Exercice 1

Donner le détail des calculs avec Bézout de la décomposition en éléments simples de :

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-4)(x-1)}$$

en déduire :

- une primitive de f
- le coefficient de x^n du développement en séries entières de cette fraction en 0.

Exercice 2

Factoriser en mode réel et complexe le polynôme $P(x) = x^6+x^4+x^3+x^2+x+1$. Quels sont les degrés des facteurs ? Même question mais en remplacant P par `evalf(P)`. En regroupant les racines de P, retrouver la factorisation exacte de P dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Trouver une racine du polynôme P ci-dessus en appliquant la méthode de Newton, éliminer cette racine par division euclidienne, chercher une autre racine, etc. jusqu'à obtenir la factorisation complète de P. Comparer la valeur de P et celle obtenue en développant le produit des $X-$racine.

Pour les filières infos et info-maths : Écrire une fonction qui cherche une racine d'un polynôme en utilisant la méthode de Newton. Ajouter un test pour être sur que la racine du polynôme est simple. Tester avec le polynôme P ci-dessus.

Bonus : modifier la fonction ci-dessus pour trouver toutes les racines (lorsqu'on trouve une racine, on divise le polynôme par $X-\alpha$, et on relance la recherche de racines sur le polynôme obtenu).

Exercice 4

Écrire une fonction qui détermine les racines rationnelles d'un polynôme P à coefficients entiers (elles sont de la forme p/q où q divise le coefficient dominant de P et $\pm p$ divise son coefficient de plus bas degré). Tester avec le polynôme $P = 12x^5+10x^4-6x^3+11x^2-x-6$.

Exercice 5

En utilisant les suites de Sturm, déterminer le nombre de racines du polynôme P ci-dessus sur l'intervalle $[-3,0]$. Même question sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 6

Représenter sur un même graphe $\cos(x)$ et son polynôme interpolateur de Lagrange en utilisant les 7 points d'abscisses équidistantes $\{0,\pi/6,...,\pi\}$. Donner une majoration de l'erreur entre ce polynome et la fonction cos en un réel x, représenter graphiquement cette erreur pour $x \in [0,\pi]$. Où l'erreur est-elle la plus grande ?

Exercice supplémentaire

Écrire un programme calculant les coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange par l'algorithme des différences divisées.