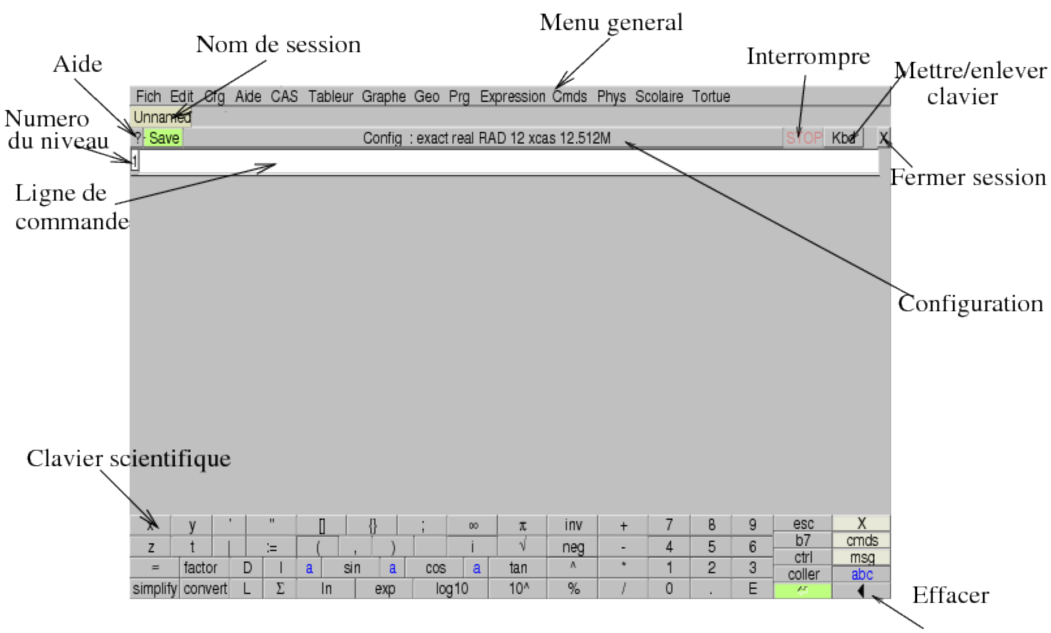
Ce TP se déroule en 2 séances d'une heure, une séance de prise en main mi-octobre et une séance d'évaluation fin novembre-début décembre.

1 Introduction

Un logiciel de calcul formel permet de faire du calcul littéral sans faire d'approximation numérique, par exemple calculer la dérivée ou une des primitives d'une fonction, résoudre certaines équations différentielles, etc. Il permet également de faire des calculs numériques, ainsi que des représentations graphiques, de la géométrie, ... Au DLST, nous utiliserons Xcas qui est un logiciel libre, chez vous vous pouvez l'utiliser gratuitement depuis votre navigateur (sur PC/Mac/tablette)
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/xcasfr.html`
ou le télécharger et l'installer sur PC Windows/Linux depuis l'URL
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`



Pour lancer Xcas au DLST : allumez le PC et l'écran si nécessaire. Connectez-vous puis cliquez sur l'icone `Xcas` du bureau.
Lors de la première utilisation, choisissez `Xcas` lorsqu'on vous demande de choisir une syntaxe. Vous pouvez ensuite cliquer sur Oui pour faire apparaitre le tutoriel dans le navigateur, ou le retrouver depuis le menu Aide, Debuter en calcul formel.

2 Liste d'exercices

Si le tutoriel n'est pas chargé dans le navigateur, vous pouvez l'ouvrir depuis le menu Aide, Debuter en calcul formel. Suivez les instructions données dans la section Pour commencer. Ensuite vous pouvez continuer la lecture du tutoriel ou passer aux exercices du TP, en revenant au tutoriel ou en consultant le menu Outils, le menu Cmds, ou l'aide de Xcas pour trouver les bonnes commandes. **Si vous devez ré-utiliser un résultat**, donnez-lui un nom de variable (par exemple `a:=...`). Pour libérer une variable de son contenu, utiliser `purge()`.

