deux points dans le même demi-plan défini par  $L$ . Alors il y a une unique point  $x \in L$  tel que  $\overline{ax} + \overline{bx}$  soit minimal et ce point est caractérisé par le fait que  $L$  est bissectrice extérieure de l'angle  $axb$ .

Pour voir cela on invoque la symétrie  $\sigma_L$  par rapport à  $L$  et on pose  $a' = \sigma_L a$ . Alors  $\overline{xa} + \overline{xb} = \overline{a'x} + \overline{bx}$  est minimale ssi  $a, a'$  et  $x$  sont colinéaire et dans ce cas  $L$  est bien la bissectrice extérieure de l'angle  $axb$ .

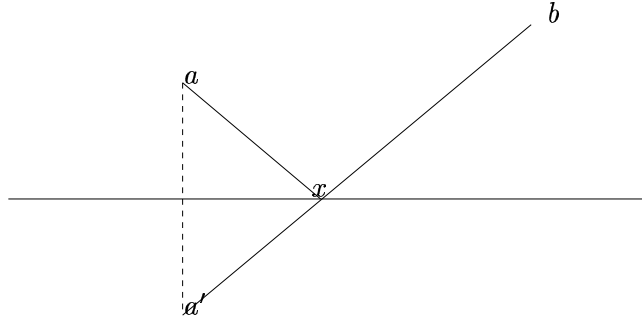


Figure 14.

■

## QUIZ sur le Chapitre 2

1. Vrai ou faux ?
  - a) Deux triangles équilatères sont isomorphes.
  - b) Deux cercles sont similaires.
  - c) Le triangle de pieds de hauteur d'un triangle équilatère est équilatère.
2. On se met dans un plan euclidien. Vrai ou faux ?
  - a) Deux symétries commutent.
  - b) Le produit de deux symétries admet un point fixe.
3. On se met dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Vrai ou faux ?
  - a) Une isométrie est le produit de  $\leq 3$  symétries planaires.
  - b) Une isométrie indirecte admet toujours un point fixe.

## Problèmes, Chapitre 2

1. Soit  $E$  un plan euclidien et  $\ell, m \subset E$  deux droites non-parallelèles.
  - a) Déterminer quand les symétries par rapport à  $\ell$  et  $m$  commutent.
  - b) Déterminer quand  $\sigma_\ell$  commute avec une translation.
  - c) Montrer que  $\sigma_\ell$  et  $\sigma_m$  sont conjugués dans le groupe des isométries directe de  $E$ .
2. Soit  $E$  l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  et  $\ell$  l'axe  $x = y = 0$ . Soit  $R_\varphi$  une rotation autour de  $\ell$  s'angle  $\varphi$ .
  - a) Montrer qu'il y a deux possibilités. Donner les matrices correspondantes.
  - b) Soit  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ . déterminer la droite  $m$  laissée globalement invariante par l'application  $x \mapsto R_\varphi(x) + \vec{a}$ .

# Chapitre 3. Géométrie Projective

## § 1. Introduction

On veut étendre le plan affine de telle sorte qu'il contienne aussi des points "à l'infini" afin que deux droites parallèles se coupent en un point à l'infini. Donc à chaque droite de la forme  $a + \vec{L}$  on associe un point  $\infty_L$  et on complète le plan affine avec tous ces points qui ensemble constituent "la droite à l'infini". Dans le nouveau plan projectif  $\mathbb{P}^2$  deux droites distinctes se coupent toujours en un unique point.

De façon formelle :

**1.1. Définition.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Alors

1. **L'espace projectif**  $\mathbb{P}(E)$  est l'ensemble des droites qui passent par  $0 \in E$ .
2. Un sous-espace projectif est un ensemble de la forme  $\mathbb{P}(F)$  où  $F$  est un sous-espace de  $E$ .
3. Si  $\dim E = n + 1$  est finie, alors on dit que  $\mathbb{P}(E)$  est de dimension  $n$ .

Si  $E$  est de dimension finie  $n + 1$  et on a des coordonnées  $\{x_0, \dots, x_n\}$  par rapport à une base, un point  $[x]$  de  $\mathbb{P}(E)$  est représenté par les rapports  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  d'un point  $x = (x_0, \dots, x_n)$  non-nulle sur la droite  $[x]$  engendré par ce point. Ces rapports sont les **coordonnées homogènes**. Si un de ces coordonnées est non-nulle, par exemple  $x_0$ , on peut donc écrire

$$(x_0 : \dots : x_n) = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0})$$

et

$$U_0 := \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) ; x_0 \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \text{le hyperplan } x_0 = 1.$$

Donc  $\mathbb{P}(E)$  est la réunion d'un espace affine de dimension  $n$  avec les points à l'infini : les points avec  $x_0 = 0$  qui forment un hyperplan, i.e. un sous-espace projectif de dimension  $n - 1$ .

## 1.2. Exemples.

1. La droite projective  $\mathbb{P}^1$  est la droite affine des  $(1 : x)$  avec un seul point  $(0 : 1)$  à l'infini.
2. Le plan projectif  $\mathbb{P}^2$  est le plan affine des  $(1 : x : y)$  plus les points à l'infini  $(0 : a : b)$  qui correspondent aux droites  $-bx + ay = c$ . En coordonnées homogènes une droite est donnée par une équation  $cx_0 + bx_1 - ax_2 = 0$  avec  $(0 : a : b)$  l'unique point à l'infini. Deux droites distinctes se coupent toujours car un système de 2 équations homogènes en 3 variables admet toujours une solution non-triviale.

Si au lieu de prendre le hyperplan  $x_0 = 1$  on prend  $x_0 + \dots + x_n = 1$  on retrouve les coordonnées barycentriques dans cet espace affine par rapport aux  $(n + 1)$  points  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ . Chaque droite  $(x_0 : \dots : x_n)$  coupe ce plan dans l'unique point

$$\left( \frac{x_0}{\sum x_k}, \dots, \frac{x_n}{\sum x_k} \right).$$

Les droites t.q.  $\sum x_k = 0$  correspondent aux points à l'infini.



## § 2. Principe de dualité

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$ . On désigne par  $E^\vee$  l'espace dual de  $E$ . Si  $\{e_0, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$ , alors les coordonnées  $\{x_0, \dots, x_n\}$  définissent la base duale de  $E^\vee$ . Alors  $f \in E^\vee$  s'écrit de façon unique comme

$$f = a_0x_0 + \dots + a_nx_n$$

et les points  $\{f = 0\}$  définissent un hyperplan de  $E$ . Puisque  $\{f = 0\}$  et  $\{\lambda \cdot f = 0\}$  définissent le même hyperplan, les hyperplans de  $E$  sont en rapport bi-univoque avec les points de l'espace projectif  $\mathbb{P}(E^\vee)$ . L'ensemble  $\mathbb{P}(E)^\vee$  des hyperplans de  $\mathbb{P}(E)$  s'identifie donc à  $\mathbb{P}(E^\vee)$ . Les coordonnées homogènes  $(a_0 : \dots : a_n)$  de  $\mathbb{P}(E)$  et  $(x_0 : \dots : x_n)$  de  $\mathbb{P}(E)^\vee$  sont reliées par l'équation

$$a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$$

de l'hyperplan.

Pour un sous-espace  $\mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$  on introduit

$$\mathbb{P}(F)^\vee := \{H \in \mathbb{P}(E)^\vee ; H \supset \mathbb{P}(F)\}.$$

Si  $F^0$  est l'annulateur de  $F$  :

$$F^0 = \{f \in E^\vee ; f(x) = 0 \text{ for all } x \in F\}$$

on vérifie tout de suite que  $\mathbb{P}(F^0) = \mathbb{P}(F)^\vee$  et donc

$$\dim \mathbb{P}(F)^\vee = \dim F^0 - 1 = \dim E - \dim F = n - \dim F = n - \dim \mathbb{P}(F) - 1.$$

Avec deux sous-espaces projectifs  $P_1, P_2$  on introduit leur liaison  $P_1 + P_2$ , le plus petit sous-espace projectif contenant  $P_1$  et  $P_2$ . On a

**2.1. Lemme.**  $(P_1 + P_2)^\vee = P_1^\vee \cap P_2^\vee$ .

On obtient alors une principe importante :

**2.2. Corollaire (Principe de Dualité).** *Si dans une proposition formulée en termes de sous-espaces, dimension, intersection et liaison, alors on obtient la proposition duale en changeant les mots "sous-espace de dimension  $m$ " par "sous-espace de codimension  $m + 1$ ", "liaison" par "intersection" et si en plus on renverse les inclusions.*

