DM à rendre au plus tard le 4 octobre

Exercice 1

Étude de la courbe donnée par :

$$(x(t), y(t)) = \left(2t + \frac{8}{t}, 5t + 3 + \frac{5}{t-1}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition conjoint de $x(t)$ et $y(t)$.
   Le domaine de définition conjoint de x et y est $D_r = \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.
2. Déterminer les asymptotes (horizontales, verticales, obliques) éventuelles de la courbe ainsi que leurs positions par rapport à la courbe.
   Pour étudier les asymptotes de la courbe, il faut se placer aux bornes du domaine de définition conjoint. Ici, on va donc étudier ce qu'il se passe en $-\infty$, 0, 1 et $+\infty$.
   En 0 :
   On a $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} y(t) = -2$, donc on a ici une asymptote horizontale d'équation $y = -2$. De la même manière, on a $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} y(t) = -2$, donc on a ici une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.

   En 1 :
   On a $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} x(t) = 10$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} y(t) = -\infty$, donc on a ici une asymptote verticale d'équation $x = 10$. De la même manière, on a $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} x(t) = 10$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} y(t) = +\infty$, donc on a ici une asymptote verticale d'équation $x = 10$.

   En $-\infty$:
   On a $\lim\limits_{t\to -\infty} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to -\infty} y(t) = -\infty$.
   On calcule alors $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{5}{2}\frac{1+\frac{3}{5t}+\frac{1}{t(t-1)}}{1+\frac{4}{t^2}}$.
   On a donc $\lim\limits_{t\to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{5}{2}$.
   Ensuite, $y(t) - \frac{5}{2}x(t) = 3 + \frac{5}{t-1} - \frac{20}{t}$, donc $\lim\limits_{t\to -\infty} y(t) - \frac{5}{2}x(t) = 3$.
   On obtient donc que la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{5}{2}x + 3$.
   Un raisonnement similaire donne le même résultat en $+\infty$.
   Conclusion : La courbe admet :
   Une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.
   Une asymptote verticale d'équation $x = 10$.
   Une asymptote oblique d'équation $y = \frac{5}{2}x + 3$.

   Un moyen de comparer une asymptote avec une courbe est de paramétrer l'asymptote avec le même paramétrage pour une des deux coordonnées et de comparer la coordonnée qui n'est pas commune.
   Pour l'asymptote horizontale d'équation $y = -2$:
   On prend le paramétrage suivant pour cette droite asymptote : $(2t + \frac{8}{t}, -2)$. Si, pour t proche de 0 et strictement inférieur à 0, $y(t) - (-2) > 0$, la courbe sera au dessus de l'asymptote pour ces valeurs de t.
   Si, pour t proche de 0 et strictement inférieur à 0, $y(t) - (-2) < 0$, la courbe sera en dessous de

l'asymptote pour ces valeurs de t.
Pour t dans D_r,

$$\begin{aligned} y(t)+2 &= 5t+3+\frac{5}{t-1}+2 \\ &= 5(t+1+\frac{1}{t-1}) \\ &= 5\left(\frac{(t+1)(t-1)+1}{t-1}\right) \\ &= 5\frac{t^2}{t-1}. \end{aligned}$$

Donc, pour t proche de 0 et strictement inférieur à 0, $y(t)-(-2)<0$, donc la courbe est en dessous de l'asymptote pour ces valeurs de t. Avec le même calcul, pour t proche de 0 et strictement supérieur à 0, $y(t)-(-2)<0$, donc la courbe est en dessous de l'asymptote pour ces valeurs de t.

Pour l'asymptote verticale d'équation $x=10$:
On prend le paramétrage suivant pour cette droite asymptote : $(10, 5t+3+\frac{5}{t-1})$. Pour t dans D_r,

$$\begin{aligned} x(t)-10 &= 2t+\frac{8}{t}-10 \\ &= \frac{2t^2+8-10t}{t} \\ &= \frac{2(t-1)(t-4)}{t}. \end{aligned}$$

Donc, pour t proche de 1 et strictement inférieur à 1, $x(t)-10>0$, donc la courbe est à droite de l'asymptote pour ces valeurs de t.
Avec le même calcul, pour t proche de 1 et strictement supérieur à 1, $x(t)-10<0$, donc la courbe est à gauche de l'asymptote pour ces valeurs de t.

