

Science de tous les savoirs

Mathématiques

Peut-on entendre la forme  
d'un tambour ?

Pierre Bérard

Institut Fourier (Laboratoire de mathématiques)

Université Joseph Fourier - CNRS

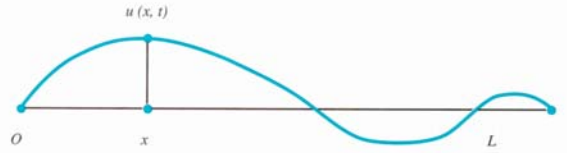


Avant les tambours ... les cordes



Corde vibrante fixée en ses deux extrémités, de longueur  $L$   
 La corde est supposée homogène et parfaitement élastique  
 On appelle  $u(x,t)$  le déplacement vertical du point  $x$  de la corde

Le déplacement  $u$  est supposé très petit par rapport à la longueur  $L$  de la corde.



$u$  solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

$\tau$  tension de la corde,  $\rho$  sa densité linéaire

Pour simplifier :

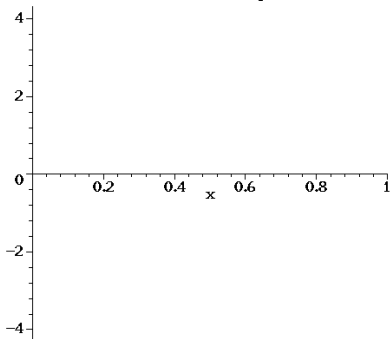
$$\tau / \rho = 1$$

avec les conditions au bord :

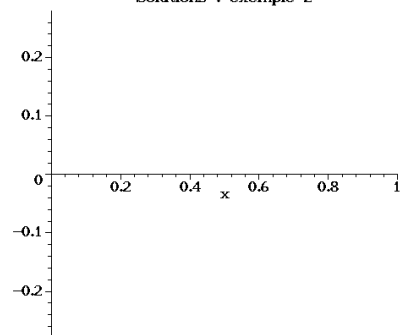
$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

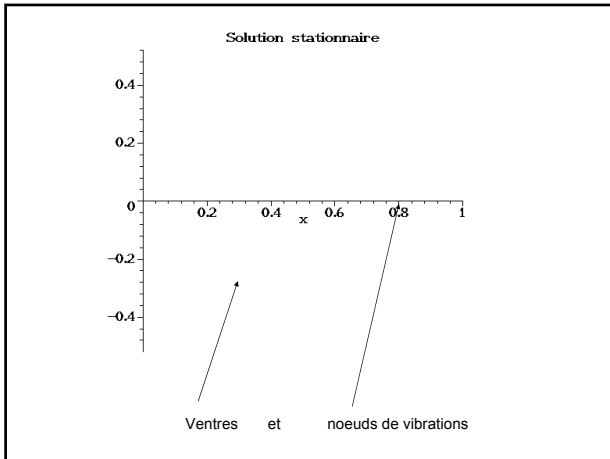
L'équation résulte d'un travail de modélisation ; les « conditions au bord » traduisent le fait que la corde est fixée en ses deux extrémités.

Solutions : exemple 1



Solutions : exemple 2





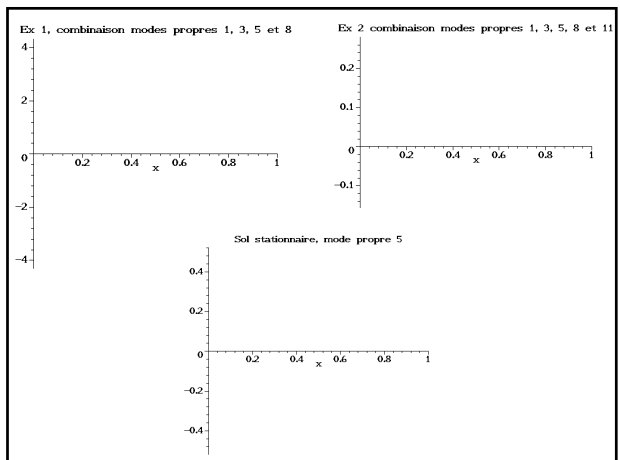
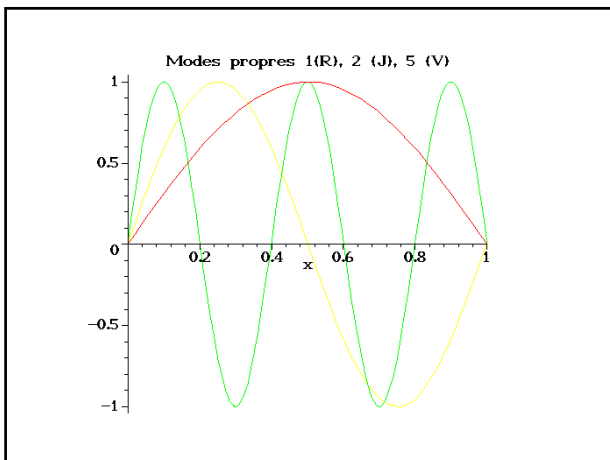
**Solutions stationnaires, Fréquences propres, Modes propres**

