Exercice 0, rappels de géométrie analytique, complexes et trigonométrie

1. Déterminer la pente, le vecteur directeur et l'équation cartésienne de la tangente au graphe de $f(x) = x^2 - 1$ au point d'abscisse $x = 3$. Faire une représentation graphique.
2. Donner le vecteur directeur de la tangente au cercle de centre $C(-1, -2)$ et de rayon 5 passant par le point $(2, 2)$, puis une équation paramétrique de cette tangente, puis une équation cartésienne. Faire une figure.
3. Soit deux droites D et D' de pentes m et m'. Montrer que D et D' sont orthogonales si et seulement si $mm' = -1$.
4. Soit $A(-1, 0)$ et $B(1, 0)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 4$. Faire une figure.
5. Tracer le cercle C d'équation cartésienne $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$. Donner une équation $y = f(x)$ du demi-cercle tel que $y > 2$. Vérifier que la tangente calculée en voyant le demi-cercle comme un graphe de fonction est bien orthogonale au rayon.
6. Déterminer les images par la symétrie axiale d'axe d'équation $y = 2x$ de A, la droite AB et le cercle C définis ci-dessus.
7. On considère les graphes F de e^x et G de e^{-x}, soient M et N les points de F et G d'abscisses $a \in \mathbb{R}$, et D et D' les tangentes en M et N. Que peut-on dire de ces 2 droites ? Soient P et Q les intersections avec l'axe des abscisses, déterminer la longueur PQ.
8. Donner le module et l'argument de $1 + i, 3 - 4i, -1 + \sqrt{3}i$. Représenter les points du plan d'affixe $2e^{i\pi/4}, \sqrt{3}e^{i\pi/6}$ et donner leurs coordonnées.
9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes
$$z^2 + 2 = 0 \quad z^2 = 1 + i \quad z^2 + iz = 2 \quad z^2 + rz - \omega^2 = 0$$
10. Suite géométrique dans $\mathbb{C}$
Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = qu_n$. Représentez les 10 premiers termes de la suite lorsque $q = 1 + i, i, (1 - i)/3$. Donner la représentation polaire de u_n en fonction de n et expliquez le graphique.
11. Calculer $\int_0^\pi \sqrt{\cos(2x) + 1}$
12. Linéariser $\sin(x)^4$ en utilisant $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ puis en déterminer une primitive.
13. Résoudre l'équation $\cos(3x) + \cos(x) = \sqrt{2}$ en utilisant $\cos(3x) = \Re((e^{ix})^3)$
14. Représenter dans le plan complexe les points A et B d'affixe $1 + i$ et $2 - i$. Déterminer le lieu des points M équidistants de A et B. Déterminer le cercle de diamètre AB (affixe du centre et rayon).
15. Soit r la rotation de centre l'origine, et d'angle $\pi/6$. Calculer les images des vecteurs de base d'affixe 1 et i en utilisant les nombres complexes. En déduire la matrice de r dans la base canonique. Faire le même calcul pour la rotation inverse et vérifier que les deux matrices sont inverses.
Soit $M(x, y)$ dans la base canonique, déterminer les coordonnées (X, Y) de M dans la base image de la base canonique par r.

Exercice 1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $(1, 2)$ et perpendiculaire à la droite paramétrée $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$. En donner une représentation paramétrique.
Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ donnée par l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Donner une infinité de paramétrages différents de D.

Exercice 2. Soit $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$. Déterminer le domaine de définition de f, des éventuelles symétries de la courbe, les asymptotes éventuelles, faire le tableau de variations de f, tracer la courbe et ses éléments remarquables.

Exercice 3. Montrer que le cercle défini comme la courbe paramétrée $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$ n'est pas le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de réels. Donner un intervalle en t de taille maximal où elle l'est et tracer l'arc de courbe correspondant.
Déterminer une équation paramétrique de l'image du cercle trigonométrique par l'affinité de base Ox, de direction Oy et rapport r (écrasement vertical du cercle), on obtient une ellipse. Pour avoir une branche

d'hyperbole changer les fonctions trigonométriques en fonctions trigonométriques hyperboliques. Tracer ces courbes pour $r = 0.5$. Donner une équation paramétrique de la parabole d'équation $x = y^2$ dans $\mathbb{R}^2$, la tracer.

