

Géométrie Différentiable
Année 2006–2007

Ch. Peters

31 mars 2008

Table des matières

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Courbes | 5 |
| 1.1 | Courbes Planes | 5 |
| 1.2 | Courbes Gauches | 7 |
| 2 | Surfaces | 11 |
| 2.1 | Paramétrages | 11 |
| 2.2 | Quelques Rappels | 12 |
| 2.3 | Atlas différentiable | 15 |
| 2.4 | Courbure de Gauss | 16 |
| 3 | Champs et formes différentiables | 21 |
| 3.1 | Champs vectoriels | 21 |
| 3.2 | Algèbre multilinéaire | 25 |
| 3.3 | Formes différentielles | 30 |
| 3.4 | Comportement sous des Applications Dérivables | 33 |
| 3.5 | Équations de Structure sur \mathbb{R}^n | 36 |
| 3.6 | Le Lemme de Cartan | 39 |
| 3.7 | Équations de Structure : Cas des Surfaces | 41 |
| 3.8 | Surfaces à Courbure Constante Positive | 44 |
| 4 | Variétés Différentiables | 47 |
| 4.1 | Notions de Base | 47 |
| 4.2 | Fibrés Vectoriels | 50 |
| 4.3 | Champs Vectoriels et Groupes de Lie | 57 |
| 4.4 | Formes Différentielles | 58 |
| 5 | Connexions | 63 |
| 5.1 | Notions de Base | 63 |
| 5.2 | Métriques | 66 |
| 5.3 | Connexions Métriques | 68 |

Chapitre 1

Courbes

Une **courbe** $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ d'un intervalle ouvert I dans \mathbb{R}^n . Si I contient 0 on dit que la **courbe** γ **passse par** $p = \gamma(0)$.

On note :

$$\dot{\gamma} := \frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \dots, \frac{d\gamma_n}{dt} \right)$$

où les γ_k sont les coordonnées euclidiennes de γ . Si on munit \mathbb{R}^n du produit euclidien $\langle -, - \rangle$ standard, pour deux courbes γ_1 et γ_2 on a :

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle' = \langle \dot{\gamma}_1, \gamma_2 \rangle + \langle \gamma_1, \dot{\gamma}_2 \rangle \quad (1.1)$$

Cette formule se vérifie facilement en coordonnées euclidiennes.

On dit que le vecteur $\mathbf{t}(t_0) := \dot{\gamma}(t_0)$ est le vecteur **vélocité** au temps t_0 et $\|\mathbf{t}(t_0)\|$ la **vitesse** au temps t_0 . Une courbe est dite **régulière** si $\mathbf{t} \neq 0$ partout. Dans ce cas (1.1) implique que sa vitesse est une fonction C^∞ qu'on pourrait donc intégrer le long de γ ; la fonction

$$\tau \mapsto s(\tau) = \int_a^\tau \|\mathbf{t}(u)\| du$$

s'appelle la **longueur d'arc** sur γ (I étant l'intervalle $]a, b[$). C'est une fonction strictement monotone, donc inversible : t est une fonction de s et l'on peut reparamétrer γ par s . On écrira

$$\mathbf{g}(s) := \gamma(t(s))$$

et on remarque que par rapport à s la vitesse est toujours $= 1$.

1.1 Courbes Planes

On suppose que $\mathbf{g}(s)$ est une courbe plane régulière paramétrée par la longueur d'arc s . On pose

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{g}}.$$

C'est un vecteur unité tangent à la courbe. On choisit \mathbf{n} comme vecteur unité orthogonal à \mathbf{t} telle que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ est orienté positivement (contre la direction de la montre). On dit qu'on a un **repère mobile** associé à la courbe. Le repère $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ est appelé **repère de Frenet**.

Si on dérive la relation $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$ on trouve que $\dot{\mathbf{t}} \perp \mathbf{t}$ et on pose

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}, \quad \kappa : \text{la courbure de } \gamma.$$

Alors on montre facilement :

Lemme 1.1.1 (Frenet). *Soit \mathbf{g} une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc.*

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t}. \end{array}$$

Soit γ une courbe régulière avec paramètre t . Puisque

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \|\dot{\gamma}\|,$$

on obtient

Corollaire 1.1.2 (Frenet-bis).

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{t}} = \|\dot{\gamma}\| \cdot \kappa \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} = -\|\dot{\gamma}\| \cdot \kappa \mathbf{t}. \end{array}$$

La motivation du mot "courbure" vient de l'étude d'un cercle $\|\mathbf{x}\| = r$ paramétré par la longueur d'arc. On trouve $\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle = 0$ et donc, dérivant une fois de plus $\langle \mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = 0$ et donc $\kappa \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle + 1 = 0$ par Frenet, ce qui donne

$$\kappa = \frac{1}{r}.$$

En effet, un cercle devrait être courbé de façon inversement proportionnelle à son rayon. On introduit, plus généralement, le **cercle de courbure** de la courbe \mathbf{g} au point $\mathbf{g}(s_0) = \mathbf{g}_0$ par l'équation

$$\|\mathbf{x} - [\mathbf{g}_0 + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)]\| = \frac{1}{|\kappa(s_0)|}.$$

Les centres décrivent la courbe $\mathbf{y}(s) = \mathbf{g}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$, appelée **développée** de \mathbf{g} .

Exercices au § 1.1

1. Pour une courbe $(x(t), y(t))$ montrer que

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

2. Déterminer le repère mobile pour une parabole $y = px^2$ sur l'intervalle $x \in]-1, 1[$.

1.2 Courbes Gauches

Maintenant \mathbf{g} soit une courbe régulière dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (muni du produit scalaire standard) et - par nos conventions- paramétrée par la longueur d'arc. On pose $\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{g}}(s)$, le vecteur tangent à la courbe au point $\mathbf{g}(s)$. On définit la courbure comme

$$\kappa := |\dot{\mathbf{t}}|. \quad (1.2)$$

De $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 1$ on déduit que $\dot{\mathbf{t}}$ est orthogonal à \mathbf{t} , mais il faut noter que ce vecteur est 0 aux points où la courbure est 0. Si $\kappa > 0$ partout on pose :

$$\mathbf{n} := \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\kappa}.$$

et on introduit le **binormal**

$$\mathbf{b} := \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

Par construction, le repère $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, dite **repère de Frenet** a une *orientation positive*.

En posant

$$\tau := (\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b}) \quad (1.3)$$

on a

Proposition 1.2.1 (Frenet-II).

| | | |
|--------------------|---|----------------------------------------|
| $\dot{\mathbf{t}}$ | = | $\kappa \mathbf{n}$ |
| $\dot{\mathbf{n}}$ | = | $-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$ |
| $\dot{\mathbf{b}}$ | = | $-\tau \mathbf{n}$. |

Démonstration : La première équation sort de la définition de la courbure (1.2). Pour la seconde, on pose $\dot{\mathbf{n}} = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{t} + \gamma \mathbf{b}$ et il faut donc déterminer $\alpha = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle$, $\beta = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle$ et $\gamma = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle$. Si on dérive $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = 0$ on trouve $\alpha = -\kappa$, de $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ on trouve $\beta = 0$ et dérivant $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$, utilisant (1.3) on trouve $\gamma = \tau$. La troisième équation se déduit de façon similaire.

Remarque. On a l'interprétation suivante de κ et τ . Soit $\mathbf{g}(s)$ une courbe à vitesse 1 et courbure > 0 autour de $s = 0$. Alors, si on utilise $\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)$ comme repère, et on écrit $\mathbf{g}(s) = (x(s), y(s), z(s))$. Alors

$$\begin{aligned} x(s) &= s + O(s^2) \\ y(s) &= \frac{1}{2}\kappa(0)s^2 + O(s^3) \\ z(s) &= \frac{1}{6}\kappa(0)\tau(0)s^3 + O(s^4). \end{aligned}$$

Le résultat principal est :

Théorème 1.2.2. *Pour la classe des courbes régulières ayant courbure non-nulle, à une isométrie directe près, la courbe est déterminée par sa courbure et sa torsion.*

Pour montrer ce résultat, on utilise :

Rappel 1.2.3 (Problème de Cauchy - cas linéaire). *Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $A(s)$ un endomorphisme de V qui dépend de façon C^1 de $s \in I =]a, b[$. Soit $s_0 \in I$, $\mathbf{y}_0 \in V$. Alors le problème de Cauchy*

$$\dot{\mathbf{y}} = A(s)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(s_0) = \mathbf{y}_0$$

admet une solution unique $\mathbf{y}(s)$ valable sur I entier.

On déduit :

Lemme 1.2.4. *Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et soient $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, $\kappa > 0$. On fixe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 . Il y a une unique courbe $\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par longueur d'arc telle que $\mathbf{g}(s_0) = \mathbf{x}_0$ et $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.*

Démonstration : On l'applique 1.2.3 à $V = \mathbb{R}^{3 \times 4}$, l'espace des matrices à 3 lignes et 4 colonnes qui paramètre les quadruplets des vecteurs (lignes) de \mathbb{R}^3 . Pour ce qui suit, on utilise la notation suivante : à un m -uplet de vecteurs (colonnes) de \mathbb{R}^n , disons $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ on associe la matrice $M(\mathbf{V})$ dont les m lignes sont les m vecteurs lignes ${}^T\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, m$. La condition initiale s'écrit alors $\mathbf{y}(s_0) = M(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \in V$, où $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 . On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution du problème de Cauchy s'écrit $M(\mathbf{g}(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$. La courbe \mathbf{g} passe par \mathbf{x}_0 et cette courbe sera la courbe cherchée.

On montrera d'abord que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ est un repère orthonormé. Il suffit de montrer que la matrice $B = M(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ ayant les vecteurs du repère

pour lignes est orthogonal, i.e. satisfait $B^\circ{}^\top B = \mathbf{I}$. Pour cela, il suffit de voir que la dérivé de $B^\circ{}^\top B$ est nulle, car alors la matrice constante ${}^\top B^\circ B$ est égale à ${}^\top B(s_0)B(s_0) = \mathbf{I}$. Or, les 3 dernières équations disent que $\dot{B} = \varpi B$, Où

$$\varpi := \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque ${}^\top \varpi = -\varpi$, on a ${}^\top \dot{B} = -{}^\top B \varpi$ et donc

$$\frac{d}{dt} [{}^\top B^\circ B] = {}^\top \dot{B}^\circ B + {}^\top B^\circ \dot{B} = -{}^\top B \varpi B + {}^\top B \varpi B = 0,$$

ce qui montre l'assertion que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ est un repère orthonormé. Puisque l'orientation du repère est positive au point s_0 elle est positive partout par continuité.

La première équation dit que $\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{t}$ et puisque $\|\mathbf{t}\| = 1$, la courbe \mathbf{g} est paramétrée par longueur d'arc. On montre facilement que les 3 autres équations garantissent que la courbure et la torsion de la courbe \mathbf{g} sont κ et τ .

Une deuxième courbe $\tilde{\mathbf{g}}$ qui satisfait les conditions du théorème donne lieu à un repère orthonormé qui, par Frenet-II, change suivant le même système d'équations différentielles. Par unicité (1.2.3) on déduit que $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}$ \square

Démonstration de 1.2.2 : Soient \mathbf{g} et $\tilde{\mathbf{g}}$ deux courbes ayant même courbure et torsion. On considère les deux repères R et \tilde{R} correspondants aux points $\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}(s_0)$ et $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{g}}(s_0)$. Il y a une isométrie T avec $\det T = 1$ telle que $T(\mathbf{x}_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0$ et telle que T transfère R à \tilde{R} . Alors $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \circ T$ par unicité des solutions du problème de Cauchy (1.2.3).

Exercices au § 1.2

1. Soit \mathbf{g} une courbe tracée sur la sphère $S^2 = \{\|\mathbf{x}\| = 1\}$ paramétrée par longueur d'arc. Montrer que $\kappa \geq 1$ et exprimer la torsion en fonction de τ .
2. Soit $\kappa : (\text{interval ouvert } I \text{ de } \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\kappa > 1$. Montrer qu'il y a une courbe contenue dans S^2 avec courbure la fonction κ donnée.
3. On fixe $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Trouver (r, h) telles que l'hélicoïde

$$t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ht)$$

a la courbure a et la torsion b .

Chapitre 2

Surfaces

2.1 Paramétrages

On se place dans l'espace \mathbb{R}^3 muni de son produit euclidien standard.

Définition 2.1.1.

1) Une **surface paramétrée** est une application C^∞

$$\begin{aligned} \varphi : (\text{Ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v). \end{aligned}$$

telle que les 2 vecteurs φ_u, φ_v soient partout indépendants.

2) $M \subset \mathbb{R}^3$ est une **surface** si pour chaque point p il y a un ouvert $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^3$ et un paramétrage $\varphi : B \rightarrow M$, $\varphi(b) = p$ telle que $\varphi B = \tilde{V} \cap M$.

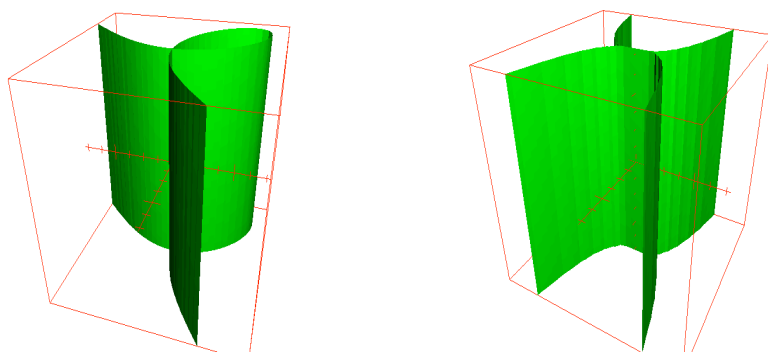


FIG. 2.1 – Deux “surfaces” exclus

Exemple 2.1.2. Une **surface de rotation** est obtenue en tournant une courbe régulière dans le plan des (y, z) , disons $t \mapsto (r(t), z(t))$, $z(t) > 0$ autour de l'axe des z . Cela donne

$$\varphi(t, \theta) = (r(t) \sin \theta, r(t) \cos(\theta), z(t))$$

et on vérifie que c'est une surface paramétrée. Ici $U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On note que ce paramétrage n'est pas injectif et ne satisfait pas la deuxième condition. En prenant $B = \mathbb{R}_+ \times]a, a + 2\pi[$, $a \in \mathbb{R}$ quelconque on obtient un paramétrage injectif. Puisqu'on peut recouvrir $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par de tels sous ensembles M est une surface.

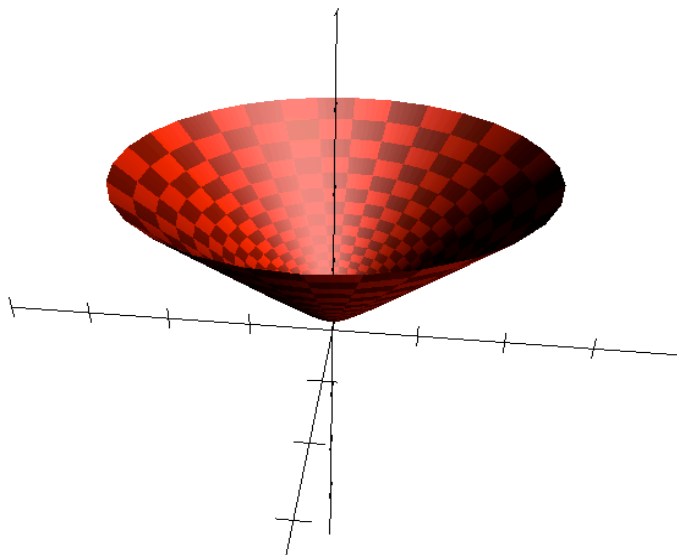


FIG. 2.2 – Surface de rotation

D'autres exemples sont obtenues en appliquant le théorème des fonctions implicites, qu'on rappelle ci-dessous.

2.2 Quelques Rappels

Soit $F : (\text{Ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors, rappelons que F est **dérivable** au point $p \in U$ s'il y a une application linéaire $D_p F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(p+h) - F(p) - D_p F(h)\|}{|h|} = 0.$$

Cela est équivalent à l'existence de développement de Taylor en p jusqu'à l'ordre 1 :

$$F(p+h) - F(p) = D_p(h) + o(h).$$

Soit \mathbf{x} la vecteur ligne $F(\mathbf{x}) = {}^T(F_1(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x}))$. On rappelle que pour une fonction *scalaire* G on a $\nabla G(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right)$. La représentation de l'application $D_p F$ dans les bases standard est la **matrice jacobienne**

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \vdots \\ \nabla F_m \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Si, de plus $G : (\text{Ouvert } V \text{ de } \mathbb{R}^p) \rightarrow U$ est dérivable au point q , $G(q) = p$, alors on a la **règle de la chaîne**

$$D_q(F \circ G) = D_p F \circ D_q G. \quad (2.1)$$

On a :

Rappel 2.2.1 (Théorème d'inversion locale). *Soit*

$$F : (\text{Ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

une fonction C^∞ . On suppose que $D_p F$, $p \in U$ est inversible. Alors, quitte à remplacer U par un voisinage U' plus petit de p , $F : U' \rightarrow V = F(U')$ est bijective et F^{-1} est C^∞ .

On dit que $F|_{U'}$ est un **difféomorphisme** et que F est un **difféomorphisme local**.

Corollaire 2.2.2 (Théorème des fonctions implicites). *Soit $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ ouvert. On écrit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$. Soit $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ dérivable. On décompose la dérivée $D_p = (D'_p, D''_p)$, $p \in U$ suivant la décomposition $\mathbb{R}^{m+k} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$. Si D''_p est inversible, alors, quitte à remplacer U par U' , voisinage plus petit de p , le lieu dans U' implicitement donné par $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(p) = q$ est le lieu explicitement donnée par le graphe d'une fonction C^∞*

$$G : (\text{Ouvert } V \text{ de } \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

i.e. on a

$$F^{-1}(q) \cap U' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \mathbf{x} \in V, \quad \mathbf{y} = G(\mathbf{x})\}.$$

Démonstration : On définit $\tilde{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$. Alors

$$D_p \tilde{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ * & D''_p F \end{pmatrix}.$$

On applique Rappel 2.2.1 à \tilde{F} , Clairement \tilde{F}^{-1} est de la forme $\tilde{F}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, G''(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ et pour un certain ouvert V de \mathbb{R}^m on a $F^{-1}(q) = \{\tilde{F}^{-1}(\mathbf{u}, q) / \mathbf{u} \in V\} = (\mathbf{u}, G''(\mathbf{u}, q))$. On pose $G(\mathbf{x}) = G''(\mathbf{x}, q)$. \square

Corollaire 2.2.3. Soit $f : (\text{Ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $D_p f = \nabla f(p) := (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \neq 0$ si $f(p) = 0$. (On dit que 0 est une **valeur régulière de f**). Alors l'ensemble $f^{-1}(0)$ est une surface.

Exemple 2.2.4. Une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ est une surface.

Une application dérivable $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, U ouvert de \mathbb{R}^m est appelée **une immersion** si $D_p F$ est injective au tout point $p \in U$. Une telle application s'étend à une difféomorphisme local $F : U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Corollaire 2.2.5. Soit

$$F = (F', F'') : (\text{Ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{m+k}$$

dérivable telle que $D_p F$, $p \in U$ a rang m . On suppose que $D_p F'$ est de rang m et donc inversible (après rénumérotation des coordonnées de l'espace but, \mathbb{R}^{m+k} cela sera le cas). Alors l'application

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^{m+k} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (F'(\mathbf{x}), F''(\mathbf{x}) + \mathbf{y}) \end{aligned}$$

est, localement autour du point p , un difféomorphisme.

Exemple 2.2.6. Soit M une surface et $p \in M$, $\varphi : U \rightarrow M$, $\varphi(b) = p$, un paramétrage local. Alors l'application : $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(u, v, w) = \varphi(u, v) + w[\varphi_u \times \varphi_v]$ est un difféomorphisme local autour de $(b, 0)$ et en particulier, φ est, localement autour de b un paramétrage *injectif*.