- Parmi les solutions de l'équation des cordes vibrantes (avec  $\tau/\rho = 1$ ), on a les **solutions stationnaires**

$$u(x,t) = \{ a \sin(\lambda_k t) + b \cos(\lambda_k t) \} \sin(\lambda_k x) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

où les nombres  $a$  et  $b$  sont des paramètres.

- Les nombres  $\lambda_k^2 = (k \pi / L)^2$  s'appellent les **fréquences propres** de vibration de la corde.
- Les fonctions  $\sin(\lambda_k x)$  s'appellent les **modes propres** de vibration de la corde.



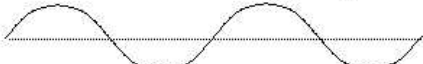
### Exemples de modes propres



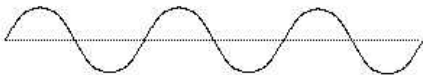
k = 1



k = 2



k = 4



k = 6

### Importance des modes et fréquences propres

- Lorsqu'une corde est soumise à l'action d'une force extérieure, l'amplitude de vibration  $u(x,t)$  vérifie l'équation

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad (\text{indices} = \text{dérivations partielles})$$

où  $f(x,t)$  est la force extérieure.

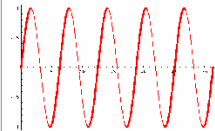
- L'utilisation des modes propres (**séries de Fourier**) permet de découpler les variables  $x$  et  $t$  et de ramener l'étude de cette équation aux dérivées partielles à celle d'une infinité d'équations différentielles

$$v_k''(t) + \lambda_k^2 v_k(t) = f_k(t) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

#### 1) Sans force extérieure. L'oscillateur harmonique

$$v''(\tau) + \lambda^2 v(\tau) = 0$$

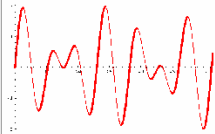
a pour solutions  $A \cos(\lambda \tau) + B \sin(\lambda \tau)$ .



#### 2) Proche de la résonance. Avec une force extérieure périodique l'oscillateur harmonique

$$v''(\tau) + \lambda^2 v(\tau) = \cos(\omega \tau)$$

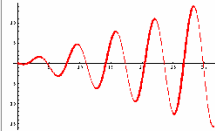
a une solution  $v(\tau)$  de la forme  $a(\tau) = A \cos(\lambda \tau) + B \sin(\lambda \tau)$  où  $a(\tau) = C \cos(\omega \tau)$  avec  $C = 1/(\lambda^2 - \omega^2)$ . L'amplitude  $C$  augmente quand la fréquence de la force extérieure se rapproche de la **fréquence de résonance**  $\lambda$ .