Exercice 4 Soit la courbe plane Γ donnée par $f(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{t^2}{1+t}, \frac{t^3}{1+t})$ où le paramètre t décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Déterminer les points singuliers de Γ et la tangente en ces points (bonus : déterminer la nature de ces points singuliers).

b) Etudier les branches infinies de Γ (il y a une asymptote).

c) Etudier la convexité de Γ (conseil : considérer les variations de $g(t) = y'(t)/x'(t)$).

d) Dresser un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$.

e) Tracer la courbe Γ.

Exercice 5. Etude de L la courbe de Lissajous paramétrée par $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \cos 3t$.

1. Donner les symétries qui permettent de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$.
2. Dresser sur $[0, \pi/2]$ un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$.
3. Déterminer la tangente en L en $t = \pi/4$.
4. A l'aide de tout ceci, tracer la courbe L.
5. Préciser le tracé en étudiant sur $[0, \pi/2]$ la convexité de L

Exercice 6. Etudier les branches infinies de la courbe plane définie par :

$$t \mapsto (\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1})$$

Exercice 7. Soit la courbe plane paramétrée par $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t - \frac{1}{t}$ pour $t > 0$. Montrer que, par changement de paramètre, cette courbe se transforme en $x(t) = 2\cosh(s)$, $y(t) = 2\sinh(s)$.

Exercice 8* : Soit la parabole P d'équation $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$. Déterminer le point d'intersection de la réflexion sur la parabole de rayons incidents verticaux dirigés vers le bas.

Exercice 9. Soit la courbe plane définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (3t^2 - 2t^3, 5t^4 - 4t^5)$. Déterminer les points singuliers de cette courbe et la tangente en ces points. Bonus : déterminer la nature de ces points singuliers.

Exercice 10. Soit l'astroïde A paramétrée par $x(t) = \frac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t)$, $y(t) = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$

a) Déterminer les points singuliers de A et la tangente à l'astroïde en ces points.

b) Vérifier que la distance entre les points d'intersection de la tangente en un point régulier $M(t) \in A$ avec les axes est constante. En déduire une construction géométrique alternative de l'astroïde.

Exercice 11 Étude et tracé de la courbe plane d'équation polaire $r(\theta) = \cos 3\theta$.

Exercice 12. Etudier et tracer les courbes planes définies par :

1) $t \mapsto (\frac{t}{1+t^2}, \frac{2+t^3}{1+t^2})$,

2) $r(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta - \pi/4}$

3) (Rosace à trois boucles) $r(\theta) = \sin(3\theta)$.

Exercice 13. Soit C un cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

1. Déterminer une équation polaire de C.
2. Soit D une droite passant par l'origine qui coupe C en un point P. On construit sur D deux points M et N distincts tels que $d(P; M) = d(P; N) = a$, où a est un réel strictement positif fixé. Déterminer une équation polaire de l'ensemble Γ_a décrit par les points M et N si l'on varie D (*limaçons de Pascal*).
3. Étudier et tracer Γ_1.
4. Déterminer, lorsque a décrit $]0; \infty[$, l'ensemble des points des courbes Γ_a dont la tangente est verticale.

Exercice 14. Une conique C d'excentricité $e > 0$ de foyer l'origine O du plan et de directrice D la droite d'équation $x = d > 0$ est l'ensemble des points M vérifiant $d(O, M) = ed(M, D)$ où $d(M, D)$ est la distance du point M à la droite D.

1. Montrer que l'équation polaire de C est $r(\theta) = \dfrac{ed}{1 + e\cos(\theta)}$
2. En déduire que C est une ellipse si $e < 1$.
3. Dans quel cas C est-t-elle une parabole ?
4. Tracer la courbe pour $d = 1$ et $e = 1/2$, $e = 1$ et $e = 2$.

Exercice 15 : Paramétrer et faire l'étude des coniques d'équation cartésienne :

$$x^2 + 4y^2 + 2xy = 4, \quad x^2 - 3y^2 + 2xy = 4$$

Exercice 16. (Strophoïde droite) Soit Γ la courbe d'équation cartésienne :

$$x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$$

1) Soit Δ_t la droite d'équation $y = tx$. Déterminer pour $t \neq 0$, le point d'intersection $M(t) = (x(t), y(t))$ de Γ et Δ_t. En déduire une paramétrisation de Γ.

