Université Grenoble Alpes Année 2016-2017
Module MAT 307

CC1 : examen partiel du 2 novembre 2016

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée

Calculatrices autorisées

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée 2h

Exercice – [*5 points*]

On considère la courbe paramétrée en polaire $r(\theta) = -\ln(\cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Donner le domaine de définition et réduire l'interval d'étude par un argument de périodicité.
2. Etudier les variations de $r(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi/2[$.
3. Trouver la valeur de $\theta \in]0, \pi/2[$ pour laquelle la distance du point $(r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$ à l'axe (Oy) est maximale. Donner une valeur approchée.
   (Indication par rapport au tracé : quelle est la direction de la tangente en ce point ?)
4. Etudier la branche infinie.
5. Tracer la courbe pour $\theta \in [0, \pi/2[$ (faire apparaitre sur la courbe le point de paramètre $\theta = 0$ et le sens de parcours).
6. En utilisant un argument de symétrie et le tracé de la question précédente, tracer la courbe $r(\theta) = -\ln(\cos(\theta))$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Problème – [*15 points*]

On considère la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (|t^2 - 1|^{3/2}, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

(Rappel : $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \mathcal{O}(h^2)$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *fixé et* $h \to 0$*.)*

1. Donner le domaine de définition, et réduire l'intervalle d'étude par un argument de symétrie.
2. **Etude pour** $t \in [0, 1]$ **:**
   (a) En écrivant $x(t)$ sans les valeurs absolues, calculer $x'(t)$.
   (b) Calculer $\lim_{t \to 1-} x'(t)$ et en déduire la direction de la tangente en $t = 1$.
   (c) Donner le double tableau de variations sur $[0, 1]$.
   (d) Y a t-il des points singuliers ? BONUS : Si oui, étudier les (nature et tangente).
   (e) Tracer la courbe (faire apparaitre sur la courbe les points de paramètres t=0, 1 et le sens de parcours).
   (f) Calculer la longueur d'arc entre les points de paramètres $t = 0$ et $t = 1$.
   (g) En $t = 1/2$, donner le repère de Frénet, la courbure et le centre du cercle osculateur. Rajouter le tracé du cercle osculateur dans le tracé précédent.

---

3. **Etude pour** $t \in [1, +\infty[$ **:**
   (a) En écrivant $x(t)$ sans les valeurs absolues, calculer $x'(t)$.
   (b) Montrer que $\lim_{t \to 1+} x'(t) = \lim_{t \to 1-} x'(t)$.
   (c) Donner le double tableau de variations sur $[1, +\infty[$.
   (d) Y a t-il des points singuliers ? BONUS : Si oui, étudier les (nature et tangente).
   (e) Etudier les branches infinies.
   (Indication : observer que pour $t \to +\infty$*,* $x(t) = t^3(1 - \frac{1}{t^2})^{3/2}$ *avec* $h = -1/t^2 \to 0$*.)*
4. Tracer la courbe pour tout t dans le domaine de définition (faire apparaitre sur la courbe les points de paramètres t=0, 1 et le sens de parcours).
5. Calculer la courbure pour $t > 1$.
   (Consigne : on pourra donner le résultat du calcul fait à la calculatrice à condition de donner la commande utilisée)