#### 3) En résonance. Quand $\omega = \lambda$ , l'équation

$$v''(\tau) + \lambda^2 v(\tau) = \cos(\lambda \tau)$$

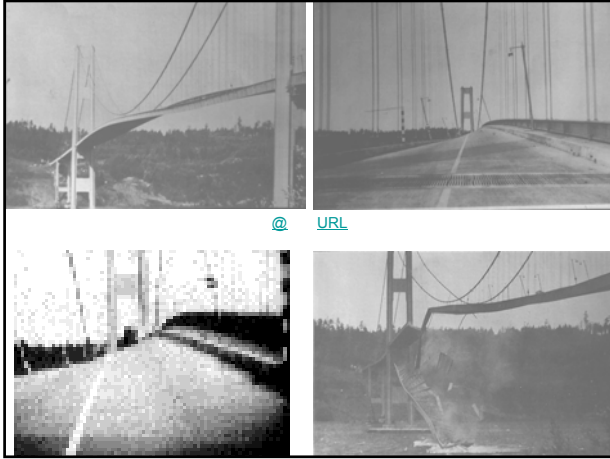
admet la solution particulière  $v(\tau) = -\lambda \tau \cos(\lambda \tau)/2$  dont l'amplitude tend vers l'infini.



Voir : [http://abel.math.harvard.edu/archive/21b\\_fall\\_03/tacoma/](http://abel.math.harvard.edu/archive/21b_fall_03/tacoma/)

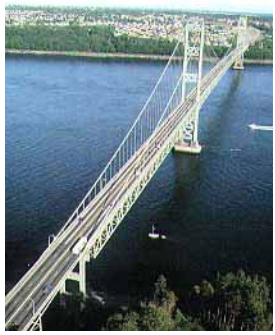
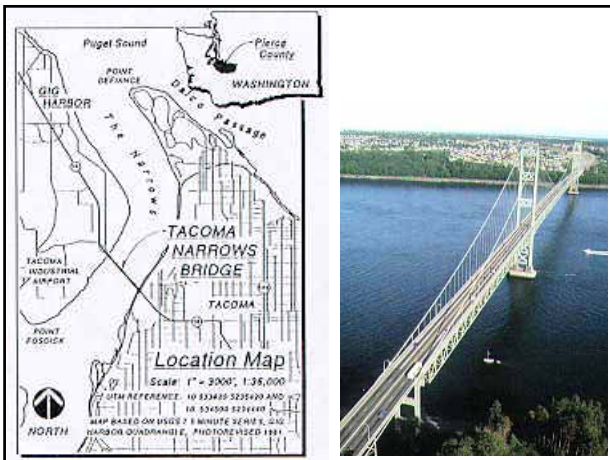
### Le pont de Tacoma

- Long de 1,9 km et mis en service le 1er juillet 1940, le pont de Tacoma dans l'état de Washington, était l'un des ponts suspendus les plus longs de l'époque.
- Ce pont avait été conçu pour être flexible. Connu sous le nom de «galloping Gurtie», ses oscillations ont fait de lui une attraction touristique ...
- ... jusqu'au 7 novembre 1940, jour où un vent de l'ordre de 70 km/h a provoqué oscillations et torsions qui ont entraîné sa rupture.
- Les raisons précises de la rupture ne sont pas complètement comprises, mais un phénomène de résonance est montré du doigt.