**2.3. Illustration.**

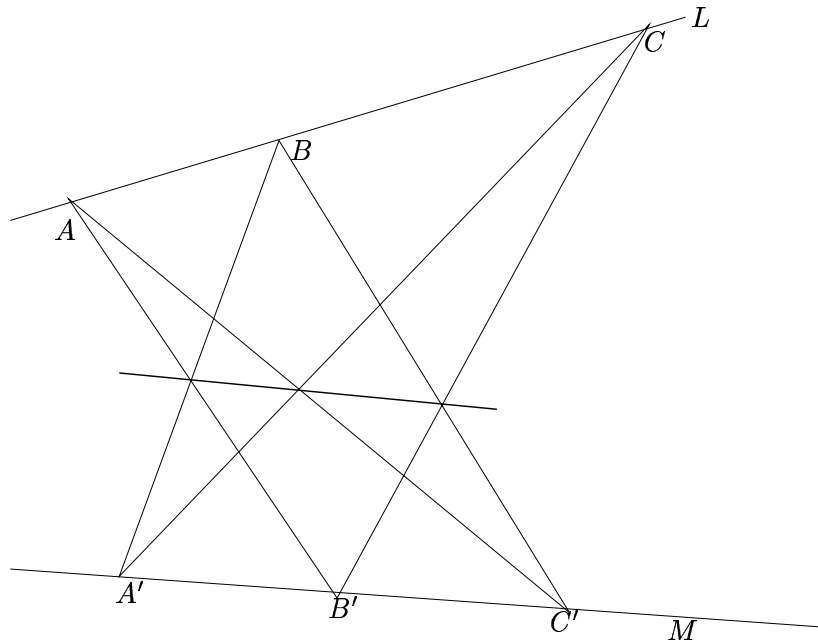


Figure 15. Pappos

se dualise

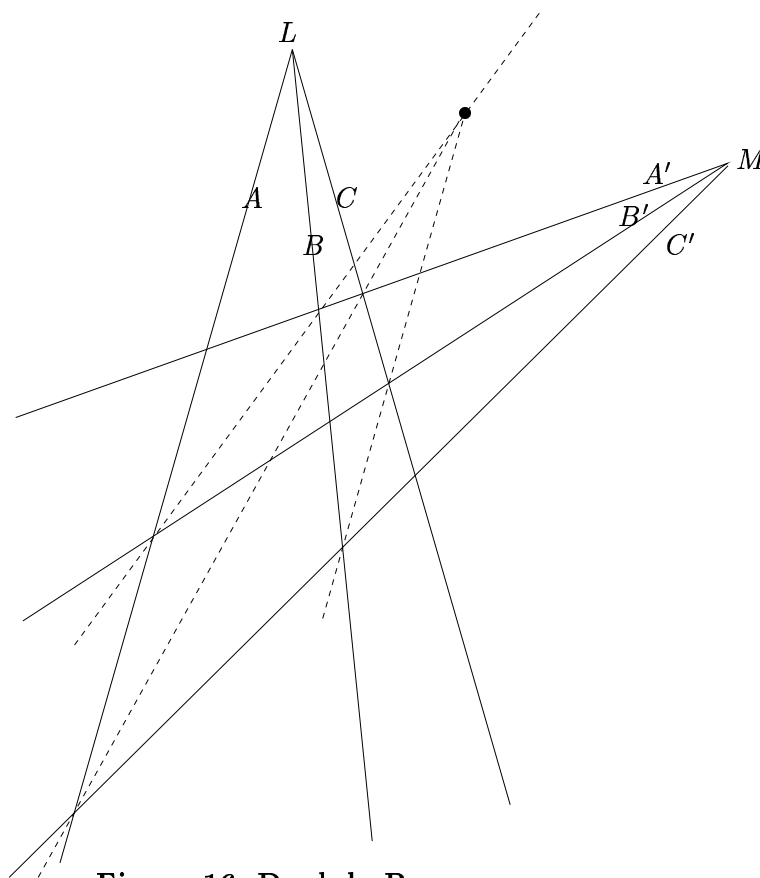


Figure 16. Dual de Pappos

On verra la démonstration du théorème de Pappos dans le paragraphe suivant.

### § 3. Transformations projectives, preuve du théorème de Pappos

Puisque une application linéaire  $T$  de  $E$  transforme droites passant par  $0$  en droites passant par  $0$ ,  $T$  induit une application  $T : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ , l'application **projective associée**. Deux applications linéaire  $T, T'$  définissent la même application projective ssi  $T' = \lambda T, \lambda \in K^*$  et on introduit le **groupe linéaire projectif**

$$\mathrm{PGL}(E) = \mathrm{GL}(E)/K^* \mathrm{id}_E.$$

**3.1. Théorème.** Soit  $E$  de dimension  $n + 1$ . Alors une application projective  $T$  est uniquement déterminée par les images de  $(n + 2)$  points ayant la propriété que chaque  $(n + 1)$ -uplet entre eux soit indépendant.

*Démonstration.* Soit  $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  t.q.  $T'[e_k] = T[e_k], k = 0, \dots, n$  pour deux applications projectives  $T, T'$ . Donc

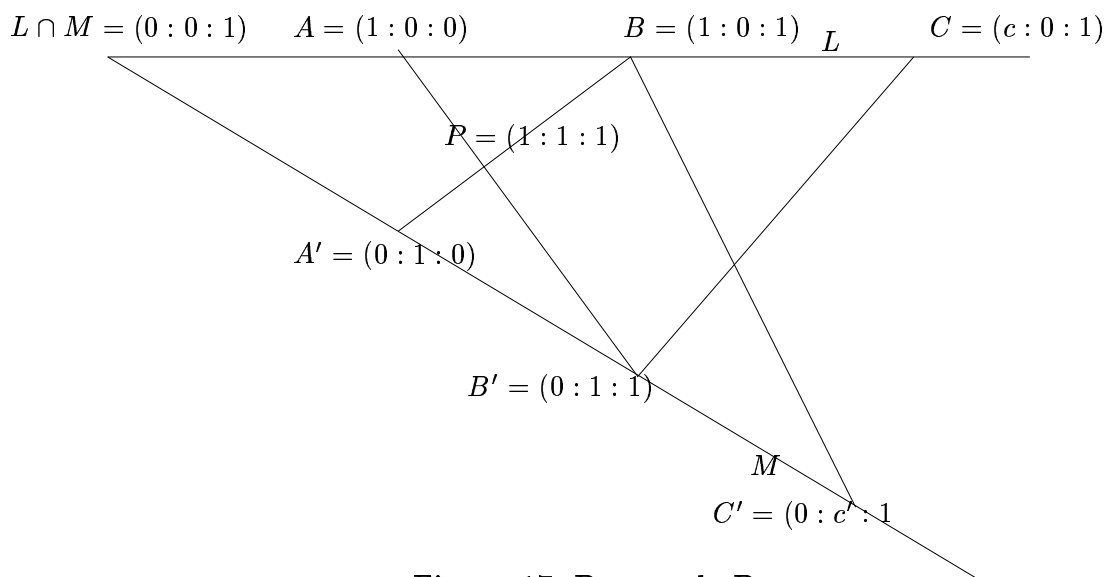
$$T'e_k = \lambda_k T e_k$$

Soit

$$e_{n+1} = \sum a_i e_i$$

un point t.q.  $e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1}$  est une base pour n'importe quel  $k = 0, \dots, n$ . C'est équivalent à dire que  $a_k \neq 0$ . Si  $T'[e_{n+1}] = T[e_{n+1}]$  on trouve un  $\sigma \in K$  t.q.  $a_k \lambda_k = \sigma a_k, k = 1, \dots, n$  et donc  $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda$  et  $T = \lambda T'$ , i.e.  $T$  et  $T'$  définissent la même transformation projective. ■

Une telle collection de  $(n + 2)$  points s'appelle **repère projectif**. Il y a donc une unique transformation projective qui transforme un repère en un autre. On peut appliquer cela pour prouver Pappos:



**Figure 17. Preuve de Pappos**

On prend  $A = (1 : 0 : 0)$ ,  $A' = (0 : 1 : 0)$  et  $L \cap M = (0 : 0 : 1)$ ,

$$P := AB' \cap A'B = (1 : 1 : 1).$$

On calcule ensuite  $B = (1, 0, 1)$  et  $B' = (0 : 1 : 1)$ . Si on met  $C = (c : 0 : 1)$ ,  $C' = (0 : c' : 1)$  on a

$$\begin{aligned} B'C &: x_0 + cx_1 - cx_2 = 0 \\ BC' &: c'x_0 + x_1 - c'x_2 = 0 \\ AC' &: x_1 - c'x_2 = 0 \\ A'C &: x_0 - cx_2 = 0. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} Q &:= B'C \cap BC' = (c(c' - 1) : c'(c - 1) : cc' - 1) \\ R &:= AC' \cap A'C = (c : c' : 1). \end{aligned}$$

