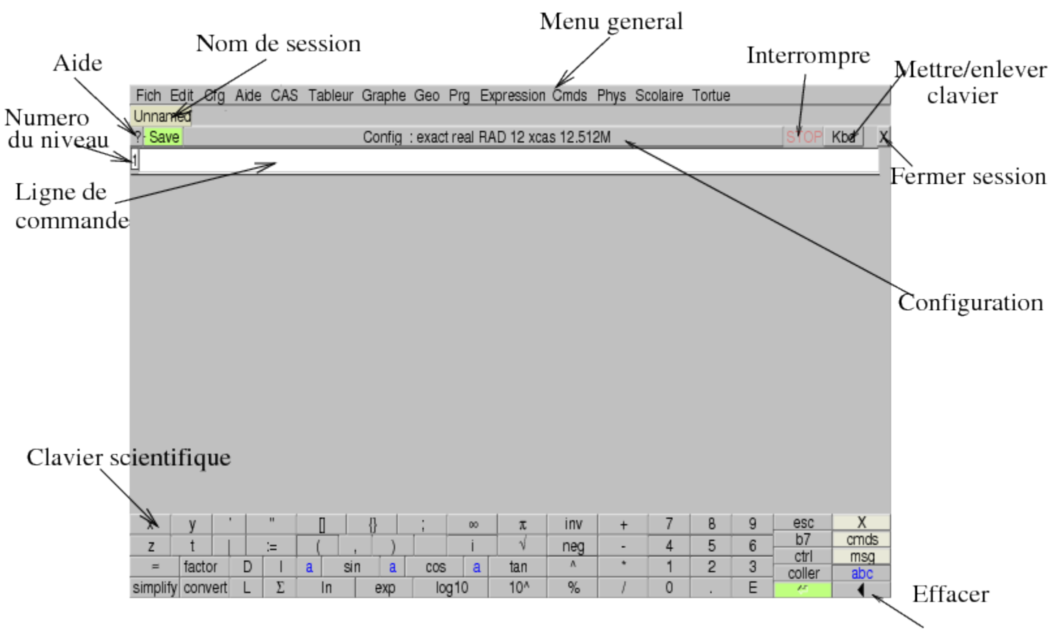
1 Introduction

Un logiciel de calcul formel permet de faire des manipulations algébriques sans avoir à effectuer d'approximation numérique, par exemple calculer la dérivée ou une des primitives d'une fonction, résoudre certaines équations différentielles, etc. Il permet également de faire des calculs numériques, ainsi que des représentations graphiques, de la géométrie, ... Au DLST, nous utiliserons Xcas qui est un logiciel libre (donc gratuit), chez vous vous pouvez l'utiliser depuis votre navigateur (sur PC/Mac/tablette)
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/xcasfr.html`
ou le télécharger sur PC/Mac depuis l'URL
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`



Pour lancer Xcas au DLST : allumez le PC et l'écran si nécessaire. Connectez-vous sur Windows, session E (choix par défaut) puis entrez votre `nom_d_utilisateur_ujf` suivi de votre `mot_de_passe` puis cliquez sur l'icone `Xcas` du bureau.
Lors de la première utilisation, choisissez `Xcas` lorsqu'on vous demande de choisir une syntaxe (sauf si vous connaissez le langage Maple). Vous pouvez ensuite cliquer sur Oui pour faire apparaitre le tutoriel dans le navigateur, ou le retrouver depuis le menu Aide, Debuter en calcul formel.

2 TP 1

Si le tutoriel n'est pas chargé dans le navigateur, vous pouvez l'ouvrir depuis le menu Aide, Debuter en calcul formel. Suivez les instructions données dans la section Pour commencer et la section Les objets du calcul formel.

Ensuite vous pouvez continuer la lecture du tutoriel ou passer aux exercices du TP, en revenant au tutoriel ou en consultant le menu Outils, le menu Cmds, ou l'aide de Xcas pour trouver les bonnes commandes. **Si vous devez ré-utiliser un résultat**, donnez-lui un nom de variable (par exemple `a:=...`). Pour libérer une variable de son contenu, utiliser `purge()`.

