UJF 2012-13 Mat237 Feuille d'exercices 5

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles

$$a)\ x'' - 3x' + 2x = 0 \quad b)\ x'' - 2x' + 2x = 0 \quad c)\ x'' - 2x' + x = 0$$

Exercice 2.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$; $x(0) = a,\ y(0) = b$.
3. Tracer la courbe paramétrée $t \to (x(t), y(t))$ pour $a = 1$ et $b = 0$.

Exercice 3.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$; $x(0) = a,\ y(0) = b$.
3. Tracer la courbe paramétrée $t \to (x(t), y(t))$ pour $a = 4$ et $b = 0$.

Exercice 4.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$; $x(0) = a,\ y(0) = b$.
3. Tracer la courbe paramétrée $t \to (x(t), y(t))$ pour $a = 1$ et $b = 1$.

Exercice 5. (*Wronskien*)
On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $I =]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$(E)\ \ x''(t) + 3\tan(t)x'(t) - 2x(t) = 0.$$

1) Quelle est la nature de l'espace des solutions ?
2) Vérifier que la fonction $x_0(t) = \sin(t)$ est solution de (E).
3) Soit x une solution de (E) quelconque. On pose

$$w(t) = \det((x, x'), (x_0, x_0'))(t) = x(t)x_0'(t) - x_0(t)x'(t).$$

Trouver une équation differentielle d'ordre 1 vérifiée par w. La résoudre.
4) Vérifier que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)}{x_0(t)}\right) = -\frac{w(t)}{\sin^2(t)}.$$

Résoudre (E).

Exercice 6. (*Intégrales premières.*)
On considère un système différentiel du type

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x_1' = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots \\ x_n' = f_n(x_1,\dots,x_n). \end{array}\right.$$

Ici chaque fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle intégrale première du systeme une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, constante sur chaque solution.
1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

2) Si A est une matrice antisymétrique fixée de taille n, donner une intégrale première du système $x' = Ax$. Interprétation ?
3) Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$. Montrer que le système

$$\begin{array}{c} x_1' = x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \end{array}$$

admet une intégrale première non constante si et seulement si $\lambda \leq 0$. On cherchera d'abord à résoudre le système.
4) On considère l'équation différentielle $x'' = g(x)$. En posant $x_1 = x$ et $x_2 = x'$, à quel système différentiel est-on ramené ? Soit P telle que $P' = -g$. On pose $E_P(x_1, x_2) = P(x_1)$ (énergie potentielle) et $E_C(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$ (énergie cinétique). Montrer que l'énergie totale $E = E_P + E_C$ est une intégrale première du système.

Exprimer E dans le cas où $g(x) = \sin(2x)$.

Exercice 7.
1) Résoudre les systèmes :

$$\text{(a)} \quad \left\{\begin{array}{l} x'(t) = -2x(t) + e^t \\ y'(t) = -y(t) + \cos(3t) \\ x(1) = 1, y(1) = 2 \end{array}\right. \qquad \text{(b)} \quad \left\{\begin{array}{l} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ x(1) = 1, y(1) = 2 \end{array}\right.$$

(utiliser la fonction complexe $z(t) = x(t) + iy(t)$)

2) Tracer les courbes $t \to (x(t), y(t))$.

Exercice 8. Résoudre $x''' + x = 0$.

Exercice 9. En effectuant un changement de variable $s = g(t)$ conduisant à une équation différentielle à coefficients constants, résoudre

$$(1 + t^2)x'' + tx' + k^2x = 0.$$

Ici k est un paramètre.

Exercice 10 . On considère l'équation $x' = \sin(x)$.
1) Trouver les solutions constantes.
2) Montrer que toutes les solutions sont bornées.

Contrôle continu du 8 décembre 2011 de 15h15 à 16h45

Calculettes, documents et portable interdits. Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée. Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (les parties A et B peuvent être abordées indépendamment)

A (6pts) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $(S) \begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ le système différentiel associé.

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2) Déterminer la solution générale du système (S).

3) Tracer la courbe paramétrée solution $t \to (x(t), y(t))$ de (S) de condition initiale $x(0) = 5$ et $y(0) = 0$.

B (6pts) Soit la forme différentielle $\omega = (4x - 3y)dx - (3x + 4y)dy$.

1) Trouver une fonction $U(x, y)$ telle que $\omega = dU$ (U est un potentiel pour ω).

