Feuille de TD 1

Exercice 1. Entiers en base 2 et en base 16.

1. Soit n_1 l'entier s'écrivant 1234 en base 16. Donner n_1 en base 10.
2. Soit n_2 l'entier s'écrivant 6000 en base 10. Écrire n_2 en base 16 puis en base 2.

Exercice 2. Opérations en base 2. Donner les tables d'addition et de multiplication en base 2. Calculer la somme, la différence et le produit des 2 entiers s'écrivant 1101 et 1011 en base 2 en utilisant l'algorithme "école primaire" en base 2. Vérifiez vos résultats en les comparant à ceux obtenus en base 10.

Exercice 3. Fractions en base 2. Écrire les nombres décimaux 0.25, 0.1875 et 0.3 en base 2. Comment ces nombres sont-ils codés sur un ordinateur disposant de 52 bit pour la mantisse et de 11 bit pour l'exposant ? Le codage est-il exact ?

Exercice 4. Erreur relative pour l'inverse. Donner l'erreur relative de $1/x$ par rapport à $1/x_0$ en fonction de l'erreur relative $\epsilon = |x - x_0|/|x_0|$ de x par rapport à x_0 (on pourra se limiter au plus bas ordre en ϵ).

Exercice 5. Méthode de Horner (1). Il s'agit d'évaluer efficacement un polynôme en un point. On pose $b_0 = P(\alpha)$ et on écrit :

$$P(X) - b_0 = (X - \alpha)Q(X)$$

où :

$$Q(X) = b_n X^{n-1} + ... + b_2 X + b_1 \ .$$

On calcule alors par ordre décroissant b_n, b_{n-1}, ..., b_0.

1. Donner b_n en fonction de a_n puis b_i en fonction de a_i et b_{i+1} pour $i = n-1, n-2, \ldots, 1$.
2. Appliquer la méthode ci-dessus pour calculer $P(\alpha)$ pour $P(X) = X^3 + 7X^2 + 7X$ et $\alpha = 16$.
3. Même question pour $P(X) = X^5 + 4X^4 + 3X^3$ et $\alpha = 5$. En déduire l'écriture en base 10 de l'entier s'écrivant 143000 en base 5.

Exercice 6. Méthode de Horner (2). Pour calculer tous les coefficients du développement de Taylor du polynôme $P(X)$ en un point, on pose $P_0(X) = P(X)$ et on répète l'algorithme de l'exercice précèdent pour calculer successivement les coefficients des polynômes $P_0(X), P_1(X), \ldots, P_n(X)$ définis par :

$$\begin{aligned}
P_0(X) &= (X - \alpha)P_1(X) + P_0(\alpha) \\
P_1(X) &= (X - \alpha)P_2(X) + P_1(\alpha) \\
&\ldots \\
P_{n-1}(X) &= (X - \alpha)P_n(X) + P_{n-1}(\alpha)
\end{aligned}$$

jusqu'à ce que l'on obtienne un polynôme de degré zéro, $P_n(X) = const$.

1. Montrer que
$$P(X) = (X - \alpha)^n P_n(\alpha) + (X - \alpha)^{n-1} P_{n-1}(\alpha) + \cdots (X - \alpha)P_1(\alpha) + P_0(\alpha) \ .$$
Comment sont reliés $P_i(\alpha)$ et la i-ième dérivée $P^{[i]}(\alpha)$ de P au point α ?
2. Utiliser cette méthode pour calculer $P^{[i]}(\alpha)$, $i = 0, 1, 2, 3$, pour $P(X) = X^3 - 2X + 5$ et $\alpha = 39$.

Exercice 7. Théorème du point fixe. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction satisfaisant les hypothèses du théorème du point fixe vu en cours.

1. Montrer que f est contractante, c'est-à-dire, il existe $k \geq 0$, $k < 1$ tel que $|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|$ pour tout $u, v \in [a, b]$.

2. En déduire que le nombre de décimales de $u_n = f^n(u_0)$ coïncidant avec celles du point fixe $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$ augmente (au moins) proportionnellement à n quand n croît (*convergence linéaire*).

3. Si l'on suppose de plus que f est de classe $C^2([a, b])$ et que $f'(\ell) = 0$, montrer que le nombre de décimales de u_n coïncidant avec celles de ℓ augmente beaucoup plus rapidement avec n : (au moins) comme 2^n (*convergence exponentielle*).
Indication : Utiliser la formule de Taylor avec reste à l'ordre 2.

Exercice 8. Points fixes instables. On veut résoudre l'équation

$$e^u - 2 = u \, , u > 0 \tag{1}$$

par la méthode du point fixe.

1. La fonction $f(u) = e^u - 2$ est-elle contractante sur $[0, \infty[$? Tracer sur le graphe de f les premières valeurs de la suite itérée $u_n = f^n(u_0)$ pour une valeur initiale $u_0 > 0$. La suite converge t'elle ?
En considérant l'inverse f^{-1}, trouver une méthode de point fixe pour résoudre (**??**) numériquement.
Justifier la convergence et donner une majoration théorique de l'erreur.
Donner la solution approchée et le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision de 10^{-6} en prenant $u_0 = 1$.

2. Utiliser la même méthode pour résoudre numériquement l'équation
$$\tan(u) = u \, , \pi/2 < u < 3\pi/2 \, .$$

3. Étant donné une fonction non contractante quelconque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sous quelles conditions sur f votre méthode est-elle applicable ?

Exercice 9. Méthode de Newton. Utiliser la méthode de Newton pour résoudre l'équation (**??**). Justifier la convergence et donner une majoration théorique de l'erreur.
Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour avoir une précision de 10^{-6} en prenant $x_0 = 1$ (comparer avec le résultat de l'exercice 8) ? Peut-on choisir $x_0 = 0$?

Exercice 10. Problèmes de convergence ? Soit $g(u) = \arctan(u)$. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite itérée obtenue en appliquant la méthode de Newton à l'équation $g(r) = 0$ en partant de x_0.

1. Déterminer numériquement une valeur $a > 0$ telle que si $x_0 = a$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oscille entre les deux valeurs $\pm a$ de part et d'autre de la solution exacte $r = 0$.
Indication : On pourra par exemple chercher a par une méthode de point fixe en supposant $a \in [1, \sqrt{3}]$.

2. Déterminer *graphiquement* le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quant $n \to \infty$ pour $|x_0| < a$ et pour $|x_0| > a$.

Exercice 11. Calcul de $x^{1/4}$. On veut déterminer une valeur approchée de la racine quatrième d'un nombre réel positif. On commence par chercher une valeur approchée de $y = (1 + x)^{1/4}$ pour $x \geq 0$.

1. On suppose que $x = 1$ (donc $y = 2^{1/4}$).
Donner un polynôme $P(X)$ de degré 4, à coefficients entiers et tel que $P(y) = 0$. Donner la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ obtenue en appliquant la méthode de Newton à P.
Donner une valeur u_0 pour laquelle la suite u_n converge vers y (justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour cette valeur de u_0).
Calculer u_4, en déduire un encadrement de $2^{1/4}$.
Peut-on appliquer la même méthode pour $x \geq 0$ quelconque?

2. On suppose que l'on a calculé $2^{1/4}$ à 10^{-16} près. Proposer une méthode permettant de calculer une valeur approchée de $x^{1/4}$ pour $x \geq 0$, en utilisant l'écriture mantisse-exposant de x en base 2 :
$$x = 2^e(1 + m), \quad e \in \mathbb{Z}, m \in [0, 1[$$
et en utilisant la méthode ci-dessus. Discuter la précision de l'approximation obtenue.