Pour l'asymptote verticale d'équation $y=\frac{5}{2}x+3$:
On prend le paramétrage suivant pour cette droite asymptote : $(2t+\frac{8}{t}, \frac{5}{2}x(t)+3) = (2t+\frac{8}{t}, 5t+\frac{20}{t}+3)$.
Pour t dans D_r,

$$\begin{aligned} y(t)-(5t+\frac{20}{t}+3) &= 5t+3+\frac{5}{t-1}-5t-\frac{20}{t}-3 \\ &= \frac{5}{t-1}-\frac{20}{t} \\ &= \frac{5t-20t+20}{t(t-1)} \\ &= \frac{-15t+20}{t(t-1)} \end{aligned}$$

Donc, pour t suffisamment petit (tendant vers $-\infty$) , $y(t)-(5t+\frac{20}{t}+3)>0$, donc la courbe est au dessus de l'asymptote pour ces valeurs de t.
Avec le même calcul, pour t suffisamment grand (tendant vers $+\infty$) , $y(t)-(5t+\frac{20}{t}+3)<0$, donc la courbe est en dessous de l'asymptote pour ces valeurs de t.

Pour la position courbe/asymptote, on pouvait aussi réaliser des DL ou trouver des équivalents des coordonnées aux voisinages des points voulus.

3. Calculer, sur leurs domaines de définitions, x' et y'. Dresser le double tableau de variations et indiquer les éventuelles tangentes horizontales et verticales.
La fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et pour tout t dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a $x'(t) = 2 - \frac{8}{t^2}$.
La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et pour tout t dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a $y'(t) = 5 - \frac{5}{(t-1)^2}$.

On commence par remarquer que pour tout t dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a $x'(t) = \frac{2t^2-8}{t^2}$, donc le signe de $x'(t)$ dépend uniquement du signe de $2t^2 - 8$. On a ici un polynôme du second degré, de coefficient dominant positif, donc il est négatif dans l'intervalle donné par ses racines (qui sont -2 et 2) et positif partout ailleurs.
De même pour y', on commence par remarquer que pour tout t dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a $y'(t) = \frac{5(t-1)^2-5}{(t-1)^2}$, donc le signe de $y'(t)$ dépend uniquement du signe de $5(t-1)^2 - 5$. On a ici un polynôme du second degré, de coefficient dominant positif, donc il est négatif dans l'intervalle donné par ses racines (qui sont 0 et 2) et positif partout ailleurs.
Cela donne le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	10	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-26}{3}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	18	$\nearrow$	$+\infty$

On identifie une tangente verticale en $t = -2$. Le calcul de la tangente en le point $t = 2$ fera l'objet de la question suivante.

4. Déterminer le (ou les) point(s) singulier(s), leur nature et calculer la tangente en ce(s) point(s).
D'après les calculs effectués à la question précédente, la courbe admet un unique point singulier $M(8, 18)$ pour $t = 2$.
Pour déterminer la tangente à la courbe au point M, il faut calculer les dérivées secondes de x et y :
On a : $x''(t) = \frac{16}{t^3}$ et $y''(t) = \frac{10}{(t-1)^3}$.
Donc $x''(2) = 2$ et $y''(2) = 10$. De là, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point M. Plus précisément, la tangente à la courbe au point M est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ et passant par le point de $M(8, 18)$. Ou encore, la tangente à la courbe au point M a pour équation $y = 5x - 22$.

Pour la nature du point singulier, on continue à dériver :
$x^{(3)}(t) = -3 \times \frac{16}{t^4}$ et $y^{(3)}(t) = -3 \times \frac{10}{(t-1)^4}$.
Donc $x^{(3)}(2) = -3$ et $y^{(3)}(2) = -30$. De plus, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -30 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.
On conclut donc que ce point singulier est un point de rebroussement de première espèce.