Exercices au § 2.2

1. Soient V, W, Z trois \mathbb{R} -espaces vectoriels et soit $F : V \times W \rightarrow Z$ une fonction bilinéaire. Calculer $D_p F$.
2. Soit $t \mapsto r(t) > 0$ une fonction dérivable. On considère la surface de rotation M définie par la courbe $t \mapsto (r(t), t)$. Montrer que M est l'ensemble des zéros d'une fonction avec 0 comme valeur régulière. Conclure que M est une surface.
3. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique de taille 3. Montrer que la quadrique dans \mathbb{R}^3 avec coordonnées x_1, x_2, x_3 donnée par

$${}^T \mathbf{x} A \mathbf{x} = \sum a_{ij} x_i x_j = 1, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

est une surface si et seulement si A est inversible .

4. Montrer que le cône $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ n'est pas une surface. Indication : étudier les courbes qui passent pas l'origine et tracées sur le cône.
5. Même question pour le cône double $x^2 + y^2 = z^2$.

2.3 Atlas différentiable

Comme dans le § 2.1, soit M une surface $p \in M$ et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage local pour M avec $\varphi(b) = p$; soient les paramètres (u, v) . Par l'exemple 2.2.6 l'application φ s'étend à un difféomorphisme $\Phi : \tilde{U} \rightarrow W \subset \mathbb{R}^3$ (ici $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{R}$ est un ouvert convenable). Son inverse Φ^{-1} restreint à la surface M est un inverse de φ . Il y a donc un voisinage $W \subset \mathbb{R}^3$ de p telle que $V := M \cap W$ s'applique moyennant $f := \Phi^{-1}|_V$ de façon homéomorphe sur un voisinage B de $b \in U$. Un tel couple (V, f) est appelé **carte** et les fonctions $u \circ f, v \circ f$ les **coordonnées** de la carte. Les paramétrages donnent donc (après restriction aux ouverts convenables) des cartes.

Soit $(U', \varphi'), p = \varphi'(b')$, un autre paramétrage avec extension de φ' à un difféomorphisme local Φ' et soit (V', f') la carte correspondante. Alors la composition $\Phi^{-1} \circ \Phi'$ est un difféomorphisme local définie dans un ouvert convenable U'' de $U' \times \mathbb{R}$. Restreint à $U'' \cap U' \times \{0\}$ cela donne donc la **fonction de changement de cartes** $[\tilde{\varphi}^{-1}|_M] \circ \varphi' = f \circ f'^{-1}$. On vient de montrer :

Lemme 2.3.1. *Soit M une surface. Alors M est recouvert par des cartes telles que les fonctions de changement de cartes soient tous C^∞ .*

Une telle collection de cartes est appelée un **atlas différentiable**. Un atlas peut être utilisé pour définir la notion suivante :

Définition 2.3.2. Soit M une surface. Une application $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée dérivable si un des 2 conditions équivalentes sont vérifiées :

1. Chaque point de M admet un voisinage W dans \mathbb{R}^3 et une extension de $F|(M \cap W)$ à une application dérivable $W \rightarrow \mathbb{R}^m$.
2. Pour chaque carte (U, f) de M l'application $F \circ f^{-1} : (\text{ouvert de } \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est C^∞ .

L'équivalence de ces deux définitions est une conséquence de Corr. 2.2.5. Une application bijective et différentiable $F : M \rightarrow M' \subset \mathbb{R}^3$ telle que F^{-1} soit différentiable est appelée un **difféomorphisme** entre surfaces.

Remarque 2.3.3. On peut clairement étendre ces définitions aux paramétrages $\varphi : (\text{Ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$. On exige que $D_p\varphi$ a rang m au chaque point $p \in U$. Cela donne un bout de "surface à m dimensions". On l'appelle **variété paramétrée** de dimension m . Si $M \subset \mathbb{R}^{m+k}$ peut être recouvert par des ouverts qui sont des images de telles variétés paramétrées on appelle M une **variété (immergée)** de dimension m . Une telles variété peut être recouverte par un atlas différentiable comme dans le cas des surfaces. On a aussi la notion d'une application C^∞ entre deux variétés immergées et la notion d'un difféomorphisme. Si $k = 1$ on parle d'une *hypersurface*.

Plus tard (§ 4.1) on va voir comment définir une variété plus abstraitement à partir d'un atlas C^∞ .

Exercices au § 2.3

1. Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte. Alors M peut être recouvert par un atlas fini.
2. Soit \mathfrak{A} un atlas et soit $\overline{\mathfrak{A}}$ l'ensemble des cartes telles que les fonctions de changement de cartes avec les cartes de \mathfrak{A} soient différentiable. Montrer :
 - $\overline{\mathfrak{A}}$ est un atlas différentiable ;
 - $\overline{\mathfrak{A}}$ est un atlas différentiable maximal ;
 - $\overline{\mathfrak{A}}$ est l'unique atlas différentiable maximal contenant \mathfrak{A} ;
 - deux atlas \mathfrak{A} et \mathfrak{B} sont contenus dans le même atlas différentiable maximal si et seulement si leur réunion est un atlas différentiable ; cela définit une relation d'équivalence d'atlas ;

2.4 Courbure de Gauss

Soit M une surface et $p \in M$. L'espace tangent $T_p M$ peut se voir comme un espace affine qui passe par p (espace immergée) ou comme un espace vectoriel, son espace vectoriel associée. Dans ce § il sera commode de prendre le premier point de vue.

Un vecteur tangent $\xi \in T_p M$ est tangent à une courbe $\gamma : I \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$:

$$\xi = \dot{\gamma}(0). \quad (2.2)$$

Cas particulier : les 2 vecteurs $\varphi_u(0, 0)$ et $\varphi_v(0, 0)$ sont tangents aux courbes $u \mapsto \varphi(u, 0)$ et $v \mapsto \varphi(0, v)$. Le vecteur

$$\mathbf{n}_p := \frac{\varphi_u(0, 0) \times \varphi_v(0, 0)}{\|\varphi_u(0, 0) \times \varphi_v(0, 0)\|}$$

est le **normal** à M au point p . Si on change l'orientation des paramètres, le normal \mathbf{n} change à $-\mathbf{n}$. Si on se donne une surface et si les vecteurs normaux peuvent être choisis telle qu'elles coïncident sur chaque intersection des cartes on dit que M est une **surface orientable**. Les surfaces non-orientables existent : le ruban de Möbius est une telle exemple.

Remarque 2.4.1. La même définition s'applique aux hypersurfaces (Rem. 2.3.3) : une **hypersurface est orientable** s'il y a un champ non-nulle de vecteurs normaux.

Si M est orientable un tel choix continu $p \mapsto \mathbf{n}_p$ en effet donne une application C^∞

$$\mathbf{n} : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ (application normale).}$$

Si $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable au point p , par définition (2.3.2) F s'étend à $\tilde{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ où V est un voisinage de p dans \mathbb{R}^3 . Soit $\xi \in T_p M$. Alors $D_p \tilde{F}(\xi) \in \mathbb{R}^m$ ne dépend pas de l'extension : la règle de la chaîne appliquée à $\tilde{F} \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ donne (utilisant (2.2)) :

$$D_p \tilde{F}(\xi) = D_p \tilde{F}(\dot{\gamma}(0)) = D_p \tilde{F} \circ D_0 \gamma = \frac{d}{dt}(\gamma \circ \tilde{F})|_0 = \frac{d}{dt} F(\gamma(t))|_0$$

On peut voir ce vecteur comme un tangent au point $q = F(p)$. On écrira

$$D_p F(\xi) = D_p \tilde{F}(\xi) \in T_q \mathbb{R}^m.$$

Si F transforme M à une autre surface $M' \subset \mathbb{R}^3$, ce vecteur sera tangent à M' . En effet, F applique chaque courbe par p et tracée sur M , sur une courbe par q tracée sur M' . Cela définit :

$$\boxed{D_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} M' \quad \text{l'application tangente.}}$$

Par exemple, pour l'application normale $\mathbf{n} : M \rightarrow S^2$, l'espace tangent à S^2 au point \mathbf{n}_p s'identifie naturellement à $T_p M$. En effet, les espaces vectoriels associés sont les mêmes. On pose

$$\boxed{S_p := -D_p \mathbf{n} : T_p M \rightarrow T_p M \quad (\text{Application de Weingarten})} \quad (2.3)$$

Proposition 2.4.2. *S est symétrique par rapport au produit standard.*

Démonstration : On écrit l'application normale pour un surface paramétrée comme $\mathbf{n}(u, v)$. Alors

$$\begin{aligned} S_p(\varphi_u) &= -\mathbf{n}_u(p) \\ S_p(\varphi_v) &= -\mathbf{n}_v(p). \end{aligned}$$

On dérive les équations

$$\langle \mathbf{n}, \varphi_u \rangle = 0 = \langle \mathbf{n}, \varphi_v \rangle$$

et on trouve

$$\langle S_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle \mathbf{n}_u, \varphi_u \rangle = \langle \mathbf{n}, \varphi_{vu} \rangle = \langle \mathbf{n}, \varphi_{uv} \rangle = -\langle \mathbf{n}_v, \varphi_u \rangle = \langle S_p(\varphi_v), \varphi_u \rangle.$$

□

Corollaire 2.4.3. *$T_p M$ possède un repère orthonormé de vecteurs propres pour S_p .*

Soit $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ un tel repère. Alors on a

$$S_p(\mathbf{e}_1) = \kappa_p^{(1)}\mathbf{e}_1, \quad S_p(\mathbf{e}_2) = \kappa_p^{(2)}\mathbf{e}_2.$$

On appelle les fonctions κ^1, κ^2 les 2 **courbures principales**. On pose

$$\boxed{\kappa_p := \det S_p = \kappa_p^{(1)}\kappa_p^{(2)} \quad (\text{Courbure Gaussienne en } p)} \quad (2.4)$$

$$\boxed{h_p := \frac{1}{2} \text{Tr } S_p = \frac{1}{2}[\kappa_p^{(1)} + \kappa_p^{(2)}] \quad (\text{Courbure moyenne en } p)} \quad (2.5)$$

$$\kappa_p(\xi) := \langle S_p(\xi), \xi \rangle / \|\xi\| \quad (\text{Courbure dans la direction } \xi)$$

$$I_p := |\{\xi \in T_p M / \langle S_p \xi, \xi \rangle = 1\}| \quad (\text{Indicatrice de Dupin}).$$

Suivant les signes des deux courbures principales on distingue :

Définition 2.4.4. Un point $p \in M$ s'appelle

1. **elliptique** si les deux courbures principales sont non-nulles et ont même signe (l'indicatrice est un ellipse). Si $\kappa_p^{(1)} = \kappa_p^{(2)} = h_p$ (alors $S_p = h_p \text{id}$) on dit que p est un point **ombilic**,
2. **hyperbolique** si elles sont non-nulles de signes opposés (l'indicatrice est une hyperbole),
3. **parabolique** si exactement une des courbures est nulle (donc $\kappa_p = 0$, l'indicatrice est un paire de droites)
4. **planaire** si $S_p = 0$ (l'indicatrice est vide).

Soit $\xi \in T_p M$ un vecteur tangent ; le plan N_p affine qui passe par p avec ξ et \mathbf{n}_p comme vecteurs directeurs coupe M suivant une courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t)$ dont ξ est son vecteur tangent (au point p). Cette courbe s'appelle **section normale suivant la direction** ξ . On prend $\{\xi, \mathbf{n}_p\}$ comme base positive du plan N_p . De cette façon $\{\xi, \mathbf{n}_p\}$ est la valeur au point p du repère de Frenet pour γ . Avec cette convention, le résultat suivant explique le choix du signe dans l'application de Weingarten :

Lemme 2.4.5. Soit $\xi \in T_p M$ un vecteur de longueur 1 et soit $V \subset \mathbb{R}^3$ le plan qui passe par p et avec les deux vecteurs directeurs ξ et \mathbf{n}_p . La courbure en p de la section normale suivant ξ est égale à la courbure de M dans la direction de ξ .

Démonstration : Soit $s \mapsto \mathbf{g}(s)$ une paramétrisation de $V \cap M$ et soit $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ le repère de Frenet associé. Alors $\dot{\mathbf{n}}(0) = D_p(\xi) = -S_p(\xi)$, car $\xi = \dot{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{t}(0)$. On trouve alors

$$\kappa(0) = \langle \dot{\mathbf{t}}(0), \mathbf{n}(0) \rangle = -\langle \mathbf{t}(0), \dot{\mathbf{n}}(0) \rangle = \langle S_p \xi, \xi \rangle = \kappa_p(\xi),$$

car $\|\xi\| = 1$. □

Exercices au § 2.4

1. Soit M une surface de la forme $f^{-1}b$, où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow R$ est dérivable et b une valeur régulière. Montrer que M est orientable.
2. Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientable et compacte. Montrer qu'il y a au moins un point non-planaire.
3. On suppose qu'une surface M contient un segment rectilinéaire. Montrer : les points de M ne sont pas tous elliptiques.
4. On fixe un point $p \in M$, M une surface paramétrée. Soit $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ le repère standard associé. Les deux formes bilinéaires

$$\begin{aligned} I(-, -) &:= \langle -, - \rangle \\ II(-, -) &:= \langle S_p -, - \rangle \end{aligned}$$

s'appellent les deux **formes fondamentales**. Par rapport au repère standard traditionnellement leurs matrices sont notées

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Montrer :

(a) La matrice de S est $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

(b)

$$\begin{aligned} \kappa_p &= \frac{LN - M^2}{EF - G^2} \\ h_p &= \frac{1}{2} \frac{LG + EN - 2MF}{EF - G^2} \\ \kappa_p^{(1),(2)} &= h_p \pm \sqrt{h_p^2 - \kappa_p} \end{aligned} \tag{2.6}$$

5. Soit M le graphe de la fonction $(u, v) \mapsto f(u, v)$. Calculer (avec la notation de la précédente exercice) E, F, G et L, M, N . Montrer que

$$\kappa = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{W^2}, \quad W := [f_u^2 + f_v^2 + 1]^2$$

Chapitre 3

Champs vectoriels et formes différentiables sur \mathbb{R}^n

3.1 Champs vectoriels

Un champ vectoriel dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une application C^∞

$$\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

On considère $\mathbf{X}(p)$ comme vecteur à point initial p . Une autre façon de le dire $\xi := \mathbf{X}(p) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est un vecteur de l'espace tangent au point p de \mathbb{R}^n . La dérivée dans la direction ξ notée D_ξ où $D_\xi|_p$ opère sur des fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ comme :

$$D_\xi(f) := \sum_k \xi_k \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_p.$$

Cette définition utilise les coordonnées ; en effet les champs vectoriels constants

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_k} : U & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ p & \mapsto & e_k \end{array}$$

figurent dans la définition, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base standard de \mathbb{R}^n . Cette dérivée directionnelle opère comme la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k}$.

La dérivée directionnelle ne dépend que de la direction (et elle ne dépend donc pas du choix des coordonnées) : on a déjà vu que pour tout courbe γ avec $\gamma(0) = p$ telle que $\dot{\gamma}(0) = \xi$ on a

$$D_\xi(f) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0}. \quad (3.1)$$

Cela donne aussi un moyen d'identifier l'espace tangent $T_p\mathbb{R}^n$ d'une façon abstraite. D'abord il faut localiser autour d'un point, car le résultat (3.1) ne dépend que de la fonction restreint aux voisinages arbitrairement petits de

p . Sur l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de p on introduit une notion d'équivalence qui exprime cela :

Définition 3.1.1. Deux fonctions définies dans un voisinage de p définissent la même **germe en p** si elles coïncident sur un voisinage commun de p . La germe de f en p sera notée $[f]_p$ ou $[f]$ s'il n'y a pas de confusion. L'ensemble des germes en p sera noté C_p^∞ .

L'ensemble C_p^∞ est un \mathbb{R} -espace vectoriel : l'addition provient de l'addition des fonctions et pareil pour la multiplication scalaire. La dérivée directionnelle D_ξ se voit alors comme une application linéaire $D_\xi : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, c'est une exemple d'une dérivation :

Définition 3.1.2. Une **dérivation** est une application linéaire

$$D : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$$

qui satisfait la règle de Leibniz :

$$D(fg) = f(p)Dg + g(p)Df.$$

On pose

$$\text{Der}_p(\mathbb{R}^n) = \{D : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R} / D \text{ est dérivation}\}.$$

L'ensemble $\text{Der}_p(\mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Cet espace contient les dérivations $\frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$. Celles-ci sont linéairement indépendantes, car, si $\sum_k \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$, on a

$$\lambda_k = \left[\sum_k \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right] (x_k) = 0.$$

Si $D \in T_p$, alors comparons D et $D' = \sum_k D(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k}$. Pour faciliter les notations, supposons que $p = 0$ et normalisons d'abord l'écriture d'une germe en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 f(tx_1, \dots, tx_n) dt \\ &= \sum_k x_k \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx_1, \dots, tx_n) dt \\ &= \sum_k x_k g_k \quad g_k \in C_p^\infty, g_k(0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(0). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lemme 3.1.3. $D = D' = \sum_k D(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Démonstration : On note d'abord que si c est la fonction constante, $Dc = 0$, car $Dc = cD1$ et $D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$. Donc $D(f) = D(f - f(0))$. Appliquons D à $f - f(0)$ donnée par (3.2) et utilisons le règle de Leibniz : on trouve que $D(f) = \sum_k D(x_k g_k) = D(x_k)g_k(0) + x_k(0)D_x(g_k) = D(x_k) \frac{\partial f}{\partial x_k}(0)$. Donc $D = D'$. \square

Corollaire 3.1.4. *L'espace $\text{Der}_p(\mathbb{R}^n)$ des dérivations en p est de dimension finie n avec base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$.*

On identifiera cet espace avec l'espace tangent de \mathbb{R}^n en p :

$$T_p \mathbb{R}^n \ni \xi \iff D_\xi \in \text{Der}_p(\mathbb{R}^n). \quad (3.3)$$

Cela donne une définition algébrique de l'espace tangent.

Les mêmes considérations donnent aussi une interprétation géométrique :

Proposition 3.1.5. *On dit que deux courbes qui passent par p définissent la même germe si elles coïncident sur un intervalle commun de 0. Deux germes $[\gamma]$ et $[\gamma']$ sont (tangent)-équivalentes, si pour tout germe $[f]$ en p*

$$\frac{d}{dt}[f \circ \gamma]_{t=0} = \frac{d}{dt}[f \circ \gamma']_{t=0}$$

pourvue que les représentants γ et γ' soient choisies convenablement.

Corollaire 3.1.6. *L'espace tangent $T_p \mathbb{R}^n$ s'identifie aux classes d'équivalences des germes de courbes passant par p .*

On récapitule :

Théorème 3.1.7. *L'espace tangent $T_p \mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^n au point p s'identifie à*

- *l'espace des dérivations $C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ en p (description algébrique) ;*
- *l'espace des classes des germes de courbes passant pas p sous tangent-équivalence (description géométrique).*

Remarque 3.1.8. Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est une variété immergée, on introduira pour $p \in M$ l'espace $C_p^\infty(M)$ des germes de fonctions en p sur M . Alors les vecteurs tangents à M en p s'identifient aux dérivations $C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Géométriquement, on les identifie aux germes en p de courbes tracées sur M .

On introduit le **fibré tangent** d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$:

$$TU = \coprod_{p \in U} T_p \mathbb{R}^n.$$

Ce fibré admet une projection tautologique $\pi : TU \rightarrow U$ avec fibres $\pi^{-1}p = T_p \mathbb{R}^n$. Les $T_p \mathbb{R}^n$ s'identifient tous à \mathbb{R}^n moyennant les bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$.

Cela donne une identification de TU avec un ouvert de \mathbb{R}^{2n} :

$$\iota_U : TU \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n.$$

Cet application est compatible avec les projections $\pi : TU \rightarrow U$ et $p : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ au sens que $p \circ \iota = \pi$. On dit que ι_U donne une **trivialisat**ion du fibré TU .

Un champ vectoriel n'est rien autre qu'une application dérivable $\mathbf{X} : U \rightarrow TU$ telle que $\mathbf{X}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$, c.à.d. telle que $\pi \circ \mathbf{X} = \text{id}$. De telles applications s'appellent **sections** (dérivables) du fibré tangent et l'ensemble de ces sections forment l'espace vectoriel $C^\infty(TU)$:

Lemme 3.1.9. *L'espace vectoriel des champs vectoriels sur U s'identifie à l'espace vectoriel $C^\infty(TU)$ des sections dérivables du fibré tangent TU de U .*

Revenons sur la notion de repère :

Définition 3.1.10. Un **repère** sur U est une collection de n champs vectoriels $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \in C^\infty(TU)$ qui donnent aux chaque point p une base de T_p . Un repère \mathbf{R} induit une trivialisat

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{R}} : TU &\rightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ \sum_k a_k \mathbf{X}_k|_p &\mapsto (p, (a_1, \dots, a_n)). \end{aligned}$$

Dans la suite on a besoin d'une structure supplémentaire sur $C^\infty(TU)$: le crochet de Lie. Avant d'introduire cette opération il nous faut la notion de **dérivée $D_X f$ d'une fonction $C^\infty f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dans la direction d'un champ X sur U** . On pose simplement

$$D_X f(p) := D_{X(p)}(f)$$

et on note que $D_X f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ .

