MAT404 - Année universitaire 2017-2018.
Mathématiques

Feuille d'exercices 4 : produits scalaires et bases orthonormées.

Exercice 1. Pour chaque matrice A, donner la forme bilinéaire symétrique ϕ dont A est la matrice dans la base canonique. Trouver une base orthogonale pour ϕ. Existe-t-il une base ϕ-orthonormée ? La forme ϕ est-il un produit scalaire ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.
Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?

1. Sur $M_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
2. Sur $M_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$.
3. Sur $\mathbb{R}[x]$, $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^x P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x$.
4. Sur $\mathbb{R}^3$, la forme polaire de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.
5. Sur $\mathbb{R}^3$, la forme polaire de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Exercice 3.
Démontrer les relations suivantes dans un espace vectoriel euclidien :

1. $||x + y||^2 - ||x - y||^2 = 4x \cdot y$.
2. $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Exercice 4.
Utiliser la méthode de Gramm-Schmidt pour orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ avec son produit scalaire usuel la base (e_1, e_2, e_3), où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.
Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\rangle$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base pour V et soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$ la base produite en appliquant l'algorithme de Gramm-Schmidt à $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit P la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ vers $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Montrer que P est triangulaire supérieure.

Exercice 6.
Pour chaque espace euclidien E ci-dessous muni du produit scalaire ϕ, appliquer la méthode de Gramm-Schmidt à la famille $\mathcal{F}$ afin de produire une base orthonomée pour $\langle\mathcal{F}\rangle$. Calculer la projection orthogonale de $v \in E$ sur $\langle\mathcal{F}\rangle$. Donner des équations définissant $\langle\mathcal{F}\rangle$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, ϕ le produit scalaire canonique, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $E=\mathbb{R}^4$, ϕ le produit scalaire canonique, $\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

3. $E=\mathbb{R}^3$, $\phi(x,y)=3x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2+3x_3y_3$, $\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

4. $E=\mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P,Q)=\int_{-1}^{1}P(X)\,Q(X)dX$, $\mathcal{F}=(1,X,X^2)$, $v=X^3$.

5. $E=\mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P,Q)=\int_{0}^{1}P(X)\,Q(X)dX$, $\mathcal{F}=(1,X,X^2)$, $v=X^3$.

Exercice 7. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x,y)=4x^2+xy+y^2$.

1. Démontrer que q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ pour ce produit scalaire. On pourra utiliser deux méthodes pour y parvenir : soit appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, soit utiliser la réduction de Gauss de q.

Exercice 8. Considérons sur $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique q, définie par

$$q(x,y,z)=x^2+4xy+5y^2-2yz+4z^2.$$

1. Démontrer que la forme bilinéaire associée à q est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ q-orthonormale.

Exercice 9.

Nous considérons l'espace $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ des fonction continues sur $[-\pi,\pi]$, à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que si m et n sont des entiers distincts alors les fonctions $x\mapsto\cos(nx)$, $x\mapsto\cos(mx)$, $x\mapsto\sin(nx)$ et $x\mapsto\sin(mx)$ sont deux à deux orthogonales pour ce produit scalaire.
2. Calculer $\|x\mapsto\cos(nx)\|$ et $\|x\mapsto\sin(nx)\|$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.
3. Calculer la projection orthogonale de la fonction $x\mapsto x$ sur le sous-espace de $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $1,\cos,\sin,x\mapsto\cos(2x),x\mapsto\sin(2x)$.

Exercice 10.

Nous considérons l'espace $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-1,1]$, à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

1. Utiliser la méthode de Gramm-Schmidt afin de produire une base orthonormée pour le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]\subset\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

2. Calculer la meilleure approximation polynomiale (au sens de la distance associée au produit scalaire $\langle\ ,\rangle$) de degré inférieur ou égal à 2 des fonctions suivantes : exp, cos et $x \mapsto \sqrt{x+1}$.

Exercice 11.
Soit P une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que la matrice ${}^tPP$ est symétrique.
2. Préciser, dans la base canonique $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice de la forme quadratique associée au produit scalaire usuel (canonique). Que peut-on dire de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ pour cette forme quadratique ?
3. Soit q la forme quadratique définie, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par la matrice ${}^tPP$.
   (a) Pour tout vecteur colonne X, dont les coordonnées sont exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, exprimer matriciellement la valeur $q(X)$.
   (b) Démontrer que q est une forme quadratique définie positive.
   (c) En déduire, en fonction de P et des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$, une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12.
Soit $(V, \langle\ ,\rangle)$ un espace prehilbertien et soit $W \subset V$ un sous-espace de dimension finie. Soit p_W la projection orthogonale sur W. Montrer que

1. $p_W(v) = v$ si et seulement si $v \in W$
2. $p_W \circ p_W = p_W$
3. $p_W(v) = 0$ si et seulement si $v \in W^\perp$.

Exercice 13. Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver les nombres a et b tels que $y = ax + b$ soit la meilleure droite d'approximation pour les valeurs relevées :

1. $(x = 1, y = 1), (x = 2, y = 3), (x = 3, y = 2)$.
2. $(x = 1, y = 0), (x = 2, y = 5), (x = 3, y = 7)$.

Exercice 14.
Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver la fonction $x \mapsto g(x) = a + b\cos(x) + c\cos(2x)$ qui minimise la distance

$$d(g, x \mapsto x^2)$$

dans l'espace $C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f_1, f_2\rangle = \displaystyle\int_\pi^\pi f_1(t)f_2(t)dt$.

Exercice 15.

1. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ un famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $P = (v_1|v_2|\ldots|v_n)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les v_i. Montrer que $({}^tPP)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$, où $\langle -, -\rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit E un espace euclidien et soit B_1 une base orthonormée pour E. Soit B_2 une autre base pour E. Montrer que B_2 est orthonormée si et seulement si la matrice de changement de la base P est une matrice orthogonale.

Exercice 16. Soit f une endomorphisme linéaire d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle -, -\rangle$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par $\phi(v, w) = \langle v, f(w)\rangle$ est une application bilinéaire.
2. Soit B une base de E. Soit M la matrice de l'application linéaire f dans la base B. Soit N la matrice de l'application bilinéaire ϕ dans la base B. Montrer que si B est une base orthonormée alors $M = N$.
3. Montrer que réciproquement si B n'est pas orthonormée alors $M \neq N$.

Exercice 17. Montrer que le produit de deux réflexions dans $\mathbb{R}^2$ est une rotation dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. Pour chaque matrice symétrique 3×3, trouver une base B_1 de $\mathbb{R}^3$, composée de vecteurs propres de A_i, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. Pour chaque forme quadratique q, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ qui est q-orthogonale et orthonormée pour les produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

1. $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$
2. $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2\sqrt{2}xz + 4\sqrt{2}yz.$