2) Déterminer l'équation polaire de Γ.

3) Tracer la courbe Γ.

Exercice 17*. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et γ un cercle de rayon $1/n$ qui roule sans glisser à l'intérieur du cercle unité C. On fixe un point M du cercle mobile γ, il décrit dans le mouvement une courbe. On prend comme paramètre l'angle polaire $\theta \in \mathbb{R}$ du point de contact $H(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ du cercle mobile γ avec le cercle fixe C. On suppose que $M(0) = H(0) = (1, 0)$.

a) Calculer les coordonnées du centre $I(\theta)$ de γ au temps θ.

b) Montrer que l'angle $\widehat{M(\theta)H(\theta)}$ est $n\theta$.

c) Trouver les coordonnées de $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$.

[Résultat : $x(\theta) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\theta + \cos(n-1)\theta)$, $y(\theta) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\theta - \sin(n-1)\theta)$]

Exercice 18 Déterminer la longueur d'un arc de cycloïde :

$$x(t) = R(t - \sin(t)), y(t) = R(1 - \cos(t))$$

Exercice 19. Calculer la longueur de la *néphroïde*, d'équations paramétriques

$$x(t) = 3\cos(t) - \cos(3t) \qquad y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t).$$

Exercice 20. Soit la courbe plane Γ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = e^{-t}\cos(t) \qquad y(t) = e^{-t}\sin(t).$$

Calculer la longueur de Γ entre les points de paramètre 0 et 1.

Exercice 21. Soit $a > b > 0$ deux réels positifs. On paramètre une ellipse par :

$$x(t) = a\cos(t), \quad y(t) = b\sin(t)$$

Calculer la vitesse v et l'accélération, puis l'accélération normale a_n et tangentielle a_t. En déduire le rayon de courbure R en un point de l'ellipse. Tracer le cercle osculateur aux points $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$.

Exercice 22. Déterminer le repère de Frenet au point de paramètre $f(t)$ pour les courbes paramétrées planes suivantes :

1. $f(t) = (4t + 1, 3t)$ (droite),
2. $f(t) = (2\cos t, 2\sin t + 1)$ (cercle),
3. $f(t) = (t, \sin t)$ (graphe du sinus).

Exercice 23. Soit C la spirale logarithmique d'équation polaire $r(\theta) = e^{-\theta}$. On notera $M(\theta)$ le point de C d'angle polaire θ.

1) Calculer la longueur de l'arc entre les points de paramètre 0 et α. En déduire un paramétrage de C par longueur d'arc.

2) Déterminer le repère de Frenet de C au point $M(\theta)$.

3) Calculer la courbure signée $\kappa(\theta)$ et le centre de courbure $O(\theta)$ en $M(\theta)$.

4) Tracer le cercle osculateur Γ en $\theta = 0$ et sa position relative par rapport à la courbe C.

Exercice 24. Soit la parabole P paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.

Calculer la longueur de l'arc entre $t = 0$ et $t = \alpha$. En déduire un paramétrage par longueur d'arc de P.

Exercice 25. Calculer la courbure de la branche de l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$ et $x > 0$. En quel(s) point(s) est-elle maximale ?

Exercice 26. Montrer que le rayon de courbure de la parabole $y = \dfrac{1}{2}x^2$ est $\dfrac{1}{\cos^3\theta(x)}$ où $\theta(x)$ désigne l'angle de la tangente pour le paramètre x. Trouver l'équation du cercle osculateur de plus petit rayon.

Exercice 27. Trouver le(s) sommet(s) de la courbe plane (i.e. les points de courbure maximale ou minimale) $y = e^x$.

Exercice 28. Soit la courbe Γ paramétrée par $x(t) = (\cos^2 t + 3)\sin t$, $y(t) = (\sin^2 t - 2)\cos t$.

a) Calculer la longueur d'arc $s(t)$ entre les points de paramètre 0 et t.

b) Calculer la courbure $\kappa(t)$ au point de paramètre t.

c) En déduire les sommets de la courbe Γ et les valeurs de la courbure $\kappa(t)$ en ces points.

d) En déduire bien que ressemblant grossièrement à une ellipse (faire un tracé rapide), Γ n'est pas une ellipse !

e) En déduire une paramétrisation $t \mapsto O(t)$ de la développée D de Γ.