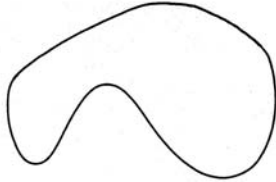
# Tacoma Narrows Bridge

- Even today, no one is sure exactly what caused the Tacoma Narrows Bridge to collapse. Several theories exist explaining the problem, all involving the effects of aerodynamic forces on the bridge. Three of those theories were listed in the [Federal Work Agency \(FWA\)](#) report on the collapse: the wind blowing against the bridge had the same frequency as the resonance frequency of the bridge, causing vibrations to build up disproportionate to the force of the wind; vortices generated around the bridge matched the resonance and cause oscillations to gradually build up; random fluctuations in wind turbulence were enough to cause the bridge to collapse. Whatever the reason, the forces acting against the bridge on the morning of November seventh were enough to cause a cable band to slip, which put enough stress on the other parts of the bridge that it failed.
- The major weakness in the Tacoma Narrows Bridge was its flexibility, both vertically and in torsion. One reason for this was that the ratio between the depth of the girders to the span of the bridge was very large, over twice that of the [Golden Gate Bridge](#). Another reason was the high ratio between the width and the span of the bridge. The Tacoma Narrows Bridge was the most flexible bridge of its time because the designers planned it that way. They used shallow, steel pile girders as supports instead of the conventional deep stiffening trusses both to save money and to give the bridge a slimmer, sleeker architecture. They limited the width of the bridge for much the same reasons, also taking into account the light traffic loads that they expected. What the engineers failed to realize was that designing such an unprecedented bridge brought more elements, specifically aerodynamic forces into play than they had calculated for. Engineers later learned that earlier bridges with deep trusses did not have the same problems since the sheer weight of the trusses damped out most of the aerodynamic forces. This fact was unknown to the designers, which is probably why they completely overlooked the aerodynamic aspect, although several bridges had collapsed earlier due to much the same reasons as the Tacoma Narrows Bridge, including the Niagara-Cullion Bridge, which had a similar length to span ratio.
- While the engineers were completely unaware of their error, they did anticipate oscillations and took several steps to prevent them. First, they tried tying down cables from the ends of the bridge to large cement blocks on the ground below. Although these had no effect on the problem, and although they snapped during the first windstorm, the engineers immediately replace them. They also attached center stay cables from the main cables to the girdes. However, everyone involved with the project was unaware that these steps were still inadequate. The supervisory engineer for the Washington Toll Authority, T. L. Condon, even wrote in his report, "With the exception of the unusual narrowness of this bridge with reference to its span length, the super structure design is technically sound."



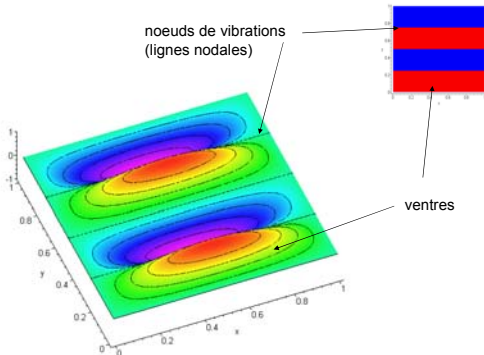
## Membranes vibrantes

- On considère maintenant une membrane fixée le long de son bord.  
On suppose qu'elle est homogène et parfaitement élastique.
- Bref ... **un tambour** ...

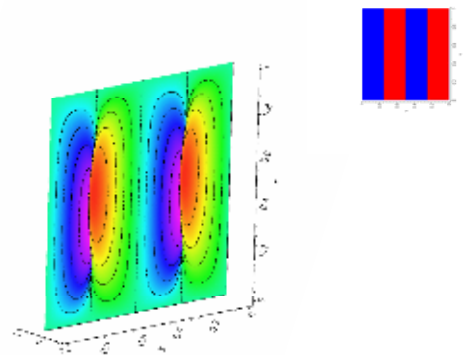


- Il n'existe pas de formule donnant les fréquences propres de vibration d'un tambour quelconque, sauf dans certains cas très particuliers (rectangles, triangles spéciaux, **disques ?!**).
- Ainsi, on ne connaît pas les fréquences propres d'un tambour en forme d'hexagone régulier, d'ellipse, ou de stade.  
Le calcul numérique permet cependant de donner des valeurs approchées des (premières) fréquences de vibration.
- Le cas d'un tambour carré, pour lequel on sait calculer les fréquences propres, montre que la situation est plus complexe que pour les cordes vibrantes.

mode (1,4) :  $\sin(\pi x) \sin(4\pi y) \rightarrow \lambda^2 = 17\pi^2$



mode (4,1) :  $\sin(4\pi x) \sin(\pi y) \rightarrow \lambda^2 = 17\pi^2$

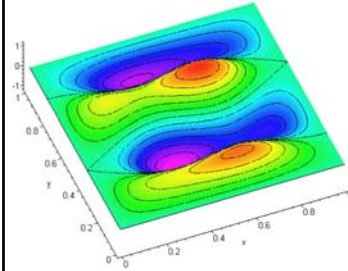
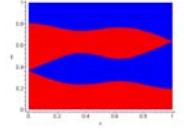


mode propre combiné :