1. Simplifier les expressions suivantes :
$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad \frac{1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}, \quad e^{i\pi/6}, \quad \frac{e^{2\ln(x)+\ln(3)}}{6x}, \quad \frac{\tan(3x)}{\tan(x)}-1$$
2. Calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=1}^{N} k, \quad \sum_{k=1}^{N} k^2, \quad \sum_{k=1}^{N} q^k, \quad \sum_{k=0}^{N} kq^k, \quad \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} q^k$$
Les écrire sous une forme plus simple lorsque c'est possible, par exemple en factorisant (on peut aussi utiliser `powexpand`) tout ou partie de l'expression sélectionnée à la souris.
3. Faire afficher le polynôme $(x+3)^7 \times (x-5)^6$ selon les puissances décroissantes de x puis selon les puissances croissantes (il faudra modifier la configuration du CAS pour influencer la sortie de la commande `normal` ou `expand`).
4. Calculer les dérivées d'ordre 5 des fonctions (indication : utiliser la commande `diff` avec 3 arguments)
$$\sin(x^2), \; e^{\sin(x)}, \; \frac{\sin(x)}{\cos(x)-e^x}$$
Essayez de réécrire le résultat sous une forme le plus simple possible.
5. Donner le module (`abs`) et l'argument (`arg`) de $1+i, 3-4i, -1+\sqrt{3}i$, les représenter graphiquement avec la commande `point` et vérifier sur le graphique. Représenter les points du plan d'affixe $2e^{i\pi/4}$, $\sqrt{3}e^{i\pi/6}$ et donner leurs coordonnées (`coordonnees`). Vérifier le module et l'argument sur le graphique (pour orthonormaliser le repère, cliquer sur le bouton situé au milieu des flèches à droite du graphique).
6. Créer une figure dans le plan (menu Geo, nouvelle figure 2-d). Représenter dans le plan les points $A(1,2)$ et $B(-1,3)$ (`A:=point(1,2)`) la droite $D=(AB)$ (`D:=droite(A,B)`, voir le menu `Geo` pour les autres commandes), déterminer l'équation de D puis les coordonnées du point d'intersection de D et de la droite d'équation $y=3x$, puis le projeté orthogonal (menu Transformations) de $O(0,0)$ sur D, le symétrique de O par la symétrie d'axe D.
Pour faire une figure dans l'espace, utiliser le menu Fich, nouvelle session, puis Geo, figure 3-d. Si une partie de la fenêtre devient noire (carte graphique mal configurée), utilisez Xcas pour Firefox
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/xcasfr.html`.
Même question avec $A(1,2,-1)$ et $B(-1,3,3)$ et le plan P d'équation $z=x+2y+1$ et le projeté orthogonal de $O(0,0,0)$ sur D puis sur P, le symétrique de O par rapport à P.
7. Soit a un réel. Déterminez l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $u=(a,1), v=(2,a)$. Indication pour la représentation graphique : créer une figure 2d, puis ajouter un paramètre (menu Edit), utiliser `u:=vecteur(a,1)`, de même pour `v`, puis `P:=parallelogramme(0,u,u+v)`, vous pouvez ensuite faire varier le paramètre `a` à la souris. Utiliser `aire(P)` pour avoir l'aire en fonction de `a` et `evalf(aire(P))` pour avoir l'aire approchée. Déterminer en fonction de a si la famille $\{u,v\}$ est libre.
Même question dans l'espace pour les vecteurs $\{u=(1,a+1,a), v=(a,a,1), w=(-2,a,a+2)\}$ et le parallélépipède construit sur les vecteurs u,v et w. Indication pour la représentation graphique : créer une figure 3d, puis ajouter le paramètre `a` (menu Edit), utiliser `u:=vecteur(1,a+1,a)`, de même pour `v,w`, puis `parallelepipede([0,0,0],u,v,w)`.
8. Soit a un réel. Déterminer le produit mixte des vecteurs $u=(1,1,a), v=(1,a,1), w=(a,1,1)$. Indication : procéder comme dans l'exercice précédent, ou définir les vecteurs sans le représenter par la

commande `u:=[1,1a]`, on peut ensuite utiliser les instructions `dot` et `cross`. Pour quelles valeurs de a ces 3 vecteurs forment-ils une famille libre ? Discuter selon la valeur de a s'ils engendrent une droite, un plan ou $\mathbb{R}^3$, dans ce dernier cas donnez les composantes de $(1, 2, 3)$ dans la base $\{u, v, w\}$. Déterminer l'intersection des trois plans d'équation :

$$\begin{cases} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ ax & + & y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

