

## UJF 2012-2013 UE MAT237 Contrôle du 13 décembre 2012 (15h15-16h45)

Calculatrices, documents et portable interdits. Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée. Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

**Exercice 1 (6 pts)** Soit  $P(x)$  un polynôme à coefficients réels. On considère l'équation différentielle (où  $x = x(t)$  est la fonction inconnue)

$$x' = P(x) \quad (E)$$

1) Dans le cas  $P(x) = 1 + x^2$ , trouver la solution de (E) de condition initiale  $x(0) = 0$ . On précisera l'intervalle maximum de définition de la solution.

2) Dans le cas où  $P(x) = x^2 - 4x + 3$ , sans chercher à résoudre explicitement (E) :

a) Déterminer les solutions stationnaires de (E).

b) Montrer que la solution de condition initiale  $x(0) = 2$  est bornée et strictement monotone.

**Exercice 2 (10 pts)** Etant donné un réel  $a$ , on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2a - 1 & 2(1 - a) \\ a - 1 & 2 - a \end{pmatrix}$

1) Trouver en fonction de  $a$  les valeurs propres de  $A$  et une base de vecteurs propres

[Indication : l'une des valeurs propre est égale à 1].

2) En déduire une matrice  $P$  à coefficients réels (ne dépendant pas de  $a$ ) telle que  $D = P^{-1}AP$  est diagonale.

3) Résoudre le système différentiel (cas  $a = -1$ ) avec la condition initiale  $x(0) = 3$  et  $y(0) = 2$

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

et tracer la courbe paramétrée solution  $t \rightarrow (x(t), y(t))$ .

4) Résoudre le système différentiel

$$(S) \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = tv(t) + t \end{cases}$$

5) Montrer comment à l'aide de 1) et 2) (cas  $a = t$ ) la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \begin{cases} x' = (2t - 1)x + 2(1 - t)y + 2t \\ y' = (t - 1)x + (2 - t)y + t \end{cases}$$

peut être ramenée à celle de (S).

**Exercice 3 (4 pts)** On considère sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle du second ordre (où  $x = x(t)$  est la fonction inconnue)

$$t^2 x'' - (t^2 + 2t)x' + (t + 2)x = 0 \quad (E)$$

1) Trouver une solution particulière  $x_0(t)$  de (E) de la forme  $x_0(t) = at + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.

2) En déduire la solution générale de (E) en posant  $x(t) = C(t)x_0(t)$  (variation des constantes).

\*\*\*

**Corrigé du contrôle du 13 décembre 2012**

**Exercice 1.** 1)  $(E)$  est à variable séparée, elle peut s'écrire  $\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} = (\arctan(x(t)))' = 1$  et donc  $\arctan(x(t)) = t + \text{Cte}$  ce qui donne  $x(t) = \tan(t + \text{Cte})$ . Comme  $x(0) = 0$ , on a  $\text{Cte} = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . On peut prendre  $k = 0$  car la fonction  $\tan t$  est  $\pi$ -périodique. Finalement, la solution de condition initiale  $x(0) = 0$  est  $x(t) = \tan t$  dont l'intervalle maximal de définition est  $I = ]-\pi/2, \pi/2[$ .

2) Dans le cas  $P(x) = x^2 - 4x + 3$ , l'équation s'écrit  $x' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ .

a) Les solutions stationnaires sont donc  $x(t) = 1$  et  $x(t) = 3$ .

b) Soit la solution  $x(t)$  de condition initiale  $x(0) = 2$  et définie sur un intervalle  $I = ]a, b[$  contenant 0. On a  $1 < x(0) < 3$  donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $x(t) > 1 \forall t \in I$  sinon,  $x(t)$  étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il y aurait un  $t_0 \in I$  avec  $x(t_0) = 1$  et donc  $x(t)$  serait la solution stationnaire  $x(t) = 1$  ce qui n'est pas le cas ( $x(0) = 2$ ). Même raisonnement pour montrer que  $x(t) < 3 \forall t \in I$ .