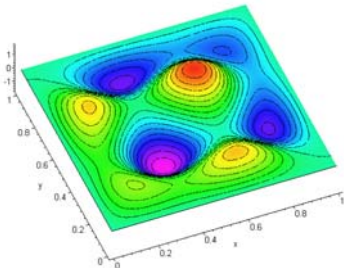
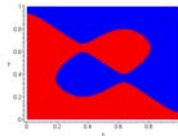
$$\sin(\pi x) \sin(4\pi y) + a \sin(4\pi x) \sin(\pi y)$$

fréquence propre  $17\pi^2$  ( $a$  paramètre quelconque)

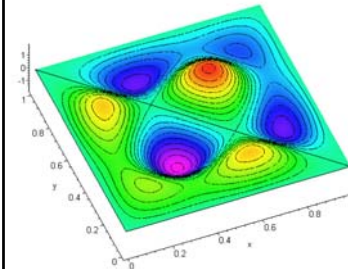
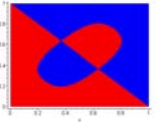
mode combiné :  $\sin(\pi x) \sin(4\pi y) + \frac{1}{3} (2/3)^{1/2} \sin(4\pi x) \sin(\pi y) \rightarrow \lambda^2 = 17\pi^2$



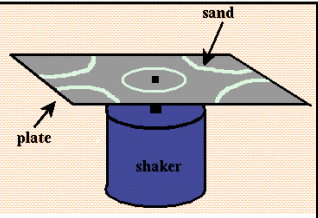
mode combiné :  $\sin(\pi x) \sin(4\pi y) + 0.9 \sin(4\pi x) \sin(\pi y) \rightarrow \lambda^2 = 17\pi^2$



mode combiné :  $\sin(\pi x) \sin(4\pi y) + \sin(4\pi x) \sin(\pi y) \rightarrow \lambda = 17\pi^2$




Méthode de Chladni pour visualiser les noeuds de vibration, avec bord libre.

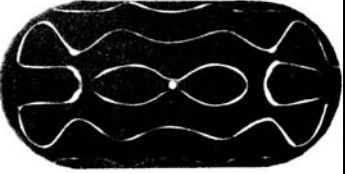


Labels: sand, plate, shaker

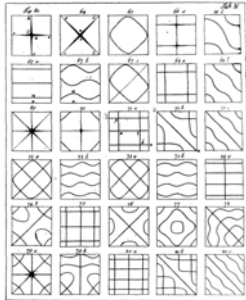
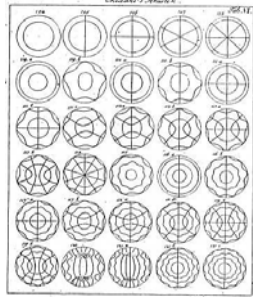
appliquée à la table d'un violon



appliquée à un tambour en forme de stade



### Ernest Florens Friedrich Chladni (1756 - 1827)

### Tambour circulaire

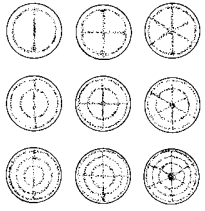


Figure 9-4. Various combinations of circumferential and radial wavenumbers occurring simultaneously.

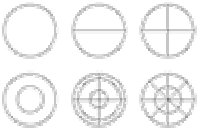
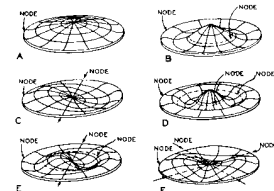
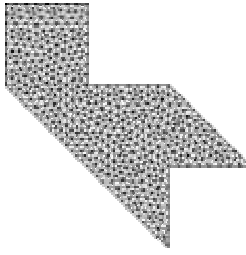



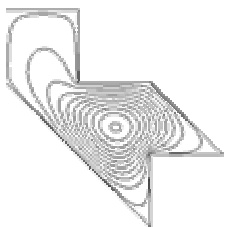
Figure 9-5. Modes of vibration of a clamped circular plate. Courtesy of Harry F. Olsen, *Musical Engineering*, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1952.

### Calcul numérique (T. Driscoll)

Discretisation du tambour.



Représentation du mode fondamental par ses lignes de niveau.





**Symétrisation :**

Le processus géométrique ci-contre

- conserve l'aire,
- diminue le périmètre,
- diminue la fréquence fondamentale.

Les tambours ainsi construits produisent un son de plus en plus grave.

