Exercice 1 : Appliquer la méthode de Gauss pour résoudre le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Cette méthode paraît-elle judicieuse quand ε est petit? Que se passe-t-il si l'on effectue cette méthode avec une machine qui travaille avec une précision de ε?

2. Comparer avec le système obtenu en intervertissant les deux équations du système.

Exercice 2 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Détailler étape par étape le calcul de la décomposition LU des matrices A et B

2. Calculer le déterminant de B à l'aide de cette décomposition.

3. Résoudre $Bx = (1, 2, 3)$ en utilisant la décomposition LU.

4. Calculer l'inverse de B en résolvant 3 systèmes linéaires avec la décomposition LU.

Exercice 3 :
Soit α un paramètre réel. On considère la matrice

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels α la matrice $A(\alpha)$ admet-elle une factorisation LU?

2. Déterminer la factorisation LU de $A(1)$ à l'aide de la commande Xcas `lu`. Interpréter le résultat de la commande `lu` appliquée à $A(0)$.

Exercice 4 :
1) Entrer une matrice aléatoire A de taille 5x5 et un vecteur aléatoire b de taille 5x1 (préciser la loi des coefficients de A et b, commandes `ranm` et `ranv`)
2) Calculer le carré de A. Calculer aussi le produit de Hadamard de A avec A, c'est à dire la matrice dont le coefficient (i, j) est $A_{i,j}^2$.
3) Inverser numériquement A.
4) Trouver et exécuter la commande Xcas pour résoudre le système linéaire $Ax = b$. On notera c le résultat numérique.

5) Calculer la norme L_2 de $\|Ac-b\|$.

Exercice 5 :
Mesurer le temps de calcul par Xcas de la factorisation LU d'une matrice aléatoire à coefficients approchés 10x10, 100x100, 200 x 200, etc.... Comparer avec le résultat théorique du cours.

Exercice 6 : Donner l'ordre de grandeur du nombre d'opérations nécessaires pour calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice A de taille $n \times n$ grâce aux formules

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^t\mathrm{com}(A) \; .$$

Même question mais en utilisant la décomposition $A = LU$ (méthode de Gauss).
Un ordinateur standard effectue de l'ordre de 10^{10} opérations par secondes (10 gigaflops). Comparer les temps nécessaires dans le cas d'une matrice 100×100.

Exercice 7 : Calculer le déterminant de la matrice de Hilbert de taille 50 puis 100 de manière numérique et de manière exacte. Comparer les résultats et temps de calcul.
Pour quelques matrices M aléatoires de taille 100, 200, 300, calculez le déterminant de M, comparez avec la borne de Hadamard de M (produit des normes des vecteurs colonnes). Qu'observe-t-on ?

Exercice 8 : Décomposition de Cholesky.
Soit A une matrice hermitienne définie positive. Il existe une unique matrice triangulaire supérieure C qui a des éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = C^*C$ (décomposition de Cholesky).
1) Donner l'algorithme qui permet de calculer C. L'appliquer à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 13 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Cet algorithme est-il appliquable à des matrices non hermitiennes ?
2) Expliquer comment utiliser la décomposition de Cholesky pour résoudre le système $Ax = b$ et donner le nombre d'opérations.
3) Une matrice $A = (a_{ij})$ est appelée $p-$bande si $a_{ij} = 0$ dès que $|i-j| \geq p$.
  a) Donner des exemples de matrices $p-$bandes.
  b) Montrer que si A est une matrice hermitienne définie positive $p-$bande, alors C est aussi $p-$bande.
  Pour $p = 1$, compter le nombre d'opérations nécessaires pour trouver C.

Exercice 9 : Ecrire un programme calculant l'inverse d'une matrice en utilisant l'une des décompositions.