Désormais on simplifiera la notation en écrivant Xf au lieu de $D_X f$.

Avec cette convention, on a :

Définition 3.1.11. Soient $X, Y \in C^\infty(TU)$. Alors

$$[X, Y]_p f := X_p(Yf) - Y_p(Xf). \quad (3.4)$$

On vérifie facilement :

Lemme 3.1.12. $[X, Y]_p$ est une dérivation, donc $[X, Y]$ est un champ vectoriel. L'opération $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ (**crochet de Lie**) satisfait :

- elle est bilinéaire ;
- elle satisfait **l'identité de Jacobi** :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Ce lemme montre que $C^\infty(TU)$ est un exemple d'une algèbre de Lie :

Définition 3.1.13. Un \mathbb{R} -espace vectoriel s'appelle **algèbre de Lie** si elle admet une opération bilinéaire $[-, -]$ satisfaisant l'identité de Jacobi. Une **sous-algèbre de Lie** est un sous-espace stable par le crochet de Lie.

Exemples 3.1.14. Une autre exemple de base est $\mathfrak{gl}(n)$, l'espace vectoriel des matrices de taille n avec crochet $[A, B] = AB - BA$. En effet, les matrices de trace 0 forment une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n)$, et les matrices anti-symétriques le sous-algèbre $\mathfrak{so}(n)$.

Exercices au § 3.1

1. Calculer les crochets de Lie $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]$ et $[f \frac{\partial}{\partial x_i}, g \frac{\partial}{\partial x_j}]$.
2. Montrer que $\mathfrak{sl}(n)$ et $\mathfrak{so}(n)$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$.
3. Montrer que l'espace tangent de $GL(n)$ à l'identité est $\mathfrak{gl}(n)$ et que les sous-algèbres $\mathfrak{sl}(n)$ et $\mathfrak{so}(n)$ correspondent aux tangents à $SL(n)$ resp. $SO(n)$.

3.2 Algèbre multilinéaire

Soit V et W deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 3.2.1. Le **produit tensoriel** $V \otimes W$ est le quotient F/G de l'espace vectoriel F librement engendré par les couples $(v, w) \in V \times W$ par le sous-espace G engendré par

- $\alpha(v, w) - (\alpha v, w), \alpha(v, w) - (v, \alpha w)$.
- $(v' + v'', w) - (v', w) - (v'', w), (v, w' + w'') - (v, w') - (v, w'')$.

Ici $\alpha \in \mathbb{R}, v, v', v'' \in V, w, w', w'' \in W$

La classe d'équivalence de (v, w) est notée $v \otimes w$. On a une application évidente :

$$\begin{aligned} V \times W & \xrightarrow{\tau} V \otimes W \\ (v, w) & \mapsto v \otimes w. \end{aligned}$$

Cette application est bilinéaire et on a :

Proposition 3.2.2. Le couple $(V \otimes W, \tau)$ est l'unique couple à isomorphisme près telle que chaque application bilinéaire $\varphi : V \times W \rightarrow Z$ se factorise par une unique application linéaire $\psi : V \otimes W \rightarrow Z$, i.e. telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow \tau & \nearrow \psi \\ & V \otimes W & \end{array}$$

commute

On montre facilement que si $\{e_j\}$, $j = 1, \dots, n$ est une base de V et $\{f_k\}$, $k = 1, \dots, m$ une base de W , alors les nm produits $e_j \otimes f_k$ forment une base de $V \otimes W$.

On rappelle la notion d'espace dual V^* d'un espace vectoriel réel V . Les vecteurs de V^* sont les formes linéaires $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ avec structure évidente d'espace vectoriel réel. Si $\dim V = n < \infty$ alors V^* est dimension n . En fait, à chaque base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V on associe la base duale $\{x_1, \dots, x_n\}$ défini par $x_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Remarque 3.2.3. On a $V \otimes V^* \simeq \text{End } V$: à $v \otimes f$ on associe l'endomorphisme $w \mapsto f(w)v$. En termes d'une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V et sa base duale $\{x_1, \dots, x_n\}$, l'endomorphisme défini par la matrice (a_{ij}) , correspond à $\sum a_{ij} v_i \otimes x_j$.

Le \mathbb{R} -espace vectoriel

$$\Lambda^k V := F_k / G_k \quad (k\text{-ième produit extérieur})$$

est le quotient de l'espace vectoriel F_k librement engendré par $V \times \dots \times V$ (k fois) par le sous-espace G_k engendré par

- $\alpha(v_1, \dots, v_k) - (v_1, \dots, \alpha v_j, \dots, v_k)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_j \in V$, $j = 1, \dots, k$;
- $(v_1, \dots, v'_j + v''_j, \dots, v_k) - (v_1, \dots, v'_j, \dots, v_k) - (v_1, \dots, v''_j, \dots, v_k)$, $v_j, v'_j, v''_j \in V$, $j = 1, \dots, k$;
- $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + (v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$, $1 \leq i < j \leq k$, $v_j \in V$.

La classe d'équivalence de (v_1, \dots, v_k) est notée $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. On a une application évidente

$$\begin{aligned} \tau_k : \underbrace{V \times \dots \times V}_k &\rightarrow \Lambda^k V \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k. \end{aligned}$$

L'application est multilinéaire et alternée. On a :

Proposition 3.2.4. *Soit*

$$\varphi : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow W$$

multilinéaire et alternée. Alors, il y a une unique application linéaire $\psi : \Lambda^k V \rightarrow W$, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{V \times \dots \times V}_k & \xrightarrow{\varphi} & W \\ & \searrow \tau_k & \nearrow \psi \\ & \Lambda^k V & \end{array}$$

soit commutatif. Le couple $(\Lambda^k V, \tau_k)$ est l'unique couple à isomorphisme près ayant cette propriété.

La preuve est laissée au lecteur (voir l'exercice 1 ci-dessous). Soit maintenant $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V . Alors :

Proposition 3.2.5. a) $\Lambda^k V = 0$ si $k > n = \dim V$;

b) $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$, en effet,

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} / 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

est une base de $\Lambda^k V$.

La démonstration repose sur deux résultats auxiliaires. Pour commencer :

Lemme 3.2.6. $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$ si et seulement si $\{v_1, \dots, v_k\}$ est lié.

Démonstration : \Leftarrow Par anti-symétrie, $v \wedge v = 0$ pour tout $v \in V$ et donc, si $v_1 = \sum_{j>1} \lambda_j v_j$, alors, par linéarité et anti-symétrie $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{j>1} \pm \lambda_j v_2 \wedge \dots \wedge v_j \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_k = 0$

\Rightarrow Supposons que les v_j sont indépendants. Complétons-les à une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V . On définit

$$\begin{aligned} \varphi : \underbrace{V \times \dots \times V}_k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto \det(x_1, \dots, x_k, v_{k+1}, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Par universalité (Prop. 3.2.4), il existe $\psi : \Lambda^k V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\psi(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = \det(x_1, \dots, x_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$. Donc $\psi(v_1, \dots, v_k) = \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. \square

Ensuite :

Lemme 3.2.7. Il y a une unique application bilinéaire

$$\begin{aligned} \Lambda^p V \times \Lambda^q V &\xrightarrow{\Phi} \Lambda^{p+q} V \\ (x_1 \wedge \dots \wedge x_p, y_1 \wedge \dots \wedge y_q) &\mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_q. \end{aligned}$$

Cette application s'appelle le **produit extérieur**.

Démonstration : Pour un q -uplet $Y = (y_1, \dots, y_q)$ de vecteurs $y_j \in V$, $j = 1, \dots, q$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \underbrace{V \times \dots \times V}_p &\xrightarrow{\alpha_Y} \Lambda^{p+q} V \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_q. \end{aligned}$$

Puisque α_Y est multilinéaire et alternée, par universalité (Prop. 3.2.4), il existe $a_Y : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^{p+q} V$ telle que $\alpha_Y(x_1, \dots, x_p) = a_Y(x_1 \wedge \dots \wedge x_p)$. Maintenant, pour chaque $X \in \Lambda^p V$ on définit

$$\begin{aligned} \underbrace{V \times \dots \times V}_q &\rightarrow \Lambda^{p+q} V \\ (y_1, \dots, y_q) &\mapsto a_Y(X) \end{aligned}$$

et par universalité on obtient $\Phi_X : \Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{p+q} V$ telle que $a_Y(X) = \Phi_X(Y)$ et on pose $\Phi(X, Y) = \Phi_X(Y)$. \square

Avant de compléter la preuve de 3.2.5, on introduit les notations suivantes. Pour $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ un sous-ensemble ordonné de $\{1, \dots, n\}$ tel que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. On appelle un tel I un **ensemble croissant**. Pour $(v_1, \dots, v_n) \in \underbrace{V \times \dots \times V}_n$ on pose

$$v_I := v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}.$$

Démonstration de la Prop. 3.2.5 : a) est une conséquence de Lemme 3.2.6.
b) Écrivons $x_i = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} v_j$, $i = 1, \dots, k$. Donc

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \sum_{|I|=k} \pm \xi_{1i_1} \dots \xi_{ki_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \sum_{|I|=k} \pm \xi_I e_I$$

On voit donc que les e_I engendrent $\Lambda^k V$. Supposons qu'on ait une relation

$$0 = \sum_{|K|=k} \lambda_K e_K \quad K \subset \{1, \dots, n\} \text{ croissant.} \quad (3.5)$$

Pour chaque sous-ensemble croissant I on introduit son complémentaire $J \subset \{1, \dots, n\}$ en exigeant que $I \cup J = \{1, \dots, n\}$. Utilisant le produit extérieur (Lemme 3.2.7) on multiplie (3.5) avec e_J et on trouve

$$0 = \sum_K \lambda_I e_K \wedge e_J = \pm \lambda_I e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

et donc $\lambda_I = 0$. \square

Remarque. 1. La propriété universelle implique que

$$\left(\Lambda^k V\right)^* = \text{Alt}^k(V), \text{ l'espace des formes alternées } \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}.$$

2. On montre qu'il y a une unique application bilinéaire $\Lambda^k V^* \times \Lambda^k V \rightarrow \mathbb{R}$ qui sur les décomposables vaut

$$(v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*, u_1 \wedge \dots \wedge u_k) := \det(v_i^*(u_j)).$$

Cet accouplement est non-dégénéré et met en dualité $\Lambda^k V^*$ et $\Lambda^k V$, d'où un isomorphisme naturel $\Lambda^k V^* \simeq (\Lambda^k V)^*$. Donc on a un isomorphisme naturel

$$\Lambda^k V^* \simeq \text{Alt}^k(V). \quad (3.6)$$

L'application anti-symétrique $(v, w) \mapsto A(v \otimes w) = v \otimes w - w \otimes v$ se factorise par $\Lambda^2 V$ et l'image étant engendré par les $v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i$, $1 \leq i < j \leq n$, l'application induite $\Lambda^2 V \rightarrow V \otimes V$ est injective et identifie $\Lambda^2 V$

comme sous-espace de $V \otimes V$ des 2-tenseurs anti-symétriques. D'autre part, A induit l' **anti-symétrisation** ou **alternance**

$$\begin{aligned} V \otimes V &\xrightarrow{a} V \otimes V \\ v \otimes w &\mapsto \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v) \end{aligned}$$

avec image $\Lambda^2 V$ et on peut le considérer comme la projection de $V \otimes V$ sur cette sous-espace :

$$\boxed{a : V \otimes V \rightarrow \Lambda^2 V, \quad a(v \otimes w) = \frac{1}{2}[v \otimes w - w \otimes v] = v \wedge w.} \quad (3.7)$$

Exercices au § 3.2

1. Montrer le théorème 3.2.4
2. Donner des exemples d'éléments de $\Lambda^k V$ qu'on ne peut pas écrire comme produit pure $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$, $v_i \in V$. Comparer les cas $\dim V = 2, 3$ et $\dim V \geq 3$.
3. Soit $e(u)$ la multiplication extérieure avec $u \in \Lambda(V)$. La **multiplication intérieure** $i(u)$ est son dual, i.e.

$$[i(u)f](v) = f(u \wedge v), \quad \forall f \in \Lambda(V^*), v \in \Lambda(V).$$

Montrer que $i(u)$ est une dérivation de degré -1 , i.e. $i(u)\Lambda^k(V^*) \subset \Lambda^{k-1}(V^*)$ et

$$i(u \wedge v) = i(u) \wedge v + (-1)^k u \wedge v, \quad \forall u \in \Lambda^k(V^*), v \in \Lambda^\ell(V^*),$$

4. Soit $(V, \langle -, - \rangle)$ un espace de dimension n muni du produit euclidien $\langle -, - \rangle$. On étend le produit à $\Lambda(V)$ en déclarant $\Lambda^k V$ et $\Lambda^\ell V$ orthogonaux si $k \neq \ell$ et en posant

$$\langle w_1 \wedge \cdots \wedge x_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle = \det(\langle w_i, v_j \rangle)$$

sur les décomposables. Montrer que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de V , alors la base donnée au Prop. 3.2.5 donne une base orthonormée de $\Lambda(V)$.

Une **orientation** de V est un choix d'un des 2 composantes de $\Lambda^n(V) - \{0\}$. Une orientation induit une opération

$$* : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$$

définie en exigeant que pour chaque base $\{e_1, \dots, e_n\}$ on a

$$\begin{aligned} *(1) &= \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, & *e_1 \wedge \cdots \wedge e_n &= \pm 1, \\ *(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) &= \pm e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n, \end{aligned}$$

où on prend le signe “+” si $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ appartient au composante de $\Lambda^n V - \{0\}$ déterminé par l’orientation (on dit qu’on a une *base orientée*), et le signe “-” sinon.

Montrer

- sur $\Lambda^k V$ on a $** = (-1)^{k(n-k)}$.
- l’opération $*$ est caractérisée par la propriété que pour tout $a, b \in \Lambda V$ on a :

$$a \wedge *b = \langle a, b \rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orientée.

5. Modifier l’exercice précédente au cas de $\dim V = 4$ muni de la métrique de Lorentz de signature $(1, 3)$ (i.e. sa forme quadratique est donnée par $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$). Pour avoir la même caractérisation (moyennant l’orientation standard) il faut changer l’opérateur $*$ comme suit :

$$*a_I dx_I = (-1)^{|I||J|} a_J dx_J, \quad I \cup J = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Montrer que dans cette situation $*^2 = -\text{id}$ sur $\Lambda^2(V)$ (au lieu de $*^2 = +\text{id}$).

3.3 Formes différentielles

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $p \in U$. Le dual $T_p^* \mathbb{R}^n$ de $T_p \mathbb{R}^n$ s’appelle l’**espace cotangent**. Leur réunion $\bigcup_{p \in U} T_p^* \mathbb{R}^n$ forme le **fibré cotangent** T^*U . Le dual d’un repère s’appelle **co-repère**. Le dual du repère $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ est noté $\{dx_1, \dots, dx_n\}$. Ce co-repère donne une trivialisatoin de T^*U :

$$\begin{aligned} T^*U &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ T_p^* \mathbb{R}^n \ni \sum_j a_j dx_j &\longmapsto (p, (a_1, \dots, a_n)) \end{aligned}$$

et donc une identification de T^*U avec un ouvert de \mathbb{R}^{2n} . Une **forme différentielle** ω de degré 1 est une section (différentiable) de ce fibré :

$$\omega = \sum_j \omega_j dx_j, \quad \omega_j \in C^\infty(U).$$

Exemple 3.3.1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ . Alors la **différentielle** de f est la 1-forme df suivante donnée par sa valeur en p :

$$df_p(\xi) = [D_\xi f]_p, \quad \xi \in T_p \mathbb{R}^n.$$

En particulier, on voit que la différentielle de x_j s’identifie à la forme dx_j qui au point p donne le co-vecteur avec même notation. Donc, en coordonnées on a

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

On passe à la définition générale :

- Définition 3.3.2.** a) Un k -co-vecteur en $p \in U$ est un élément de $\Lambda^k T_p^*(\mathbb{R}^n)$;
 b) Le **fibré des k -formes** est le fibré $\Lambda^k T^*U$;
 c) Une k -forme (**différentielle**) est une section (différentiable) du fibré $\Lambda^k T^*U$.

Quelques commentaires : on a vu qu'une co-repère $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ de T^*U trivialise le fibré cotangent. Par Prop. 3.2.5 b) l'ensemble $\{\omega_I / I \text{ croissant, } |I| = k\}$ est une base de $\Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^n$ en chaque point $p \in U$ et donne donc une trivialisat

$$\begin{aligned} \Lambda^k T^*U &\rightarrow U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \\ \sum_I a_I \omega_I &\mapsto (p, \dots a_I(p) \dots) \end{aligned}$$

Le co-repère $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ donne alors les k -formes constantes dx_I et une k -forme s'écrit $\sum_I a_I dx_I$ avec $a_I \in C^\infty(U)$.

L'ensemble des k -formes forment un \mathbb{R} -espace vectoriel

$$A^k(U) := C^\infty(\Lambda^k T^*U).$$

Le produit extérieur du Lemme 3.2.7 induit un produit extérieur

$$\left. \begin{aligned} A^p U \times A^q U &\rightarrow A^{p+q} U \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Avec ce produit la somme directe

$$A(U) := \bigoplus_{k=1}^n A^k(U)$$

devient une algèbre, l'**algèbre extérieure** des formes différentielles de U . On souhaite étendre l'application linéaire *différentielle* $d : A^0(U) := C^\infty(U) \rightarrow A^1(U)$ en tant que dérivation graduée au sens suivant :

Définition 3.3.3. Une application \mathbb{R} -linéaire $D : A(U) \rightarrow A(U)$ est une **dérivation graduée** si

- D est de degré 1, c.à.d. $D : A^k U \rightarrow A^{k+1} U$, $k = 0, \dots, n$.
- $D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge D\beta$ pour tout $\alpha \in A^k U$, $\beta \in A^\ell U$.
- $D \circ D = 0$.

On définit :

$$\begin{aligned} A^k(U) &\xrightarrow{d} A^{k+1}(U), \quad k = 0, \dots, n \\ \sum a_I dx_I &\mapsto \sum da_I \wedge dx_I. \end{aligned}$$

On a

Proposition 3.3.4. a) d est une dérivation graduée ;

b) d est l'unique dérivation D graduée telle que $Df = df$, $f \in C^\infty(U)$

Démonstration : a) On note que d est \mathbb{R} -linéaire. Il suffit de montrer la propriété b) dans la définition pour $\alpha = adx_I$ et $\beta = bdx_J$, $a, b \in C^\infty(U)$, $|I| = p$, $|J| = q$ et $I \cap J = \emptyset$. Or,

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(abdx_I \wedge dx_J) = [adb + bda] \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= adb \wedge dx_I \wedge dx_J + bda \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Ensuite, pour la propriété c), il suffit de le montrer pour $\alpha = adx_I$:

$$\begin{aligned} 0 = d(d(ax_I)) &= d[da \wedge dx_I] \\ &= d\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I\right] \\ &= \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I\right] = 0 \end{aligned}$$

car dans la dernière somme, on a deux termes $\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j$ et $\frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i$ qui s'annulent.

b) Si D est une telle dérivation, alors pour $\alpha = \sum_I a_I dx_I$ on a $D\alpha = \sum_I D[a_I dx_I] = \sum_I Da_I \wedge dx_I + \pm a_I D(dx_I) = \sum_I da_I \wedge dx_I + \pm a_I D(dx_I) = \sum_I da_I \wedge dx_I = d\alpha$. \square

Soit $A_p^k(U)$, les **germes de formes différentielles au point** $p \in U$, définies comme pour les fonctions. On a aussi une dérivation au niveau des germes. Pour voir ça on a besoin des *fonctions tests* $\varphi_p : U \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ qui valent 1 autour d'un point $p \in U$ et s'annulent hors d'une voisinage $W \subset U$ de p . De telles fonctions existent toujours. Supposons que $[\omega] \in A_p^k(U)$ est représentée par $\omega \in A^k(W)$, W un voisinage de p . Alors $\varphi_p \omega$ étant nulle en dehors de W on peut l'étendre à une forme $\tilde{\omega}$ sur tout U . On définit $d[\omega] =$ germe en p de $d\tilde{\omega}$. Cela ne dépend pas des choix. En effet, si $\omega \in A^k(U)$ s'annule proche de p , disons sur W on regarde $(1 - \varphi_p)\omega = \omega$. Alors $[d\omega]_p = [d(1 - \varphi_p)]_p \wedge [\omega]_p + (1 - \varphi_p)(p)[d\omega]_p = 0$.