Parmi tous les tambours d'aire donnée (et ayant les mêmes propriétés mécaniques), le tambour circulaire est celui dont la fréquence fondamentale est la plus petite.

G. Faber, E. Krahn (1923)  
John William Strutt, Lord Rayleigh (1878)

### Problème direct

- De manière générale, la modification de la géométrie (ou des propriétés mécaniques) d'un tambour change les fréquences propres.
- Ceci conduit à la méthode des «essais non destructifs» : on teste la réponse vibratoire d'une structure pour déterminer d'éventuels changements ou détériorations. Cette méthode était connue des **fondeurs de cloche** au moyen âge et utilisée en gare par les **cheminots** autrefois (jusque dans la seconde moitié du 20ème siècle). On utilise aujourd'hui des micro-processeurs pour tester les essieux des TGV ou les arbres des alternateurs dans les centrales.

### Problème inverse

- On peut montrer que la connaissance de toutes les fréquences propres permet de déterminer l'aire (H. Weyl, 1910), le périmètre et le nombre de trous du tambour (M. Kac, 1966).
- M. Kac a formulé la question «Can one hear the shape of a drum? »).

Mark Kac (1914-1984)

- C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont montré en 1992 que la connaissance de toutes les fréquences propres ne permet pas de caractériser un tambour.

### On ne peut pas entendre la forme d'un tambour

Ces deux tambours ont les mêmes fréquences propres de vibration.

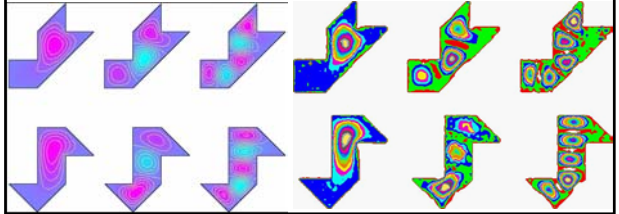
## Carolyn Gordon et David Webb exhibant différents modèles



Ces deux tambours ont également les mêmes fréquences propres de vibration (voir les T-shirts).



- On peut le montrer mathématiquement (C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert), sans calculer les fréquences.
- On peut s'en convaincre numériquement (T. Driscoll) ou expérimentalement (S. Sridhar) en comparant les premières fréquences.

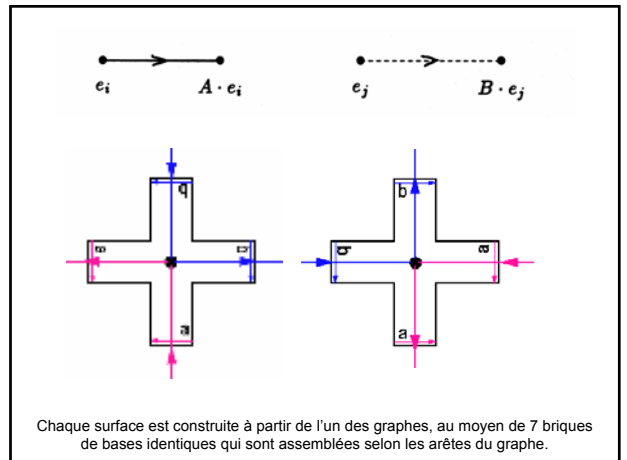
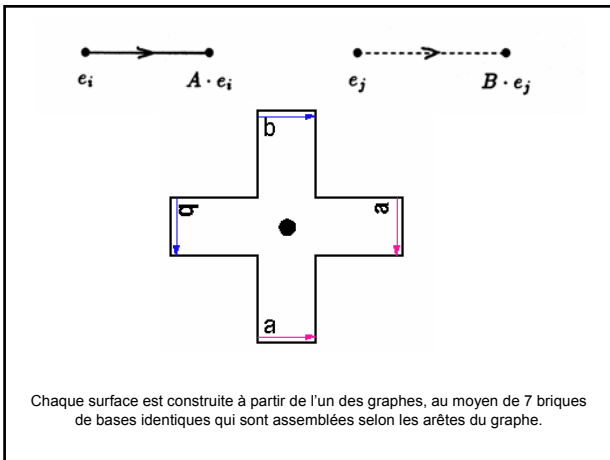
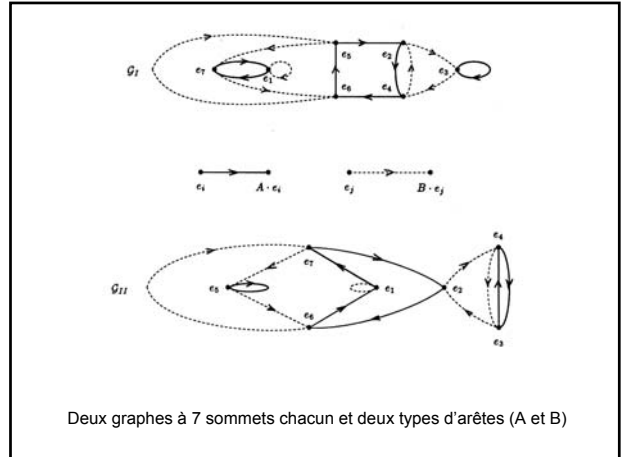