Exercice 29* On s'intéresse à la courbe paramétrée (clothoïde)

$$x(t) + iy(t) = \int_0^t e^{iu^2}\, du$$

1. Faire une représentation graphique avec un logiciel ou une calculatrice. Justifier la forme en spirale de la courbe en faisant une étude sur $[\sqrt{2n\pi}, \sqrt{2(n+1)\pi}]$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que O est centre de symétrie de la courbe.
2. Calculer le vecteur tangent, déterminer la longueur d'arc entre deux points de paramètre t_1 et t_2
3. Déterminer la courbure, montrer que l'accélération normale est proportionnelle à l'abscisse curviligne.
   Cette dernière propriété est utilisée pour faire des raccords entre arcs de cercle et portions rectilignes de route ou de lignes de chemin de fer, sur la partie rectiligne, l'accélération normale est nulle, sur le raccord clothoïde elle augmente linéairement de 0 jusqu'à atteindre la valeur constante qu'elle conserve ensuite le long de l'arc de cercle.

Exercice 30. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ pour les données suivantes :

1. $\omega = \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$ et γ est le carré de centre O et de coté $2a$ orienté dans le sens direct.
2. $\omega = (e^x\cos y + xy^2)dx + (x^2y - e^x\sin y)dy$ et γ est l'arc de lemniscate $r = \sqrt{\cos 2\theta}$, $\theta \in [0, \pi/4]$.
3. $\omega = y^2dx + x^2dy$ et γ est le cercle unité paramétré dans le sens direct.

Exercice 31 Cet exercice est consacré à l'étude de la courbe

$$x(t) = \cos(t)^3 - \cos(t), \quad y(t) = \sin(t)^3 + \sin(t)$$

1. Donner le domaine de définition commun de x et y. Montrer qu'on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, \pi/2]$ grâce aux symétries de la courbe que l'on justifiera.
2. Calculer dx/dt et dy/dt. La courbe admet-elle des points singuliers ? Si oui, déterminer la tangente à la courbe en ces points.

3. Déterminer le signe de dx/dt et dy/dt sur $[0, \pi/2]$. Dresser le double tableau de variations et représenter l'allure de la courbe en indiquant les points de paramètres $0, \pi/2, \pi$ et le sens de parcours.
4. Déterminer la longueur de l'arc de courbe entre les points de paramètre $t = 0$ et $t = \pi/2$ sous la forme d'une intégrale dont on ne cherchera pas à déterminer la valeur exacte. Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de cette longueur, vérifier la vraissemblance du résultat sur votre représentation graphique. En déduire la longueur totale de la courbe.
5. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et le cercle osculateur au point de paramètre $t = \pi/4$, tracer le cercle sur votre représentation graphique.
6. Exprimer l'aire située à l'intérieur de l'arc de courbe entre les points de paramètre 0 et π à l'aide d'une intégrale curviligne puis d'une intégrale. Déterminer la valeur de cette intégrale à la calculatrice en indiquant la commande utilisée. Vérifier la vraissemblance du résultat sur votre représentation graphique.

Exercice 32. Calculer l'aire située à l'intérieur de la courbe de Lissajoux

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(3t)$$

Exercice 33. On considère la forme différentielle $\omega = xdy - ydx$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Cette forme est-elle fermée ? exacte ?
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la forme différentielle $(x^2 + y^2)^\alpha \omega$ est-elle fermée sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$?
3. Soit l'ellipse d'équations paramétriques

$$x(t) = a\cos(t), \ y(t) = b\sin(t)$$

   Calculer l'intégrale curviligne de ω sur une période ($t \in [0, 2\pi]$)
4. En appliquant le théorème de Stokes, en déduire l'aire de l'ellipse.
5. Donner un paramétrage du cercle C de centre l'origine et de rayon 1. Calculer $\int_C (x^2 + y^2)^{-1}\omega$. La forme $\omega_1 = (x^2 + y^2)^{-1}\omega$ est-elle exacte sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$?
6. La forme $\omega_1 = (x^2 + y^2)^{-1}\omega$ est-elle exacte sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$? Si oui, en déterminer un potentiel.
7. Calculer $\int_\gamma \omega_1$ où γ est un chemin fermé inclus dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Exercice 34. Déterminer le centre d'inertie d'un quart d'ellipse.