Corollaire 3.3.5. $d : A_p^*(U) \rightarrow A_p^*(U)$ est l'unique dérivation graduée de degré 1 telle que pour toute germe de fonction $f \in C_p^\infty(U)$ la dérivée df est la différentielle usuelle.

Exemple 3.3.6 (Équations de Maxwell). Soit $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, resp. $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ le champ magnétique, resp. le champ électrique. Deux des équations de Maxwell sont

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.10)$$

3.4. COMPORTEMENT SOUS DES APPLICATIONS DÉRIVABLES 33

On définit la matrice anti-symétrique

$$F = (F_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

On introduit sur \mathbb{R}^4 les coordonnées $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x, y, z)$ et on pose

$$\varphi := \sum_{i < j} F_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

Un calcul direct montre que les deux équations (3.9), (3.10) ensemble sont équivalentes à $d\varphi = 0$.

Exercices au § 3.3

1. Soit \mathbf{X} un champs vectoriel au dessus de l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $\omega \in A^k(U)$. Alors la multiplication intérieure $i(\mathbf{X})\omega$ de ω avec \mathbf{X} est ponctuellement au point $p \in U$ définie par $[i(\mathbf{X})\omega]_p = i(\mathbf{X}_p)\omega_p$ (voir l'exercice 3 au § 3.2). Montrer que $i(\mathbf{X})\omega \in A^{k-1}(U)$.
2. Utiliser le produit $*$ introduit dans l'exercice 5 du § 3.2 pour écrire les deux autres équations de Maxwell

$$\left. \begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{B} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

sous la forme $d(*\varphi) = 0$.

3.4 Comportement sous des Applications Dérivables

Comportement des tangents

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts et $F : U \rightarrow V$ une application dérivable. Pour $p \in U$, telle que $q = F(p)$ elle induit des applications linéaires *ponctuelles* sur les germes :

$$\begin{array}{ccc} C_q^\infty & \xrightarrow{F^*} & C_p^\infty \\ g & \mapsto & g \circ F. \end{array}$$

et sur les courbes :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Germes de courbes en } p\} & \xrightarrow{F_*} & \{\text{Germes de courbes en } q\} \\ \gamma & \mapsto & F \circ \gamma. \end{array}$$

Soit γ une germe de courbe passant par p définissant $\xi \in T_p\mathbb{R}^n$, alors la germe $F_*\gamma$ en q définit un vecteur tangent qu'on note $F_*\xi$. La dérivation $D_\eta : C_q^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta = F_*\xi$ correspondante (3.3) est donnée par (ici $g \in C_q^\infty$) :

$$D_{F_*\xi}(g) = \frac{d}{dt}(g \circ (F \circ \gamma))|_{t=0} = \frac{d}{dt}((g \circ F) \circ \gamma)|_{t=0} = D_\xi(F_*g). \quad (3.12)$$

Cela implique :

Lemme 3.4.1. *L'application $\xi \mapsto F_*\xi$ définit une application linéaire*

$$F_* : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_q\mathbb{R}^m.$$

Il y a le lien suivant avec la dérivée de $F = (F_1, \dots, F_m)$ au point p . Cette dérivée est une application linéaire $D_pF : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec matrice la matrice Jacobienne

$$J_pF := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Soient x_1, \dots, x_n les coordonnées standard sur \mathbb{R}^n et y_1, \dots, y_m celles de \mathbb{R}^m . Puisque $F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)y_k = \frac{\partial}{\partial x_i}(y_k \circ F)(p) = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(p)$ on a

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = \sum_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_q,$$

ce qui montre que la matrice de F_* est la même que celle de D_pF . On peut donc identifier F_* et D_pF .

Remarque 3.4.2. En général F_* n'induit pas une application au niveau des champs vectoriels, car F_* peut agir différemment sur des espaces tangents aux points d'une même fibre de F .

Vu la remarque précédente (3.4.2), on introduit :

Définition 3.4.3. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts et $F : U \rightarrow V$ une application dérivable. Deux champs vectoriels $\mathbf{X} \in C^\infty(TU)$ et $\mathbf{Y} \in C^\infty(TV)$ sont F -reliés si pour tout $p \in U$ on a :

$$F_*(\mathbf{X})_p = (\mathbf{Y})_q, \quad q = F(p).$$

Pour les crochets de Lie on a :

Lemme 3.4.4. *Soit $F : U \rightarrow V$ comme avant. Si pour $j = 1, 2$ les champs $\mathbf{X}_j \in C^\infty(TU)$ et $\mathbf{Y}_j \in C^\infty(TV)$ sont F -reliés, alors $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$ et $[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]$ sont F -reliés.*

La preuve est laissés au lecteur (voir Exercice 1 ci-dessus).

Comportement des k -Co-Vecteurs

Sur les espaces cotangents le dual de F_* donne

$$F^* : T_q^* \mathbb{R}^m \rightarrow T_p^* \mathbb{R}^n, \quad F^* \beta(\xi) = \beta(f_* \xi), \quad \forall \beta \in T_q^* \mathbb{R}^m, \xi \in T_x(\mathbb{R}^n). \quad (3.14)$$

Sa matrice (par rapport aux bases standards) est la transposée ${}^T(J_p F)$ de la matrice Jacobienne.

Soit g une germe en q . Sa différentielle est une 1-forme. Si dans (3.14) on pose $\beta = (dg)_q$, utilisant Exemple 3.3.1 on trouve $F^*(dg)(\xi) = (dg)(F_* \xi) = D_{F_* \xi}(g) = D_\xi(g \circ F) = d(g \circ F)$ d'où la formule

$$\boxed{F^*(dg) = d(g \circ F) = d(F^*g), \quad g \in C_q^\infty(\mathbb{R}^m)}. \quad (3.15)$$

L'application $F^* : T_q^* \mathbb{R}^m \rightarrow T_p^* \mathbb{R}^n$ induit des applications linéaires au niveau des k -co-vecteurs qu'on note aussi

$$F^* : \Lambda^k T_q^* \mathbb{R}^m \rightarrow \Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^n.$$

Ces applications ponctuelles se collent en une linéaire application entre les formes :

$$F^* : A^k(V) \rightarrow A^k(U)$$

compatible avec le produit extérieur :

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^* \alpha \wedge F^* \beta.$$

En particulier, utilisant la formule (3.15) on déduit

$$F^*(dy_I) = F^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) = d(F^*y_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(F^*y_{i_k}),$$

qu'on note $d(F^*y_I)$. On trouve :

$$F^*\left(\sum_I a_I dy_I\right) = \sum_I (F \circ a_I) d(F^*y_I).$$

Ce formule montre que d et F^* commutent :

$$\left. \begin{aligned} F^*[d(\sum_I a_I dy_I)] &= F^*[\sum_I da_I \wedge dy_I] = \sum_I d(F^*a_I) \wedge d(F^*y_I) \\ &= \sum_I d(F^*a_I[dF^*y_I]) = d[F^*(\sum_I a_I dy_I)]. \end{aligned} \right\} (3.16)$$

En résumé :

Proposition 3.4.5. *Une application différentiable $F : U \rightarrow V$ entre ouverts de \mathbb{R}^n , resp. \mathbb{R}^m induit une application $F^* : A(V) \rightarrow A(U)$ d'algèbres différentielles : F^* est \mathbb{R} -linéaire, conserve les degrés et le produit extérieur, et F^* commute à d .*

Exemple 3.4.6. On a vu 3.3.6 que deux des équations de Maxwell s'écrivent sous la forme $d\varphi = 0$. Donc si φ est une solution, aussi $g^*\varphi$ l'est où g est n'importe quel difféomorphisme de \mathbb{R}^4 . Les deux autres équations (3.11) s'écrivent sous la forme $d*\varphi = 0$. L'opérateur $*$ est définie moyennant la métrique Lorentzienne $\langle -, - \rangle$ sur \mathbb{R}^4 et donc si g respecte cette métrique $g^*\varphi$ est une solution des autres équations. En particulier, les équations de Maxwell sont invariant sous le groupe de Lorentz, i.e. les applications linéaires $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ayant la propriété $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^4$.

Exercices au § 3.4

1. Montrer que si \mathbf{X}_j et $\mathbf{Y}_j, j = 1, 2$ sont des champs F -reliés, alors $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$ et $[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]$ sont F -reliés.

3.5 Équations de Structure sur \mathbb{R}^n

Revenons aux courbes gauches pour montrer comment ces formes apparaissent de façon naturelle. Soit $\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par son longueur d'arc. Supposons que $U \subset \mathbb{R}^3$ est une voisinage de C , l'image de la courbe. Soit α une 1-forme sur U . Alors $(\mathbf{g})^*\alpha$ est de la forme adt , a une fonction C^∞ sur I . On peut généraliser cette procédure pour des 1-formes vectorielles, i.e. en remplaçant α par un triplet de 1-formes, ou – de façon plus intrinsèque – en considérant des sections de $T^*U \otimes TU$. De telles formes apparaissent quand on dérive un champ vectoriel :

$$d\mathbf{X} := \sum_{j=1}^3 dX_j \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \in C^\infty(T^*U \otimes TU), \quad \text{où } \mathbf{X} = \sum_{j=1}^3 X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in C^\infty(TU).$$

Les formules de Frenet 1.2.1 utilisent un repère lelong de C , un triplet de champs vectoriels le long de C . Malgré le fait qu'un tel champ est seulement défini aux points de C on pourra l'étendre à un champs \mathbf{X} dans un voisinage de chaque point $p \in C$ (grâce au théorème des fonctions implicites). Pour simplifier on va donc supposer que \mathbf{X} est un champ dans un voisinage de C et donc $d\mathbf{X}$ sera bien-défini dans ce voisinage. On écrira également $d\mathbf{X}$ pour désigner la restriction de cette forme à C . Avec cette convention on peut réécrire les formules de Frenet comme suit :

$$\begin{aligned} d\mathbf{t} &= \kappa ds \cdot \mathbf{n} \\ d\mathbf{n} &= -\kappa ds \cdot \mathbf{t} + \tau ds \cdot \mathbf{b} \\ d\mathbf{b} &= -\tau ds \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Ces formules décrivent l'évolution du repère $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$.

Plus généralement on peut introduire des k -formes vectorielles sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ comme suit. Les espaces $\Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^n \otimes T_p \mathbb{R}^n$ pour $p \in U$ se

recollent en $\Lambda^k T^*U \otimes TU$. Un repère $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$ sur U avec co-repère duale $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ donne une trivialisaton

$$\begin{aligned} \Lambda^k T^*U \otimes TU &\rightarrow U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \\ \sum_{I,j} a_{I,j} \Omega_I \otimes \mathbf{X}_j &\mapsto (p, \dots, a_{I,j}(p) \dots) \end{aligned}$$

Une **k -forme vectorielle** sur U est une section C^∞ de $\Lambda^k T^*U \otimes TU$. Une **k -forme co-vectorielle** sur U est une section différentiable de $\Lambda^k T^*U \otimes T^*U$. Les k -formes (co)-vectorielles forment un \mathbb{R} -espace vectoriel, noté $A^k(TU)$, resp. $A^k(T^*U)$.

Le fibré $\text{End}(TU)$ des endomorphismes des tangents est définie de façon analogue comme fibré sur U avec fibre sur p l'espace vectoriel $\text{End}(T_p U)$; la trivialisaton est induite par l'identification donnée par l'exemple 3.2.3 a), utilisant le repère $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$ et sa co-repère duale $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$:

$$\begin{aligned} \text{End}(TU) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^{n \times n} \\ \sum_{i,j} a_{ij} \Omega_i \otimes \mathbf{X}_j &\mapsto (p, \dots, a_{ij}(p) \dots) \end{aligned}$$

Les **k -formes matricielles** sont les sections de $\Lambda^k T^*U \otimes \text{End} TU$ et elles constituent l'espace vectoriel $A^k(\text{End} TU)$. On les identifie avec des matrices de 1-formes après un choix de repère.

Pour $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in C^\infty(TU)$, un champ vectoriel sur U exprimé en coordonnées standards, sa différentielle $d\mathbf{X} = (dX_1, \dots, dX_n)$ est une 1-forme vectorielle : $d\mathbf{X} \in A^1(TU)$. De manière duale : si $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ est une 1-forme exprimé en coordonnées standards, sa "différentielle" $d\Omega = (d\Omega_1, \dots, d\Omega_n)$ est une 1-forme co-vectorielle $d\Omega \in A^1(T^*U)$.

Remarque. Il faut noter que $d\Omega$, la dérivée usuelle de Ω vit dans $A^2(U) = C^\infty(\Lambda^2 T^*U)$ que l'on obtient après anti-symétrisation (3.7) : $C^\infty(T^*U \otimes T^*U) \rightarrow C^\infty(\Lambda^2 T^*U)$. En fait, si $df \otimes dg = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_i \otimes dx_j$, alors

$$a(df \otimes dg) = \sum_{i < j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right] dx_i \wedge dx_j = d[fdg].$$

On trivialisat TU par un repère mobile $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$ et T^*U par le co-repère duale $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$. On trouve d'abord

$$d\mathbf{X}_i = \sum_j \Omega_{ji} \otimes \mathbf{X}_j, \quad (3.17)$$

où la matrice de 1-formes $\Omega = (\Omega_{ij})$ est appelée **matrice de connexion** associée au repère. Ensuite, on exprime le repère mobile dans le repère constant :

$$\mathbf{X}_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n$$

et donc

$$d\mathbf{X}_i = \sum_{j=1}^n dA_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k,j=1}^n \Omega_{ki} A_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k,j=1}^n [A\Omega]_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On obtient l'expression suivante pour la matrice de connexion

$$\Omega = A^{-1} \cdot dA, \quad \text{où } (dA)_{ij} := dA_{ij}. \quad (3.18)$$

Pour une expression duale (en termes de corepères), on utilise $\Omega_i(X_k) = \delta_{ik}$ pour trouver que

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_{ij} \otimes dx_j.$$

Si on dérive la relation $A \cdot A^{-1} = I$ on obtient $d(A^{-1}) = -A^{-1}dAA^{-1}$.
Donc

$$d\Omega_i = - \sum_k \left[(A^{-1}dA)_{ik} \otimes \sum_j (A^{-1})_{kj} dx_j \right]$$

et donc :

$$d\Omega_i = \sum_k -\Omega_{ik} \otimes \Omega_k. \quad (3.19)$$

Introduisons

$$(A \wedge B)_{ij} := \sum_k A_{ik} \wedge B_{kj}, \quad A \in A^k(\text{End } TU), B \in A^\ell(\text{End } TU).$$

Alors $A \wedge B \in A^{k+\ell}(\text{End } TU)$. Avec cette notation, utilisant Prop. 3.3.4, on obtient :

$$d\Omega = (dA^{-1}) \wedge dA = -\Omega \wedge \Omega \in A^2(\text{End } TU). \quad (3.20)$$

Les deux équations de structure sont les relations (3.19) et (3.20) qui relient le co-repère et la courbure :

Proposition 3.5.1. *Soit $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ un co-repère. On a les 2 équations de structure :*

$$\boxed{d\Omega_i = \sum_j -\Omega_{ij} \otimes \Omega_j, \quad i = 1, \dots, n} \quad (3.21)$$

$$\boxed{d\Omega = -\Omega \wedge \Omega.} \quad (3.22)$$

Remarque. Ici on a utilisé la “fausse” dérivée $d\Omega_i \in A^1(T^*U) = C^\infty(T^*U \otimes T^*U)$. Après alternance (3.7), on obtient la vraie dérivée $d\Omega_i$, une 2-forme ; l'alternance remplace $\Omega_{ji} \otimes \Omega_j$ par $\Omega_{ji} \wedge \Omega_j = -\Omega_j \wedge \Omega_{ji}$. Cela donne une réécriture de (3.21) :

$$\boxed{d\Omega_i = - \sum_j \Omega_j \wedge \Omega_{ji} \in A^2(U), \quad i = 1, \dots, n.} \quad (3.23)$$

Supposons maintenant que le repère est orthonormé. Dans ce cas $A \in O(n)$ et donc $A^{-1} = {}^T A$. On trouve de (3.18) :

Lemme 3.5.2. *Pour un repère orthonormé la matrice de connexion satisfait $\Omega + {}^T \Omega = 0$.*

Exercices au § 3.5

1. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie.
 - (a) Montrer que pour on a un isomorphisme $V \otimes W \simeq W \otimes V$.
 - (b) Montrer qu'il y a un isomorphisme $V^* \otimes W \simeq \text{End}(V, W)$.
 - (c) Spécialiser a) et b) au cas $W = \mathbb{R}$.
2. Montrer que les équations de structure (3.22) sont une conséquence de $d^2 = 0$.

3.6 Le Lemme de Cartan

D'abord un résultat purement algébrique :

Lemme 3.6.1. *Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , $\omega_1, \dots, \omega_r \in V^*$ des fonctions indépendantes, et $\theta_1, \dots, \theta_r \in V^*$ telles que $\sum_j \omega_j \wedge \theta_j = 0$. Alors il existent $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Démonstration : Soit $\{\omega_1, \dots, \omega_r, \omega_{r+1}, \dots, \omega_n\}$ une base de V^* . Alors

$$\theta_i = \sum_{j \leq r} a_{ij} \omega_j + \sum_{\ell > r} b_{i\ell} \omega_\ell.$$

et donc

$$\begin{aligned} 0 = \sum_i \omega_i \wedge \theta_i &= \sum_{i=1}^r \sum_{j \leq r} a_{ij} \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i=1}^r \sum_{\ell > r} b_{i\ell} \omega_i \wedge \omega_\ell \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} (a_{ij} - a_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{\substack{i \leq r \\ \ell > r}} b_{i\ell} \omega_i \wedge \omega_\ell \in \Lambda^2 V^* \end{aligned}$$

et donc $a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{i\ell} = 0$. □

Ensuite on énonce le résultat de Cartan, un résultat sur les formes extérieures :

Lemme 3.6.2 (Lemme de Cartan). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \in A^1(U)$ un co-repère. Il existe au plus une collection de 1-formes $\{\omega_{ij} / i, j = 1, \dots, n\}$ telles que*

$$\begin{aligned} - \omega_{ij} &= -\omega_{ji} ; \\ - d\omega_j &= \sum_k -\omega_k \wedge \omega_{kj}. \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $\{\widetilde{\omega}_{ij} / i, j = 1, \dots, n\}$ une autre collection ayant les mêmes propriétés. Pour les différences on a

$$\sum_k \omega_k \wedge (\widetilde{\omega}_{kj} - \omega_{kj}) = d\omega_j - d\omega_j = 0$$

et donc par le Lemme 3.6.1, $\widetilde{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i A_{ki}^{(j)} \omega_i$ avec

$$A_{ki}^{(j)} = A_{ik}^{(j)}. \quad (3.24)$$

On a

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_{kj} - \omega_{kj} &= \sum_i A_{ki}^{(j)} \omega_i = -(\widetilde{\omega}_{jk} - \omega_{jk}) = \\ -[\widetilde{\omega}_{jk} - \omega_{jk}] &= -\sum_i A_{ji}^{(k)} \omega_i \end{aligned}$$

et donc

$$A_{ki}^{(j)} = -A_{ji}^{(k)}. \quad (3.25)$$

Les deux équations (3.24) and (3.25) impliquent

$$A_{ji}^{(k)} = -A_{ki}^{(j)} = -A_{ik}^{(j)} = A_{jk}^{(i)} = A_{kj}^{(i)} = -A_{ij}^{(k)} = -A_{ji}^{(k)}$$

et donc $A_{ji}^{(k)} = 0$, i.e. $\widetilde{\omega}_j = \omega_j$. \square

Corollaire 3.6.3. Soient $U \subset \mathbb{R}^m$ et $W \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts et soit $\varphi : U \rightarrow W$ dérivable. Pour chaque co-repère $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ sur W restreignant sur $\varphi(U) \subset V$ à un co-repère orthonormé, il existe une unique matrice alternée $(\omega_{ij})_{i,j=1}^n$ de 1-formes sur U telle que

$$d(\varphi^* \omega_j) = \sum_k -\varphi^* \omega_k \wedge \omega_{kj}.$$

Démonstration : L'équation (3.23) donne la matrice $(\omega_{ij}) = \varphi^* \Omega$ qui satisfait l'équation souhaitée. \square

Remarque. Pour $\varphi : U \rightarrow W$ l'application de restriction $\varphi^* : A^1(W) \rightarrow A^1(U)$ provient de l'application $\varphi^* : T^*W \rightarrow T^*U$ entre fibrés vectoriels. On va voir (Exampe 4.2.5.2) que cette application se factorise à travers d'une application naturelle $T^*W \rightarrow f^*T^*W$. De cette façon les $\varphi^* \omega_k$ peuvent être considéré comme sections du fibré f^*T^*W tandis que les 2-formes $d(\varphi^* \omega_k)$ et $\varphi^* \omega_k \wedge \omega_{kj}$ peuvent s'interpréter comme sections de $f^* [\Lambda^2 T^*W]$. L'équation qui figure dans le corollaire est donc une égalité entre sections de ce fibré.

3.7 Équations de Structure : Cas des Surfaces

Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée. On choisit un paramétrage local $\varphi : U \rightarrow M$, $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\}$ un repère orthonormé tel que $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ est une base de $TM|V$, $V = \varphi(U)$ et tel que \mathbf{X}_3 donne l'orientation de M . Soit $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ le co-repère dual. On peut supposer que ce co-repère est la restriction à V d'un co-repère défini sur un ouvert de \mathbb{R}^3 . Ce co-repère n'est pas forcément orthonormé dans cet ouvert. La matrice associée est $\Omega = (\Omega_{ij})$ et on pose

$$\begin{aligned}\omega_j &:= \varphi^* \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3 \\ \omega_{ij} &:= \varphi^* \Omega_{ij}.\end{aligned}$$

Les deux équations de structure (3.21) et (3.22) ne s'appliquent pas forcément, car on ne sait pas si Ω est anti-symétrique. Par contre, $\omega = \varphi^* \Omega$ est anti-symétrique :

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

et les deux équations de structures sont valables pour ω .

Lemme 3.7.1. Soit $p \in M$ et $S_p = -\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ la matrice d'application de Weingarten (2.3) par rapport au repère $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$. On a

$$\omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 \quad (3.26)$$

$$\omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2. \quad (3.27)$$

Démonstration : Par (3.17), on a

$$d\mathbf{X}_3 = \Omega_{13} \otimes \mathbf{X}_1 + \Omega_{23} \otimes \mathbf{X}_2.$$

Puisque $\mathbf{X}_3|_M = \mathbf{n}$ cette équation évaluée sur $\mathbf{v} \in T_p M$ donne

$$d\mathbf{n}(\mathbf{v}) = \omega_{13}(\mathbf{v})\mathbf{X}_1(p) + \omega_{23}(\mathbf{v})\mathbf{X}_2(p).$$

On remarque ensuite que $d\mathbf{n}(\mathbf{v}) = -S_p(\mathbf{v})$ et donc $d\mathbf{n}(X_k) = h_{1k}X_1 + h_{2k}X_2$ ce qui entraîne que $\omega_{j3}(\mathbf{X}_k(p)) = h_{jk}$. \square

Cela implique que $\omega_{13} \wedge \omega_{23} = \det(h)\omega_1 \wedge \omega_2 = \det(S_p)\omega_1 \wedge \omega_2 = \kappa\omega_1 \wedge \omega_2$ et donc l'équation (3.22) pour ω_{12} donne :

$$d\omega_{12} = \kappa\omega_1 \wedge \omega_2. \quad (3.28)$$

Cette dernière équation mène à :

Théorème 3.7.2 (Theorema Egregium). *Soient $M, M' \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces. On munit les espaces tangents $T_p M$, $p \in M$, $T_q M'$, $q \in M'$ de la métrique euclidienne. On suppose que $f : M \rightarrow M'$ est un difféomorphisme qui en chaque point $p \in M$ induit une isométrie $f_* : T_p M \rightarrow T_q M'$, $q = f(p)$. Alors $\kappa(p) = \kappa(q)$*

Démonstration : On reprend la notation du début de ce paragraphe. Soit f_* l'application induite par f sur les champs vectoriels et f^* l'application induite sur les formes. Alors les $\mathbf{X}'_j = f_* \mathbf{X}_j$, $j = 1, 2, 3$ donnent un repère orthonormé le long de M' (car f_* induit des isométries). Soit $\{\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3\}$ le corepère dual. Le paramétrage $\varphi : U \rightarrow M$ induit $f \circ \varphi : U \rightarrow M'$, une paramétrisation de M' . On a

$$(f \circ \varphi)^* \Omega'_k = \varphi^* \Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Donc par le Corr. 3.6.3 les deux formes $(f \circ \varphi)^* \Omega'_{12}$ et $\varphi^* \Omega_{12}$ qui entrent dans l'équation de structure pour $d(\varphi^* \Omega_1)$, resp. $d(f \circ \varphi)^* \Omega'_1$ sont égales et donc, par (3.28), les courbures de Gauss pour M et M' sont les mêmes. \square

Revenons à la situation d'une surface paramétrée $\varphi : U \rightarrow V \subset M \subset \mathbb{R}^3$. Supposons qu'on peut choisir le repère $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ de telle sorte que la matrice (h_{ij}) de $-S_p$ devient diagonale. Alors (3.26) et (3.27) deviennent :

$$\omega_{13} = -\kappa_1 \omega_1 \tag{3.29}$$

$$\omega_{23} = -\kappa_2 \omega_2. \tag{3.30}$$

Introduisons les fonctions a et b par

$$\omega_{12} = a\omega_1 + b\omega_2, \quad a, b \in C^\infty(V). \tag{3.31}$$

Écrivons les équations de structure en termes de formes sur V :

$$d\omega_1 = -\omega_{12} \wedge \omega_2 \tag{3.32}$$

$$d\omega_2 = \omega_{12} \wedge \omega_1 \tag{3.33}$$

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{23} \tag{3.34}$$

$$d\omega_{13} = -\omega_{12} \wedge \omega_{23} \tag{3.35}$$

$$d\omega_{23} = \omega_{12} \wedge \omega_{13}. \tag{3.36}$$

La 2-forme $\omega_1 \wedge \omega_2$ trivialisent $\Lambda^2 T^*|V$ et on peut exprimer les équations de structure en termes de cette 2-forme. Pour (3.32) et (3.33) la formule (3.31) donne :

$$d\omega_1 = -a\omega_1 \wedge \omega_2 \tag{3.37}$$

$$d\omega_2 = -b\omega_1 \wedge \omega_2. \tag{3.38}$$

Pour les 3 autres équations on utilise de plus (3.29) et (3.30) pour trouver :

$$d\omega_{12} = \kappa\omega_1 \wedge \omega_2 \quad (3.39)$$

$$d\omega_{13} = a\kappa_2\omega_1 \wedge \omega_2 \quad (3.40)$$

$$d\omega_{23} = b\kappa_1\omega_1 \wedge \omega_2. \quad (3.41)$$

Les membres de gauche des trois dernières équations peuvent être calculés en dérivant les expressions (3.31), (3.29) et resp. (3.30). On trouve :

$$[(-D_{\mathbf{X}_2}a + a^2) + (D_{\mathbf{X}_1}b + b^2)]\omega_1 \wedge \omega_2 = \kappa\omega_1 \wedge \omega_2, \quad (3.42)$$

$$(D_{\mathbf{X}_2}\kappa_1 + \kappa_1a)\omega_1 \wedge \omega_2 = a\kappa_2\omega_1 \wedge \omega_2 \quad (3.43)$$

$$(-D_{\mathbf{X}_1}\kappa_2 + \kappa_2b)\omega_1 \wedge \omega_2 = b\kappa_1\omega_1 \wedge \omega_2, \quad (3.44)$$

Les équations (3.43) et (3.44) donnent a et b , et l'équation (3.42) est une équation à dérivés partielles reliant κ , a et b . Plus précisément, ces relations montrent :

Proposition 3.7.3. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a :*

$$\kappa = a^2 + b^2 - D_{\mathbf{X}_2}a + D_{\mathbf{X}_1}b \quad (3.45)$$

$$a(\kappa_1 - \kappa_2) = -D_{\mathbf{X}_2}\kappa_1 \quad (3.46)$$

$$b(\kappa_1 - \kappa_2) = -D_{\mathbf{X}_1}\kappa_2. \quad (3.47)$$

En particulier, si $\kappa_1 \neq \kappa_2$ partout sur V , on a :

$$a = \frac{-D_{\mathbf{X}_2}\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2} \quad (3.48)$$

$$b = \frac{-D_{\mathbf{X}_1}\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}. \quad (3.49)$$

Supposons que $p \in M$ est un point critique de κ_1 et de κ_2 et que $\kappa_1(p) \neq \kappa_2(p)$. Alors au point p :

$$\kappa = \frac{D_{\mathbf{X}_2}D_{\mathbf{X}_2}\kappa_1 - D_{\mathbf{X}_1}D_{\mathbf{X}_1}\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}. \quad (3.50)$$

Exercices au § 3.7

1. Supposons que $\kappa \equiv 0$ et que $\kappa_1 \neq 0$ et $\kappa_2 = 0$. Montrer :

$$D_{\mathbf{X}_2}^2\left(\frac{1}{\kappa_1}\right) = 0.$$

Soit C une trajectoire de \mathbf{X}_2 paramétré par son longueur d'arc. Dédurre que sur C on a : $\kappa_1 = \frac{1}{as + b}$

2. Généraliser l'expression (3.50) dans un point non-ombilic pas forcément critique de κ_1 ou κ_2 .

3.8 Surfaces à Courbure Constante Positive

Rappelons que p est un point ombilic si $\kappa_1 = \kappa_2$. On a besoin du résultat auxiliaire suivant :

Lemme 3.8.1. *Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée et connexe. L'ensemble des ombilics est fermé. Dans le complémentaire M^0 les deux courbures principales κ_1, κ_2 choisies de telle sorte que $\kappa_1 > \kappa_2$ sont C^∞ et s'étendent de façon continue sur M . Chaque point $p \in M^0$ admet un voisinage W sur lequel on a un repère orthonormé pour TM lequel en chaque point $p \in W$ consiste des 2 vecteurs propres pour l'application de Weingarten S_p .*

Démonstration : L'application de Weingarten S_p dépend de façon C^∞ du point p et donc aussi sa trace et son déterminant : la courbure de Gauss κ et la courbure moyenne h est C^∞ sur tout M . L'ensemble des ombilics est donné par la condition fermé $\{p \in M / h^2 - \kappa = 0\}$. Donc M^0 est ouvert. Rappelons les formules (2.6) : $\kappa_p^{(1),(2)} = h_p \pm \sqrt{h_p^2 - \kappa_p}$. Elles montrent que les deux courbures principales s'étendent de façon continue sur tout M . Pour $p \in M^0$ il y a deux espaces propres E_1, E_2 de S_p pour les deux valeurs propres κ_1 et κ_2 de S_p . L'application S_p étant symétrique, on a $E_1 \perp E_2$. Puisque S_p dépend de façon C^∞ en p , les espaces $E_i, i = 1, 2$ dépendent de façon C^∞ de p et localement autour d'un point de M^0 , on peut choisir $X_i \in E_i, i = 1, 2$ de longueur 1 et telle que $p \mapsto X_i(p)$ est dérivable pour $i = 1, 2$. \square

Remarque. Il faut restreindre à un petit voisinage W de p afin qu'on puisse choisir X_1 et X_2 sans ambiguïté, en effet il suffit de prendre W simplement connexe (tout lacet en $p \in W$ est homotope au lacet constante p). Si W n'est plus simplement connexe, il se peut qu'en suivant X_1 le long d'un lacet, en retournant à p le vecteur X_1 a changé en $-X_1$ ou $\pm X_2$.

Ce lemme implique d'abord :

Corollaire 3.8.2. *Si $M \subset \mathbb{R}^3$ est une surface compacte, connexe et orientée, alors κ_1 atteint un maximum, disons au point $p \in M$. Si de plus la courbure de Gauss est constante, κ_2 atteint un minimum au point p .*

Supposons que p n'est pas ombilic. Le lemme 3.8.1 montre qu'on peut localement autour de p choisir un repère dans lequel (3.29) et (3.30) sont valables et on pourra appliquer l'analyse qui mène à la Prop 3.7.3 :

Corollaire 3.8.3 (Hilbert). *Soit $p \in M$ un maximum de κ_1 et un minimum de κ_2 . Sous les hypothèses que $\kappa_1 \geq \kappa_2$ sur M et que le point p n'est pas ombilic, la courbure de Gauss est non-positive. En particulier, si la courbure de Gauss est partout positive le point p est forcément ombilic.*

Démonstration : De la formule (3.50) on déduit que si $p \in M^0$, alors $\kappa \leq 0$. \square

Corollaire 3.8.4 (Liebmann). *Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte, connexe et orientée, ayant courbure de Gauss constante et positive. Alors M est isométrique à un sphère.*

Démonstration : On a $\kappa_1 \geq \sqrt{\kappa}$. Soit $p \in M$ un point où κ_1 admet un maximum absolu et κ_2 admet un minimum absolue (Corr. 3.8.2). Par le Corr. 3.8.3, p est un ombilic, i.e. $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = \sqrt{\kappa}$. Donc $\kappa_1 \leq \sqrt{\kappa}$ (car $\sqrt{\kappa}$ est un *maximum* local) et donc κ_1 est constante. Il suit que $\kappa_1 = \sqrt{\kappa} = \kappa_2$ et chaque point de M est ombilic : $S_q = \sqrt{\kappa}\mathbf{I}$ pour tout point $q \in M$. On pose

$$\begin{aligned} F : M &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{p} &\mapsto \mathbf{p} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\mathbf{n}_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Par construction $F_* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'application $\text{id} - \sqrt{\kappa}/\sqrt{\kappa}\text{id} = 0$ et donc $F(p) = \mathbf{a}$ pour tout $p \in M$. Donc $\mathbf{p} - \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\mathbf{n}_{\mathbf{p}}$ et donc M est un sous-ensemble du sphère S^2 de centre \mathbf{a} et avec rayon $1/\sqrt{\kappa}$. Puisque M est compacte, M est recouvert par un nombre fini de cartes (des ouverts) et est donc ouvert dans S^2 . Un sous-ensemble compact de S^2 est aussi fermé. Par connexité de S^2 l'ensemble M coïncide donc avec S^2 . \square

Exercices au § 3.8

1. Montrer qu'une surface compact $M \subset \mathbb{R}^3$ admet au moins un point p tel que $\kappa(p) > 0$:
 - (a) : Soit $p \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il y a $r \in \mathbb{R}$ telle que la sphère $S(p, r)$ contient M dans l'intérieur et $S(p, R) \cap M = \emptyset$ si $R > r$. Soit $q \in M \cap S(p, r)$.
 - (b) Montrer qu'on peut choisir les coordonnées de telle sorte que $\vec{p}\vec{q}$ est dans la direction de l'axe des z et que cela implique que $\mathbf{n}(q) = (0, 0, 1)$.
 - (c) Montrer que pour tout courbe $(x(t), y(t), z(t))$ sur M passant par q on a : $z''(0) < 0$.
 - (d) Dédire que la courbure dans chaque direction de $T_q M$ est strictement négative.
 - (e) Dédire le résultat.
2. Une surface $M \subset \mathbb{R}^3$ est appelée **fermée** si elle est une sous-ensemble fermée de \mathbb{R}^3 . Montrer que si M contient un segment rectilinéaire, elle contient la droite qui contient ce segment. On suppose que la courbure de Gauss de M soit nulle. Montrer que M est soit un plan, soit M est une **surface réglée** : par chaque $p \in M$ passe un **générateur**, c.à.d. une droite contenu dans M . De plus, il existe une unique système de générateurs telle que les générateurs sont tous parallèles. Indications :

- (a) Montre que si M n'est pas un plan, il y a des non-ombilics. On désigne par κ_1 le courbure principale non-nulle ;
- (b) montrer que si $p \in M$ est non-ombilic, alors, dans un voisinage V de p il y a un unique champ vectoriel dont les courbes intégrales sont des segments, et donc par chaque $q \in V$ passe une unique droite $L_q \subset M$;
- (c) en considérant l'expression pour κ_1 donnée dans l'exercice 1 du §3.7, montrer que chaque point de L_q est ombilic, que κ_1 et donc $T_q M$ est constante le long de L_q . D'autre part montrer que $D_{\mathbf{X}_1} \mathbf{n}(\mathbf{X}_2) = 0$ et donc que \mathbf{X}_2 est constante le long d'une courbe intégrale de \mathbf{X}_1 : les droites L_q pour $q \in V$ sont parallèles ;
- (d) montrer que le bord d'une composante connexe des points non-ombilicaux M^0 consiste en 1 ou 2 droites (parallèles) ;
- (e) montrer qu'une composante connexe ouverte des points ombilicaux est une région planaire ayant pour bord 2 droites parallèles ; on complétera le système des générateurs par les droites parallèles au système de droites de M^0 .

Chapitre 4

Variétés Différentiables

4.1 Notions de Base

Définition 4.1.1. Une **variété topologique** de dimension n est un espace topologique séparé X localement homéomorphe à \mathbb{R}^n .

Donc chaque point $p \in X$ admet un voisinage ouvert U et un homéomorphisme de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n :

$$h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n, \quad h(p) = 0.$$

On appelle (U, h) une **carte locale autour de p** . Les fonctions $p \mapsto x_j(p)$ définies par

$$h(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$$

s'appellent **coordonnées locales associées**.

Remarque. Il y a des espaces topologiques non-séparés et localement homéomorphes à \mathbb{R}^n .

Un **atlas** d'une variété topologique X est un recouvrement de X par des cartes $\{U, h\}$. Les **fonctions de changement de cartes** h_{UV} sont définies sur l'intersection de deux cartes (U, h) et (V, k) par la formule

$$h_{UV} = h \circ k^{-1} : k(U \cap V) \rightarrow h(U \cap V).$$

Ce sont des applications parmi des ouverts de \mathbb{R}^n et si les fonctions de changement de cartes sont C^∞ on parle **d'un atlas différentiable** et X est une variété différentiable.

Remarque. Comme dans l'exercice 2 de § 3.2 on montre qu'à partir d'un atlas différentiable \mathfrak{A} , on obtient un atlas maximale $\overline{\mathfrak{A}}$ si on rajoute toutes les cartes telles que les fonctions de changement de cartes avec les cartes de l'atlas \mathfrak{A} et que $\overline{\mathfrak{A}}$ est l'unique atlas maximale contenant \mathfrak{A} . On appelle cet atlas **la structure C^∞ définie par \mathfrak{A}** . Deux atlas \mathfrak{A} et \mathfrak{B} définissent la même structure C^∞ si $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}}$. Ceci est le cas si et seulement si $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ est un atlas C^∞ .

Une **application différentiable** entre variétés différentiable est une application continue, localement dérivable dans les cartes. Un **difféomorphisme** est une application différentiable bijective telle que l'inverse soit différentiable. S'il y a un difféomorphisme entre deux variétés, ces deux variétés sont **difféomorphes**.

Exemples 4.1.2. 1) Un ouvert de \mathbb{R}^n est une variété différentiable de dimension n .