Finalement les points  $P, Q, R$  sont colinéaires car

$$\det \begin{pmatrix} 1 & c(c' - 1) & c \\ 1 & c'(c - 1) & c' \\ 1 & cc' - 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

## § 4. Desargues

Dans ce paragraphe on va montrer un théorème important :

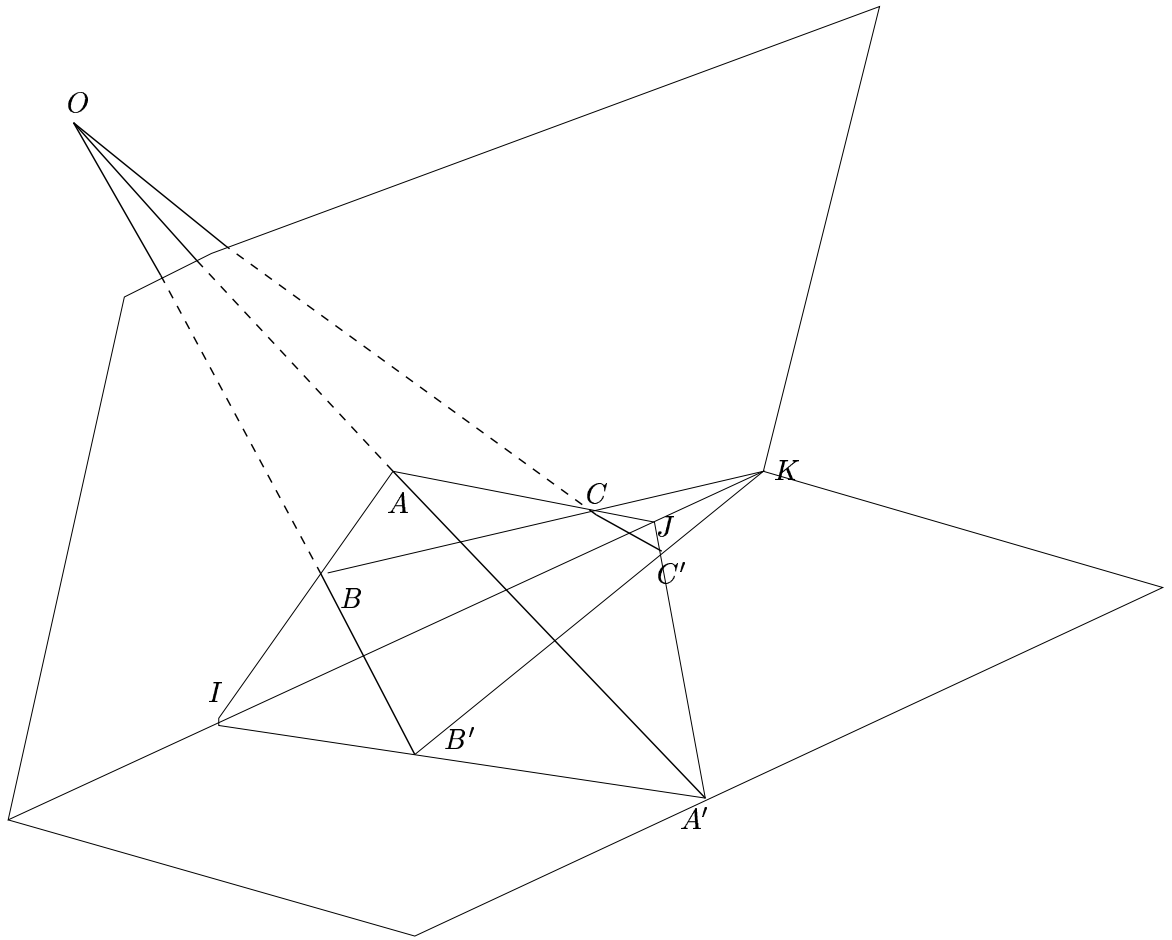


Figure 18. Desargues

**4.1. Théorème.** Soient  $L, M$  et  $N$  trois droites d'un espace projectif passant par  $0$ . Soient  $A, A' \in L, B, B' \in M, C, C' \in N$  tous distinct et distinct de  $0$ . Alors les points  $I = AB \cap A'B', J = AC \cap A'C'$  et  $K = BC \cap B'C'$  sont colinéaires.

*Démonstration.* Les trois droites engendrent un  $\mathbb{P}^3$ . Si elles ne sont pas co-planaires, la preuve est facile. Les points  $A, B, C$  sont dans un plan unique  $P$  et  $A', B', C'$  dans un plan unique  $P'$ . Ces deux plans se coupent en une droite  $R$ . Les droites  $AB, AC, BC$  appartiennent à  $P$  et les droites  $A'B', A'C', B'C'$  à  $P'$ . Donc  $I = AB \cap A'B' \in R$  ainsi que pour  $J$  et  $K$ .

Si les trois droites sont planaires on peut les considérer comme projection de trois droites non coplanaires comme dans la Figure. Une preuve directe utilise un choix convenable des coordonnées. Par exemple

$$O = (1 : 0 : 0)$$

$$A = (1 : 1 : 1)$$

$$B = (0 : 1 : 0)$$

$$C = (0 : 0 : 1)$$

et on choisit

$$A' = (a : 1 : 1)$$

$$B' = (b : 1 : 0)$$

$$C' = (c : 0 : 1).$$

On calcule

$$I = (b : b - a + 1 : b)$$

$$J = (c : c : c - a + 1)$$

$$K = (0 : c : -b)$$

et ces points sont concourrantes car

$$\det \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b-a+1 & c & c \\ b & c-a+1 & -b \end{pmatrix} = 0.$$

■

## § 5. La droite projective

Trois points distincts  $\{A, B, C\}$  de  $\mathbb{P}^1$  s'envoient aux trois points distincts par une application projective. On peut les envoyer par disons  $T$  à  $\infty = (0 : 1)$ ,  $0 = (1 : 0)$  et  $1 = (1 : 1)$ . Si  $D$  est un quatrième point  $T(D) = \beta \in K \cup \{\infty\}$  s'appelle le **birapport**  $\beta = [A, B, C, D]$ .

**5.1. Lemme.** Soit  $A = (a_0 : a_1)$ ,  $B = (b_0 : b_1)$ ,  $C = (c_0 : c_1)$  et  $D = (d_0 : d_1)$ , alors

$$[A, B, C, D] = \frac{\det \begin{pmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}} \bigg/ \frac{\det \begin{pmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix}}$$

*Démonstration.* Pour simplifier on traite le cas des point  $A = (1 : a)$ ,  $B = (1 : b)$ ,  $C = (1 : c)$  et  $D = (1 : d)$ . On cherche  $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  avec les propriétés que  $TA = \infty$ ,  $TB = 0$  et  $TC = 1$ . On trouve

$$T = \begin{pmatrix} a(c-b) & c-b \\ -b(c-a) & c-a \end{pmatrix}$$

et

$$TD = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{c-a}{c-b} \bigg/ \frac{d-a}{d-b}.$$

■

Un cas spécial est

**5.2. Définition.** Supposons que la caractéristique de  $K$  est différent de 2. On dit que  $A, B$  et  $C, D$  se **divisent de façon harmonique** si  $[A, B, C, D] = -1$ .

### 5.3. Exemples.

1. Les points  $-a, a$  et  $0, \infty$  se divisent de façon harmonique.
2. On considère dans  $\mathbb{P}^2$  un quadrilatère complet.