2) Montrer que $U(x, y)$ est constante sur les solutions de (S) (U une intégrale première du système (S)).

3) En déduire la nature géométrique des courbes solutions de (S) et l'allure de leur tracé.

$\diamondsuit$

Exercice 2 (12pts) On considère l'équation différentielle (E) d'ordre 2 de fonction inconnue $x(t)$ et le système différentiel équivalent (Σ) d'ordre 1 de fonctions inconnues $x(t)$ et $y(t)$:

$$(E)\ \ 2xx'' + x'^2 + 1 = 0 \iff (\Sigma) \begin{cases} x' = y \\ 2xy' + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

1) Soit une $x(t)$ solution de (E) définie sur un intervalle I.

a) Vérifier que $x(t)$ et $x''(t)$ ne s'annulent pas sur I. En déduire que $x'(t)$ s'annule en au plus un $t \in I$.

b) Montrer que $x(t)(x'^2(t) + 1)$ est une fonction constante [calculer $(xx'^2 + x)'$]

2) Est-ce que (Σ) vérifie le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

3) Déduire de 1)b) une fonction $V(x, y)$ constante sur chaque solution de (Σ) (V est une intégrale première du système).

4) Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (Σ) définie sur un intervalle I. Déduire de 3) que $y(t)$ vérifie, pour une certaine constante c non nulle, l'équation

$$(E_c)\quad \frac{2cy'}{(y^2 + 1)^2} = 1$$

5) Pour $c \neq 0$ fixé, résoudre l'équation à variables séparées (E_c).

[Faire le changement de fonction inconnue $y = \tan\theta$ et exprimer t et $x(t)$ comme des fonctions de θ]

6) Déterminer la nature d'une courbe paramétrée $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto (t(\theta), x(t(\theta)))$ et l'allure de son tracé.

$\diamondsuit$

UJF 2011-2012 UE MAT237 Corrigé du contrôle continu du 8 décembre 2011

Exercice 1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et (S) $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ le système différentiel associé.

A 1) Les valeurs propres sont données par $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$ ce sont donc 5 et -5. Les coordonnées (x, y) sont celles d'un vecteur propre de valeur propre λ si elles vérifient $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$.

Pour la valeur propre 5 on trouve ainsi $(2, 1)$ comme vecteur propre de base et pour la valeur propre -5 le vecteur propre $(1, -2)$.

2) La solution générale du système (S) est une combinaison linéaire des solutions de base de la forme $e^{\lambda t}v$ où λ est une valeur propre et v un vecteur propre non nul associé. Ici la solution générale s'écrit donc

$$(x(t), y(t)) = ae^{5t}(2, 1) + be^{-5t}(1, -2) = (2ae^{5t} + be^{-5t}, ae^{5t} - 2be^{-5t}), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3) La solution vérifiant la condition initiale $x(0) = 5$ et $y(0) = 0$ est celle pour laquelle

$(5, 0) = (x(0), y(0)) = (2a + b, a - 2b) \iff a = 2b$ et $b = 1$ soit $a = 2$ et $b = 1$.

Pour tracer la courbe paramétrée correspondante, on se place dans le repère propre (ε, η) où $\varepsilon = (2, 1)$ et $\eta = (1, -2)$. Dans les coordonnées z, w de ce repère, la courbe est paramétrée par $z = 2e^{5t}$ et $w = e^{-5t}$ qui est une branche de l'hyperbole d'équation implicite $zw = 2$ ayant pour asymptotes les axes du repère.

Soit la forme différentielle $\omega = (4x - 3y)dx - (3x + 4y)dy$.

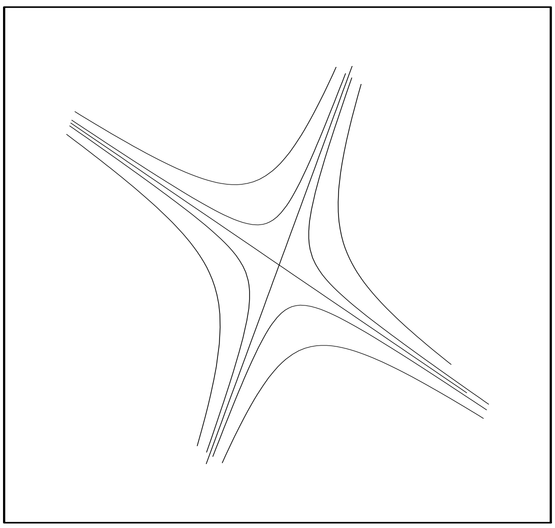
B 1) Cherchons U telle que $dU = \omega \iff \dfrac{\partial U}{\partial x} = 4x - 3y \;\; (1)$ et $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -3x - 4y \;\; (2)$

