Exercice 1. Pour chaque espace vectoriel V, dire si oui ou non la famille F d'éléments de V est une base de V.

$$(1) V = \mathbb{R}^3, F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2) V = \mathbb{R}^3, F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(3) V \subset \mathbb{C}^3, V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0 \right\}, \quad F = \{ \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

$$(4) V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{X^2 - 3X + 1, X^2 + 3X - 4, 2X^2 - 3\}.$$

$$(5) V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}.$$

Lorsque F est bien une base, donner les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (pour 1,2 et 3) ou du polynôme $a + bX + cX^2$ (pour 4 et 5) par rapport à F.

Exercice 2. Pour chaque espace vectoriel V, dire si oui ou non la partie $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \right\}$.
2. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x + y - iz = 2 + 3i \right\}$.
3. $V = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, $W = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) | f'' + f' = 0\}$.
4. $V = \mathbb{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | (P(3))^2 = P(2)\}$.

Lorsque W est bien un sous-espace vectoriel, donner une base de W et calculer les coordonnées d'un élément arbitraire de W dans cette base.

Exercice 3. Pour quelles valeurs de k le système

$$\begin{cases} kx + (1+i)y = 1 \\ (1+i)x + ky = 1 \end{cases}$$

admet-il a) aucune solution ?
b) une solution unique ?
c) une infinité de solutions ?

Exercice 4. Calculer le noyau et l'image de chaque matrice.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Démontrer que les équations de la chaleur et des ondes sont bien des équations linéaires.

Exercice 7. Soit $f : V \to V'$ une application linéaire entre deux espaces vectoriel. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de V et V'.

Exercice 8. . Pour chaque application, indiquer si oui ou non elle est linéaire. Si oui, en donner le noyau et l'image.

1. L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ z+1 \end{pmatrix}$.
2. L'application de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$ donnée par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ix-iy \\ -iy-z \\ ix+z \end{pmatrix}$.
3. La fonction ϕ qui envoie $C^\infty([0,1],\mathbb{C})$ sur lui-même donnée par
$$\phi(f) = f'.$$
Nous rappelons que $C^\infty([0,1],\mathbb{C})$ est l'espace de fonctions sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont dérivables à tous ordres.
4. La fonction $\phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ donnée par $\phi(P) = P' - XP$.
5. La fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par projection sur l'axe des x.
6. La fonction de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ donnée par rotation d'un angle θ autour de l'origine.

Exercice 9. Montrer que les trois fonctions suivantes forment une famille liée dans l'espace $C^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$x \mapsto e^{ix} \quad , \quad x \mapsto \sin(x) \quad , \quad x \mapsto e^{-ix}.$$

Donner la dimension de $\mathrm{Vect}(e^{ix}, \sin(x), e^{-ix})$.

Exercice 10. Soit n réels distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Montrer que la famille de fonctions $(e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x})$ est libre dans l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_0, \ldots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour chaque i, le degré de P_i soit i. Montrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 12. On se place dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$ des fonctions polynômes de degré au plus 3.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_3[X]$. Prouver que ce dernier est de dimension 3 et en préciser une base.
2. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$? Qu'en est-il de l'ensemble des polynômes de degré égal à 2 ?

Exercice 13.

1. On considère l'équation différentielle $\theta'' + \omega^2\theta = 0$. Montrer que l'ensemble des fonctions du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. En donner une base et la dimension.
2. On considère l'équation différentielle $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$. Est-ce que l'ensemble des fonctions du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$?

Exercice 14.

Nous considérons $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? En préciser une base.

Exercice 15.

On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. Un polynôme P de $\mathcal{P}$ sera noté $P(X) = a + bX + cX^2$. Nous admettrons que $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{P}$? En donner une base.
2. On considère les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ suivants :
   (a) $W_0 = \{P \in \mathcal{P} / P(0) = 3\}$,
   (b) $W_1 = \{P \in \mathcal{P} /$ P n'a pas de racine réelle$\}$ et
   (c) $W_2 = \{P \in \mathcal{P} / a = 0\}$.

   Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}$? Pour ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, en donner une base et donner le vecteur des coordonnées d'un polynôme P arbitraire dans cette base.
3. De même, on considère les applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :
   (a) $f_0(P) = P(3)$,
   (b) $f_1(P) = d$ $(d \in \mathbb{R})$,
   (c) $f_2(P) = P'(1)$,
   (d) Si $P(X) = a_P + b_P X + c_P X^2$, on pose $f_3(P) = a_P \cdot a + b_P \cdot b + c_P \cdot c$ $((a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$,
   (e) $f_5(P) = (a_P + b_P + c_P)^2$.

   Lesquelles sont des applications linéaires ?