UJF 2012-2013 UE MAT237 Contrôle du 13 décembre 2012 (15h15-16h45)

Calculettes, documents et portable interdits. Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée. Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (6 pts) Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels. On considère l'équation différentielle (où $x = x(t)$ est la fonction inconnue)

$$x' = P(x) \qquad (E)$$

1) Dans le cas $P(x) = 1 + x^2$, trouver la solution de (E) de condition initiale $x(0) = 0$. On précisera l'intervalle maximum de définition de la solution.

2) Dans le cas où $P(x) = x^2 - 4x + 3$, sans chercher à résoudre explicitement (E) :

a) Déterminer les solutions stationnaires de (E).

b) Montrer que la solution de condition initiale $x(0) = 2$ est bornée et strictement monotone.

Exercice 2 (10 pts) Etant donné un réel a, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2a-1 & 2(1-a) \\ a-1 & 2-a \end{pmatrix}$

1) Trouver en fonction de a les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres [Indication : l'une des valeurs propre est égale à 1].

2) En déduire une matrice P à coefficients réels (ne dépendant pas de a) telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

3) Résoudre le système différentiel (cas $a = -1$) avec la condition initiale $x(0) = 3$ et $y(0) = 2$

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

et tracer la courbe paramétrée solution $t \to (x(t), y(t))$.

4) Résoudre le système différentiel

$$(S) \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = tv(t) + t \end{cases}$$

5) Montrer comment à l'aide de 1) et 2) (cas $a = t$) la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \begin{cases} x' = (2t-1)x + 2(1-t)y + 2t \\ y' = (t-1)x + (2-t)y + t \end{cases}$$

peut être ramenée à celle de (S).

Exercice 3 (4 pts) On considère sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle du second ordre (où $x = x(t)$ est la fonction inconnue)

$$t^2x'' - (t^2 + 2t)x' + (t + 2)x = 0 \qquad (E)$$

1) Trouver une solution particulière $x_0(t)$ de (E) de la forme $x_0(t) = at + b$ où a et b sont des constantes réelles.

2) En déduire la solution générale de (E) en posant $x(t) = C(t)x_0(t)$ (variation des constantes).

***

Corrigé du contrôle du 13 décembre 2012

Exercice 1. 1) (E) est à variable séparée, elle peut s'écrire $\dfrac{x'(t)}{1+x^2(t)} = (\arctan(x(t)))' = 1$ et donc $\arctan(x(t)) = t + \text{Cte}$ ce qui donne $x(t) = \tan(t + \text{Cte})$. Comme $x(0) = 0$, on a $\text{Cte} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On peut prendre $k = 0$ car la fonction $\tan t$ est π-périodique. Finalement, la solution de condition initiale $x(0) = 0$ est $x(t) = \tan t$ dont l'intervalle maximal de définition est $I =]-\pi/2, \pi/2[$.
2) Dans le cas $P(x) = x^2 - 4x + 3$, l'équation s'écrit $x' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

a) Les solution stationnaires sont donc $x(t) = 1$ et $x(t) = 3$.
b) Soit la solution $x(t)$ de condition initiale $x(0) = 2$ et définie sur un intervalle $I =]a, b[$ contenant 0. On a $1 < x(0) < 3$ donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $x(t) > 1$ $\forall t \in I$ sinon, $x(t)$ étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il y aurait un $t_0 \in I$ avec $x(t_0) = 1$ et donc $x(t)$ serait la solution stationnaire $x(t) = 1$ ce qui n'est pas le cas $(x(0) = 2)$. Même raisonnement pour montrer que $x(t) < 3$ $\forall t \in I$.
Donc on sait que $1 < x(t) < 3$ $\forall t \in I$, ce qui implique en particulier que la solution $x(t)$ est bornée. Comme de plus on a $P(x) < 0$ pour $1 < x < 3$, il vient $x'(t) = P(x(t)) < 0$ et donc la solution $x(t)$ est strictement décroissante sur son intervalle de définition I.

Exercice 2. 1)2) Les valeurs propres sont données par
$\begin{vmatrix} 2a-1-\lambda & 2(1-a) \\ a-1 & 2-a-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2a + 1)(\lambda + a - 2) + 2(a-1)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - a) = 0$ ce sont donc 1 et a. Le vecteur (x, y) est vecteur propre de valeur propre λ si on a $\begin{pmatrix} 2a-1-\lambda & 2(1-a) \\ a-1 & 2-a-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$.
On trouve ainsi $(a-1)(x-y) = 0$ pour la valeur propre 1 et $(a-1)(x-2y) = 0$ pour la valeur propre a. Pour toute valeur de a, les vecteurs $(1,1)$ et $(2,1)$ forment une base de vecteurs propres respectivement pour les valeurs propres 1 et a et donc la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.

3) Le système différentiel en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ s'écrit $Y' = AY$ et en faisant le changement d'inconnu $Y(t) = PZ(t)$ où $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ s'écrit $PZ' = APZ$ équivalent à $Z' = P^{-1}APZ = DZ$ (en multipliant à gauche par P^{-1}). Dans le cas présent A est la matrice pour le cas $a = -1$ et donc $D == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be^t \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$ d'où $Y(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} be^t + 2ce^{-t} \\ be^t + ce^{-t} \end{pmatrix}$.
La condition initiale $x(0) = b + 2c = 3$ et $y(0) = b + c = 2$ fixe les constantes $b = c = 1$.

Dans les coordonnées propres u, v, la courbe solution a pour équation implicite $uv = bc = 1$ c'est donc une branche d'hyperbole.

4) $u'(t) = u(t) \iff u(t) = be^t$ et $v'(t) - tv(t) = t$ a pour solution sans second membre $v(t) = Ce^{t^2/2}$ on trouve la solution avec second membre en posant $v(t) = C(t)e^{t^2/2}$ (variation de la constante C).
On a $C'(t)e^{t^2/2} = t \iff C'(t) = te^{-t^2/2} = -(e^{-t^2/2})' \iff C(t) = -e^{-t^2/2} + \text{Cte}$ donc $v(t) = (-e^{-t^2/2} + c)e^{t^2/2} = -1 + ce^{t^2/2}$ où c est une constante.

5) Avec les mêmes notation qu'en 3) le système (Σ) s'écrit $Y' = AY + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2(1-t) \\ t-1 & 2-t \end{pmatrix}$ (la matrice A du début pour $a = t$) qui en posant encore $Y(t) = PZ(t)$ où $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ devient $PZ' = APZ + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ équivalent à $Z' = DZ + P^{-1}\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ (en multipliant à gauche par P^{-1}). On vérifie que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc, résoudre (Σ) revient à résoudre $Z' = DZ + P^{-1}\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ qui est le sytème (S). La solution générale de (Σ) est donc $Y(t) = P\begin{pmatrix} be^t \\ -1 + ce^{t^2/2} \end{pmatrix}$ où $b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. 1) $x_0(t) = t$ est solution particulière de (E).

2) En posant $x(t) = C(t)t$ (variation des constantes), on a
$t^2(C''(t)t + 2C'(t) - (t^2 + 2t)x' + (t+2)C'(t)t = t^3(C''(t) - C'(t)) = 0 \iff C''(t) - C'(t) = 0$ car $t > 0$. Donc $C'(t) = ce^t$ d'où $C'(t) = ce^t + b$ et finalement $x(t) = bt + cte^t$.