UJF 2012-13 Mat237 Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Soit la courbe plane définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (3t^2 - 2t^3, 5t^4 - 4t^5)$.

a) Déterminer les points singuliers de cette courbe.

b) Déterminer la nature de ces points singuliers.

Exercice 2. Soit l'astroïde A paramétrée par $x(t) = \frac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t)$, $y(t) = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$

a) Déterminer les points singuliers de A, leur espèce, et la tangente à l'astroïde en ces points.

b) Vérifier que la distance entre les points d'intersection de la tangente en un point régulier $M(t) \in A$ avec les axes est constante. En déduire une construction géométrique alternative de l'astroïde.

Exercice 3. Soit C un cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

a) Déterminer une équation polaire de C.

b) Soit D une droite passant par l'origine qui coupe C en un point P. On construit sur D deux points M et N distincts tels que $d(P; M) = d(P; N) = a$, où a est un réel strictement positif fixé. Déterminer une équation polaire de l'ensemble Γ_a décrit par les points M et N si l'on varie D (*limaçons de Pascal*).

c) Déterminer, lorsque a décrit $]0; \infty[$, l'ensemble des points des courbes Γ_a dont la tangente est verticale.

Exercice 4. Etudier les branches infinies des courbes planes définies par :

1) $t \mapsto (\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1})$,

2) $r(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta - \pi/4}$.

Exercice 5. Etudier et tracer les courbes planes définies par :

1) $t \mapsto (\frac{t}{1+t^2}, \frac{2+t^3}{1+t^2})$,

2) (Rosace à trois boucles) $r(\theta) = \sin(3\theta)$.

Exercice 6. (Strophoïde droite) Soit Γ la courbe d'équation cartésienne :

$$x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$$

1) Soit Δ_t la droite d'équation $y = tx$. Déterminer pour $t \neq 0$, le point d'intersection $M(t) = (x(t), y(t))$ de Γ et Δ_t. En déduire une paramétrisation de Γ.

2) Déterminer l'équation polaire de Γ.

3) Tracer la courbe Γ.

Exercice 7. Soit $t \in [0, 1] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1. On suppose que $y(0) = y(1) = 0$.

a) Soit L la longueur totale de la courbe. Montrer l'inégalité

$$|x(1) - x(0)| \leq L.$$

b) En déduire le résultat général : *la longueur d'un arc de courbe C^1 est plus grande que la longueur de la corde.*

Exercice 8. Calculer la longueur de la *néphroïde*, d'équations paramétriques

$$x(t) = 3\cos(t) - \cos(3t) \qquad y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t).$$

Exercice 9. Soit la courbe plane Γ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = e^{-t}\cos(t) \qquad y(t) = e^{-t}\sin(t).$$

Calculer la longueur de Γ entre les points de paramètre 0 et 1.

Corrigé de l'exercice Exercice 4 TD1

Calculs préliminaires des dérivées. On a :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t+1} = t - 1 + \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 1 - \dfrac{1}{(t+1)^2} = \dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2} \\ y' = 2t - 1 + \dfrac{1}{(t+1)^2} = \dfrac{t^2(2t+3)}{(t+1)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = \dfrac{2}{(t+1)^3} \\ y'' = 2 - \dfrac{2}{(t+1)^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x''' = -\dfrac{6}{(t+1)^4} \\ y''' = \dfrac{6}{(t+1)^4} \end{cases}$$

a) Points singuliers $x' = y' = 0 \iff (t+1)^2 = 1$ et $2t = 0 \iff t = 0$ qui est donc le seul paramètre de point singulier et on a $f''(0) = (x''(0), y''(0) = (2,0) \neq 0$ donc en ce point singulier $p = 2$ et la tangente est l'axe Ox. Comme $f'''(0) = (x'''(0), y'''(0) = (-6,6)$ est linéairement indépendant de $f''(0)$, donc $q = 3$. Le point singulier $f(0)$ est donc un point de rebroussement de 1ère espèce.

b) Branches infinies Si $t \to \pm\infty$, on a $y'/x' \to \pm\infty$, il y a donc une direction asymptotique verticale mais pas d'asymptote verticale car $lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \pm\infty$ donc n'a pas de limite finie. Il y a néanmoins une courbe asymptote, la courbe paramétrée $X(t) = t - 1$ et $Y(t) = t^2 - t + 1$. En effet, on a $X(t) - x(t) = y(t) - Y(t) = \frac{1}{t+1}$ qui tend vers 0 lorsque $t \to \pm\infty$.

Le support de cette courbe asymptote est la parabole P d'équation $y = (x + 1/2)^2 + 3/4$.

Si $t \to -1^{\pm}$, on a $y'/x' \to -1$, il y a donc une direction asymptotique de pente -1 qui cette fois donne lieu à une asymptote la droite D d'équation $x + y = 1$ car $x(t) + y(t) = t^2 \to 1$ lorsque $t \to -1^{\pm}$.

c) Convexité On étudie les variations de la pente $g(t) = y'(t)/x'(t)$ de la tangente aux points réguliers. La dérivée $g'(t) = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))/x'(t)^2$ est du signe de $\Delta(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$. Simplifions $\Delta(t)$ en posant $u = 1/(t+1)$. Il vient

$$\Delta(t) = 2((1-u^2)(1-u^3) - u^3(2t - 1 + u^2)) = 2(1 - u^2 - u^3 + u^5 - 2tu^3 + u^3 - u^5) = 2(1 - u^2 - 2tu^3) = 2\frac{t^2(t+3)}{(t+1)^3}$$

qui change de signe en $t = -3$ dans l'intervalle de définition $]-\infty, -1[$. Dans cet intervalle, la convexité est d'abord tournée vers la gauche puis au delà du point d'inflexion $K = f(-3) = (-9/2, 27/2)$ tournée vers la droite. La convexité dans les intervalles $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$ est constamment tournée vers la gauche.

d) Tableau de variation

t	$-\infty$		-2		$-3/2$			-1			0		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	$-$		$-$	$\|\|$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-9/2$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	$-$	$-$	0		$+$	$\|\|$		$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\searrow$	$27/4$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) Tracé de Γ