$U = 2x^2 - 3xy + f(y)$ vérifie (1) pour toute f de classe C^1. En reportant dans (2), la fonction f doit satisfaire : $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -3x + f'(y) = -3x - 4y \iff f'(y) = -4y \iff f(y) = -2y^2 + \text{Cte}$.

Finalement, $U(x, y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2 + \text{Cte}$ est bien un potentiel pour ω, c'est-à-dire qu'on a $dU = \omega$.

2) Les courbes intégrales de ω sont donc des courbes de niveau de $U(x, y)$. Et si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est une solution de (S) alors $(4x - 3y)x' - (3x + 4y)y' = (4x - 3y)(3x + 4y) - (3x + 4y)(4x - 3y) = 0$ donc γ est une courbe intégrale de ω donc une courbe de niveau de U.

3) Les courbes solutions de (S) sont donc les courbes d'équation implicite $2x^2 - 3xy - 2y^2 = \text{Cte}$. C'est la famille d'hyperboles d'équations $(x - 2y)(2x + y) = \text{Cte}$ qui ont pour asymptotes les axes propres d'équations respectives $x - 2y = 0$ et $2x + y = 0$. On a retrouvé autrement le résultat de la partie A.



Exercice 2

$$(E)\ \ 2xx'' + x'^2 + 1 = 0 \iff (\Sigma)\ \begin{cases} x' = y \\ 2xy' + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Soit $x(t)$ une solution de (E) définie sur un intervalle I.

1)a) On a $2xx'' = -x'^2 - 1 < 0$ donc $x(t)$ et $x''(t)$ ne s'annulent pas sur I. Si on avait $x'(a) = x'(b) = 0$ pour $a \neq b$ dans I, le théorème de Rolle impliquerait l'existence de $c \in [a, b]$ avec $x''(c) = 0$, ce qui n'est pas possible.

1)b) On a $(xx'^2 + x)' = 2xx'x'' + x'^3 + x' = x'(2xx'' + x'^2 + 1) = 0$ donc $xx'^2 + x = x(x'^2 + 1)$ est une fonction constante.

2) Le système (Σ) ne vérifie pas le théorème de Cauchy-Lipschitz car il n'y a aucune solution de condition initiale $x(0) = 0$ par exemple.

3) D'après 1)b), la fonction $V(x, y) = x(y^2 + 1)$ est constante sur chaque solution $t \in I \mapsto (x(t), y(t))$ de (Σ).

4) Soit $(x(t), y(t))$ un solution de (Σ) définie sur un intervalle I. D'après 3), il existe une constante c, non nulle car $x(t)$ ne s'annule pas, telle que $x(t)(y^2(t) + 1) = c$. D'où

$$x'(t) = \Big(\frac{c}{y^2+1}\Big)' = \frac{2cyy'}{(y^2+1)^2} = y$$

donc comme d'après 1)a) $y = x'$ s'annule en au plus un point, l'équation

$$(E_c)\quad \frac{2cy'}{(y^2+1)^2} = 1$$

est vérifiée par $y(t)$ sauf éventuellement en un point de I donc sur I entier, par continuité.

5) Pour $c \neq 0$ fixé, en posant $y = \tan\theta$, l'équation(E_c) devient

$$\frac{2c\theta'(\tan^2\theta + 1)}{(\tan^2\theta + 1)^2} = \frac{2c\theta'}{\tan^2\theta + 1} = 2c\theta'\cos^2\theta = c\theta'(\cos 2\theta + 1) = 1.$$

que l'on intègre en t pour donner $t(\theta) = \dfrac{c}{2}(\sin 2\theta + 2\theta) + b$ où $b \in \mathbb{R}$ et $x(t(\theta)) = \dfrac{c}{2}(\cos 2\theta + 1)$.

6) Les courbes paramétrées $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto (t(\theta), x(t(\theta)))$ sont des arcs de cycloïdes. Traçons par exemple celle pour $b = 0$ et $c = 2$: