

Partiel du 23 octobre 2024

Calculatrice et feuille recto-verso A_4 manuscrite autorisées.

Ce sujet comporte deux exercices sur les pages 1 et 2 du sujet. Vous pouvez utiliser les pages 3 et 4 pour les représentations graphiques, n'oubliez pas de les détacher et de les rendre avec votre copie.

Exercice 1

On considère la courbe C paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t))$ où

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t+1} + t + 5t^2 \\ y(t) = -\frac{2}{t+1} - 2t \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de C .
2. Dresser le double tableau de variation de (x, y) .
3. Faire l'étude des branches infinies de la courbe.
4. Vérifier que la courbe admet un unique point singulier. Donner un vecteur directeur pour la tangente en ce point singulier et décrire la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de ce point.
5. Tracer la courbe et indiquer le sens de parcours. Tracer également les asymptotes éventuelles.
6. Déterminer le repère de Frenet au point de paramètre $t = -\frac{1}{2}$, puis déterminer le centre du cercle osculateur en ce point. Tracer le cercle sur le dessin de la courbe.
7. Écrire sous la forme d'une intégrale définie la longueur de l'arc entre les paramètres $t = 1$ et $t = 2$. Donner une valeur approchée de cette intégrale, obtenue à l'aide de la calculatrice (préciser la commande utilisée).

Exercice 2

Soit C la courbe du plan donnée par l'équation polaire

$$r(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1 \right)$$

1. Vérifier que r est 4π périodique et que $r(2\pi - \theta) = -r(\theta)$.
2. En déduire que l'on peut restreindre l'étude de la courbe C à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et expliquer comment on complète le morceau de courbe obtenu lorsque θ varie entre $-\pi$ et π pour obtenir la courbe C toute entière.
3. Montrer qu'il existe un unique point singulier sur $[-\pi, \pi]$ et déterminer la tangente en ce point.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction r sur $[-\pi, \pi]$.
5. Montrer que $2(r')^2 + r^2 - rr'' = P\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ avec $P(X) = (X + 1)^2(7 - 5X)$, et en déduire la convexité de la courbe sur $[-\pi, \pi]$. On pourra faire la vérification à la calculatrice en indiquant les commandes utilisées.
6. Déterminer la tangente en $\theta = \pi/3$ (en donner une équation paramétrique ou cartésienne).
7. Tracer sur un même dessin la courbe complète, la tangente de la question précédente et indiquer les points de la courbe correspondant aux valeurs du paramètre $t = 0, 2\pi$ et $3\pi/2$.