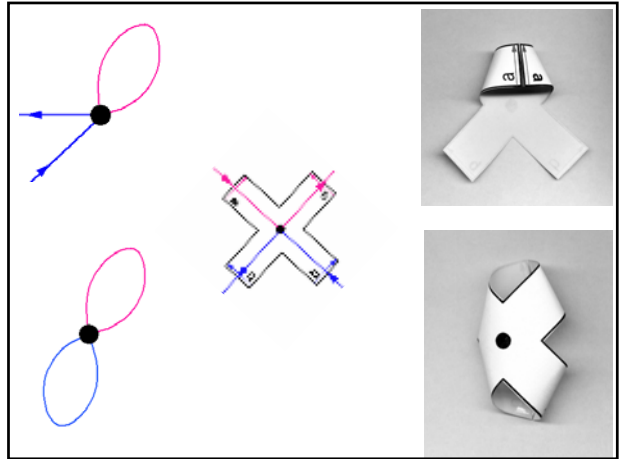
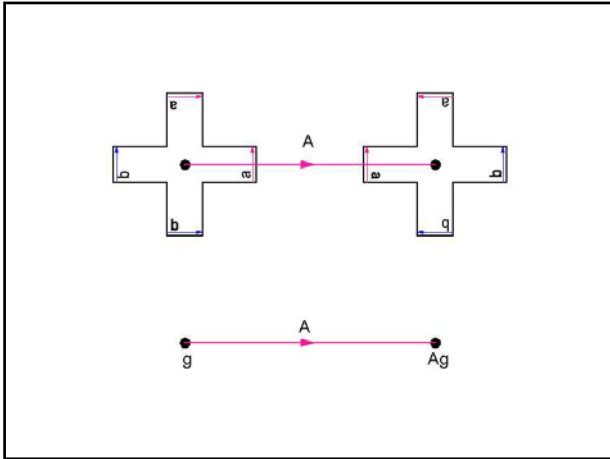
Avant les tambours ... les surfaces

Modèles en papier de P. Buser (EPFL)



Chaque surface est composée de 7 briques identiques assemblées selon une combinatoire bien précise.

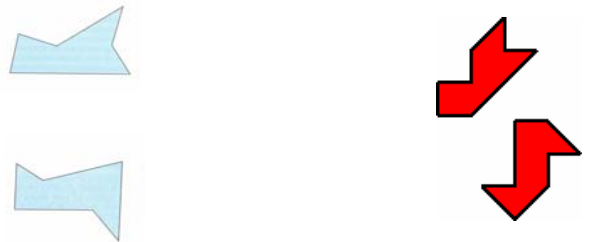




### Les dessous de la démonstration

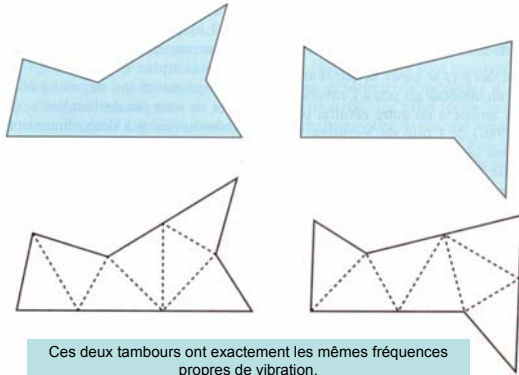
- La démonstration que les deux surfaces de P. Buser ont mêmes fréquences propres fait intervenir des arguments d'algèbre (groupes), d'analyse, de combinatoire (graphes) et de géométrie.
- On peut alors remarquer que les deux surfaces ont un plan de symétrie. Coupées en deux par ce plan, on trouve les tambours de C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ... et on peut montrer qu'ils ont eux aussi les mêmes fréquences propres.