9. Complétez la famille $\{(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)\}$ en une base orthonormée directe B, et indirecte C. Calculer la matrice de passage M de la base orthonormée canonique à la base B. Soit le vecteur $v(1, 2, 3)$, déterminez les composantes de v dans B en utilisant le produit scalaire, vérifier le résultat.
10. Soit D la droite passant par $A(1, 1, 0)$ de vecteur directeur $u(1, 1, 1)$, D' la droite passant par $B(1, 1, 1)$ et $C(2, 0, 1)$, déterminez la distance entre D et D'. On pourra calculer un vecteur directeur v de la perpendiculaire commune, puis l'intersection du plan passant par A de vecteurs directeurs u et v avec D'... La commande `distance` permet de vérifier le résultat final. Illustrer par une figure dans l'espace.
11. On considère les graphes F de e^x et G de e^{-x}, soient M et N les points de F et G d'abscisses $a \in \mathbb{R}$, et D et D' les tangentes en M et N. Que peut-on dire de ces 2 droites ? Soient P et Q les intersections avec l'axe des abscisses, déterminer la longueur PQ.
12. Soit G la parabole d'équation $y = x^2$. Représenter G, puis un point M sur G, puis la tangente T à la parabole au point M, puis la droite verticale D passant par M, puis la droite R symétrique de D par rapport à T, puis l'intersection I de R avec l'axe Oy. Faites bouger le point M, qu'observe-t-on pour I ? En faire une preuve en utilisant le calcul formel (on pourra définir un paramètre formel a depuis le menu Edit, définir M comme le point d'abscisse a et déterminer l'ordonnée de I en fonction de a). Pourquoi appelle-t-on foyer le point I ? (Penser à un rayon incident selon D se réflechissant sur un miroir parabolique selon G).
13. Factoriser :
$$x^8 - 3x^7 - 25x^6 + 99x^5 + 60x^4 - 756x^3 + 1328x^2 - 960x + 256$$
$$x^6 - 2x^3 + 1, \quad x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 \quad x^5 + 3x + 1$$
Déterminer les racines dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ des trois premiers polynômes et leurs multiplicités.
14. Trouver les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{R}$
$$x^3 - 2x + 1 = 0, \ \ln(x) + \ln(x + 1) = 2$$
Résoudre dans $\mathbb{C}$:
$$z + \overline{z} = 3, z^2 + (1 + i)z + 1 - i = 0$$
Déterminer la valeur approchée des racines complexes du polynôme $x^5 + 2x + 1$.
15. Effectuer la division euclidienne du polynôme $R_0 = x^7 + x^5 + 5x - 3$ par $R_1 = x^3 + x^2 + 3x + 2$ et appeler le reste R_2. Recommencer en divisant R_1 par R_2 (reste R_3) puis R_2 par R_3 (reste R_4). Quel est le dernier reste non nul ? (C'est l'algorithme d'Euclide qui permet de calculer le PGCD des polynômes R_0 et R_1). Peut-on simplifier la fraction rationnelle R_0/R_1 ?
16. Développer $\sin(3x)$ (attention, `expand` ne développe que les produits, pas les fonctions transcendantes), linéariser l'expression obtenue et vérifier qu'on retrouve l'expression initiale. En déduire une primitive de $\sin(x)^3$. Retrouver le résultat en développant $((e^{ix} - e^{-ix})/(2i))^3$.
17. Suite géométrique dans $\mathbb{C}$
Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = qu_n$. Représentez les 10 premiers termes de la suite lorsque $q = 1 + i, i, (1 - i)/3$. Donner la représentation polaire de u_n en fonction de n et expliquez le graphique.
18. Soit r la rotation de centre l'origine, et d'angle $\pi/6$. Calculer les images U et V des vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$, en déduire M, la matrice de passage de la base $\{u, v\}$ à la base $\{U, V\}$. Calculez l'inverse de M et comparer avec la matrice de passage de $\{u, v\}$ vers la base $\{U', V'\}$ où U' et V' s'obtiennent à partir de u et v par rotation de centre l'origine et d'angle $-\pi/6$.

19. Soit s la similitude de centre l'origine, de rapport 2 et d'angle $\pi/6$ qui au point d'affixe z associe le point d'affixe
$$z' = 2e^{i\pi/6}z$$
Calculer les images U et V des vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$, en déduire M, la matrice de passage de la base $\{u, v\}$ à la base $\{U, V\}$. Calculez l'inverse de M et comparer avec la matrice de passage de $\{u, v\}$ vers la base $\{U', V'\}$ où U' et V' s'obtiennent à partir de u et v par similitude de centre l'origine, de rapport 1/2 et d'angle $-\pi/6$.
20. Tracer sur une même figure le graphe de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le graphe de la fonction $\arctan$ et la première bissectrice (d'équation $y = x$), et orthonormalisez la représentation. Vérifiez avec la commande `symetrie` que les deux graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
21. Calculer les intégrales et simplifiez le résultat :
$$\int \frac{1}{e^x - 1}\,dx, \quad \int \ln(2x+1)\,dx, \quad \int \frac{1}{x\ln(x)}\ln(\ln(x))\,dx, \quad \int x\sin(x)e^x\,dx, \quad \int \sin(x)^{10}\cos(x)^4\,dx$$
Vérifiez en dérivant les expressions obtenues. Interprétez les réponses du logiciel pour :
$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int e^{x^2}\,dx,$$
22. En utilisant la commande `ibpu` ou `ibpdv` (cf. l'aide en ligne de ces commandes dans le menu Index) détaillez les étapes du calcul de
$$\int x^3\ln(x)^2\,dx, \quad \int_1^2 x^2\ln(x), \quad \int_0^3 x^2\ln(x^2+1)\,dx$$
Indication : on peut enchainer plusieurs intégrations par parties, ainsi `a:=ibpu(ln(x)^2,ln(x)^2);` renvoie une liste dont le premier élément est intégré et le deuxième est à intégrer, puis `b:=ibpu(a,ln(x))` pour effectuer une deuxième intégration par parties sur le membre de droite de `a` et enfin `c:=ibpu(b,0)` pour terminer.
Calculez aussi les deux premières intégrales en utilisant le changement de variables $x = e^t$ (commande `subst(Int(...),x=exp(t)))`
23. Déterminer la valeur de :
$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$
En utilisant la commande `partfrac`, détaillez le deuxième calcul.
24. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y' + 5y = te^{-t}\sin(t);\ y' + 5y = te^{-5t};\ y'' - 3y' + y = 0;\ y'' + y = \cos(t)$$
25. Trouver l'unique solution des équations différentielles :
$$y'+5y = te^{-t}, y(0) = 1;\ y''+2y'+y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1;\ y''-3y'+y = \cos(t), y(0) = 0, y'(0) = 0$$
26. Tracer sur une même figure les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ pour $y(0) = 1, 2, 3$. Quel est leur comportement lorsque x croit ? Même question pour les solutions de $y' = -2y$.
Même question pour les solutions de $y'' + y = 0$ vérifiant $y(0) = 1, 2, 3$ et $y'(0) = 0$. Même question pour les solutions de $y'' - 8y' + 10 = 0$ et de $y'' - 8y' - 10 = 0$.

3 Séance d'évaluation

Vous devrez résoudre des exercices tirés au sort dans la liste des exercices ci-dessus ou du même type. Vous pouvez poser des questions pendant la première partie de la séance. À la fin de la séance, l'enseignant regarde la session réalisée (graphes, scripts) et pose éventuellement des questions. Au vu du déroulement de la séance, l'enseignant peut donner un bonus de 0.5 à 3 points à ajouter à l'une des notes de controle continu, ce bonus peut être différent entre les deux étudiants d'un binôme déséquilibré.

Pour vous entrainer vous pouvez aussi vérifier les résultats des exercices donnés en TD.