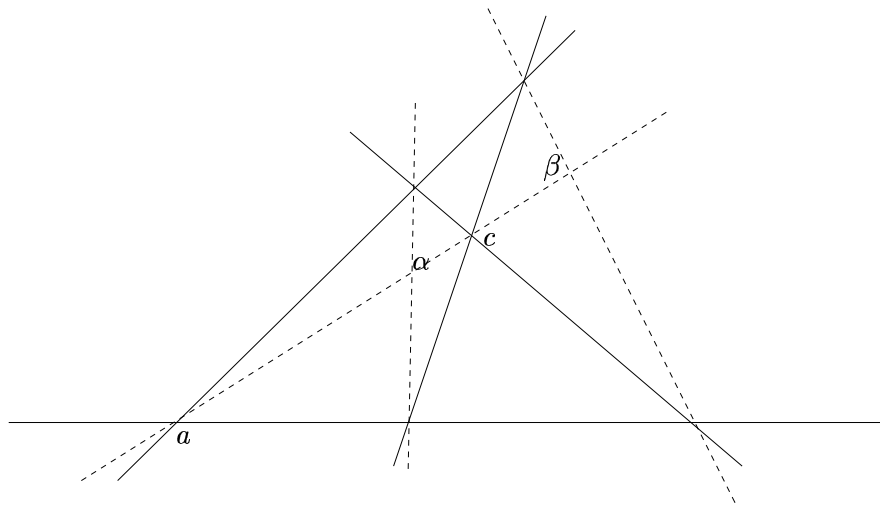


Figure 19. Quadrilatère complet

On a  $[a, c, \alpha, \gamma] = -1$  car par une transformation projective on trouve la figure

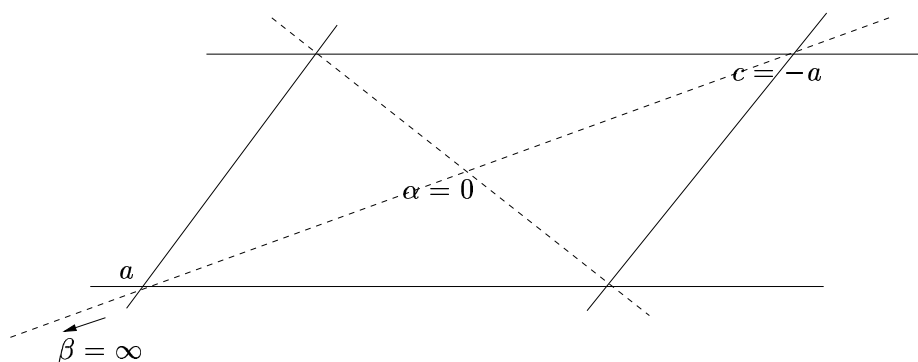


Figure 20.

## § 6. Le plan projectif, perspectivités

Soit  $p \in \mathbb{P}^2$  et  $L$  une droite qui ne passe pas par  $p$ . On rappelle que  $p^\vee$  désigne la collection des droites  $\ell \subset \mathbb{P}^2$  passant par  $p$  : c'est une droite dans  $(\mathbb{P}^2)^\vee$ .

**6.1. Définition.** La bijection tautologique

$$\phi : p^\vee \rightarrow L$$

est définie par  $\phi(\ell) = \ell \cap L$ .

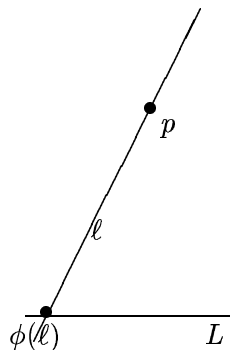


Figure 21.

**6.2. Lemme.** La bijection tautologique est une application projective

*Démonstration.* Soit  $p = (0 : 0 : 1)$  et  $L = \{x_2 = 0\}$ . Une droite  $\ell$  qui passe par  $p$  a l'équation

$$a_0x_0 + a_1x_2 = 0$$

et  $(a_0 : a_1) \in p^\vee$  peuvent être considéré comme des coordonnées homogènes. On trouve

$$L \cap \ell = \{(-a_1 : a_0 : 0)\}$$

et donc  $\phi(a_0 : a_1) = (-a_1 : a_0)$  si on prend  $(x_0, x_1)$  comme coordonnées homogènes sur  $L$ . ■

**6.3. Corollaire-Définition.** Soient  $\ell_j, j = 1, 2, 3, 4$  quatre droites passant par  $p$  et  $a_j = \ell_j \cap L$ . Alors le birapport  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$  ne dépend pas de  $L$ . On le notera

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4].$$

#### 6.4. Exemples.

1. Soient  $L$  et  $M$  deux droites non-parallèles dans le plan euclidien et soit  $p = L \cap M$  leur point d'intersection. Soient  $B_1$  et  $B_2$  les deux bissectrices de l'angle  $LM$ . Alors  $[L, M, B_1, B_2] = -1$ . Voir la figure ci-dessus.

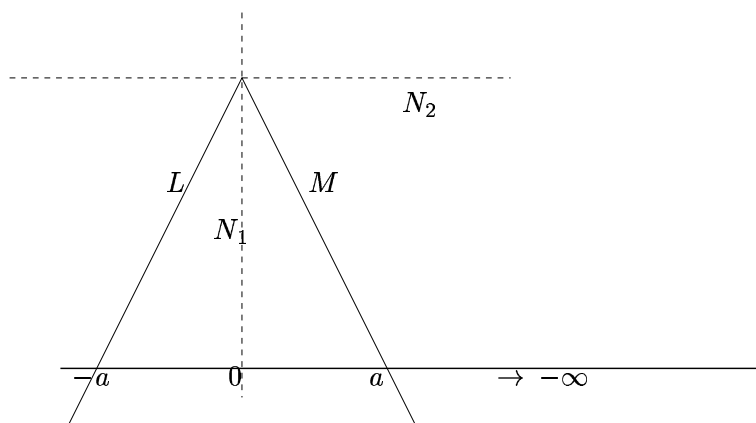


Figure 22.

2. Soit  $\{p, q, r, s\}$  un repère de  $\mathbb{P}^2$ . On pose  $d_1 = ps \cap rq, t = pr \cap sq, u = pq \cap rs$  et  $d_2 = ps \cap ut$ . Alors les droites  $\{up, us\}$  sont en division harmonique par rapport aux droites  $\{ud_1, ud_2\}$ .

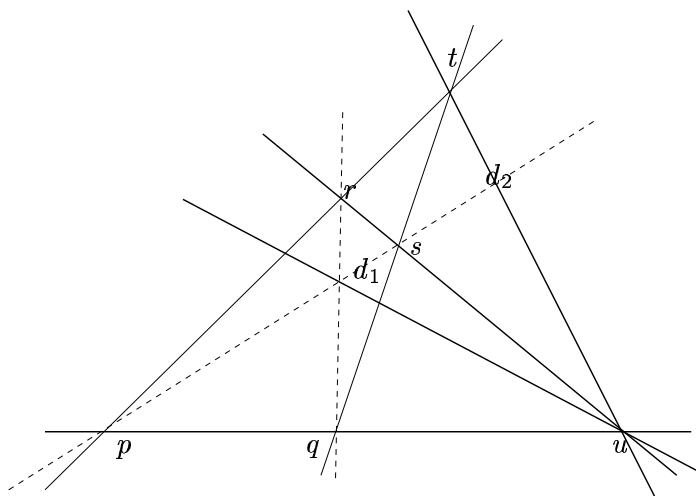


Figure 23.

Maintenant on compare les bijections tautologiques  $\phi_{p,L}$  et  $\phi_{p,M}$  par rapport à  $(p, L)$  et  $(p, M)$ . L'application projective  $\phi_{p,M} \circ \phi_{p,L}^{-1} : L \rightarrow M$  est par définition une perspectivité avec centre  $p$  :

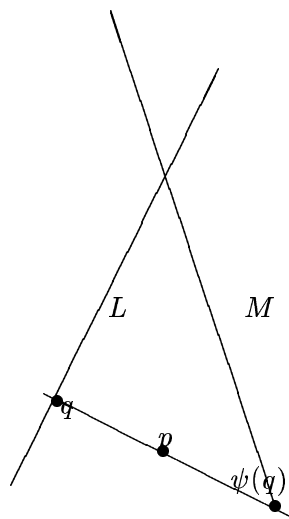


Figure 24.

**6.5. Définition-Lemme.** La **perspectivité**  $\psi : L \rightarrow M$  avec centre  $p \notin L \cup M$  est l'application projective qui à  $q \in L$  associe  $\psi(q) = qp \cap M$ .

On a une caractérisation :

**6.6. Lemme.** Soient  $L, M$  deux droites distinctes de  $\mathbb{P}^2$ . Une application projective  $T : L \rightarrow M$  est une perspectivité ssi  $T$  fixe l'intersection  $o = L \cap M$ .

*Démonstration.* Si  $T$  est une perspectivité par rapport à  $p$  alors  $To = o$ .

Réciproquement, soient  $p \neq q$  deux points différents de  $o$  et soit  $s = pTp \cap qTq$ . L'application  $T$  et la perspectivité de centre  $s$  ont la propriété que  $p, q$  et  $o$  ont mêmes images. Les deux applications projectives sont donc égales. ■

**6.7. Corollaire.** Soient  $\{o, a, b, c\}$  et  $\{o, a', b', c'\}$  deux quadruplets de points alignés. Alors les droites  $aa', bb', cc'$  sont concourantes ssi  $[o, a, b, c] = [o, a', b', c']$ .

