Exercice 1. (+) Les fonctions suivantes sont-elles des formes bilinéaires ? Sont elles symétriques ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_2.$
2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, \quad \phi(P,Q) = 2P'(1)P(0) + Q'(1)Q(0).$
3. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, \quad \phi(P,Q) = 2P'(1)Q(0) + Q'(1)P(0).$
4. $\phi : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \phi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(1-x)dx.$

Exercice 2. (+) Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et sa matrice M_2 dans la base $\mathcal{B}_2$. Calculer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$, et vérifier que $M_2 = {}^tPM_1P$. La forme bilinéaire ϕ est elle symétrique ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + 3y_1x_2 \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$
2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$
$$\phi(P,Q) = P(1)Q(-1) \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}, \mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), (X^2 - 3X + 2)\}.$$
3. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$
$$\phi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(1-x)dx \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}, \mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), X^2 - X\}.$$

Exercice 3.

1. Soit Ψ une forme bilinéaire définie sur $V \times V$ où V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit A une matrice représentant Ψ dans une base $\mathcal{B}$ fixée. Montrer que l'application
$$\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$$
définie par $\Phi(u,v) = \Psi(v,u)$ est une forme bilinéaire et préciser, en fonction de A, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que Ψ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si A l'est.
2. Démontrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme de la matrice symétrique $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et de la matrice antisymétrique $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Démontrer que c'est l'unique façon d'écrire M comme une somme d'une matrice symétrique et une matrice anti-symétrique.
3. Montrer que toute forme bilinéaire $\Delta : E \times E \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme de deux formes bilinéaires, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, que l'on précisera.

Exercice 4. (*) Pour chaque forme bilinéaire ϕ, sur l'espace vectoriel V donner son rang (sauf pour le 4) et calculer son noyau. Trouver l'orthogonal pour ϕ du sous-espace W (sauf pour le 4)).

1. $V=\mathbb{R}^3$, $\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2$, $\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$
2. $V=\mathbb{R}^3$, $\phi:\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+2x_2y_2$, $\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$
3. $V=\mathbb{R}^3$, $\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$, $\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}$
4. $V=C^0([0,1],\mathbb{R})$, $\phi(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$

Exercice 5. Soient A et B des matrices $n\times n$. Montrer l'implication suivante :

$$\forall X,Y\in\mathbb{R}^n,\ {}^tXAY={}^tXBY \quad\Rightarrow\ A=B.$$

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel, et ϕ une forme bilinéaire symétrique définie sur V.

1. Vérifier que si q_ϕ est la forme quadratique associée à la forme ϕ alors on a la relation
$$\phi(x,y)=\frac{1}{4}(q_\phi(x+y)-q_\phi(x-y)).$$
2. En déduire que si $q_\phi(u)=q_\phi(v)$, alors $(u+v)$ et $(u-v)$ sont orthogonaux pour la forme bilinéaire ϕ.
3. Interpréter ce résultat quand $V=\mathbb{R}^3$ et ϕ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Vérifier que si V est un espace vectoriel et q_ϕ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ sur $V\times V$ alors on a les rélations

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}(q_\phi(x+y)-q_\phi(x)-q_\phi(y)).$$

et

$$q_\phi(x)+q_\phi(y)=\frac{1}{2}(q_\phi(x+y)+q_\phi(x-y)).$$

Exercice 8. (+) Pour chaque forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$, donner la forme polaire ϕ associée et la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. $q(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$
2. $q(x,y,z)=2xy+4xz+6yz$
3. $q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+yz$
4. $q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy+4yz$

Exercice 9. (*) (version simplifiée de la forme de Minkowski)
Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la forme bilinéaire

$$M:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ M\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)\mapsto x_1x_2-y_1y_2.$$

1. Donner la matrice N de M dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ une matrice telle que $M(P\underline{V}, P\underline{W}) = M(\underline{V}, \underline{W})$ pour tous $\underline{V}, \underline{W}$ dans $\mathbb{R}^2$. On suppose pour simplifier que $a, e > 0$.
   Montrer que $M(P\underline{V}, P\underline{W}) = M(\underline{V}, \underline{W})$ pour tout $\underline{V}, \underline{W}$ si et seulement si
   $$a^2 - d^2 = 1,\ b^2 - e^2 = -1 \text{ et } ab = de.$$
3. En déduire que $a = e$.
4. Montrer que si $\beta = \sqrt{a^2 - 1}$ alors $b = d = \pm\beta$.
5. Ecrire P en fonction de b. Que constate-t-on ? (On pourra faire une substitution $b = \sinh(\alpha)$.)

Exercice 10. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, {}^tXMX > 0$.

(ii) $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

Exercice 11. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ qui est orthogonale pour la forme bilinéaire donnée par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire une base orthonormée pour cette même forme.
3. Quel est le rang de A ?

Exercice 12. (*) Soit V l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2.

1. Soit ϕ la forme bilinéaire définie, pour tout $(A, B) \in V \times V$, par
   $$\phi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$
   (a) Déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de V.
   (b) Démontrer qu'elle est symétrique et donner son rang.
   (c) Trouver une base ϕ-orthonormale pour $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit D la forme quadratique définie, pour tout $A \in V$, par $D(A) = \mathrm{Det}(A)$.
   (a) Calculer la forme bilinéaire symétrique associée à D.
   (b) Donner son rang et sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13. (*) Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère la forme $\tau(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ où Tr est la trace d'une matrice.

1. Montrer que τ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que pour toute matrice carrée $A \neq 0$ il existe B telle que $\tau(A, B) \neq 0$. (On pourra calculer $\tau({}^tAA)$).

Exercice 14. (+) Pour chaque forme quadratique q

1. Appliquer la réduction de Gauss à q pour l'écrire comme combinaison linéaires de carrés de formes linéaires indépendantes.

2. Déduire la signature et le rang de q.
3. Donner une base q-orthogonale pour $\mathbb{R}^n$.
4. Si possible, donner une base q-orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
5. La forme bilinéaire associée à q est elle un produit scalaire ?

1. $q(x,y) = x^2 + xy + 3y^2$,
2. $q(x,y) = x^2 - 5xy - y^2$,
3. $q(x,y) = xy$,
4. $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$,
5. $q(x,y,z) = xy - yz$,
6. $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$.

Exercice 15. (+) Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, on considère sur $\mathbb{R}_2[X]$ la forme quadratique qui à un polynôme associe son discriminant :

$$\Delta \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$$
$$P(X) = aX^2 + bX + c \mapsto \Delta(P) = b^2 - 4ac$$

1. Donner la forme bilinéaire symétrique φ associée à Δ.
2. Donner la matrice de la forme polaire φ dans la base $\mathcal{F}_0 = \{1, X, X^2\}$.
3. Montrer que pour tout polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire :
$$\Delta(P) = b^2 + (a-c)^2 - (a+c)^2.$$
4. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F}_1 = (\frac{1}{2}(X^2-1), X, \frac{1}{2}(X^2+1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{F}_0$ à la base $\mathcal{F}_1$.
6. Donner la matrice de la forme φ dans la base $\mathcal{F}_1$.
7. Exprimer $\Delta(P)$ en fonction des coordonnées de P dans la base $\mathcal{F}_1$.
8. Donner le rang et la signature de φ.