

**Exercice 1.**

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Démontrer par récurrence sur  $k$  la formule :  $1 + \lambda + \dots + \lambda^k = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$ .

**Exercice 2.** Déterminer si les séries suivantes convergent ou non (utiliser une comparaison).

1.  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$
2.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{-1/2}}{2^n}$
3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
4.  $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n!}$

**Exercice 3.** Pour chaque série ci-dessous, déterminer si elle converge.

1.  $(\sum_{n \geq 1} e^{\frac{1}{n^2}} - \cos(\frac{1}{n}))$
2.  $(\sum_{n \geq 1} n^{\frac{3}{2}}(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1))$
3.  $(\sum_{n \geq 1} \frac{1 - \cos(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})})$
4.  $(\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n^\alpha} - \sqrt{(n-1)^\alpha}))$  (selon les valeurs de  $\alpha$ ).
5.  $(\sum_{n \geq 1} \sin(\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})))$
6.  $(\sum_{n \geq 1} \log(1 + \frac{1}{n}) - \log(1 - \frac{1}{n}))$
7.  $(\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1})$
8.  $(\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n+1}})$
9.  $(\sum_{n \geq 1} n \ln(1 + \frac{1}{n}))$
10.  $(\sum_{n \geq 1} \frac{1 - n \ln(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}})$

**Exercice 4.**

On considère dans cet exercice des séries de la forme  $(\sum_{n \geq 1} n^\alpha \lambda^n)$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $|\lambda| < 1$ .

1. En utilisant une comparaison, montrer que si  $\alpha \leq 0$  alors cette série converge.
2. Quelle est la limite quand  $n \rightarrow \infty$  de  $n^\alpha \lambda^{n/2}$  ?
3. Justifier l'existence d'une constante  $C$  telle que  $n^\alpha \lambda^n \leq C \lambda^{n/2}$  pour tout  $n$ . En déduire que pour tout  $\alpha$  et tout  $\lambda$  tel que  $|\lambda| < 1$  la série  $(\sum_{n \geq 1} n^\alpha \lambda^n)$  converge.
4. En déduire que pour tout polynôme  $P$  et tout  $\lambda$  tel que  $|\lambda| < 1$  la série  $(\sum_{n \geq 1} P(n) \lambda^n)$  converge.

**Exercice 5.**

On considère dans cet exercice des séries de la forme  $(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$  avec  $\alpha, \beta$  des nombre réels strictement positifs.

1. Par comparaison avec  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ , montrer que cette série converge lorsque  $\alpha > 1$ .
2. On suppose maintenant  $\alpha < 1$ . Quelle est la limite quand  $n \rightarrow \infty$  de  $n^{\alpha-1} \log(n)^\beta$  ?
3. En supposant toujours que  $\alpha < 1$ , démontrer l'existence d'une constante  $C$  telle que pour tout  $n$   $\frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta} \geq \frac{C}{n}$ .

En déduire que dans ce cas la série  $(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$  diverge quelque soit  $\beta$ .