Avec la même combinatoire, on peut construire de nombreuses paires de tambours ayant mêmes fréquences propres.



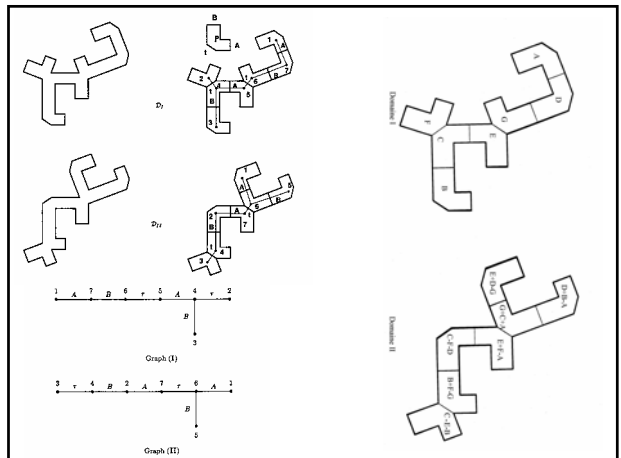
## Les dessous de la démonstration

- Les graphes viennent de la théorie des groupes, plus précisément du groupe  $SL(3, \mathbb{Z}_2)$  des matrices  $3 \times 3$ , à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$ .
- Chaque surface est obtenue par quotient d'une «grande surface», formée de 168 briques, par l'action d'un sous-groupe. Un argument de théorie des représentations permet alors de conclure que les deux surfaces ont mêmes fréquences propres (sans avoir à les calculer).

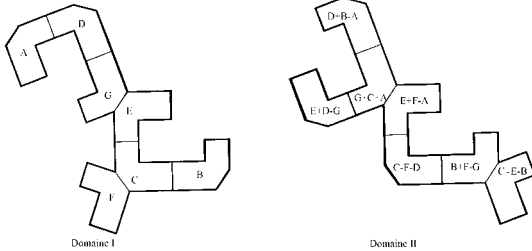


## Les dessous de la démonstration

- On peut également montrer directement que les surfaces ont mêmes fréquences propres en utilisant la méthode de transplantation (via une matrice  $7 \times 7$  qui provient de la théorie des représentations).
- On peut faire une démonstration directe, par transplantation, que les tambours ainsi construits ont mêmes fréquences propres.



## Démonstration par transplantation sans déterminer explicitement les fréquences



## Petit historique

- H.A. Lorentz (Göttingen Oct. 1910)
- H. Weyl (1911), *Math. Ann.*
- S. Minakshisundaram – A. Pleijel (1949), *Canadian J. Math.*
- J. Milnor (1964), *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*
- M. Kac (1966), *Amer. Math. Monthly*
- H. Mc Kean – I. Singer (1967), *J. Diff. Geometry*
- M. Berger (1971), *Springer LNM*
- Y. Colin de Verdière (1973), *Compositio Math.*
- P. Gilkey (1975), *J. Diff. Geometry*
- M.F. Vignéras (1980), *Inventiones Math.*
- A. Ikeda (1980), *Annales Scient. Ec. Norm. Sup.*
- C. Gordon – E. Wilson (1984), *J. Diff. Geometry*
- T. Sunada (1985), *Annals of Math.* ← F. Grassmann (1926)
- P. Buser (1986), *Annales Institut Fourier*
- P. Bérard (1992), *Math. Annalen*
- C. Gordon – D. Webb – S. Wolpert (1992), *Bull. Amer. Math. Soc.*
- .....

Merci de votre attention ....