*Démonstration.* Soit  $L$  la droite qui passe par  $\{o, a, b, c\}$  et  $M$  la droite qui passe par  $\{o, a', b', c'\}$ . Si  $[o, a, b, c] = [o, a', b', c']$ , alors il y a une application projective  $T : L \rightarrow M$  qui envoie les points  $o, a, b$  resp.  $c$  sur  $o, a', b'$  resp.  $c'$ . Donc  $T$  est une perspectivité de centre  $s = aa' \cap bb' = aa' \cap cc'$ . La réciproque est clair. ■

Dualement :

**6.8. Corollaire.** Soient  $\{O, A, B, C\}, \{O, A', B', C'\}$  deux quadruplets de droites appartenant respectivement à un faisceau (c.à.d passant par le même point). Alors les points  $A \cap A', B \cap B', C \cap C'$  sont alignés ssi  $[O, A, B, C] = [O, A', B', C']$ .

Comme une deuxième application nous avons :

**6.9. Cross Axis Theorem.** Soient  $L, M$  deux droites différentes de  $\mathbb{P}^2$  et  $T : L \rightarrow M$  une application projective. Alors pour tout  $p, q \in L$  les intersections  $r = Tpq \cap Tqp$  appartiennent à une seule droite, l'axe de  $T$ .



Démonstration. Soit  $o = L \cap M$ .

Cas I.  $To = o$ . Donc, par le lemme précédent,  $T$  est un perspectivité avec centre  $s = pTp \cap qTq$ . On met  $R_1 = or$  et  $R_2 = os$ . Alors  $[L, R_1, M, R_2] = -1$  par l'exemple précédente. Mais  $R_2$  est une droite fixée et donc aussi  $R_1$  et les points  $r$  y appartiennent.

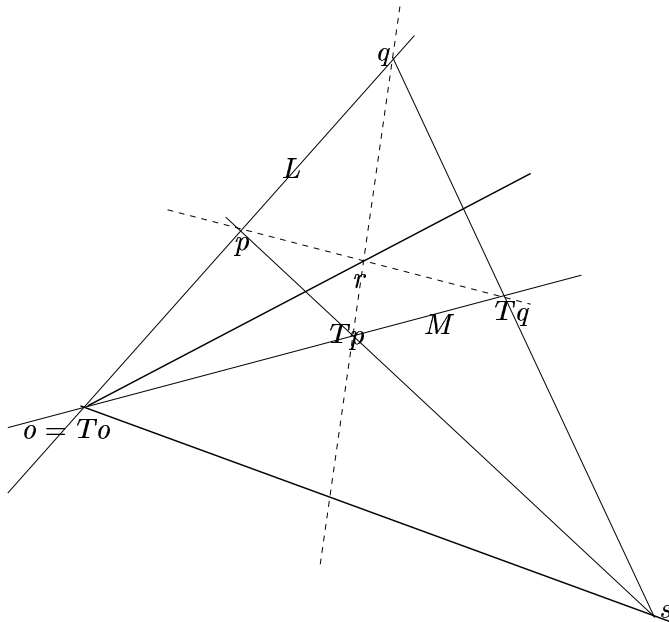


Figure 25.

Cas II. Sinon, aussi  $T^{-1}o \neq o$ . On a  $[T^{-1}o, o, p, q] = [o, To, Tp, Tq] = [To, o, Tq, Tp]$ . On définit  $S : L \rightarrow M$  en exigeant que  $S(T^{-1}o) = To$ ,  $So = o$ ,  $Sp = Tq$ . Alors  $Sq = Tp$  et  $S$  est une perspectivité avec centre  $r = pTq \cap qTp$  et  $r$  appartient à  $T^{-1}oo$  qui ne dépend pas de  $p$  et  $q$ .

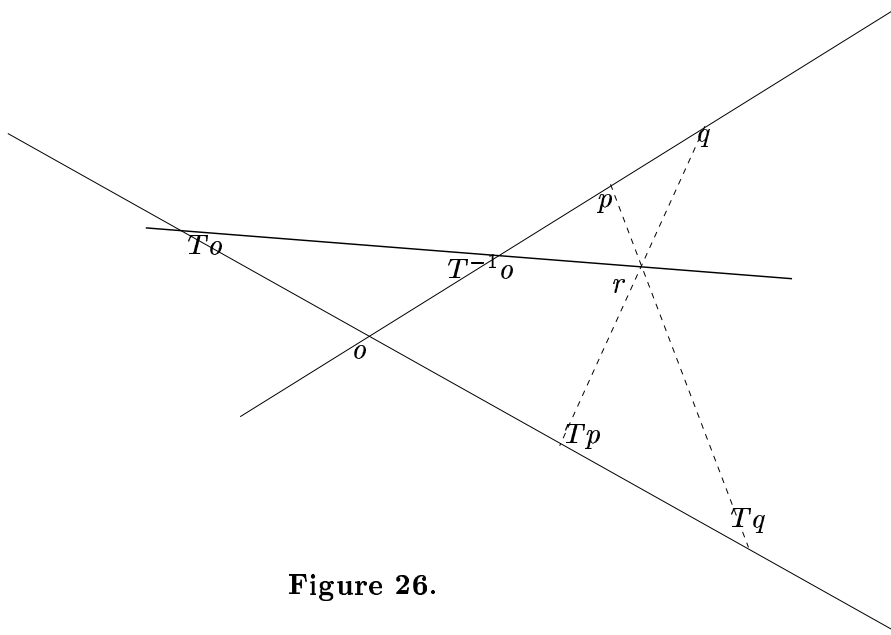


Figure 26.

■

## QUIZ sur le Chapitre 3

Les énoncés suivantes sont elles vraies ou fausses :

1. Soient  $p_0, p_1, p_2$  un triplet de points distincts d'une droite projective. Une transformation projective  $T$  telle que  $Tp_0 = p_1, Tp_1 = p_2, Tp_2 = p_0$  est cyclique d'ordre trois.
2. Si 4 points d'une droite projective sont en division harmonique, ils le restent après permutation.
3. Soient  $L, M$  deux droites distinctes du plan projectif. Une application projective  $T$  du plan qui envoie  $L$  sur  $M$  doit fixer le point  $L \cap M$ .

## Problèmes, Chapitre 3

1. On se place sur la droite projective  $\mathbb{P}_k^1$  avec coordonnées homogènes  $(x, y)$ . Soit  $p = (0 : 1)$ ,  $q = (1 : 0)$  et  $r = (1 : 1)$ . Déterminer la transformation projective  $T$  telle que  $Tp = q, Tq = r, Tr = p$ .
2. Soit  $T$  une transformation projective du plan projectif ayant un point  $p$  fixe et une droite  $L$  de points fixes. On suppose que  $p \notin L$ . On dit que  $T$  est une *collinéation centrale*.

a) Montrer que chaque droite qui passe par  $p$  est globalement invariante.

b) On utilise des coordonnées homogènes  $(x, y, z)$ . On suppose que  $p = (0 : 0 : 1)$  et  $L = \{z = 0\}$ .

Montrer que  $T$  est donnée par une matrice diagonale  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ . Soit  $q \neq p$  et  $s = pq \cap L$ .

On pose

$$k := [p, s, q, Tq].$$

Montrer que  $k = b/a$  et donc ne dépend pas du point  $q$ . On l'appelle *rapport de  $T$* .

c) Conclure qu'une collinéation centrale est complètement déterminée par ses points fixes et son rapport.

# Chapitre 4. Quadriques

Dans ce chapitre on travaille sur un corps  $K$  de caractéristique  $\neq 2$ .

## § 1. Formes quadratiques

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel.

### 1.1. Définition-Lemme.

1. Une fonction

$$\varphi : E \times E \rightarrow K$$

est **bilinéaire** si elle est linéaire par rapport aux deux arguments; si de plus  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  on dit que  $\varphi$  est **symétrique**.

2. La fonction

$$q : E \rightarrow K \\ x \mapsto \varphi(x, x)$$

est appelée la **forme quadratique associée**.

3. Si la caractéristique de  $K$  est différent de 2, alors on a

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (q(x + y) - q(x) - q(y))$$

et on dit que  $\varphi$  est la **forme polaire** de  $q$ .

Si  $\dim E = n$  et  $\{x_1, \dots, x_n\}$  sont les coordonnées de point  $x$  par rapport à une base, on a

$$q(x) = q_A(x) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

pour une matrice symétrique  $A$ . Si  $x$  est représenté par le vecteur colonne  $X$  et si de plus  $y$  est donné par un vecteur colonne  $Y$  on a donc

$$q(x) = X^T A X \\ \varphi(x, y) = Y^T A X.$$

Si  $A$  est diagonale on dit que  $q_A$  est une **forme diagonale**.

