Feuille de TD 2

Exercice 1. Racine quatrième. Donner le développement de Taylor de $(1+x)^{1/4}$ en $x=0$ à l'ordre n sous forme d'un polynôme $T_n(x)$ de degré n et d'un reste $R_n(x)$.
Donner une majoration du reste $R_n(x)$ pour $n=4$ et $x=1/2$, en déduire un encadrement de $(3/2)^{1/4}$.
Déterminer une valeur de n pour que $T_n(x)$ soit une valeur approchée de $(1+x)^{1/4}$ à 10^{-5} près pour tout $x \in [0,1/2]$. Comparer l'efficacité de cette méthode à celle de la méthode de Newton (exercice 11, feuille 1).

Exercice 2. Séries entières. Donner les développements en séries entières des fonctions suivantes, ainsi que leurs rayons de convergence :

1. $f_1(x) = \cos(x)$
2. $f_2(x) = \sin(x)$
3. $f_3(x) = (1+x^2)^{-1}$
4. $f_4(x) = \arctan(x)$ (Indication : intégrer termes à termes le développement de $f_3(x)$)
5. $f_5(x) = (1+x)^{-1/2}$.

Exercice 3. Exercice 3 du TP 3.

1. Soit $\alpha > 0$, exprimer $\arctan(-\alpha)$ et $\arctan(1/\alpha)$ en fonction de $\arctan(\alpha)$. En déduire que le calcul de $\arctan(\alpha)$ sur $\mathbb{R}$ peut se ramener au calcul de $\arctan(\alpha)$ sur $[0,1]$.
2. Soit donc $\alpha \in [0,1]$, montrer que
$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} \leq \arctan(\alpha) \leq \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}.$$
3. Déduire de la question précédente que la méthode de Newton appliquée à l'équation $\tan(x) - \alpha = 0, -\pi/2 < x < \pi/2$ avec comme valeur initiale $x_0 = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}$ est une suite décroissante qui converge vers $\arctan(\alpha)$. Déterminez de cette manière une valeur approchée à 10^{-8} près de $\pi = 4\arctan(1)$.

Exercice 4. Fonction de Bessel. On veut calculer une valeur approchée de
$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(-\mathrm{i}\,x\cos(t))\ dt$$
pour $x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1$.

1. En intégrant termes à termes le développement en série entière au voisinage de $x=0$ de $\exp(-\mathrm{i}\,x\cos(t))$, déterminer la série entière de $J_0(x)$ en $x=0$,
$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ .$$
2. Montrer que $a_n = 0$ si n est impair.
3. Soit $n \geq 2$. Montrer que $a_n = -a_{n-2}/n^2$.
Indication : On pourra utiliser
$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} dt - \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} \sin(t)\sin(t)\, dt$$
puis intégrer par parties la seconde intégrale.

4. Montrer que $a_n = (-1)^p/(2^p p!)^2$ si $n = 2p$ est pair.

5. Donner une majoration de la valeur absolue du reste

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$$

pour $x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1$. Déterminer une valeur approchée de $J_0(1)$ et de $J_0(\mathrm{i})$ à 10^{-8} près.