Mat249 TP3 : Séries entières 2007/8

Exercice 1.

1. Rappeler le développement de Taylor $T_{2n}(x)$ au voisinage de $x = 0$ de $f(x) = \cos(x)$ à l'ordre $2n$.
2. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions f et T_2, T_4, T_6, T_8
3. Graphiquement on voit que $T_8(x)$ approche $\cos(x)$: sur quel intervalle cette approximation vous paraît-elle acceptable ?
4. Donner une majoration du reste $R_{2n}(x)$ du développement de Taylor de f à l'ordre $2n$, où $f(x) = T_{2n}(x) + R_{2n}(x)$.
5. On prend $T_8(x)$ comme valeur approchée de $\cos(x)$ pour $x \in [-1, 1]$.
   Donner une majoration indépendante de x de l'erreur commise.
   (A titre d'illustration, tracer la différence $T_8(x) - \cos(x)$.)
6. En déduire un encadrement de $\cos(1)$.

Exercice 2. On veut approcher $\sin(x)$ à `1e-6` près en utilisant des développements en séries entières.

1. Déterminer le plus petit k tel que :
$$T_{2k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$
   réalise cette approximation sur $[0, \pi/4]$.
2. Écrire une fonction qui calcule une valeur approchée à `1e-6` de $\sin(x)$ sur $[-100, 100]$ en justifiant et en effectuant les étapes suivantes :
   – on retire un multiple entier de π (obtenu par arrondi de x/π) pour se ramener à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ (on discutera sur l'erreur commise)
   – si x est négatif, on remplace x par $-x$ (que devient $\sin(x)$?)
   – lorsque $x \in [0, \pi/4]$, on utilise le développement en séries ci-dessus.
   – lorsque $x \in [\pi/4, \pi/2]$, on se ramène au développement de l'exercice précédent en appliquant la formule $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$.
3. Afin de tester votre fonction f et d'attraper d'éventuelles erreurs grossières, faites afficher le graphe de f, disons sur l'intervalle $[-10, 10]$, puis le graphe de la différence $f - \sin$ où $\sin$ est la fonction déjà implémentée dans Xcas.

Exercice 3

1. Pour $x > 0$ exprimer $\arctan(-x)$ en fonction de $\arctan(x)$. Calculer la dérivée de $\arctan(x) + \arctan(1/x)$, en déduire $\arctan(1/x)$ en fonction de $\arctan(x)$ pour $x > 0$. Montrer que le calcul de $\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$ peut se ramener au calcul de $\arctan(x)$ sur $[0, 1]$.
2. Rappeler le développement en séries entières de $\arctan(x)$ en $x = 0$, et son rayon de convergence. Soit $\alpha \in [0, 1]$, montrer que
$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} \leq \arctan(\alpha) \leq \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}$$
   en déduire que la méthode de Newton appliquée à l'équation $\tan(x) - \alpha = 0$ avec comme valeur initiale $\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}$ est une suite décroissante qui converge vers $\arctan(\alpha)$.

3. Déterminez par cette méthode une valeur approchée à `1e-8` près de $\pi/4 = \arctan(1)$.
4. On pourrait calculer $\pi/4$ avec la même précision en utilisant le développement en séries de la formule de Machin
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$$
Combien de termes faudrait-il calculer dans le développement des deux arctangentes ?

Exercice 4

1. Écrire le développement en séries entières au voisinage de $x = 0$ de :
$$g(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} - 1}{x}$$
2. On veut calculer une valeur approchée de
$$I = \int_0^1 g(x)\, dx$$
En utilisant le développement de g, écrire I sous la forme d'une série $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$.
3. Soit $R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} v_j$ le reste de cette série. Donner une majoration de $|R_n|$.
4. En déduire un encadrement de I faisant intervenir $\sum_{j=0}^{n} v_j$. Calculer explicitement cet encadrement lorsque $n = 10$.

Exercice 5

Cet exercice reprend les calculs de $\ln(x)$ et $\exp(x)$ discutés en cours dans l'objectif de les illustrer par vos propres expériences sur ordinateur.

1. La série alternée $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ tend vers $\ln 2$, et les termes consécutifs donnent des encadrements $s_{2m+1} < \ln 2 < s_{2m}$. Jusqu'à quel rang faut-il aller afin de garantir un encadrement à 10^{-5} près ? Calculer cette approximation de $\ln 2$ avec Xcas. Même question pour 10^{-10}. Qu'observez-vous ?
On considère ensuite la série $\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)3^{2k+1}}$. Jusqu'à quel rang faut-il aller afin de garantir une approximation à 10^{-5} près ? Calculer cette approximation de $\ln 2$ avec Xcas. Même question pour 10^{-10}. Conclusion ?
2. On se propose d'approcher $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour $x = -32$. Avant de se lancer dans ce calcul, estimer l'ordre de grandeur de $\exp(-32)$ puis l'ordre de grandeur des plus grands termes dans la somme.
Jusqu'à quel rang faut-il aller afin de garantir une approximation à 10^{-20} près ? Calculer cette approximation de $\exp(-32)$ avec Xcas, d'abord en utilisant la précision standard de 53 bits, soit 16 décimales. Quel problème observez-vous ? On pourra augmenter la précision des nombres flottants utilisés : quelle précision est nécessaire, environ, pour raisonnablement effectuer ce calcul ?
Est-ce que ces problèmes se posent pour l'approximation de $a_0 = \exp(-1)$? Comment en déduire une approximation de $\exp(-32)$ avec un minimum d'opérations ?