5. Discuter la convexité de la courbe et déterminer les points d'inflexion éventuels. (On pourra effectuer les calculs à la calculatrice **en indiquant les commandes utilisées sur votre copie**)
On rappelle que la convexité de la courbe est donnée par le signe de la quantité $x'y'' - x''y'$ sur des intervalles du domaine de définition.
Le calcul de ces fonctions ayant déjà été effectué précédemment, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) &= (2 - \frac{8}{t^2}) \times \frac{10}{(t-1)^3} - \frac{16}{t^3} \times (5 - \frac{5}{(t-1)^2}) \\
&= \frac{20t^3 - 80t - 80(t-1)^3 + 80(t-1)}{t^3(t-1)^3} \\
&= \frac{20t^3 - 80(t-1)^3 - 80}{t^3(t-1)^3} \\
&= \frac{20t^3 - 80t^3 + 240t^2 - 240t + 80 - 80}{t^3(t-1)^3} \\
&= \frac{20t^3 - 80t^3 + 240t^2 - 240t + 80 - 80}{t^3(t-1)^3} \\
&= \frac{-60t^3 + 240t^2 - 240t}{t^3(t-1)^3} \\
&= -60\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2(t-1)^3} \\
&= -60\frac{(t-2)^2}{t^2(t-1)^3}
\end{aligned}$$

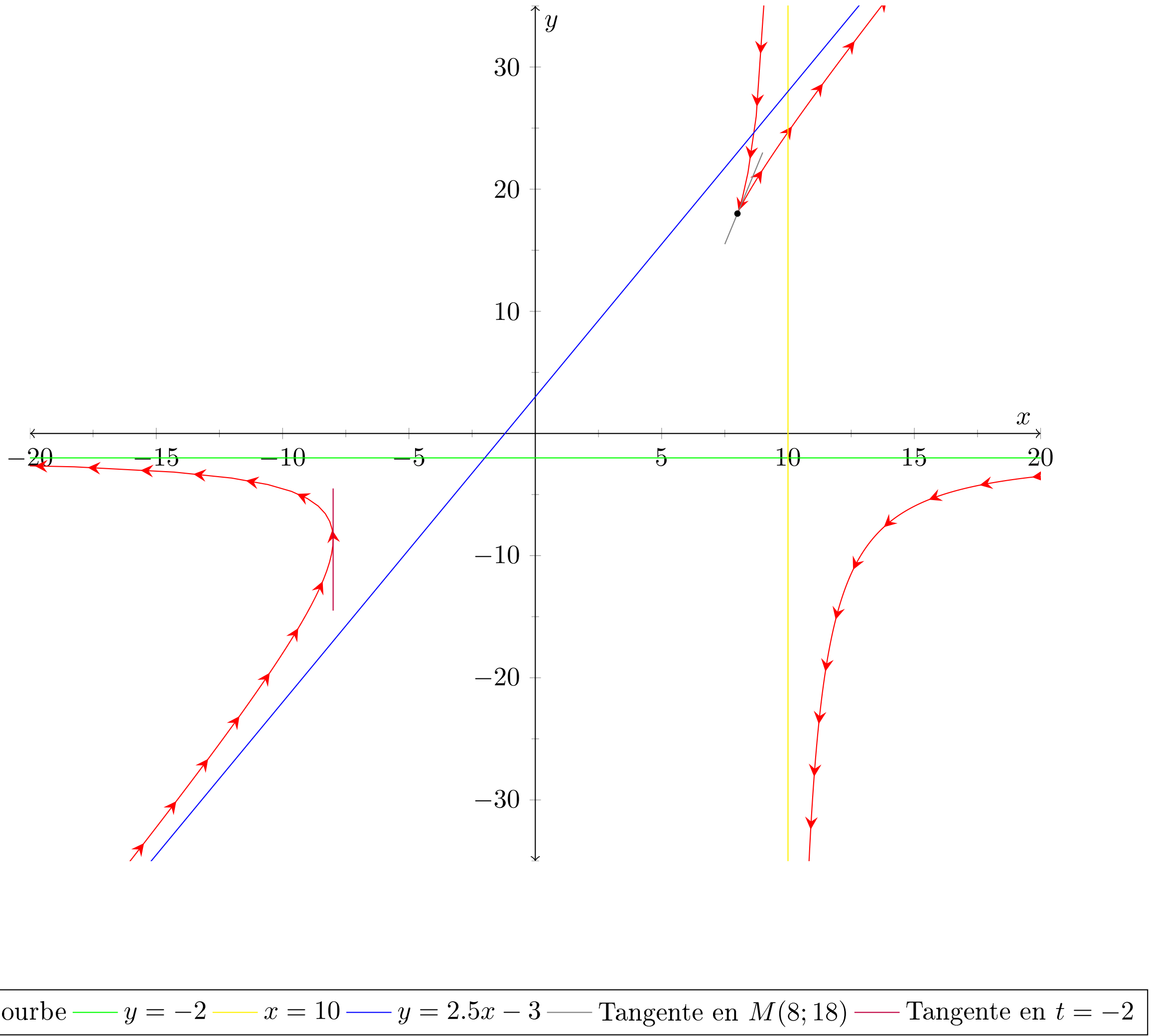
Donc, sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$, la courbe est convexe, et sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la courbe est concave.
La quantité s'annule en $t = 2$ donc le point d'inflexion analytique est le point de paramètre $t = 2$.