2) Une sous-variété immergée de \mathbb{R}^n de dimension m (voir Rmq. 2.3.3) est une variété différentiable de dimension m ;

3) L'espace projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ des droites passant par l'origine de \mathbb{R}^{n+1} est une variété différentiable de dimension n . D'abord c'est un espace topologique avec la topologie quotient provenant de la projection naturelle $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Décrivons ensuite la structure de variété topologique. Un point $[p]$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est représentée par un point $p = (p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ses coordonnées homogènes $(p_0 : \dots : p_n)$ décrivent $[p]$ de façon unique, car par convention $(p_0 : \dots : p_n) = (q_0 : \dots : q_n)$ si et seulement s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $p_i = \lambda q_i, i = 0, \dots, n$. Les ouverts $U_i = \{x_i \neq 0\}$ couvrent $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Chacun de ces ouverts est homeomorphe à \mathbb{R}^n ; par exemple sur U_0 on peut écrire $(X_0 : \dots : X_n) = (1 : x_1 : \dots : x_n)$, $x_j = X_j/X_0, j = 1, \dots, n$ ce qui donne une bijection entre U_0 et \mathbb{R}^n . On voit facilement que c'est un homéomorphisme. Pour voir que cet atlas est différentiable, il faut remarquer que la fonction de transition $h_{U_i U_j}, i < j$ envoie (x_1, \dots, x_n) dans $\left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_{j+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$.

4) Soient X et Y deux variétés C^∞ de dimensions n , resp. m . Le produit $X \times Y$ admet une structure d'une variété C^∞ de dimension $n+m$ telle que les projections $X \times Y \rightarrow X, Y$ soient différentiables. En effet, on prend pour les cartes d'un atlas différentiable les produits $U \times V$ des cartes $\{U\}$, resp. $\{V\}$ d'un atlas différentiable de X , resp. Y .

5) Une variété différentiable G muni d'une structure de groupe telle que la produit

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

(avec sur $G \times G$ la structure de variété différentiable de l'exemple 4) et l'inverse $g \mapsto g^{-1}$ (en tant qu'application $G \rightarrow G$) soient différentiable est une **groupe de Lie**. Un **morphisme de groupes de Lie** est une application C^∞ qui conserve la structure de groupe. On parle d'un **isomorphisme de groupes de Lie** si c'est un difféomorphisme qui est en même temps un isomorphisme de groupes.

1. Le groupe additif de \mathbb{R}^n donne \mathbb{R}^n la structure d'un groupe de Lie.

2. $GL(n)$ est un groupe de Lie. D'abord, c'est un ouvert de l'ensemble $\mathbb{R}^{n \times n}$ des matrices de taille n , avec coordonnées disons x_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Ensuite, le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est C^∞ car $x_{ij}(AB) = \sum x_{ik}(A)x_{kj}(B)$. Finalement l'inverse $A \mapsto A^{-1}$ l'est aussi, car étant donné par $x_{ij}(A^{-1}) = A_{ji}/\det A$ où le cofacteur A_{ji} de A ainsi que $\det A$ sont des expressions multilinéaire des coordonnées $X_{ij}(A)$.
3. Le cercle S^1 , paramétré par angle, admet une structure de groupe de Lie : on additionne les angles.

Soit Z un sous-espace d'une variété différentiable X , c.à.d. Z est un sous-ensemble de X muni de la topologie induite. Supposons que X est de dimension $n+k$. Alors Z est une **sous-variété** si chaque point p de Z admet une carte U centré en p avec des coordonnées locales $\{x_1, \dots, x_{n+k}\}$ telles que

$$U \cap Z = \{p \in U / x_{n+1}(p) = \dots = x_{n+k}(p) = 0\}.$$

Le nombre k s'appelle la **codimension** de Z . Une telle sous-variété est elle-même une variété différentiable (de dimension $= n$) : on prend comme un atlas la réunion des $U \cap Z$ ci-dessus lorsque $q \in Z$ parcourt Z . Ici c'est crucial que Z a la topologie induite, car alors les intersections $U \cap Z$ sont *ouverts*.

- Exemples 4.1.3.** 1) Chaque surface est une sousvariété de \mathbb{R}^3 de codimension 1. Chaque variété immergée $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sousvariété de \mathbb{R}^n .
- 2) Un sous-espace linéaire de \mathbb{R}^{n+m+1} de dimension $n+1$ définit une sous-variété de $\mathbb{P}^{n+m}(\mathbb{R})$ difféomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
- 3) Soit $H \subset G$ est un sous-groupe d'un groupe de Lie telle que H est aussi une sous-variété de G . Puisque les opérations de groupe de G sont C^∞ , les opérations de groupe de H donnent H la structure de groupe de Lie et H s'appelle **sous-groupe de Lie**.

Exercices au § 4.1

1. Montrer que $SL(n)$ est un sous-groupe de Lie de $GL(n)$. Indication : considérer la dérivée de $\det : \text{Mat}(n \times n) \rightarrow \mathbb{R}$, où $\text{Mat}(n \times n) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$ désigne l'espace vectorielle des matrices de taille $n \times n$.
Mêmes question pour $O(n)$. Ici on pourra montrer que pour C une matrice orthogonale, la dérivée de $A \mapsto {}^TAA$ induit une surjection de l'espace tangent $T_C(\mathbb{R}^{n \times n})$ sur l'espace des matrices symétriques.
2. Soient X et Y des groupes de Lie, montrer qu'en tant que produit directe de groupes, $X \times Y$ hérite une structure de groupe de Lie.

3. Un tore T^n de dimension n est l'espace quotient de \mathbb{R}^n par la relation d'équivalence déterminée par un réseau

$$\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_2 \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_n,$$

où $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ est n'importe quelle base de \mathbb{R}^n .

- Munir le tore T_n d'une structure de groupe de Lie de dimension n telle que la projection $\mathbb{R}^n \rightarrow T_n$ est un morphisme de groupes de Lie.
 - Donner un isomorphisme de groupes de Lie entre T_n et le produit de n cercles (muni de la structure de groupe de Lie construit dans l'exercice 1).
4. Donner une immersion explicite $S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ s'identifie au quotient de S^n où x et $-x$ sont identifiés.
6. Munir l'espace projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ des droites passant par l'origine de \mathbb{C}^{n+1} d'une structure C^∞ de dimension $2n$.

4.2 Fibrés Vectoriels

Généralités

Soit X une variété différentiable. Son **fibré tangent**

$$TX = \coprod_{p \in X} T_p X$$

est localement, au dessus d'une carte $U \xrightarrow{h} V \subset X$ un produit : on a vu (§ 3.1) que le repère constant défini par les coordonnées standards de $U \subset \mathbb{R}^n$ induit une trivialisatoin $\iota_U : TU \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n$ et donc $TX|_V$, $V = h(U)$ est muni de la trivialisatoin $\iota_{U \circ (h^{-1} \times \text{id})} : TX|_V \xrightarrow{\sim} V \times \mathbb{R}^n$. On munit TX par la topologie correspondante ($W \subset TX$ est ouvert si $W \cap TU$ est ouvert pour chaque carte U de l'atlas de X). Les couples (TU, ι_U) peuvent servir comme des cartes de l'espace TX ; on les appelle **cartes adaptées**. Cela donne un atlas différentiable de TX : si la fonction de changement de carte au dessus de $U \cap V$ est h_{UV} , la fonction de changement de carte correspondante au dessus de $T(U \cap V)$ est donnée par $(h_{UV}, J(h_{UV}))$, où $J(-)$ est la matrice jacobienne de $(-)$. On peut considérer cette fonction comme application dérivable

$$\boxed{J(h_{UV}) : U \cap V \rightarrow \text{GL}(n), \quad \text{fonction de transition de } TX.}$$

Concrètement, si $y_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ et $x_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ sont des coordonnées locales, alors les fonctions y_j sont des fonctions de x_i et

$J(h_{UV})(p) = J_p Y$, où $Y : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction $Y = (y_1, \dots, y_n)$ et on utilise la notation de (3.13). Ces fonctions contiennent les informations essentielles du fibré tangent : elles peuvent servir pour construire TX à partir des cartes adaptées.

L'application naturelle $\pi : TX \rightarrow X$ qui à un vecteur tangent au point x associe le point x est clairement différentiable. Le couple (TX, π, X) est un exemple d'un fibré vectoriel de rang n :

Définition 4.2.1. Un **fibré de rang r** au dessus d'un espace topologique X est un triplet (E, π, X) d'un espace topologique E , **l'espace totale** du fibré, et une application continue $\pi : E \rightarrow X$, **la projection** du fibré, telle que

- a) Les **fibres** de π , $E_p := \pi^{-1}p$ sont des espaces vectoriels de dimension r ;
- b) Il a y un *recouvrement ouvert trivialisant* $\{U / U \in \mathfrak{U}\}$ de X , c.à.d $X = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$ et $E|U$ est triviale :

$$\begin{array}{ccc} E|U & \xrightarrow[\cong]{\phi_U} & U \times \mathbb{R}^r \\ \searrow \pi|U & & \swarrow p_1 \\ & U & \end{array}$$

est commutatif, où p_1 est la projection sur le premier facteur et où ϕ_U est un homéomorphisme tel que

$$\phi_{U_p} := \phi_U|E_p : E_p \rightarrow p \times \mathbb{R}^r$$

soit un isomorphisme linéaire. Le couple $(E|U, \phi_U)$ est appelé un **carte adapté au fibré E** .

- Si $r = 1$, on dit que E est un **fibré en droites**.
- Les fonctions continues

$$\boxed{\begin{array}{ll} U \cap V & \rightarrow \text{GL}(r), \quad U, V \in \mathfrak{U} \\ p & \mapsto g_{UV}(p) := \phi_{U_p} \circ \phi_{V_p}^{-1} \end{array}}$$

s'appellent **fonctions de transition** de E .

— Si X est une variété topologique et le recouvrement trivialisant $\{U / U \in \mathfrak{U}\}$ est un atlas de X , le recouvrement ouvert $\{E|U / U \in \mathfrak{U}\}$ de E est un atlas de E , appelé **atlas adapté au fibré E** .

Dans le cas d'une variété C^∞ on parle d'un **fibré différentiable** au dessus de X si toutes les fonctions de transition sont différentiables. Dans ce cas les cartes adaptées au fibré E donnent un atlas C^∞ de E et la projection $E \rightarrow X$ est différentiable.

Constructions Algébriques

Soit E un fibré au dessus de X et $F \subset E$ tel que X admet un recouvrement E -trivialisant $\{U\}$ avec $\phi_U(F) = \mathbb{R}^s \times U$. Alors F est un fibré vectoriel de rang s , qu'on appelle **sous-fibré** du fibré E de rang s . Si $\{g_{UV}\}$ sont les fonction de transition de E , elles sont de la forme

$$(g_{ij})_{UV} = \begin{pmatrix} (g'_{ij})_{UV} & * \\ 0 & (g''_{ij})_{UV} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

où les $(g'_{ij})_{UV}$ donnent les fonctions de transition de F . Si X est une variété différentiable et E est différentiable on demande que les trivialisations locales dans la définition de ci-dessus sont par rapport aux cartes d'un atlas différentiable. Alors les $(g'_{ij})_{UV}$ ainsi que les $(g''_{ij})_{UV}$ sont différentiables.

Le **fibré quotient** E/F de E par F se définit comme suit. Son espace totale est $\bigcup_{p \in X} E_p/F_p$ muni de la topologie quotient sous l'application naturelle $E \rightarrow E/F$. Le recouvrement trivialisant est le recouvrement $\{U\}$ de tout à l'heure avec les trivialisations

$$E_p/F_p \xrightarrow{\phi_{U,p} \bmod F_p} \{p\} \times [\mathbb{R}^r \bmod \mathbb{R}^s] = \{p\} \times \mathbb{R}^{r-s}.$$

Les fonctions de transitions sont données par les $(g''_{ij})_{UV}$ de (4.1). Si X est une variété différentiable et E et F un sous-fibré différentiable, alors automatiquement E/F est différentiable.

Avant de donner d'autres exemples on explique comment à partir des fibrés vectoriels donnés, moyennant des constructions de l'algèbre linéaire on peut fabriquer de nouvelles fibrés.

Soient $(E, \{\Phi_U\})$, $(F, \{\Psi_U\})$ deux fibrés vectoriels de rang r , resp. s au dessus de X ayant même recouvrement trivialisant. On définit :

Construction 4.2.2. a) La somme directe

$$\begin{aligned} E \oplus F &:= \bigcup_{p \in X} E_p \oplus F_p \\ [\Phi_U \oplus \Psi_U]_p &: E_p \oplus F_p \xrightarrow{\Phi_{U,p} \oplus \Psi_{U,p}} \{p\} \times [\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^s] \\ &= \{p\} \times \mathbb{R}^{r+s}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

La trivialisations de $E \oplus F$ donné par l'équation (4.2) met une topologie sur l'espace totale. Si E et F sont C^∞ , aussi la somme directe est un fibré C^∞ . Si $\{g_{UV}^E\}$ et $\{g_{UV}^F\}$ sont des fonctions de transition de E , respectivement F , alors les fonctions $\{g_{UV}^E \oplus g_{UV}^F\}$ sont les fonctions de transition de $E \oplus V$.

b) Le produit tensoriel

$$\begin{aligned} E \otimes F &: \bigcup_{p \in X} E_p \otimes F_p \\ [\Phi_U \otimes \Psi_U]_p &:= E_p \otimes F_p \xrightarrow{\Phi_{U,p} \otimes \Psi_{U,p}} \{p\} \times [\mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^s] = \{p\} \times \mathbb{R}^{rs}; \end{aligned}$$

c) **Le dual** E^* de E :

$$E^* \quad : \quad \bigcup_{p \in X} E_p^*$$

$$[\Phi_U^*]_p \quad := \quad E_p^* \xrightarrow{\tau_{\Phi_U, p}^{-1}} \{p\} \times \mathbb{R}^r;$$

Si $\{g_{UV}^E\}$ sont des fonctions de transition de E , alors les fonctions $\{\tau[g_{UV}^E]^{-1}\}$ sont les fonctions de transition de E^* .

d) **Le produit extérieur** $\Lambda^k E$

$$\Lambda^k E \quad := \quad \bigcup_{p \in X} \Lambda^k E_p$$

$$[\Lambda^k \Phi_U]_p \quad := \quad \Lambda^k E_p \xrightarrow{\Lambda^k \Phi_{U, p}} \{p\} \times \Lambda^k \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^{\binom{r}{k}}.$$

Pour trouver les fonctions de transition on introduit la notation suivante. Si (a_{ij}) est une matrice de taille r et $I = (i_1, \dots, i_k)$, $J = (j_1, \dots, j_k)$ deux multi-indices strictement croissantes avec $|I| = |J| = k$, alors on met

$$a_{IJ} := \det \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

et $\wedge^k(a_{ij}) := (a_{IJ})$ désigne la matrice de taille $\binom{r}{k}$ correspondante. Avec cette notation, si $\{g_{UV}^E\}$ sont des fonctions de transition de E , alors les fonctions $\{\wedge^k g_{UV}^E\}$ sont les fonctions de transition de $\Lambda^k E$.

Exemples 4.2.3. 1) Si $X \subset Y$ est une sous-variété, le fibré TX est un sous-fibré de la restriction du fibré TY à X . Le **fibré normal** est le fibré quotient : $N_{X|Y} = TX/(TY|X)$.

2) Le fibré tautologique ou **fibré de Hopf** est le sous-fibré du fibré \mathbb{R}^{n+1} au dessus de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ donné au point $[p] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ par la droite $\mathbb{R}p$ qui définit le point $[p]$.

3) Le **fibré cotangent** est le dual du fibré tangent :

$$\boxed{T^*X = (TX)^*.$$

Le fibré $\Lambda^k T^*X$ est le **fibré des k -co-vecteurs**.

4) Si E est de rang r , le fibré

$$\boxed{\det(E) = \Lambda^r E}$$

est un fibré en droites, le **fibré déterminant**.

Un **section** d'un fibré $\pi : E \rightarrow X$ est une application continue $s : X \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s = \text{id}$, i.e. $s(p) \in E_p$ pour tout $p \in X$. Les sections forment un \mathbb{R} -espace vectoriel. Si E est C^∞ les sections C^∞ forment un sous-espace $C^\infty(X, E)$ où $C^\infty(E)$ s'il n'y a pas de confusion.

Lemme 4.2.4. Soit $\{U, \phi_U\}$ une trivialisatation de E avec fonctions de transition $g_{UV}(x) = \phi_U(x) \circ \phi_V^{-1}(x)$. Une section n'est rien autre qu'une collection de fonctions $\sigma_U : U \rightarrow \mathbb{R}^r$ telles que $\sigma_U = g_{UV} \sigma_V$.

Démonstration: Une section s de E donne les fonctions $\sigma_U : U \rightarrow \mathbb{R}^r$ par la formule $\phi_U \circ s(x) = (x, \sigma_U(x))$. On a sur $U \cap V$ la relation $\phi_U(x) = (x, g_{UV}(x) \phi_V(x))$ et donc $\sigma_U(x) = g_{UV}(x) \sigma_V(x)$. La réciproque est évidente. \square

On a toujours la **section nulle** $\mathbf{0}$ qui envoie p à l'origine $0 \in E_p$, et qu'on voit souvent comme sous-variété de l'espace total, homéomorphe (ou difféomorphe si X est C^∞) à X :

$$\mathbf{0} : X \hookrightarrow E. \quad (4.3)$$

Un **homomorphisme** entre deux fibrés (E, π, X) et (E', π', X) est une application continue, resp. différentiable $\Phi : E \rightarrow E'$ telle que $\pi' \circ \Phi = \pi$ (de telle sorte que Φ applique la fibre au dessus de x en elle-même) et Φ restreint de façon linéaire aux fibres. Au niveau des sections on a

$$\left. \begin{array}{ccc} C^\infty(X, E) & \xrightarrow{\Phi_*} & C^\infty(X, E') \\ s & \mapsto & \Phi \circ s. \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

On parle plus généralement d'un **morphisme linéaire** $\Phi : E \rightarrow E'$ au dessus de $F : X \rightarrow Y$ si Φ est continue (resp. C^∞) et applique les fibres E_p aux fibres E'_q , $q = F(p)$ de façon linéaire.

On dit qu'un homomorphisme Φ est un **isomorphisme**, si Φ admet un inverse différentiable qui est un isomorphisme linéaire sur les fibres. Deux fibrés sont **isomorphes** s'il y a un isomorphisme entre eux. Un fibré isomorphe à un fibré produit $X \times \mathbb{R}^r$ est appelé un **fibré trivial**. Si $F : X \rightarrow Y$ est une application continue, resp. C^∞ , et $\pi : E \rightarrow Y$ un fibré au dessus de Y , le **fibré induit** F^*E est le fibré ayant comme espace totale le **produit fibré**

$$\boxed{X \times_Y E := \{(x, e) \in X \times E / F(x) = \pi(e)\};}$$

la projection $F^*E \rightarrow X$ vient de la projection au premier facteur. Alors pour tout ouvert $V \subset Y$ trivialisant de E , $F^{-1}V \subset X$ est un ouvert trivialisant de F^*E et donc un atlas adapté à E induit, après raffinement, un atlas adapté de F^* . On a

$$\left. \begin{array}{ccc} C^\infty(Y, E) & \longrightarrow & C^\infty(X, F^*E) \\ s & \mapsto & F \circ s. \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

La projection $X \times_Y E \rightarrow E$ donne une morphisme linéaire $F^*E \rightarrow E$ au dessus de F qui a la propriété universelle suivante : chaque morphisme linéaire $\Phi : E \rightarrow E'$ au dessus de $F : X \rightarrow Y$ se factorise par un homomorphisme unique $\tilde{\Phi} : E \rightarrow F^*E'$: on définit $\tilde{\Phi}(e) = (\pi(e), \Phi(e)) \in X \times E'$.

En combinant cela avec (4.4) on obtient une application

$$C^\infty(X, E) \xrightarrow{\tilde{\Phi}_*} C^\infty(X, F^*E') \quad (4.6)$$

Exemples 4.2.5. 1) Une section du fibré tangent est appelée **champ vectoriel**. Si $F : X \rightarrow Y$ est C^∞ , alors F_* induit $TF : TX \rightarrow TY$ qui se factorise par $TX \rightarrow F^*TY$. Et un champ vectoriel sur X donne une section de f^*TY mais en général pas un champ vectoriel de Y .

2) On continue avec l'exemple 1). Le dual de $TX \rightarrow F^*TY$ donne l'homomorphisme $F^*T^*Y \rightarrow T^*X$ et donc $C^\infty(F^*T^*Y) \rightarrow C^\infty(T^*X)$. Composant cette application avec (4.5) pour $E = T^*Y$ on obtient donc une application $F^* : A^1(Y) \rightarrow A^1(X)$, et plus généralement

$$F^* : A^k(Y) \rightarrow A^k(X).$$

On reviendra là-dessus en § 4.4.

3) Un fibré en droites est trivial si et seulement s'il y a une section partout non-nulle.

