Mat249 TP2 : Suites récurrentes 2008/9

On souhaite étudier des suites récurrentes (u_n) définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0, où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par exemple $f(x) = \sqrt{2+x}$.

Exercice 1

1. En utilisant le tableur de Xcas (menu Edit->Ajouter->tableur), représenter les premiers termes de la suite $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ avec $u_0 = 0.1$ ou $u_0 = 1/10$ (menu Math->suite récurrente du tableur).
2. Calculer ensuite en mode exact et approché les 10 premiers termes de la suite : vous pouvez définir la cellule `A1` par `=sqrt(2+A0)`, puis cliquer sur `A1`, puis appuyer en bas à droite de la cellule `A1` lorsque le curseur souris change de forme et relâcher à la fin de la zone où vous voulez copier la formule définissant `A1`.
3. Quels sont les avantages et inconvénients d'utiliser une valeur initiale exacte ou approchée ?

La feuille de calcul précédente donne une idée de la convergence de la suite, mais ne donne aucune information quantitative sur la vitesse de convergence. Au lieu de calculer un nombre fixé de termes de la suite, on va écrire un programme avec un test d'arrêt selon la valeur $|u_{n+1} - u_n|$ comparé à un nombre positif (petit) ε fixé à l'avance. Pour éviter que le programme ne boucle indéfiniment lorsque la suite ne converge pas (ou converge trop lentement pour la machine), on fixe aussi un nombre maximal d'itération N.

Exercice 2

Écrire un programme `iter` prenant en argument la fonction f, la valeur de u_0, de N et de ε, et qui s'arrête dès que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

– $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$
– le nombre d'itérations dépasse N.

Dans le premier cas le programme renverra la valeur de u_{n+1}, dans le second cas une séquence composée de u_N et de N.
Tester votre programme avec $f(x) = \sqrt{2+x}$ et $f(x) = x^2$.

On suppose que la fonction f satisfait aux hypothèses du théorème du point fixe. On notera $k < 1$ la constante de contractance. On peut alors trouver un encadrement de la limite l de la suite (u_n) en fonction de u_n, u_{n-1} et k.

Exercice 3

Écrire un programme `iter_k` prenant en argument la fonction f, la valeur de u_0, le nombre maximal d'itérations N, la constante k et l'écart toléré ϵ, et qui s'arrête dès que $|u_n - l| \leq \epsilon$ ou $n > N$.

Vérifier les hypothèses du théorème du point fixe pour $f(x) = 2\cos(x/3)$ sur $[0, 2]$ et expliciter une constante de contractance k. Déterminer une valeur approchée de la limite de (u_n) à 10^{-3} près en utilisant la fonction `iter_k`.

La convergence de ces suites est en général linéaire, *le nombre de décimales exactes augmente de la même valeur à chaque itération. Par contre lorsqu'on est prêt d'une racine, la méthode de Newton permet en gros de multiplier par deux le nombre de décimales à chaque itération.*

Exercice 4

1. Donner une suite itérative obtenue par la méthode de Newton convergeant vers $\sqrt{3}$.

2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \frac{3x+3}{x+3}$$

admet $\sqrt{3}$ pour point fixe. Trouver un intervalle I contenant $\sqrt{3}$ sur lequel les hypothèses du théorème du point fixe sont satisfaites et expliciter une constante de contractance k.

3. Comparer au tableur la vitesse de convergence des 10 premiers termes des deux suites (calculez les avec par exemple 100 chiffres significatifs et faites les différence entre 2 termes successifs).

4. Créez un programme `iter_n` similaire à `iter_k` mais appliquable à la méthode de Newton, i.e. prenant en argument la fonction f telle que $f(r) = 0$, u_0, N, ϵ et une valeur inferieure à $|f'(r)|$ (la fonction dérivée de f se définit par `function_diff(f)`).

5. En utilisant la fonction `iter`, trouver un encadrement de $\sqrt{3}$ à 10^{-6} près par les deux méthodes (on pourra prendre une valeur initiale approchée puis entière exacte pour avoir une valeur numérique approchée puis une fraction). Combien d'itérations sont nécessaires ?

Dans certains cas, la fonction f n'est pas contractante, mais on peut réécrire l'équation à résoudre sous une autre forme avec une fonction contractante, par exemple en utilisant une fonction réciproque.

Exercice 5

Donner un encadrement à 10^{-6} près d'une racine de l'équation $\tan(x) = x$ sur l'intervalle $]3\pi/2, 5\pi/2[$ en utilisant une méthode de point fixe.