Par changement de coordonnées  $Y = PX$  la forme  $q$  se transforme :

$$q(x) = X^T A X = Y^T (P^T A P) Y.$$

On dit que les formes  $q_A$  et  $q_B$  sont **équivalentes**. On a vu en DEUG :

### 1.2. Lemme.

1. Après changement de base convenable on trouve que chaque matrice symétrique est équivalente à une matrice diagonale. De plus, si  $K = \mathbb{R}$  chaque forme  $q$  est équivalente à la forme diagonale

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \dots + x_{r+s}^2)$$

et la **signature**  $(r, s)$  est uniquement déterminée par la forme  $q$ .

2. Après changement **orthogonale** une forme quadratique est équivalente à une unique forme diagonale avec les valeurs propres de  $A$  sur la diagonale.

Soit  $Q$  une forme quadratique dans une espace  $E$  de dimension  $n + 1$  avec coordonnées  $(x_0, \dots, x_n)$  par rapport à une base de  $E$ . On a une **quadrique projective** associée :

$$V(Q) := \{[x] \in \mathbb{P}(E) ; Q(x) = 0\}.$$

Puisque  $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$  c'est bien-définie et si  $Q$  est donnée par la matrice symétrique  $A$ , l'équation de la quadrique est

$$X^t A X = 0.$$

Puisque les transformations projectives sont induites par des applications linéaires, on obtient donc une classification projective de ces quadriques. On trouve :

$$a_0 x_0^2 + \dots + a_r x_r^2 = 0, \quad a_j \neq 0$$

Cette quadrique a rang  $(r + 1)$ . Si  $r = n$  on dit que la quadrique est **non-dégénérée**. Si  $K = \mathbb{R}$  on peut supposer que  $a_j = \pm 1$  et on arrive à la classification projective

$$(X_0^2 + \dots + X_p^2) - (X_{p+1}^2 + \dots + X_{p+q}^2) = 0$$

avec  $p \leq q$  et si  $K = \mathbb{C}$  on peut prendre  $a_j = 1$  et le seul invariant projectif est le rang.

**1.3. Exemple.** Dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  les coniques non-vides sont :

$$\begin{aligned} x_0^2 - x_1^2 - x_3^2 &= 0, & \text{conique non-dégénérée} \\ x_0^2 + x_1^2 &= 0, & \text{point} \\ x_0^2 - x_1^2 &= 0, & \text{deux droites distinctes} \\ x_0^2 &= 0, & \text{droite avec multiplicité 2} \end{aligned}$$

Dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  la seule différence est que  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  est aussi un couple de deux droites et on n'a que 3 types distingués par leur rang.

## § 2. Quadriques sous les groupes affines et euclidiens

On passe maintenant aux formes de degré 2 non-homogènes

$$f(x) := q(x) + \ell(x) + c$$

avec  $q$  forme quadratique  $\ell$  forme linéaire et  $c \in K$  une constante. On suppose que  $\dim E = n$ , que  $q(x) = X^T A X$  pour une matrice symétrique et  $\ell(x) = B^T X$  pour un vecteur colonne  $B$ . On veut calculer l'effet d'une translation par  $\vec{k}$  donnée par le vecteur  $K$  et d'une application linéaire  $T$  avec matrice  $P$  :

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= f(x + \vec{k}) = Y^T A Y + \hat{B}^T Y + \hat{c}, \\ \hat{B} &= B + 2AK, \\ \hat{c} &= K^T A K + B^T X + c \\ \hat{f}(z) &= f(Tx) = Y^T (P^A P) Y + P^T Y + c. \end{aligned}$$

En particulier, une translation ne change pas la partie quadratique et l'effet de  $T$  sur la partie quadratique est comme si  $f = q$ . Supposons qu'on a utilisé  $P$  pour rendre  $q$  diagonale, disons  $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$  et la nouvelle partie linéaire est  $\ell(x) = b_1 x_1 + \dots + b_r x_r + \dots$ . Moyennant une translation on peut éliminer les  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  (complétion du carré) de tel sorte que  $q(x)$

reste diagonale. Si  $\ell(x)$  ne contient pas de variables supplémentaires on se trouve avec une forme normale

$$f(x) = a_1 y_1^2 + \dots + a_r y_r^2 + c.$$

Dans l'autre cas on peut écrire

$$\ell(x) + c = y_{r+1}$$

où la forme linéaire  $y_{r+1}$  set comme nouvelle variable et on arrive à la forme normale

$$f(x) = a_1 y_1^2 + \dots + a_r y_r^2 + y_{r+1}.$$

Si  $E = \mathbb{R}^n$  muni d'une distance euclidienne, on peut utiliser les isométries de  $E$  pour simplifier une forme quadratique inhomogène. Puisque la partie linéaire  $P$  d'une isométrie n'affecte que la partie quadratique homogène et puisque les translations sont des symétries on arrive à les deux formes normales

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + \mu x_{r+1}, \\ f(x) &= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + c \end{aligned}$$

et les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$  telle que  $q = q_A$ , la partie purement quadratique.

**2.1. Définition.** Si  $f$  est une forme quadratique (peut-être non-homogène), alors l'ensemble  $\{x \in E ; f(x) = 0\}$  s'appelle **quadrique** associée. Si la partie quadratique  $q = q_A$  est associée à une matrice  $A$  inversible on dit que la quadrique est **non-dégénérée**. Si  $\dim E = n$  c'est le cas ssi le rang de  $A$  est  $n$ .

On peut classifier les quadriques en dimension  $n$  en classifiant les quadriques non-dégénérées en dimensions  $\leq n$ , c.à.d. suivant le rang de  $q_A$ .

## 2.2. Exemples.

1.  $n = 2$  — Les quadriques (sous le groupe des isométries de  $\mathbb{R}^2$  sont classifiées par la liste suivante  $a, b, p$  sont des constantes non-nuls).

$$\begin{aligned} \bullet \text{Rang } 2 & \begin{cases} a^2 x^2 + b^2 y^2 = 1, & \text{ellipse} \\ a^2 x^2 + b^2 y^2 = -1, & \text{ensemble vide} \\ a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0, & \text{une seul point} \\ a^2 x^2 - b^2 y^2 = 1, & \text{hyperbole} \\ a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0, & \text{deux droites qui s'intersectent} \end{cases} \\ \bullet \text{Rang } 1 & \begin{cases} y = px^2, & \text{parabole} \\ x^2 = -a^2, & \text{ensemble vide} \\ x^2 = a^2, & \text{deux droites parallèles} \\ x^2 = 0, & \text{une seule droite avec multiplicité } 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Sous le groupe affine on peut supposer en outre que  $a = b = p = 1$ . On note que dans  $\mathbb{C}^2$  la classification devient plus simple :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 0 \\ x^2 + y &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x^2 &= 0. \end{aligned}$$

2.  $n = 3$  — On a d'abord les surfaces données par les mêmes équations que pour  $n = 2$ . Cela sont des **cylindres** au dessus les coniques. Cas particuliers : deux plans (distincts ou comptés deux fois), ou une droite (représenté par  $x^2 + y^2 = 0$ ). Sous le groupe affine les nouveaux types sont :

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &= 1, && \text{ellipsoïde} \\
 x^2 + y^2 + z^2 &= -1, && \text{ensemble vide} \\
 x^2 + y^2 + z^2 &= 0, && \text{un seul point} \\
 x^2 + y^2 - z^2 &= 1, && \text{hyperboloïde à deux nappes} \\
 x^2 + y^2 - z^2 &= -1, && \text{hyperboloïde à une nappe} \\
 x^2 + y^2 - z^2 &= 0, && \text{cone quadratique} \\
 x^2 + y^2 &= z, && \text{paraboloïde elliptique} \\
 x^2 - y^2 &= z, && \text{paraboloïde hyperbolique}
 \end{aligned}$$