Donc on sait que  $1 < x(t) < 3 \forall t \in I$ , ce qui implique en particulier que la solution  $x(t)$  est bornée. Comme de plus on a  $P(x) < 0$  pour  $1 < x < 3$ , il vient  $x'(t) = P(x(t)) < 0$  et donc la solution  $x(t)$  est strictement décroissante sur son intervalle de définition  $I$ .

**Exercice 2.** 1)2) Les valeurs propres sont données par

$$\begin{vmatrix} 2a-1-\lambda & 2(1-a) \\ a-1 & 2-a-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2a+1)(\lambda+a-2) + 2(a-1)^2 = (\lambda-1)(\lambda-a) = 0$$
 ce sont donc 1 et

$a$ . Le vecteur  $(x, y)$  est vecteur propre de valeur propre  $\lambda$  si on a  $\begin{pmatrix} 2a-1-\lambda & 2(1-a) \\ a-1 & 2-a-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ .

On trouve ainsi  $(a-1)(x-y) = 0$  pour la valeur propre 1 et  $(a-1)(x-2y) = 0$  pour la valeur propre  $a$ . Pour toute valeur de  $a$ , les vecteurs  $(1, 1)$  et  $(2, 1)$  forment une base de vecteurs propres respectivement pour les valeurs propres 1 et  $a$  et donc la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est telle que  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ .

3) Le système différentiel en posant  $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  s'écrit  $Y' = AY$  et en faisant le changement d'inconnu  $Y(t) = PZ(t)$  où  $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$  s'écrit  $PZ' = APZ$  équivalent à  $Z' = P^{-1}APZ = DZ$  (en

multipliant à gauche par  $P^{-1}$ ). Dans le cas présent  $A$  est la matrice pour le cas  $a = -1$  et donc  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Donc  $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be^t \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$  d'où  $Y(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} be^t + 2ce^{-t} \\ be^t + ce^{-t} \end{pmatrix}$ .

La condition initiale  $x(0) = b + 2c = 3$  et  $y(0) = b + c = 2$  fixe les constantes  $b = c = 1$ .

Dans les coordonnées propres  $u, v$ , la courbe solution a pour équation implicite  $uv = bc = 1$  c'est donc une branche d'hyperbole.

4)  $u'(t) = u(t) \iff u(t) = be^t$  et  $v'(t) - tv(t) = t$  a pour solution sans second membre  $v(t) = Ce^{t^2/2}$  on trouve la solution avec second membre en posant  $v(t) = C(t)e^{t^2/2}$  (variation de la constante  $C$ ).

On a  $C'(t)e^{t^2/2} = t \iff C'(t) = te^{-t^2/2} = -(e^{-t^2/2})' \iff C(t) = -e^{-t^2/2} + \text{Cte}$  donc

$v(t) = (-e^{-t^2/2} + c)e^{t^2/2} = -1 + ce^{t^2/2}$  où  $c$  est une constante.

5) Avec les mêmes notation qu'en 3) le système  $(\Sigma)$  s'écrit  $Y' = AY + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$  où  $A = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix}$

(la matrice  $A$  du début pour  $a = t$ ) qui en posant encore  $Y(t) = PZ(t)$  où  $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$  devient

$PZ' = APZ + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$  équivalent à  $Z' = DZ + P^{-1} \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$  (en multipliant à gauche par  $P^{-1}$ ). On vérifie

que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et donc, résoudre  $(\Sigma)$  revient à résoudre  $Z' = DZ + P^{-1} \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$

qui est le système  $(S)$ . La solution générale de  $(\Sigma)$  est donc  $Y(t) = P \begin{pmatrix} be^t \\ -1 + ce^{t^2/2} \end{pmatrix}$  où  $b, c \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** 1)  $x_0(t) = t$  est solution particulière de  $(E)$ .

2) En posant  $x(t) = C(t)t$  (variation des constantes), on a

$$t^2(C''(t)t + 2C'(t)) - (t^2 + 2t)x' + (t+2)C'(t)t = t^3(C''(t) - C'(t)) = 0 \iff C''(t) - C'(t) = 0$$

car  $t > 0$ . Donc  $C'(t) = ce^t$  d'où  $C(t) = ce^t + b$  et finalement  $x(t) = bt + cte^t$ .