Exercice 1 : Domaine de Gershgorin

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour $1 \leq i \leq n$, D_i la boule fermée dans $\mathbb{C}$ de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Le domaine de Gershgorin, qu'on notera $\mathcal{G}(A)$ est la réunion des disques D_i pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathcal{G}(A)$.

Exercice 2 (Méthode de la puissance)

Soit $A = \begin{pmatrix} 99 & 1 & 0 \\ 1 & 100 & 1 \\ 0 & 1 & 98 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et en utilisant l'exercice précédent que ses valeurs propres appartiennent à $[97, 102]$.
2. Déterminer par la méthode de la puissance une approximation de la plus grande valeur propre de A.

   Pour ceci, on écrira une fonction qui donnera une valeur approchée de la plus grande valeur propre, une valeur approchée d'un vecteur propre associé et le nombre d'itérations utilisées pour ce calcul. La fonction aura comme argument une matrice carrée, un nombre d'iterations maximales (pour un test d'arrêt) et epsilon mesurant une erreur maximale.
3. Expliquer pourquoi en appliquant la méthode de la puissance à $A-97I_3$, on accélere la convergence.
4. Que se passe t-il si on applique la méthode de la puissance à $A - \gamma I_3$ si γ est la valeur trouvée à la question 2) ?

Exercice 3 (élimination)

Soit A une matrice réelle de taille n. On suppose que les valeurs propres de A notées $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ sont deux à deux distinctes et vérifient :

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

On note u_i un vecteur propre associé à λ_i, pour $1 \leq i \leq n$.

1. Montrer que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ sont les valeurs propres de ${}^tA$. On note v_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_i, pour $1 \leq i \leq n$.
2. Montrer que si $i \neq j$, $\langle u_i, v_j \rangle = 0$. (On pourra calculer $\langle Au_i, v_j \rangle$ de deux manières). Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\langle u_i, v_i \rangle \neq 0$.
3. Soit $B = A - \lambda_n \frac{u_n \, {}^tv_n}{\langle u_n, v_n \rangle}$. Montrer que les valeurs propres de B sont $\{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\}$.
4. Donner une méthode utilisant la méthode de la puissance appliquée plusieurs fois pour trouver des valeurs approchées des valeurs propres de A et de ses vecteurs propres.

   L'appliquer à la matrice de l'exercice précédent.

Exercice 4 (valeurs propres conjuguées)
Si A est une matrice réelle, sa plus grande valeur propre en module n'est pas forcément réelle, A peut avoir un couple de valeurs propres complexes conjuguées de module maximal. On peut appliquer la méthode de la puissance à un shift de A dans le complexe, par exemple $A - iI$, on peut aussi rester dans le réel en cherchant une relation de récurrence approchée $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n$ (où $u_{n+1} = Au_n$ et u_0 aléatoire). Programmer les deux méthodes et comparer l'efficacité avec une matrice aléatoire réelle de taille 4 (non symétrique).
Exercice 5 (itérations inverses)
Lorsqu'on a effectué quelques itérations de la méthode de la puissance, on a une première approximation λ de la valeur propre de module maximal. Il peut alors être intéressant d'effectuer la méthode de la puissance sur la matrice $(A - \lambda I)^{-1}$. Programmer cette méthode et discuter les avantages (vitesse de convergence) et inconvénients (précision du calcul de l'inverse). Testez sur l'une des matrices de la feuille.
Exercice 6
Utiliser la méthode QR pour trouver des valeurs approchées des valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observer la forme des matrices intermédiaires. Pour une matrice générale, on utilise la forme de Hessenberg avant de faire la méthode QR.
Exercice 7
Utiliser la méthode de la puissance pour déterminer la norme triple d'une matrice subordonnée à la norme euclidienne.
Exercice 8
Soit P un polynôme à coefficients réels ou complexes. Appliquer la méthode de la puissance à la matrice companion de P pour déterminer une estimation de la plus grande racine de P en module.