Examen du 24 mai, 13h-15h.
Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
On pourra justifier le résultat de tout calcul fait à la calculatrice en indiquant sur la copie la commande utilisée.
Ce sujet comporte deux pages (barême indicatif non contractuel tenant compte de la longueur du sujet : 7, 7, 8).

1 Série entière

Soit
$$f(t)=\begin{cases} \frac{\cos(t)-1}{t} & \text{si } t\neq 0 \\ 0 & \text{si } t=0 \end{cases} \quad , \quad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

1. Donner le développement de f en séries entières en $x=0$. Quel est son rayon de convergence ?
2. En déduire le développement en série entières de F en $x=0$.
3. Déterminer un rationnel valeur approchée de $F(1)$ à `1e-8` près. Justifier en détaillant la majoration du reste de la série entière.
4. Déterminer en fonction de $F(1)$ le développement asymptotique en $x=0$ de
$$\int_1^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt$$

2 Intégrale

Il s'agit de déterminer une valeur approchée par la méthode de Simpson sur N subdivisions de
$$F(x)=\int_0^x \tan(t^2)\,dt$$
On notera $I_N(x)$ la valeur de la méthode de Simpson sur N subdivisions de $[0,x]$.

1. Donner $I_N(1)$ sous forme d'une somme pondérée de valeurs de F en des abscisses situées sur N subdivisions de $[0,1]$,
2. Donner un nombre N de subdivisions permettant de certifier une précision de `1e-3` en justifiant soigneusement la majoration d'erreur. Donner la valeur de I_N correspondant sous forme d'un réel approché.
3. La valeur de N convient-elle pour calculer $F(x)$ avec une précision au moins égale à `1e-3` lorsque $x\in[-1,1]$?
4. On suppose qu'on fait une erreur absolue de ε=`1e-17` lorsqu'on approche $\tan(t^2)$ pour les valeurs de $t\in[0,1]$ qui interviennent dans le calcul de $I_N(1)$. Déterminer en fonction de N un majorant de l'erreur totale $|I_N(1)-F(1)|$, majoration de la somme de l'erreur de la méthode de Simpson et de l'erreur numérique d'évaluation de $I_N(1)$.
5. Déterminer en fonction de ε la valeur optimale de N qui permettrait d'obtenir l'erreur la plus faible possible.
6. (Bonus) Que devient cette valeur si on considère que les erreurs numériques sur une somme de n termes sont statistiquement presque toujours proportionnelles à $\sqrt{n}$ plutôt qu'à n ?

3 Interpolation et résolution d'équation

On définit sur l'intervalle $I=[-1.1,1.1]$ la fonction :
$$f(x)=\tan(x^2)-x-1$$
On cherche des valeurs approchées des racines de $f(x)=0$.

1. Montrer que f est convexe sur I et $f'(x)<0$ pour $x\in I, x<0$. Déterminer une valeur approchée de $f'(1.1)$ et montrer qu'elle permet de certifier le signe de $f'(1.1)$.

2. En déduire le tableau de variations de f sur I (indication : déterminer le nombre de points où f' s'annule sur I). Déterminer le nombre de racines de f sur I.
3. Déterminer P le polynôme d'interpolation de f en les points $-1.1, 0, 1.1$.
4. Donner des valeurs approchées des racines $a < 0$ et $b > 0$ de P.
5. Donner la suite itérative (u_n) de la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$.
6. Montrer que la suite de la méthode de Newton est monotone et converge lorsqu'on prend $u_0 = a$.
7. Donner un encadrement de $u_3 - r$ où $r < 0$ vérifie $f(r) = 0$. On justifiera en appliquant le théorème des accroissements finis.
8. Que se passe-t-il si on prend $u_0 = b$?