Sinon, avec la calculatrice, on peut effectuer les commandes suivantes :

```
x1(t):=derive(x(t),t)
x2(t):=derive(x1(t),t)
y1(t):=derive(y(t),t)
y2(t):=derive(y1(t),t)
factor(y2(t)*x1(t)-x2(t)*y1(t))
```

On obtiendrait alors le même résultat que précédemment.

6. Tracer la courbe en indiquant le sens de parcours lorsque t augmente.



Exercice 2

On considère la courbe C dont l'équation polaire est

$$r(\theta) = \frac{1}{1 + 2\sin(\theta)}, \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[$$

1. Déterminer $r(\pi - \theta)$ en fonction de $r(\theta)$, en déduire qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ et donner la symétrie correspondante.
   Soit θ tel que $1 + 2\sin(\pi - \theta) \neq 0$.
   Alors :

$$\begin{aligned} r(\pi - \theta) &= \frac{1}{1 + 2\sin(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{1 + 2\sin(\theta)} \text{ car } \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \\ &= r(\theta). \end{aligned}$$

   Donc on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ (ou encore $]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}]$).
   Pour obtenir toute la courbe à partir de ce qu'on aura tracé sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, il faudra appliquer une symétrie par rapport à l'axe (O_y).

2. Faire l'étude de la courbe : domaine de définition, étude des asymptotes, tableau de variations.

Domaine de définition :

Pour trouver le domaine de définition de r, il suffit de trouver l'ensemble des θ de $\mathbb{R}$ tels que $1+2\sin(\theta) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} 1+2\sin(\theta) = 0 &\Leftrightarrow 2\sin(\theta) = -1 \\ &\Leftrightarrow \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \pi - (-\frac{\pi}{6} + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}$$

Donc $D_r = \mathbb{R}\backslash \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \| k \in \mathbb{Z} \cup \{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}\right)$.

Étude des asymptotes :

On n'a qu'à étudier ce qu'il se passe en $\theta = -\frac{\pi}{6}$. On a une asymptote dont la direction asymptotique fait un angle de $\frac{-\pi}{6}$ avec l'axe des x. On a donc que $\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{6}) \\ \sin(-\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite asymptote.

On cherche, si elle existe, la limite de $r(\theta)\sin(\theta + \frac{\pi}{6})$ en $-\frac{\pi}{6}$.

Or, $r(\theta)\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{6})}{1+2\sin(\theta)}$.

Posons $f(\theta) = \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$ et $g(\theta) = 1 + 2\sin(\theta)$. On commence par remarquer que $\lim\limits_{\theta \to \frac{-\pi}{6}} f(\theta) = 0$ et $\lim\limits_{\theta \to \frac{-\pi}{6}} g(\theta) = 0$. De plus, les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $f'(\theta) = \cos(\theta + \frac{\pi}{6})$ et $g'(\theta) = 2\cos(\theta)$.

Et, on a $\lim\limits_{\theta \to \frac{-\pi}{6}} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = \frac{\cos(0)}{2\cos(-\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Donc, par la règle de L'Hospital, $\lim\limits_{\theta \to \frac{-\pi}{6}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim\limits_{\theta \to \frac{-\pi}{6}} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

De là, on a que l'asymptote de la courbe a pour équation cartésienne $\cos(-\frac{\pi}{6})y - \sin(-\frac{\pi}{6})x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, soit $y \times \frac{\sqrt{3}}{2} - x \times (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ou encore $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3}$.

Tableau de variations :

On commence par remarquer que r est dérivable sur D_r, et, pour tout θ dans D_r, on a $r'(\theta) = -\frac{2\cos(\theta)}{(1+2\sin(\theta))^2}$.

