

Exercice 1. (+) Pour chaque matrice A , donner la forme bilinéaire symétrique ϕ dont A est la matrice dans la base canonique. Trouver une base orthogonale pour ϕ . Existe-t-il une base ϕ -orthonormée? La forme ϕ est-il un produit scalaire?

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad 3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires?

- (+) Sur $\mathbb{R}[x]$, $(P, Q) \mapsto \int_0^1 e^x P(x) Q(x) dx$.
- (+) Sur \mathbb{R}^3 , la forme polaire de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.
- (+) Sur \mathbb{R}^3 , la forme polaire de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.
- (*) Sur $M_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$.
- (*) Sur $M_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$.

Exercice 3. Démontrer les relations suivantes dans un espace vectoriel euclidien :

- $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4x \cdot y$.
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Exercice 4. (+) Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour orthonormaliser dans \mathbb{R}^3 avec son produit scalaire usuel la base (e_1, e_2, e_3) , où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Pour chaque espace euclidien E ci-dessous muni du produit scalaire ϕ , appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille \mathcal{F} afin de produire une base orthonormée pour $\langle \mathcal{F} \rangle$. Calculer la projection orthogonale de $v \in E$ sur $\langle \mathcal{F} \rangle$. Donner des équations définissant $\langle \mathcal{F} \rangle$.

- (+) $E = \mathbb{R}^3$, ϕ le produit scalaire canonique, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (+) $E = \mathbb{R}^4$, ϕ le produit scalaire canonique, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (+) $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(X) Q(X) dX$, $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.
- (+) $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P, Q) = \int_0^1 P(X) Q(X) dX$, $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.
- (*) $E = \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (+) Considérons dans \mathbb{R}^2 la forme quadratique $q(x, y) = 4x^2 + xy + y^2$.

- Démontrer que q définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .

- Donner une base orthogonale de \mathbb{R}^2 pour ce produit scalaire. On pourra utiliser deux méthodes pour y parvenir : soit appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, soit utiliser la réduction de Gauss de q .

Exercice 7. Considérons sur \mathbb{R}^3 , la forme quadratique q , définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2yz + 4z^2.$$

- Démontrer que la forme bilinéaire associée à q est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .
- Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la base canonique de \mathbb{R}^3 pour obtenir une base de \mathbb{R}^3 q -orthonormale.

Exercice 8. (+) Nous considérons l'espace $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$, à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

- Montrer que si m et n sont des entiers distincts alors les fonctions $x \mapsto \cos(nx)$, $x \mapsto \cos(mx)$, $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \sin(mx)$ sont deux à deux orthogonales pour ce produit scalaire.
- Calculer $\|x \mapsto \cos(nx)\|$ et $\|x \mapsto \sin(nx)\|$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer la projection orthogonale de la fonction $x \mapsto x$ sur le sous-espace de $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $1, \cos, \sin, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x)$.

Exercice 9. Nous considérons l'espace $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

- Utiliser la méthode de Gram-Schmidt afin de produire une base orthonormée pour le sous-espace $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.
- Calculer la meilleure approximation polynomiale (au sens de la distance associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) de degré inférieur ou égal à 2 des fonctions suivantes : \exp, \cos et $x \mapsto \sqrt{x+1}$.

Exercice 10. (*) Soit P une matrice carrée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Démontrer que la matrice tPP est symétrique.
- Préciser, dans la base canonique $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ de \mathbb{R}^n , la matrice de la forme quadratique associée au produit scalaire usuel (canonique). Que peut-on dire de la base canonique de \mathbb{R}^n pour cette forme quadratique ?
- Soit q la forme quadratique définie, dans la base canonique de \mathbb{R}^n , par la matrice tPP .
 - Pour tout vecteur colonne X , dont les coordonnées sont exprimées dans la base canonique de \mathbb{R}^n , exprimer matriciellement la valeur $q(X)$.
 - Démontrer que q est une forme quadratique définie positive.
 - En déduire, en fonction de P et des vecteurs e_1, \dots, e_n , une base q -orthogonale de \mathbb{R}^n .

Exercice 11. (*) Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit $W \subset V$ un sous-espace de dimension finie. Soit p_W la projection orthogonale sur W . Montrer que

1. $p_W(v) = v$ si et seulement si $v \in W$
2. $p_W \circ p_W = p_W$
3. $p_W(v) = 0$ si et seulement si $v \in W^\perp$.

Exercice 12. Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver les nombres a et b tels que $y = ax + b$ soit la meilleure droite d'approximation des points :

1. $(x = 1, y = 1), (x = 2, y = 3), (x = 3, y = 2)$.
2. $(x = 1, y = 0), (x = 2, y = 5), (x = 3, y = 7)$.

Exercice 13. Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver la fonction $x \mapsto g(x) = a + b \cos(x) + c \cos(2x)$ qui minimise la distance $d(g, x \mapsto x^2)$ dans l'espace $C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)f_2(t)dt$.

Exercice 14. (*)

1. Soit (v_1, \dots, v_n) un famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit $P = (v_1|v_2|\dots|v_n)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les v_i . Montrer que $({}^tPP)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, où $\langle -, - \rangle$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .
2. Soit E un espace euclidien et soit B_1 une base orthonormée pour E . Soit B_2 une autre base pour E . Montrer que B_2 est orthonormée si et seulement si la matrice P de changement de la base B_1 à B_2 est une matrice orthogonale.

Exercice 15. (*) Soit f une endomorphisme d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle -, - \rangle$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\phi(v, w) = \langle v, f(w) \rangle$ est bilinéaire.
2. Soit B une base de E . Soit M la matrice de l'application linéaire f dans la base B . Soit N la matrice de l'application bilinéaire ϕ dans la base B . Montrer que si B est une base orthonormée alors $M = N$.
3. Montrer que réciproquement si B n'est pas orthonormée alors $M \neq N$.

Exercice 16. Montrer que le produit de deux réflexions dans \mathbb{R}^2 est une rotation dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 17. (+) Pour chaque matrice symétrique 3×3 , trouver une base B_1 de \mathbb{R}^3 , composée de vecteurs propres de A_i , qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. (+) Pour chaque forme quadratique q , trouver une base de \mathbb{R}^3 qui est q -orthogonale et orthonormée pour les produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^3 .

1. $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
2. $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2\sqrt{2}xz + 4\sqrt{2}yz$.