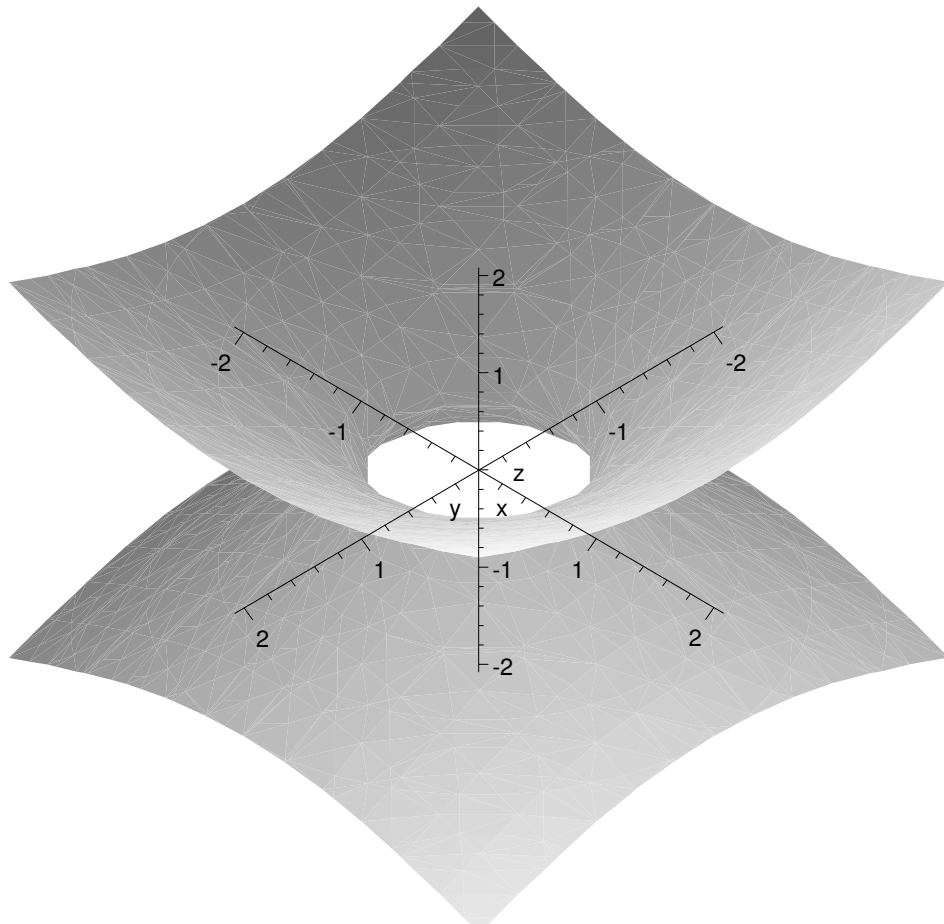


Figure 27. Hyperboloïde a une nappe

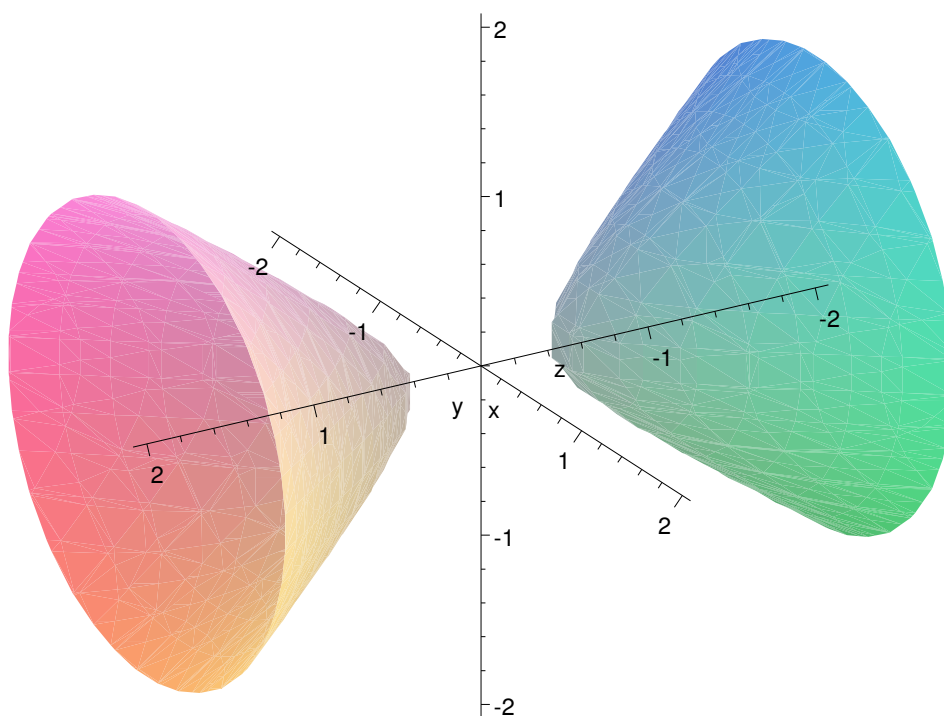


Figure 28. Hyperboloïde a deux nappes

### § 3. Coniques dans le plan projectif complexe

Soit  $C \subset \mathbb{P}^2$  la conique donnée par  $X^T A X = 0$ . Pour  $p = (p_0 : p_1 : p_2)$  on considère le vecteur colonne  $P$  correspondante. La droite  $P^T A X = 0$  s'appelle **polaire de  $p$**  par rapport à  $C$  et on dit que  $p, q \in \mathbb{P}^2$  sont **conjuguées** par rapport à  $C$  si  $p$  appartient à la polaire de  $q$  par rapport à  $C$ . Le point  $p \in \mathbb{P}^2$  tel que  $L$  est sa polaire par rapport à  $C$  s'appelle le **pôle de  $L$** .

Si on suppose que  $C$  est non-singulière, alors la tangente de  $C$  en  $p \in C$  est la polaire de  $p$ . Si  $p$  appartient à sa polaire  $L$ , alors  $p \in C$  et  $L$  est une tangente. Si  $p \notin C$ , et  $r \in L \cap C$ , on calcule facilement que  $M := pr$  coupe  $C$  seulement en  $r$  et donc  $M$  est la tangente de  $C$  en  $r$ .

**3.1. Lemme.** Soit  $p \notin C$ . Il y a deux tangentes qui passent par  $p$ .

*Démonstration.* Soit  $L$  la polaire de  $p$ . Alors  $L \cap C = \{r, s\}$  et  $pr$  et  $ps$  sont deux tangentes. Il faut vérifier que  $s \neq r$  : si  $s = r$  la droite  $L$  est tangente et sa pôle  $p$  est sur  $C$ . Contradiction. ■

L'application

$$T_C : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^\vee$$

$$p \mapsto \text{polaire de } p$$

est une exemple d'une **corrélation**. Par définition c'est une application induite par une matrice par rapport aux coordonnées homogènes  $\{x_0, x_1, x_2\}$  de  $\mathbb{P}^2$  et  $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$  de  $(\mathbb{P}^2)^\vee$ . L'application  $T_C$  est donnée par  $P \mapsto AP$  car l'équation de la droite polaire par rapport à  $(p_0 : p_1 : p_2)$  avec vecteur colonne  $P$  associé est donné par  $(AP)_0x_0 + (AP)_1x_1 + (AP)_2x_2 = 0$ .

L'application duale à  $T$  est :

$$T_C^\vee : (\mathbb{P}^2)^\vee \rightarrow \mathbb{P}^2$$

$$L \mapsto \text{pôle de } L$$

et on a visiblement  $T \circ T_C^\vee = \text{id} = T_C^\vee \circ T$  ;  $T$  est une **involution**. La matrice de  $T_C^\vee$  est  $A^{-1}$  et le conique  $L^T A^{-1} L = 0$  dans  $(\mathbb{P}^2)^\vee$  s'appelle le **dual de  $C$** , noté  $C^\vee$  et on dit que  $C$  et  $C^\vee$  sont **conjugué**

**3.2. Proposition.** *Si  $C$  est non-dégénérée  $C^\vee$  l'est aussi et  $L \in C^\vee$  ssi  $L$  est tangente à  $C$ .*

*Démonstration.*

Par définition on a :  $L \in C^\vee$  ssi  $\vec{\xi}^T A^{-1} \vec{\xi} = 0$  ssi  $\vec{p}$  appartient à la droite donnée par  $A^{-1} \vec{\xi}$ . D'autre part, si  $L$  est donnée par le vecteur colonne  $\vec{\xi}$ , alors  $T_C^\vee(L) \in \mathbb{P}^2$  est donné par  $\vec{p} = A^{-1} \vec{\xi}$ .

Combinant ces deux propriétés, on a :  $L \in C^\vee$  ssi  $L \in T_C^\vee L$ . Cela signifie que  $L$  passe par son pôle c.à.d.  $L$  est tangente à  $C$ . ■

On a une nouvelle principe de dualité :

**3.3. Principe de dualité.** *Si un théorème valable dans  $\mathbb{P}^2$  est formulé en termes de points, droites, incidences, birapport, coniques, conjugaison, alors on obtient un théorème dans  $(\mathbb{P}^2)^\vee$  en échangeant les mots "point" et "droite".*

Soit maintenant  $C$  une conique non-dégénérée dans  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ . On fixe  $u \in C$  et on considère pour  $v \in C$  l'intersection  $pq \cap C$ . On peut supposer que  $u = (1 : 0 : 0)$  et  $v = (0 : 1 : 0)$  et que l'équation de  $C$  est  $fx_2^2 + 2bx_0x_1 + 2cx_0x_2 + 2ex_1x_2 = 0$ . La droite passant par  $u$  et  $v$  est paramétrée par  $(\lambda, \mu, 0)$  et l'intersection est donnée par  $2b\lambda\mu = 0$  et donc les seuls point d'intersections sont  $u$  et  $v$ . Il s'en suit que l'application

$$\pi_u : u^\vee \rightarrow C$$

$$L \rightarrow L \cap C$$

est bijectif.