Orientabilité

Soit E un fibré au dessus d'une variété différentiable X .

Définition 4.2.6. On dit que E est **orientable** si on peut choisir un atlas adapté de telle sorte que toutes les fonctions de transitions préservent l'orientation : les matrices de transition ont tous déterminant > 0 . Une variété X est orientable si TX est orientable.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est connexe et $E|U$ triviale, les différentes trivialisations sont liées par des matrices telles que leurs déterminants aient tous la même signe. Un choix de signe définit une orientation sur $E|U$. Généralement, si E est orientable et X est connexe, un choix d'orientation sur une carte connexe adaptée fixe une des deux orientations sur E .

De la définition on voit que le fibré E est orientable si et seulement le fibré en droites $L = \det E$ est orientable. Avec la convention de (4.3), posons $L^0 := L - X$. Alors L_p^0 , le fibre de L^0 au dessus de $p \in X$ se décompose en deux composantes connexes, chacun correspondant à un choix d'orientation. Si L est orientable, L^0 se décompose globalement en deux parties connexes et la réciproque est aussi vrai. Une autre façon de le dire est le suivant : on dit que deux points de L_p^0 sont équivalents s'ils sont dans le même composante. Puisque L est localement un produit $U \times \mathbb{R}$, les deux classes d'équivalences

de L_p^0 , $p \in U$ donnent deux copies de U . La structure de variété de L induit une structure de variété sur le recollement de ces cartes locales et on obtient un **revêtement double** $t : X_E \rightarrow X$. On a donc montré :

Proposition 4.2.7. *Le fibré E est orientable si et seulement si X_E est réunion disjointe de deux variétés chacune isomorphe à X .*

Exemples 4.2.8. a) Si L est trivial, alors L admet une section non-nulle $s : X \rightarrow L$ et l'image définit une des deux composantes de $L - \{0\}$. Donc L est orientable dans ce cas. En particulier X est orientable si X admet une n -forme partout non-nulle, $n = \dim X$. Pour la réciproque, voir l'exercice 2 au § 5.2.

b) Pour $F \subset E$ un sous-fibré avec quotient $Q = E/F$ la relation $\det E = \det F \otimes \det Q$ montre que E est orientable si F et Q le sont. En particulier, si $Y \subset X$ est un sous-variété d'une variété X , alors TY est un sous-fibré de $TX|Y$ avec quotient le fibré normal. Donc un sous-variété d'une variété orientable est orientable si son fibré normal est orientable. Par exemple, si $X = \mathbb{R}^n$ et Y est une hypersurface, Y est orientable si Y admet un champ normal partout non-nulle. Voir Rem. 2.4.1.

Exercices au §4.2

1. Montrer (sans calcul) que

$$T_{\mathbf{I}} \mathrm{GL}(n) = \mathrm{Mat}(n \times n) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}.$$

En regardant des courbes $\mathbf{I} + tA$ dans $\mathrm{SL}(n)$, resp. $\mathrm{O}(n)$ montrer que l'espace $T_{\mathbf{I}} \mathrm{SL}(n)$ consiste des matrices de trace 0 et que $T_{\mathbf{I}} \mathrm{O}(n)$ sont les matrices anti-symétriques.

2. Soit $\Phi : E \rightarrow E$ un homomorphisme de fibrés vectoriels au dessus de X les que $\Phi \circ \Phi = \Phi$. Montrer que pour tout $p \in X$ l'application $\Phi_p : E_p \rightarrow E_p$ est une projection linéaire sur un sous-espace $F_p \subset E_p$ et que si X est connexe $\dim F_p$ est constant, et donc $F \subset E$ est un sous-fibré.
3. Montrer que le fibré de Hopf n'est pas trivial. Indication : utiliser l'exercice 5 du § 4.1.
4. Montrer que TS^1 est trivial. En identifiant $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ avec S^1 le fibré de Hopf donne un fibré en droites non-trivial. Montrer que tout fibré en droites de S^1 est isomorphe à un des deux fibrés.
5. Soit $F : M \rightarrow N$ une application C^∞ telle que $D_p F = 0$ pour tout $p \in M$. Montrer : si M est connexe, alors F est constante.
6. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Montrer que $T_M \oplus N_{M/\mathbb{R}^n}$ est triviale.
7. Soit M une variété C^∞ et $\Delta \subset M \times M$ le diagonale. Montrer que $T\Delta$ et $N_{\Delta/M \times M}$ sont isomorphes.

4.3 Champs Vectoriels et Groupes de Lie

Soit X une variété différentiable. On a déjà vu qu'un champ vectoriel est une section du fibré tangent. La définition du crochet de Lie (3.4) ne dépend que des germes des champs et donc a un sens dans la situation d'une variété. Le lemme 3.1.12 reste valable sans changement et donc $C^\infty(TX)$ est une algèbre de Lie.

Supposons que G est un groupe de Lie. On désigne la multiplication à gauche avec $g \in G$ comme L_g :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{L_g} & G \\ x & \mapsto & g \cdot x. \end{array}}$$

On dit qu'un champ \mathbf{X} sur G est **invariant à gauche** si \mathbf{X} est L_g -relié à lui-même (cf. Def. 3.4.3) , i.e.

$$(L_g)_*(\mathbf{X})_h = (\mathbf{X})_{gh}, \quad \forall g, h \in G.$$

Un tel champ est complètement spécifié par sa valeur en l'identité $e \in G$ et chaque $\xi \in T_e G$ définit, par translation à gauche, le champ invariant $\mathbf{X}_g := (L_g)_*\xi$. Ce champ est visiblement invariant à gauche et il est C^∞ parce que L_g est C^∞ . On a en effet :

Proposition 4.3.1. *L'espace vectoriel*

$$\boxed{\mathfrak{g} := \{\mathbf{X} \in C^\infty(TG) / \mathbf{X} \text{ est invariant à gauche}\}}$$

est stable par crochet de Lie et est isomorphe à $T_e G$, et donc munit $T_e G$ d'une structure d'algèbre de Lie.

Démonstration : Il reste à montrer que \mathfrak{g} est stable par crochet de Lie. Or, $\mathbf{X} \in \mathfrak{g}$ est L_g -relié à lui-même, ainsi que \mathbf{Y} et donc, par le Lemme 3.4.4, aussi leur crochet est L_g -relié à lui-même, c.à.d. le crochet est invariant à gauche. \square

Exemple 4.3.2. On prend $G = \text{GL}(n)$. On a vu (Exercice 1 au § 4.2) que $T_1 \text{GL}(n) = \mathbb{R}^{n \times n}$. Les coordonnées x_{ij} de $\mathbb{R}^{n \times n}$ donnent des coordonnées sur $\text{GL}(n)$. On identifie $A = (A_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n)$ avec le champ vectoriel constant $\mathbf{A} := \sum_{i,j} A_{ij} \partial / \partial x_{ij}$. soit $g = (g_{ij}) \in \text{GL}(n)$. Le formule $(g \circ A)_{ab} = \sum_k g_{ak} A_{kb}$ peut s'interpréter comme suit. Si on compose l'application $L_g : G \rightarrow G$ avec les fonctions "coordonnées" x_{ab} on obtient $x_{ab} \circ L_g : G \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x_{ab} \circ L_g = \sum_k g_{ak} x_{kb}.$$

En dérivant on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} [x_{ab} \circ L_g] = g_{ai} \delta_{bj}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} (L_g)_* \frac{\partial}{\partial x_{ij}} &= \sum_{a,b} g_{ai} \delta_{bj} \frac{\partial}{\partial x_{ab}} \\ &= \sum_a g_{ai} \frac{\partial}{\partial x_{aj}} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (L_g)_* \left[\sum A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right] &= \sum_{a,i,j} g_{ai} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{aj}} \\ &= \sum_{a,j} (g \circ A)_{aj} \frac{\partial}{\partial x_{aj}}. \end{aligned}$$

Cela montre que $(L_g)_* \mathbf{A}_I = [\mathbf{g} \circ \mathbf{A}]_g$. Pour le crochet un calcul similaire (voir l'exercice 2 ci-dessous) montre :

$$[(L_g)_* \mathbf{A}_I, (L_g)_* \mathbf{B}_I] = (L_g)_* [\mathbf{A}_I, \mathbf{B}_I]$$

où pour les matrices $A, B \in \text{Mat}(n \times n)$ on utilise le commutateur habituel : $[A, B] = AB - BA$. Voir aussi l'exercice 1 du § 4.1.

Exercices au § 4.4

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert. Montrer que pour $f, h \in C^\infty(U)$ on a :

$$\left[f \frac{\partial}{\partial x_i}, h \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = f \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - h \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

2. On considère pour tout $A \in \text{Mat}(n \times n)$ le champ \tilde{A} défini par $g \mapsto (L_g)_* A = g \circ A$. On le considère comme une application

$$\tilde{A} : G \rightarrow \text{Mat}(n \times n).$$

On pose $f = x_{ij} \circ \tilde{A}$; donc $f(g) = \sum x_{ik}(g) A_{kj}$. Soit $h = x_{ab} \circ \tilde{B}$. Appliquer exercice 1 ci-dessus à f et h et ensuite montrer que $[\tilde{A}, \tilde{B}]_I = [A, B]$.

4.4 Formes Différentielles

Soit X une variété différentiable. Une **k -forme différentielle** et rien autre qu'une section du fibré des k -co-vecteurs $\Lambda^k T^*X$. Concrètement, sur une carte U avec coordonnées $\{x_1, \dots, x_n\}$, une k -forme ω s'écrit comme dans le § 3.3 :

$$\omega|_U = \sum_{|I|=k} a_I^U dx_I, \quad a_I^U \in C^\infty(U).$$

Si la fonction de changement de carte de U à V est donnée par h_{UV} , alors la fonction de transition de $\Lambda^k T^*X$ sur $U \cap V$ est donnée par $\Lambda^{kT}(J[h_{UV}])^{-1}$ alors sur $U \cap V$ on a :

$$a_I^U|_{U \cap V} = \Lambda^{kT}(J[h_{UV}])^{-1} a_M^V|_{U \cap V}.$$

L'ensemble des k -formes sur X est un \mathbb{R} -espace vectoriel $A^k X$. Le produit extérieur, étant définie ponctuellement, induit une structure d'algèbre sur la somme directe des A^k qu'on note

$$A(X) = \bigoplus_{k \geq 0} A^k(X).$$

Si $F : X \rightarrow Y$ est C^∞ , alors F^* induit un homomorphisme de fibrés $F^*(T^*Y) \rightarrow T^*X$, le dual de l'homomorphisme $TX \rightarrow F^*(TY)$. Utilisant (4.5) on obtient alors une application $F^* : A^1(Y) = C^\infty(T^*Y) \rightarrow C^\infty(T^*X) = A^1(X)$. Plus généralement, l'application F induit une application linéaire $\Lambda^k T^*Y \rightarrow \Lambda^k T^*X$ et donc une application, aussi notée F^* entre les formes :

$$F^* : A^k(Y) \rightarrow A^k(X).$$

Cette application respecte les produits extérieurs dans le sens que

$$F^*[\alpha] \wedge F^*[\beta] = F^*[\alpha \wedge \beta], \quad \alpha \in A^k(X), \beta \in A^\ell(X).$$

Cela généralise (partiellement) Prop. 3.4.5.

La différentielle df , $f \in A^0(X)$ peut se définir comme dans Exemple 3.3.1. Pour l'étendre à une dérivation de l'algèbre $A(X)$ on procède comme dans § 3.3. Donc on pose

$$\omega|_U =: \sum a_I^U dx_I \mapsto d(\omega|_U) := \sum da_I^U \wedge dx_I. \quad (4.7)$$

Pour $k = 0$ on retrouve la différentielle d'une fonction et le résultat ne dépend pas des cartes. Pour $k > 0$, il faut aussi vérifier que les $d(\omega|_U)$ se recollent en une $(k+1)$ -forme sur X . Pour cela, il suffit de remarquer qu'en tout cas pour tout point $p \in X$, on a : $d(\omega|_U)_p \in \Lambda^k T_p^*X$. Donc il suffit de voir que pour deux cartes U, V on a :

$$d(\omega|_U)_p = d(\omega|_V)_p, \quad p \in U \cap V. \quad (4.8)$$

La formule (4.7) montre que $d(\omega|_U)_p$ ne dépend que de la germe de $\omega|_U$ au voisinage de p . Puisque pour tout point $p \in U$ on a $A_p^k(U) = A_p^k(X)$ (une germe ne dépend pas de sa domaine de définition exacte) on peut appliquer la caractérisation 3.3.5 et on déduit (4.8). Par conséquent :

Proposition 4.4.1. *La formule (4.7) définit une dérivation graduée de l'algèbre $A(X)$. C'est l'unique dérivation graduée D de cette algèbre telle que $Df = df$, $f \in C^\infty(X)$.*

Cette dérivation se comporte bien par rapport aux applications induites dans le sens que si $F : X \rightarrow Y$ est C^∞ , alors

$$dF^*\alpha = F^*(d\alpha), \quad \alpha \in A^k(Y).$$

Cette formule s'en déduit de (3.16), vu le caractère local de l'opérateur d . On a donc :

Proposition 4.4.2. *Une application différentiable $F : X \rightarrow Y$ induit une application $F^* : A(Y) \rightarrow A(X)$ d'algèbres différentielles : F^* est \mathbb{R} -linéaire, conserve les degrés et le produit extérieur, et F^* commute à d .*

Considérons maintenant un **groupe de Lie**. On a, dual aux champs invariants à gauche, des 1-formes invariants à gauche. Elles forment un espace vectoriel dual à l'algèbre de Lie.

Regardons d'abord le groupe $G = \text{GL}(n)$. Les formes constantes dx_{ij} ne sont pas invariants, car $L_g^*dx_{ij} = \sum g_{ik}dx_{kj} = (gdx)_{ij}$. D'autre part, pour la fonction "inverse" $\iota : G \rightarrow G$, on a $L_g^*\iota(x) = \iota(g \circ x) = x^{-1} \circ g^{-1}$ et donc, pour la forme

$$\boxed{\omega = x^{-1} \cdot dx \in A^1(\mathfrak{gl}(n))}$$

on a $L_g^*\omega = x^{-1} \circ g^{-1} \circ g dx = \omega$.

On vérifie sans peine l'**équation de structure**

$$\boxed{d\omega + \omega \wedge \omega = 0}$$

On a déjà cette forme vu déguisée comme forme de connexion (3.18) pour un repère de TU , $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. En fait :

Lemme 4.4.3. *Soit F_0 le repère constant sur U . Alors un repère sur U s'écrit $A(F_0)$, où $A : U \rightarrow \text{GL}(n)$ est C^∞ et*

$$\Omega = A^*\omega = A^{-1}dA$$

satisfait l'équation de structure (3.20).

Pour chaque sous-groupe de Lie, $i : G \hookrightarrow \text{GL}(n)$ on définit :

$$\boxed{\omega_G := i^*(x^{-1} \cdot dx) \in A^1(\mathfrak{g}) \text{ (forme de Maurer-Cartan pour } G)}. \quad (4.9)$$

Ici on voit x comme fonction matricielle $x : G \rightarrow \text{Mat}(n \times n)$ et le produit est le produit matricielle. Les entrées donnent tout les formes invariants à gauches. Par exemple, si $G = \text{O}(n)$ on se restreindre aux matrices x qui sont orthogonal et on trouve $\frac{1}{2}(n^2 - n) = \dim(\text{O}(n))$ formes invariants. Ce groupe est lié aux repères orthonormés. En fait un calcul comme dans la preuve du Lemme 3.5.1 montre que $\omega_G + {}^T\omega_G = 0$.

Exercices au § 4.4

1. Considérer sur $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ les formes i^*dx_k , $k = 1, 2$ et $\omega = -x_1dx_2 + x_2dx_1$. Montrer que i^*dx_k ont des zéros, mais que $i^*\omega$ est partout non-nulle.
2. Généraliser l'exercice précédente au cas de $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ en considérant $\omega = \sum (-1)^j x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$.
3. Écrivez les formes de Maurer-Cartan de $SL(n)$ et de $O(n)$ en termes de coordonnées locales sur l'algèbres de Lie correspondantes.

Chapitre 5

Connexions

5.1 Notions de Base

Soit X une variété C^∞ et $f \in C^\infty(X)$. La dérivée de f dans la direction $\xi \in T_p X$ est $D_\xi f$ et pour un champs vectoriel \mathbf{X} la dérivée $D_{\mathbf{X}} f$ dans la direction \mathbf{X} est la fonction dérivable $p \mapsto D_\xi f$ où $\xi = \mathbf{X}_p$. Cette notion de dérivée ne marche pas si on remplace $C^\infty(X)$ par les sections d'un fibré quelconque. Il faut la remplacer par la notion de dérivée covariante comme suit :

Définition 5.1.1. Soit E un fibré sur une variété C^∞ , disons X . Une **connexion** sur E est une application

$$D : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$$

qui est \mathbb{R} -linéaire et satisfait le règle de Leibniz :

$$D(fs) = df \cdot s + f \cdot Ds, \quad f \in C^\infty(X), s \in A^0(E).$$

Si $\xi \in T_p X$ la *dérivée covariante* dans la direction ξ est donnée par

$$D_\xi(s) := (Ds)_p(\xi) \in E_p.$$

Explications : $Ds \in A^1(E) = C^\infty(T^*X \otimes E)$ est localement de la forme $\sum \omega_j \otimes s_j$ et $D_\xi(s)$ est par définition donné par $\sum (\omega_j)_p(\xi) s_j$ ce qui ne dépend pas de l'écriture. Si \mathbf{X} est un champ vectoriel C^∞ , alors la dérivée covariante dans la direction de \mathbf{X} , notée $D_{\mathbf{X}}$, est une application \mathbb{R} -linéaire $D_{\mathbf{X}} : A^0(E) \rightarrow A^0(E)$.

Exemples 5.1.2. 1) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $E = U \times \mathbb{R}^r$, le fibré trivial de rang r . Alors $A^0(E) = C^\infty(U, \mathbb{R}^r)$ et la dérivée D usuelle est une connexion. Plus généralement, si $A \in A^1(\text{End}(\mathbb{R}^r))$, i.e. A est une matrice de 1-formes de taille r ,

$$D_A := d + A : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$$

est une connexion.

- 2) Si X est une variété différentiable quelconque et E est triviale, trivialisé par un repère $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_r\}$, alors une connexion D est complètement déterminée par les valeurs

$$D\mathbf{s}_j = \sum_i A_{ij} \otimes \mathbf{s}_i;$$

en fait, si $s = \sum \sigma^j \mathbf{s}_j$, on a, par la règle de Leibniz :

$$Ds = \sum_i d\sigma^i \otimes \mathbf{s}_i + \sum_i \left[\sum_j A_{ij} \sigma^j \right] \otimes \mathbf{s}_i,$$

i.e., identifiant s avec la colonne $\underline{\sigma}$ des σ^j , on a donc

$$Ds = D_A \underline{\sigma} := d\underline{\sigma} + A \underline{\sigma}, \quad A \in A^1(\text{End}(\mathbb{R}^r)).$$

- 3) Localement E est triviale, donc localement, sur un ouvert U trivialisant, la situation est comme dans l'exemple précédente. Soit $s \in A^0(E)$ une section globale et $\mathbf{s}_U \in C^\infty(U, \mathbb{R}^r)$ son représentant par rapport à un repère trivialisant. On a $D\mathbf{s}_U = (d + A_U)\mathbf{s}_U$. Dans l'intersection de deux ouverts trivialisants U et V on a une fonction de transition pour les deux repères correspondants, disons

$$g_{UV} : U \cap V \rightarrow \text{GL}(r).$$

Alors $\mathbf{s}_U = g_{UV} \mathbf{s}_V$ et $(d + A_U)\mathbf{s}_U = g_{UV}(d + A_V)\mathbf{s}_V$ entraînent :

$$A_V = g_{UV}^{-1} A_U g_{UV} + g_{UV}^{-1} d g_{UV}. \quad (5.1)$$

Donc, une connexion D est, localement sur un ouvert trivialisant U , donnée par $d + A_U$ et les connexions locales se collent en une connexion globale par les formules de transition (5.1).