1. Simplifier les expressions suivantes :
$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad \frac{1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}, \quad e^{i\pi/6}, \quad \frac{e^{2\ln(x)+ln(3)}}{6x}, \quad \frac{\tan(3x)}{\tan(x)}-1$$
2. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{k=1}^{N} k, \ \sum_{k=1}^{N} k^2, \ \sum_{k=1}^{N} q^k$$
3. Faire afficher le polynôme $(x+3)^7 \times (x-5)^6$ selon les puissances décroissantes de x puis selon les puissances croissantes (il faudra modifier la configuration du CAS pour influencer la sortie de la commande `normal` ou `expand`).
4. Calculer les dérivées d'ordre 5 des fonctions (indication : utiliser la commande `diff` avec 3 arguments)
$$\sin(x^2), \ e^{\sin(x)}, \ \frac{\sin(x)}{\cos(x)-e^x}$$
5. Créer une figure dans le plan (menu Geo, nouvelle figure 2-d). Représenter dans le plan les points $A(1,2)$ et $B(-1,3)$ (`A:=point(1,2)`, voir le menu `Geo` pour les autres commandes), la droite $D=(AB)$, déterminer l'équation de D puis les coordonnées du point d'intersection de D et de la droite d'équation $y=3x$, puis le projeté orthogonal (menu Transformations) de $O(0,0)$ sur D, le symétrique de O par la symétrie d'axe D.
Même question dans l'espace (menu Fich, nouvelle session, puis Geo, figure 3-d) avec $A(1,2,-1)$ et $B(-1,3,3)$ et le plan P d'équation $z=x+2y+1$ et le projeté orthogonal de $O(0,0,0)$ sur D puis sur P, le symétrique de O par rapport à P.
6. Soit a un réel. Déterminez l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $u=(a,1), v=(2,a)$. La famille $\{u,v\}$ est-elle libre ? Indication pour la représentation graphique : créer une figure 2d, puis ajouter un paramètre (menu Edit), utiliser `u:=vecteur(a,1)`, de même pour `v`, puis `parallelogramme(0,u,u+v)`.
Même question dans l'espace pour les vecteurs $\{u=(1,a+1,a), v=(a,a,1), w=(-2,a,a+2)\}$ et le parallélépipède construit sur les vecteurs u, v et w. Indication pour la représentation graphique : créer une figure 3d, puis ajouter le paramètre `a` (menu Edit), utiliser `u:=vecteur(1,a+1,a)`, de même pour `v`, `w`, puis `parallelepipede([0,0,0],u,v,w)`.
7. Soit a un réel. Déterminer le produit mixte des vecteurs $u=(1,1,a), v=(1,a,1), w=(a,1,1)$. Pour quelles valeurs de a ces 3 vecteurs forment-ils une famille libre ? Discuter selon la valeur de a s'ils engendrent une droite, un plan ou $\mathbb{R}^3$, dans ce dernier cas donnez les composantes de $(1,2,3)$ dans la base $\{u,v,w\}$. Déterminer l'intersection des trois plans d'équation :
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ ax & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$
8. Complétez la famille $\{(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)\}$ en une base orthonormée directe B, et indirecte C. Calculer la matrice de passage M de la base orthonormée canonique à la base B. Soit le vecteur $v(1,2,3)$, déterminez les composantes de v dans B en utilisant le produit scalaire, vérifier le résultat.
9. Soit D la droite passant par $A(1,1,0)$ de vecteur directeur $u(1,1,1)$, D' la droite passant par $B(1,1,1)$ et $C(2,0,1)$, déterminez la distance entre D et D'. On pourra calculer un vecteur directeur v de la perpendiculaire commune, puis l'intersection du plan passant par A de vecteurs directeurs u et v avec D'... La commande `distance` permet de vérifier le résultat final. Illustrer par une figure dans l'espace.

10. Factoriser :
$$x^8 - 3x^7 - 25x^6 + 99x^5 + 60x^4 - 756x^3 + 1328x^2 - 960x + 256$$
$$x^6 - 2x^3 + 1, \quad x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 \quad x^5 + 3x + 1$$
Déterminer les racines dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ des trois premiers polynômes et leurs multiplicités.

11. Trouver les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{R}$
$$x^3 - 2x + 1 = 0, \ \ln(x) + \ln(x+1) = 2$$
Résoudre dans $\mathbb{C}$:
$$z + \overline{z} = 3, z^2 + (1+i)z + 1 - i = 0$$
Déterminer la valeur approchée des racines complexes du polynôme $x^5 + 2x + 1$.

12. Effectuer la division euclidienne du polynôme $R_0 = x^7 + x^5 + 5x - 3$ par $R_1 = x^3 + x^2 + 3x + 2$ et appeler le reste R_2. Recommencer en divisant R_1 par R_2 (reste R_3) puis R_2 par R_3 (reste R_4). Quel est le dernier reste non nul ? (C'est l'algorithme d'Euclide qui permet de calculer le PGCD des polynômes R_0 et R_1). Peut-on simplifier la fraction rationnelle R_0/R_1 ?

13. Développer $\sin(3x)$, linéariser l'expression obtenue et vérifier qu'on retrouve l'expression initiale. En déduire une primitive de $\sin(x)^3$. Retrouver le résultat en développant $((e^{ix} - e^{-ix})/(2i))^3$.