**3.4. Lemme.** *Soient  $u, s \in C$ , alors l'application  $\pi_s^{-1} \circ \pi_u : u^\vee \rightarrow s^\vee$  est une application projective.*

*Démonstration.* Soit  $p \in \mathbb{P}^2$  et  $L$  sa polaire. On prend  $p \notin C$  et soient  $q$  et  $r$  les deux points d'intersections  $L \cap C$  on suppose que  $p = (1 : 0 : 0)$  et  $q = (0 : 1 : 0)$ ,  $r = (0 : 0 : 1)$ . Si de plus  $s \in C$  est un point arbitraire qu'on peut choisir  $s = (1 : 1 : 1)$ , l'équation de  $C$  devient  $x_0^2 = x_1x_2$ . On peut donc prendre  $u = q$  et  $v = r$ . Les droites  $L$  par  $q$  ont l'équation  $\lambda x_0 + \mu x_2 = 0$  et les droites  $L'$  par  $r$  ont l'équation  $\lambda' x_0 + \mu' x_1 = 0$ . On a  $L \cap L' \in C$  ssi  $\lambda\lambda' = \mu\mu'$  ce qui donne l'application projective  $(\lambda : \mu) \mapsto (\mu : \lambda)$ . ■

**3.5. Corollaire-Définition.** *Soient  $a, b, c, d \in C$  et  $p \in C$  arbitraire. Le birapport  $[a, b, c, d] = [\pi_p a, \pi_p b, \pi_p c, \pi_p d]$  est indépendant du choix de  $p$ .*

Comme application de cette notion nous démontrerons le :

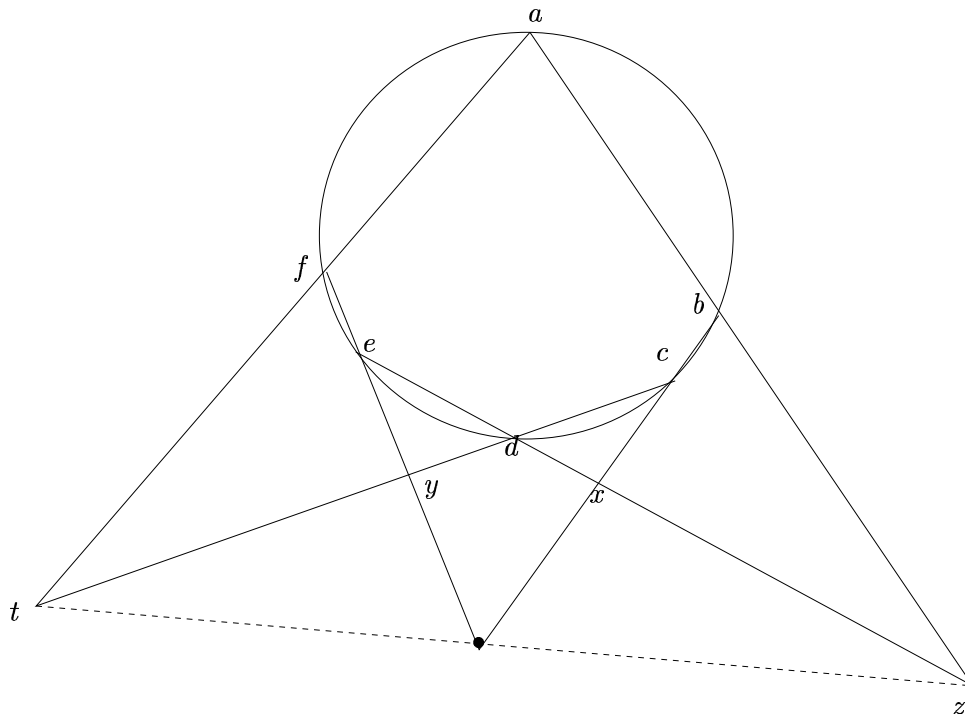
**3.6. Théorème de Pascal.** *Soit  $C$  une conique non-dégénérée et  $a, b, c, d, e, f$  six de ses points au plus trois paires formées de points confondus. Alors  $ab \cap de, bc \cap ef, cd \cap fa$  sont alignés.*



*Démonstration.* Posons  $x = bc \cap ed$ ,  $y = cd \cap ef$ ,  $z = ab \cap de$  et  $t = af \cap dc$ . D'après 3.6.3 on a

$$[z, x, d, e] = [ba, bc, bd, be] = [fa, fc, fd, fe] = [t, c, d, y],$$

et donc  $zt, xc, ey$  sont concourantes d'après le Corollaire 3.6.7. ■



**Figure 29. Pascal**

## QUIZ sur le Chapitre 4

1. Vrai ou faux ?
  - a) Une quadrique de  $\mathbb{C}^3$  contient une droite;
  - b) une quadrique de rang 1 dans  $\mathbb{R}^3$  n'est pas vide;
  - c) il y a toujours une transformation affine qui transforme une quadrique non-dégénérée de  $\mathbb{R}^3$  dans une autre quadrique non-dégénérée donnée.
2. Soit  $C \subset \mathbb{P}_k^2$  ( $k$  corps de caractéristique  $\neq 2$ ) un conique d'équation  ${}^tXAX = 0$ . Vrai ou faux ?
  - a) L'application de  $\mathbb{P}_k^2$  vers le plan dual, définie par  $p \mapsto$  polaire de  $p$  est inversible;
  - b) le conique  $C$  est non-singulière si  $A$  est de rang 3;
  - c) si  $C$  contient au moins 2 points,  $C$  est en bijection avec  $\mathbb{P}_k^1$ .
3. Soient  $p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{P}_k^2$  cinq points, Vrai ou faux ?
  - a) Il existe un conique  $C$  qui passe par les cinq points  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ ;
  - b) Ce conique est unique.

## Problèmes, Chapitre 4

1. Soit  $k$  un corps de caractéristique  $\neq 2$  et  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $q : E \rightarrow k$  une forme quadratique et  $\varphi$  la forme bilinéaire associée. Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et soit  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  la base duale. On pose

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \varphi(e_i, e_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

- a) Soit  $x = \sum_j x_j e_j$  et  $X$  le vecteur colonne correspondant; dito pour  $y = \sum_j y_j e_j$  et  $Y$ . Montrer que  $q(x) = {}^tXAX$  et  $\varphi(x, y) = {}^tYAX = {}^tXAY$ .
- b) Soit

$$\begin{aligned} \Phi : E &\rightarrow E^\vee \\ x &\mapsto \{y \mapsto \varphi(x, y)\}. \end{aligned}$$

Calculer la matrice de  $\Phi$  par rapport aux bases données. Conclure que  $\Phi$  est un isomorphisme si et seulement  $\varphi$  est non-dégénérée.

- c) Maintenant on suppose que  $n = 3$  et on va étudier l'application  $[\Phi] : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E^\vee)$  induite par  $\Phi$ . Montrer que l'image d'un point  $p \in \mathbb{P}(E)$  sous cette application est la droite polaire de ce point par rapport au conique  $C \subset \mathbb{P}(E)$  d'équation  ${}^tXAX = 0$ .
2. On se place dans  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$  avec coordonnées homogènes  $(x : y : z)$ . Les coordonnées duales du plan dual sont  $(a : b : c)$ . On se donne un conique  $C$  non-dégénéré.
  - a) Montrer que chaque droite coupe  $C$  en deux points (avec multiplicité);
  - b) montrer que  $p \in C$  si et seulement si sa droite polaire  $L_p$  est tangente à  $C$ ;
  - c) montrer que si  $L_p \cap C = \{q, r\}$ , alors  $pq$  et  $pr$  sont tangentes à  $C$ ;
  - d) Montrer que si  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1) \in C$  alors l'équation de  $C$  est forcément de la forme  $axy + bzx + cyz = 0$ ;
  - e) On pose  $p = (1 : 0 : 0), q = (0 : 1 : 0), r = (0 : 0 : 1), s = (1 : 1 : 1)$ . Si  $q, r, s \in C$  et si les droites  $pq$  et  $pr$  sont tangentes à  $C$  l'équation de  $C$  est forcément de la forme  $x^2 - yz = 0$  et  $C$  admet donc la paramétrisation rationnelle  $(x : y : z) = (\lambda\mu : \lambda^2 : \mu^2)$ .
  - f) En déduire que tout conique non-dégénéré admet une paramétrisation rationnelle.