- 4) Soit $U = V \subset \mathbb{R}^n$ et $E = TU$ trivialisé d'un par le repère constant canonique, d'autre part par un repère mobile quelconque. On prend $D = d$ sur U , la connexion triviale. Alors, si A est la matrice ayant pour colonnes les vecteurs du repère mobile, la formule (5.1) dit que d , exprimé moyennant ce repère donne lieu à la matrice de connexion

$$\Omega = A^{-1} \cdot dA$$

qu'on a appelé (3.18) la matrice de connexion du repère mobile.

Dès qu'on a une connexion D , on a des dérivées $D : A^k(E) \rightarrow A^{k+1}(E)$, en utilisant la formule de Leibniz prenant le soin des signes :

$$D(\omega \otimes s) := d\omega \otimes s + (-1)^k \omega \wedge Ds, \quad \omega \in A^k(X), s \in A^0(E).$$

C'est bien une dérivation car $D(f\omega \otimes s) = d(f\omega) \otimes s + (-1)^k f\omega \otimes Ds = df \wedge \omega \otimes s + f[d\omega + (-1)^k \omega \otimes Ds] = df \wedge D(\omega \otimes s) + fD(\omega \otimes s)$.

Cette dérivée ne satisfait pas $D^2 = 0$. Mais pour une section s de E l'expression $s \mapsto D(Ds)$ définit une 2-forme à valeurs dans $\text{End}(E)$. En fait, si $s = \sum \omega_i \otimes s_i$, de $D(fs) = df \otimes s + f \sum \omega_i \otimes s_i$ on trouve $DDfs = -df \otimes Ds + df \otimes Ds + f[\sum d\omega_i \otimes s_i - \omega_i \wedge Ds_i] = fDDs$. Donc

$$DD(s) = F(D)(s), \quad F(D) \in A^2(\text{End } E).$$

Cette forme $F(D)$ s'appelle la **courbure** de la connexion D .

Localement sur un ouvert trivialisant U , et dans le repère $\{\mathbf{s}_j\}$, $j = 1, \dots, r$ on a :

$$\begin{aligned} D(D\mathbf{s}_j) &= \sum_i D(A_{ij} \otimes \mathbf{s}_i) = \sum_i ((dA_{ij})\mathbf{s}_i - A_{ij} \wedge D\mathbf{s}_i) \\ &= \sum_i (dA_{ij})\mathbf{s}_i - \sum_{i,k} (A_{ij} \wedge A_{ki})\mathbf{s}_k \\ &= \sum_k ((dA_U)_{kj} + (A_U \wedge A_U)_{kj})\mathbf{s}_k, \end{aligned}$$

ce qui montre :

$$F_U := D^2|_U = dA_U + A_U \wedge A_U \in A^2(\text{End } E|_U).$$

Le fait que les F_U se recollent en tant que 2-forme à valeurs dans $\text{End}(E)$ se traduit par le fait dans l'intersection $U \cap V$ de deux ouverts trivialisants on a $F_U|_{U \cap V} = g_{UV}[F_V|_{U \cap V}]g_{UV}^{-1}$ ce qui se vérifie aussi directement :

On part de (5.1). Abbrévions $A_U = A$, $g = g_{UV}$ et dérivons d'abord $A_V = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$. Faites attention : A est une matrice d'une-formes et donc, en dérivant le produit $g^{-1}Ag$ des signes apparaissent. Aussi, il faut se rappeler que $d(g^{-1}) = -g^{-1}dg \cdot g^{-1}$. On trouve :

$$dA_V = -g^{-1}dg \wedge g^{-1}Ag + g^{-1}dAg - g^{-1}A \wedge dg - g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg.$$

Ensuite,

$$A_V \wedge A_V = g^{-1}(A \wedge A)g + g^{-1}A \wedge dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}Ag.$$

Si on additionne, on trouve le résultat. \square

Exemples 5.1.3. 1) Pour n'importe quelle connexion sur une courbe, la courbure est nulle, car il n'y a pas de 2-formes non-triviales sur une courbe.

2) Pour la connexion triviale D sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ la courbure est nulle. Exprimé moyennant un repère donné par la matrice A , comme dans Exemple 5.1.2, 4, la matrice de connexion étant $\Omega = A^{-1} \cdot dA$, on trouve pour la courbure

$$0 = d\Omega + \Omega \wedge \Omega.$$

Cela redonne l'équation de structure (3.22).

- 3) Sur un sous-groupe de Lie $G \subset \text{GL}(n)$ la forme de Maurer-Cartan (4.9) donne une connexion sur TG et l'équation de structure dit que cette connexion a courbure nulle. On a vu (lemme 4.4.3) qu'un repère sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une application différentiable $A : X \rightarrow \text{GL}(n)$ et $A^*\omega = \Omega$ est une connexion sur U qui, par la trivialisatation donné par le repère correspond à la connexion D sur le fibré trivial $U \times \mathbb{R}^n$.
- 4) Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C^\infty(TM)$ deux champs vectoriels dans un voisinage de M et tangent le long de M . On définit

$$D_{\mathbf{X}}^M \mathbf{Y} := \text{projection orthogonale de } D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \text{ sur } T_M.$$

Alors D^M définit une connexion sur TM , la **connexion induite** par d .

- 5) Considérons le cas où $M \subset \mathbb{R}^3$ est une surface, qu'on suppose paramétrée par $\varphi : U \rightarrow M$. On choisit un repère $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ sur un voisinage de M et orthonormé le long de M et adapté à $M : \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ est un repère pour TM et $\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$. Alors, si $\Omega = (\Omega_{ij}) = (D_{\mathbf{X}_i} \mathbf{X}_j)$ est la matrice de connexion de d , la matrice de D est la matrice :

$$\omega = \varphi^* \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa courbure n'est pas zéro mais est donnée par la matrice

$$d\omega + \omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} 0 & d\omega_{12} \\ -d\omega_{12} & 0 \end{pmatrix} = [\kappa \cdot \omega_1 \wedge \omega_2] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

par l'équation de structure (3.39); on retrouve donc essentiellement la courbure de Gauss.

5.2 Métriques

Soit F un fibré sur une variété différentiable X . Une section du dual s'interprète comme une collection de fonctions $\varphi_p : F_p \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont linéaires sur les fibres F_p de F et qui dépendent dérivablement de $p \in X$. Pour $F = E \otimes E$ telles fonctions correspondent aux formes bilinéaires sur E_p . Une métrique sur E_p provient d'une forme bilinéaire qui de plus est symétrique et positive. On arrive à la définition suivante :

Définition 5.2.1. Une **métrique** sur E est une section h du dual du fibré $E \otimes E$ telle que en chaque point $p \in X$ la forme bilinéaire $h_p : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$ qui correspond à la valeur $h(p)$ de h en p définisse une métrique sur E_p .

Dans le cas $E = TX$ on parle d'une **métrique Riemannienne** sur X .

Exemples 5.2.2. 1) La métrique euclidienne de \mathbb{R}^n est une métrique Riemannienne.

- 2) Si une variété est muni d'une métrique Riemannienne, on obtient une métrique Riemannienne sur chaque sous-variété par restriction. En effet, une métrique sur un fibré par restriction induit une sur chaque sous-fibré. En particulier, sur chaque variété immergée (sous-variété de \mathbb{R}^n) la métrique euclidienne induit une métrique Riemannienne.
- 3) Puisque la métrique euclidienne d sur \mathbb{R}^n est invariant par translation, elle induit une métrique sur le tore T_n . Cette métrique est appelée la **métrique plate** du tore.
- 4) Sur \mathbb{R}^{n+1} avec coordonnées $\{x_0, \dots, x_n\}$, la forme symétrique associée à la forme quadratique, dite de Lorentz,

$$q_L(\mathbf{x}) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$$

induit une métrique Riemannienne D_L sur le demi-quadrique

$$\mathbb{H}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} / q_L(\mathbf{x}) = -1, x_0 > 0\}.$$

En effet $T_p\mathbb{H}^n$ s'identifie à l'orthogonal $\mathbb{R}p^\perp$ de $\mathbb{R}p$ par rapport à q_L et q_L restreint à $\mathbb{R}p^\perp$ est positive car $q_L(p) = -1 < 0$ et b_L a signature $(1, n)$. Le couple (\mathbb{H}^n, D_L) s'appelle l'**espace hyperbolique** de dimension n .

Remarque. Une variété différentiable est appelée **dénombrable à l'infini** si elle est réunion d'un nombre dénombrable de compacts. Exemples : variétés compactes et ouverts de \mathbb{R}^n et leurs sous-variétés. Voir l'exercice 1 ci-dessous.

Telles variétés admettent une métrique Riemannienne. En fait, pour une telle variété X , pour tout recouvrement ouvert \mathfrak{U} de X , il y a un raffinement $\{U / U \in \mathfrak{W}\}$ de \mathfrak{U} (i.e. chaque U est contenu dans un des ouverts de \mathfrak{U}) qui est localement fini (i.e. chaque $p \in X$ admet un voisinage rencontrant qu'un nombre fini des ouverts U) et qui admet une **partition de l'unité**, c.à.d. une collection $\{\rho_U / U \in \mathfrak{W}\}$ de fonctions différentiables telles que

- $\rho_U \geq 0$;
- le support de ρ_U (la clôture du lieu où ρ_U est non-nulle) est contenu dans U ;
- $\sum \rho_U = 1$ (c'est pour chaque $p \in X$ une somme finie, car $\{U\}$ est localement fini).

Localement, dans une carte U d'un atlas on peut prendre la métrique euclidienne h_U . Après raffinement éventuel on peut supposer que l'atlas admet une partition d'unité $\{\rho_U\}$ et $\sum \rho_U h_U$ étant une combinaison convexe de métriques est aussi une métrique qui est globalement définie.

Exercices au § 5.2

1. Montrer qu'un ouvert de \mathbb{R}^n est dénombrable à l'infini. En déduire qu'une sous-variété d'un ouvert de \mathbb{R}^n est aussi dénombrable à l'infini.

2. Montrer qu'une variété admettant une métrique Riemannienne X admet un atlas ayant telles que les fonctions de transition de TX soient orthogonaux. Dédurre qu'une variété X de dimension n qui est dénombrable à l'infini est orientable si et seulement si X admet une n -forme partout non-nulle. Indication : par l'exemple 4.2.8 a), c'est l'implication X orientée $\implies X$ admet une n -forme partout non-nulle qui nécessite une démonstration ; on utilise qu'une métrique sur TX induit une métrique sur $\Lambda^n TX$ et donc on peut parler de la sous-variété de $\Lambda^n TX$ qui consiste en vecteurs de norme 1.
3. Montrer qu'un fibré E sur une variété paracompacte admet une métrique riemannienne. Dédurre que E est orientable si et seulement si $\det E$ est trivial.

5.3 Connexions Métriques

Si (E, h) est un fibré au dessus de X muni d'une métrique h , on a des produits induits :

$$h : A^p(X, E) \times A^q(X, E) \rightarrow A^{p+q}(X) \\ (\alpha \otimes s, \beta \otimes t) \mapsto h(s, t)\alpha \wedge \beta.$$

Avec cette notation, on dit qu'une connexion $D : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$ est une **connexion métrique** si

$$\boxed{d[h(s, t)] = h(Ds, t) + h(s, Dt), \quad \forall s, t \in A^0(E)}. \quad (5.2)$$

Exemples 5.3.1. 1) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. La dérivation d induit sur le fibré trivial TU une connexion métrique par rapport à la métrique euclidienne.

- 2) Soit $\{U\}$ un recouvrement trivialisant de E ; si on utilise un repère orthonormé de $E|U$, la condition que D soit métrique se traduit en termes de la matrice de connexion A_U comme $0 = A_U + {}^T A_U$. Donc localement des connexions métriques existent. Utilisant des partitions d'unité (Remarque 5.2) on construit des connexions métriques globales.

Considérons maintenant le cas spécial $E = TX$, le fibré tangent d'une variété Riemannienne (X, h) . Elle admet une connexion métrique sans torsion, où la **torsion** est définie par la forme bilinéaire

$$A^0(TX) \times A^0(TX) \longrightarrow A^0(TX) \\ (\mathbf{U}, \mathbf{V}) \quad \mapsto \quad D_{\mathbf{U}}\mathbf{V} - D_{\mathbf{V}}\mathbf{U} - [\mathbf{U}, \mathbf{V}]. \quad (5.3)$$

En effet, on a :

Théorème 5.3.2. *Une variété Riemannienne (X, g) admet (sur TX) une unique connexion métrique sans torsion, la **connexion de Levi-Civita**.*

Démonstration : On se donne trois champs vectoriels \mathbf{U} , \mathbf{V} et \mathbf{W} et on évalue les conditions (5.2) pour les sections $s = \mathbf{U}$, $t = \mathbf{V}$ dans la direction \mathbf{W} et ensuite pareil pour les 2 permutations cycliques $(\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{U})$ et $(\mathbf{W}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$. On additionne les 2 premières équations et on soustrait la dernière. On trouve, utilisant que la torsion (5.3) de D est nulle :

$$2h(D_{\mathbf{W}}\mathbf{U}, \mathbf{V}) = h([\mathbf{V}, \mathbf{W}], \mathbf{U}) - h([\mathbf{U}, \mathbf{V}], \mathbf{W}) + h([\mathbf{W}, \mathbf{U}], \mathbf{V}) + D_{\mathbf{W}}h(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + D_{\mathbf{U}}h(\mathbf{V}, \mathbf{W}) - D_{\mathbf{V}}h(\mathbf{W}, \mathbf{U}). \quad (5.4)$$

Ceci montre l'unicité. Pour l'existence, on définit $D_{\mathbf{W}}\mathbf{U}$ par le membre droite de (5.4). C'est possible, car que cette expression est linéaire en \mathbf{V} .

Pour vérifier que D est une connexion métrique sans torsion, on utilise la formule (5.4) ainsi que une analogue de la formule suivante :

$$[f \cdot \mathbf{U}, g \cdot \mathbf{V}] = fD_{\mathbf{U}}g \cdot \mathbf{V} - gD_{\mathbf{V}}f \cdot \mathbf{U} + fg \cdot [\mathbf{U}, \mathbf{V}].$$

Par exemple, la formule de Leibniz pour D se vérifie comme suit :

$$\begin{aligned} 2h(D_{\mathbf{W}} \cdot f\mathbf{U}, \mathbf{V}) - 2f \cdot h(D_{\mathbf{W}}\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= D_{\mathbf{W}}f \cdot h(\mathbf{U}, \mathbf{V}) - D_{\mathbf{V}}f \cdot h(\mathbf{U}, \mathbf{W}) + \\ &\quad + D_{\mathbf{W}}f \cdot h(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + D_{\mathbf{V}}f \cdot h(\mathbf{W}, \mathbf{U}) \\ &= 2D_{\mathbf{W}}f \cdot h(\mathbf{U}, \mathbf{V}). \quad \square \end{aligned}$$

Soit (E, h) un fibré muni d'une métrique h . Pour tout sous-fibré $F \subset E$ on a une décomposition orthogonale par rapport à h :

$$E = F \oplus Q, \quad Q := F^\perp \quad (5.5)$$

et une connexion D induit des connexions D_F et D_Q sur F et Q par restriction. En fait, on décompose :

$$\begin{aligned} D(s) &= D_F(s) \oplus \sigma(s), \quad s \in A^0(F) \\ D(t) &= \tau(s) \oplus D_Q(s), \quad t \in A^0(Q). \end{aligned}$$

Les formes $\sigma : A^0(F) \rightarrow A^1(Q)$ et $\tau : A^0(Q) \rightarrow A^1(F)$ s'appellent les **deuxièmes formes fondamentales** associées à (E, h) et la décomposition (5.5).

Exemples 5.3.3. 1) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Le fibré tangent TU étant trivial, ses sections s'identifient aux fonctions $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et la dérivation D définit une connexion sur TU . C'est la connexion de Levi-Civita pour la métrique euclidienne car D préserve la métrique euclidienne, et la formule pour le crochet de Lie (3.4) montre que la torsion est nulle.

2) Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Alors $TS \subset T\mathbb{R}^n|_S$ et la connexion D^S induite par D sur TS par projection orthogonale comme dans l'exemple 5.1.3, 2 est métrique.

3) Soit (X, h) une variété Riemannienne et $S \subset X$ une sous-variété. Une connexion D sur TX induit une sur $TX|_S$ et donc sur le sous-fibré $TS \subset TX|_S$. Si D est la connexion de Levi-Civita pour (X, h) , alors cette connexion induite est la connexion de Levi-Civita pour $(S, h|_S)$. Voir l'exercice 1 ci-dessous. En particulier, pour une sous-variété $S \subset \mathbb{R}^n$, la connexion de Levi-Civita par rapport à la métrique euclidienne est la connexion D^S de l'exemple 5.1.3, 2.

4) On continue l'exemple précédent dans le cas d'une surface $M \subset \mathbb{R}^3$. Avec la notation du § 3.7, la connexion de Levi-Civita de \mathbb{R}^3 a pour matrice

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

la connexion de Levi-Civita de M est la sous-matrice $\omega^M = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$, et la seconde forme fondamentale (de TM dans TN_{M/\mathbb{R}^3}) s'identifie avec la sous-matrice $-(\omega_{13}, \omega_{23})$. L'identification de la connexion de Levi-Civita remontre le Theorema Egregium 3.7.2 : pour une surface, la courbure de cette connexion est essentiellement la courbure de Gauss (voir l'exemple 5.1.3, 5) qui donc ne dépend que de la métrique et pas de l'immersion de la surface.

Les équations de structure (3.26), (3.27) montre que la seconde forme fondamentale est essentiellement la seconde forme fondamentale classique de la surface M .

On revient au cas général d'une connexion D sur TX , le fibré tangent d'une variété X . Dans ce cas la valeur de la courbure $F(D) \in A^2 \text{End}(TX)$ d'une connexion sur un couple de vecteurs tangents $\xi_1, \xi_2 \in T_p X$, $p \in X$ est un endomorphisme de $T_p X$ et donc

$$\boxed{F(D)(\xi_1, \xi_2)\xi_1 \in T_p X.}$$

Cela suggère d'étudier les plans $P = \mathbb{R}\xi_1 \oplus \mathbb{R}\xi_2$ dans $T_p X$. Un tel plan définit un vecteur $\xi_1 \wedge \xi_2 \in \Lambda^2 TX$ et la métrique h induit une sur $\Lambda^2 TX$. En effet

$$\boxed{h(\xi_1 \wedge \xi_2) := \det(h(\xi_\alpha, \xi_\beta)_{\alpha, \beta=1,2}) = h(\xi_1, \xi_1)h(\xi_2, \xi_2) - h^2(\xi_1, \xi_2)}. \quad (5.6)$$

On peut alors introduire la notion suivante :

Définition 5.3.4. Soit D une connexion métrique pour TX , (X, h) variété riemannienne. Soit $p \in X$ et $P = \mathbb{R}\xi_1 \oplus \mathbb{R}\xi_2$ un 2-plan. Alors

$$\boxed{F_P(p) := h(F(D)(\xi_1, \xi_2)\xi_1, \xi_2) / h(\xi_1 \wedge \xi_2)}$$

ne dépend que du plan P (voir l'exercice 2 du § 5.3); elle est appelée la **courbure sectionnelle** du plan P .

Par exemple, dans la situation d'une surface immergée $M \subset \mathbb{R}^3$, $\kappa(p)$ est la courbure sectionnelle du plan T_pM (exercice 3 ci-dessous).

Exercices au § 5.3

1. Soit (X, h) une variété Riemannienne et $S \subset X$ une sous-variété. Montrer que la connexion de Levi-Civita de (X, h) induit sur S la connexion de Levi-Civita de $(S, h|_S)$.
2. Montrer que la courbure sectionnelle ne dépend pas de la base qu'on a choisi.
3. Montrer que pour une surface la courbure sectionnelle d'un plan tangent à une surface immergée est égale à la courbure de Gauss en ce point.

Bibliographie

- [Do Carmo2] Do Carmo, Manfredo P. : Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall (1976).
- [Do Carmo2] Do Carmo, Manfredo P. : Differential forms and applications, Springer (1994).
- [Hicks] Hicks, Noel J. : Notes on differential geometry, D. Van Nostrand (1965).
- [Hirsch-Smale] Hirsch, Morris W., Smale, Stephen : Differential equations, dynamical systems, and linear algebra, Academic Press (1974).
- [Bröcker-Jänich] Bröcker, Th., Jänich, K. : Introduction to differential topology, Cambridge University Press (1982).
- [Warner] Warner, F. : Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer Verlag (1983).