MAT404 - Année universitaire 2017-2018
Mathématiques

Feuille d'exercices 5 : séries de Fourier, séries en sin et cos.

Exercice 1. Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
1. Montrer que si f est paire alors sa série de Fourier est une série de cosinus.
2. Montrer que si f est impaire alors sa série de Fourier est une série de sinus.

Exercice 2.

1. Trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$.
2. En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de f, c_k. Vérifier qu'on a bien $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}$.
3. En déduire, en utilisant le théorème de Parseval, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3.

1. Trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |x|$.
2. En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de f, c_k. Vérifier qu'on a bien $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}$.
3. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4. Soit de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |\sin(x)|$. Calculer le développement en série de Fourier de f.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \cos(ax)$. Calculer le développement en série de Fourier de f et montrer que

$$\frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

Exercice 6. Déterminer le développement en série de sinus de la fonction

$$f :]0, \pi[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$$

Exercice 7. Déterminer le développement en série de cosinus de la fonction

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si } x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$