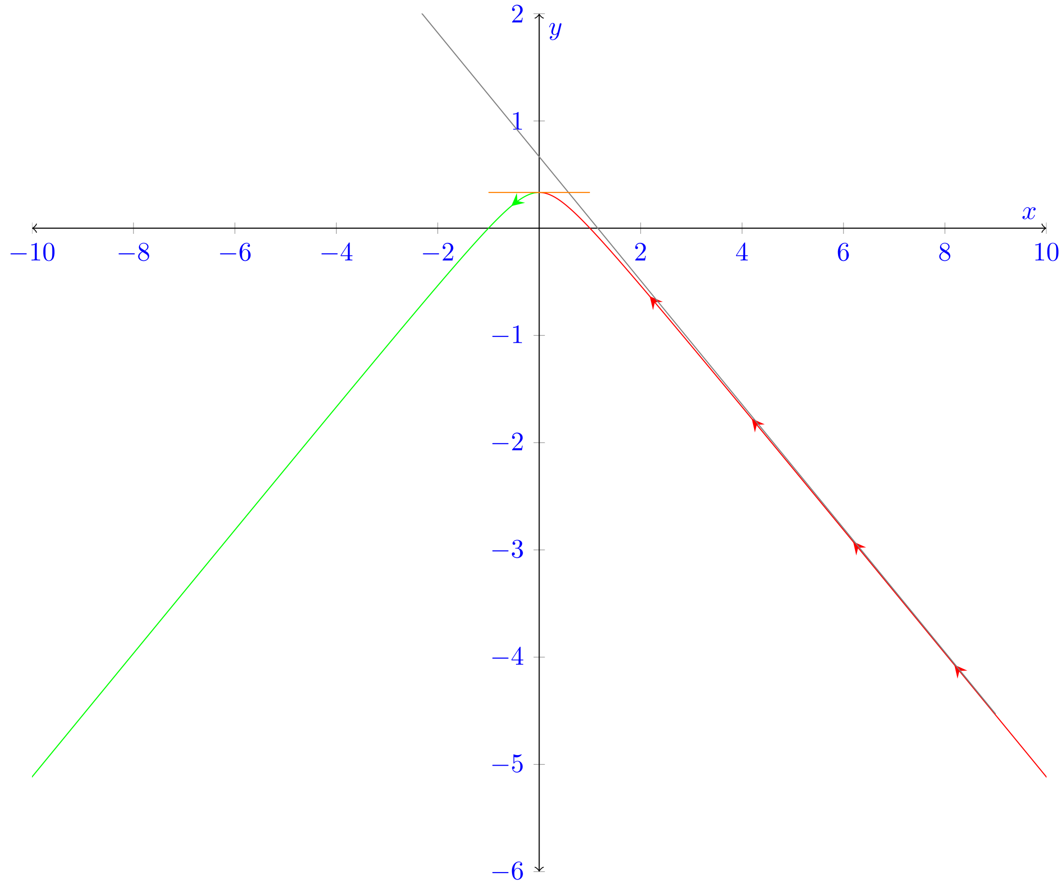
Le signe de $r'(\theta)$ dépend donc uniquement de signe de $-\cos(\theta)$, ce dernier étant négatif pour θ dans $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

θ	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$r'(\theta)$	$\Vert$	$-$	0
r	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

On peut remarquer, grâce à ce tableau, qu'en $\frac{\pi}{2}$, la tangente à la courbe est portée par $\overrightarrow{e_\theta}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc une tangente horizontale en le point de paramètre $t = \frac{\pi}{2}$.

3. Tracer la courbe. Y-a-t'il des points d'inflexion ?



Courbe sur $\left]\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ — Courbe obtenue par symétrie par rapport à O_y

Asymptote oblique d'équation $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3}$ — Tangente horizontale en le point de paramètre $t = \frac{\pi}{2}$

Points d'inflexions :

On va chercher à résoudre $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = 0$. Pour cela, on a besoin de :
$\frac{1}{r(\theta)} = 1 + 2\sin(\theta)$,
$\left(\frac{1}{r(\theta)}\right)'' = -2\sin(\theta)$,
Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' &= 1 + 2\sin(\theta) + (-2\sin(\theta)) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc il n'y a pas de point d'inflexion ici.