14. Suite géométrique dans $\mathbb{C}$
Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = qu_n$. Représentez les 10 premiers termes de la suite lorsque $q = 1 + i, i, (1-i)/3$. Donner la représentation polaire de u_n en fonction de n et expliquez le graphique.

15. Soit r la rotation de centre l'origine, et d'angle $\pi/6$. Calculer les images U et V des vecteurs $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$, en déduire M, la matrice de passage de la base $\{u, v\}$ à la base $\{U, V\}$. Calculez l'inverse de M et comparer avec la matrice de passage de $\{u, v\}$ vers la base $\{U', V'\}$ où U' et V' s'obtiennent à partir de u et v par rotation de centre l'origine et d'angle $-\pi/6$.

16. Soit s la similitude de centre l'origine, de rapport 2 et d'angle $\pi/6$ qui au point d'affixe z associe le point d'affixe
$$z' = 2e^{i\pi/6}z$$
Calculer les images U et V des vecteurs $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$, en déduire M, la matrice de passage de la base $\{u, v\}$ à la base $\{U, V\}$. Calculez l'inverse de M et comparer avec la matrice de passage de $\{u, v\}$ vers la base $\{U', V'\}$ où U' et V' s'obtiennent à partir de u et v par similitude de centre l'origine, de rapport 1/2 et d'angle $-\pi/6$.

17. Tracer sur une même figure le graphe de la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le graphe de la fonction arctan et la première bissectrice (d'équation $y = x$), et orthonormalisez la représentation. Vérifiez avec la commande `symetrie` que les deux graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

18. Calculer les intégrales et simplifiez le résultat :
$$\int \frac{1}{e^x - 1}\,dx, \quad \int \ln(2x+1)\,dx, \quad \int \frac{1}{x\ln(x)}\ln(\ln(x))\,dx, \quad \int x\sin(x)e^x\,dx, \quad \int \sin(x)^{10}\cos(x)^4\,dx$$
Vérifiez en dérivant les expressions obtenues. Interprétez les réponses du logiciel pour :
$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int e^{x^2}\,dx,$$

19. En utilisant la commande `ibpu` ou `ibpdv` (cf. l'aide en ligne de ces commandes dans le menu Index) détaillez les étapes du calcul de
$$\int x^3\ln(x)^2\,dx, \quad \int_1^2 x^2\ln(x), \quad \int_0^3 x^2\ln(x^2+1)\,dx$$
Calculez aussi les deux premières intégrales en utilisant le changement de variables $x = e^t$ (commande `subst(Int(...),x=exp(t)))`

20. Déterminer la valeur de :

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

En utilisant la commande `partfrac`, détaillez le deuxième calcul.

21. Soit G la parabole d'équation $y = x^2$. Représenter G, puis un point M sur G, puis la tangente T à la parabole au point M, puis la droite verticale D passant par M, puis la droite R symétrique de D par rapport à T, puis l'intersection I de R avec l'axe Oy. Faites bouger le point M, qu'observe-t-on pour I ? En faire une preuve en utilisant le calcul formel (on pourra définir un paramètre formel a depuis le menu Edit, définir M comme le point d'abscisse a et déterminer l'ordonnée de I en fonction de a). Pourquoi appelle-t-on foyer le point I ? (Penser à un rayon incident selon D se réflechissant sur un miroir parabolique selon G).

22. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' + 5y = te^{-t}\sin(t);\ y' + 5y = te^{-5t};\ y'' - 3y' + y = 0;\ y'' + y = \cos(t)$$

23. Trouver l'unique solution des équations différentielles :

$$y' + 5y = te^{-t}, y(0) = 1;\ y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1;\ y'' - 3y' + y = \cos(t), y(0) = 0, y'(0) = 0$$

24. Tracer sur une même figure les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ pour $y(0) = 1, 2, 3$. Quel est leur comportement lorsque x croit ? Même question pour les solutions de $y' = -2y$.
Même question pour les solutions de $y'' + y = 0$ vérifiant $y(0) = 1, 2, 3$ et $y'(0) = 0$. Même question pour les solutions de $y'' - 8y' + 10 = 0$ et de $y'' - 8y' - 10 = 0$.

3 TP2 : évaluation

Exercices tirés au sort du type des exercices ci-dessus ou d'un controle continu, avec des calculs parfois plus compliqués, les étudiants peuvent poser des questions comme dans un TP normal pendant la première partie de la séance, à la fin de la séance, l'enseignant regarde la session réalisée par le binôme (graphes, scripts) et pose éventuellement des questions. Au vu du déroulement de la séance, l'enseignant peut donner un bonus de 0.5 à 3 points à ajouter à l'une des notes de controle continu, ce bonus peut être différent entre les deux étudiants d'un binôme déséquilibré.

Pour vous entrainer vous pouvez aussi vérifier le résultats des exercices donnés en TD.