Exercice 35 (session 2, juin 2015)
Partie 1 : Courbe paramétrée
On considère la courbe paramétrée C

$$x(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

1. Étudier le domaine de définition et les symétries de la courbe.
2. Étudier les éventuelles branches asymptotiques.
3. Calculer le repère de Frenet (formé par le vecteur tangent et le vecteur normal) au point $M(t) = (x(t), y(t))$
4. Donner le double tableau de variations et représenter la courbe.
5. Déterminer la valeur de $x^2 - y^2$ et en déduire la nature de la courbe.

Partie 2 : Intégrale curviligne

1. Montrer que l'intersection de la courbe avec la droite d'équation $x = 2$ est constituée de deux points A et B dont on calculera la valeur du paramètre t et les coordonnées x et y.
2. Exprimer la longueur de l'arc de courbe AB sous forme d'une intégrale puis en donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.
3. On considère dans la suite la zone Z délimitée par l'arc de courbe situé entre A et B et le segment AB. Hachurer Z sur votre figure et calculer l'aire de la zone Z.

4. Exprimer sous forme d'une intégrale simple le moment d'inertie de la zone Z par rapport à l'axe Ox :
$$\iint_Z y^2 \, dx \, dy$$
On pourra ramener ce calcul à celui d'une intégrale curviligne sur le bord de Z en déterminant une forme différentielle $Mdx + Ndy$ telle que $\partial_x N - \partial_y M = y^2$ et en appliquant Green-Riemann. Donner une valeur approchée de ce moment d'inertie à la calculatrice.

Exercice 36 (session 2, juin 2016)

Soit L la courbe de Lissajous paramétrée par $x(t) = \cos(2t)$ et $y(t) = \sin(3t)$.

1. Donner les symétries qui permettent de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$ (on pourra étudier les transformations correspondant à $t \to t + \pi$ et $t \to -t$).
2. Dresser sur $[0, \pi/2]$ un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$ en faisant apparaitre $t = \pi/3$
3. Déterminer la tangente en L en $t = 0$
4. Déterminer les points singuliers de L.
5. Déterminer la tangente à la courbe en $t = \pi/2$.
6. Déterminer le paramètre $t_0 \in [0, \pi/2]$ correspondant à un point où L admet une tangente horizontale.
7. A l'aide de tout ceci, tracer la courbe L. On représentera sur le tracé les points de paramètres $t = -\pi/2, 0, \pi/2$ et le sens de parcours de la courbe pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.
8. Comment parcourt-on la courbe pour $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$?
9. On s'intéresse dans la suite à l'arc de courbe A correspondant à $t \in [-\pi/3, \pi/3]$ et au domaine D situé à l'intérieur de A. Donner sous forme d'une intégrale la longueur de A. Déterminer une valeur approchée de la longueur de A (indiquez la commande utilisée à la calculatrice).
10. Déterminer l'aire du domaine D à l'intérieur de A (on pourra déterminer l'intégrale curviligne de la forme xdy ou ydx sans donner le détail du calcul de primitive, à condition d'indiquer la commande utilisée à la calculatrice).
11. En appliquant la formule de Green-Riemann, montrer que $\iint_D x \, dxdy$ se ramène au calcul d'une intégrale curviligne le long de A d'une forme ω que l'on déterminera.
Calculer cette intégrale curviligne (on pourra indiquer la commande utilisée à la calculatrice sans donner le détail du calcul de primitive).
En déduire les coordonnées du centre de gravité de D (supposé homogène).

Exercice 37 (session 1, janvier 2016)

Dans cet exercice, vous pouvez donner directement les valeurs des intégrales obtenues à la calculatrice à condition de préciser la commande utilisée.

Soit C l'arche de cycloïde d'équations paramétriques
$$x(t) = t - \sin(t), \quad y(t) = 1 - \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$
On veut déterminer l'aire A et le centre de gravité G de la zone Z délimitée par l'axe Ox et l'arche C.

1. Calculer x' et y', donner le double tableau de variations de x et y puis tracer C et hachurer Z.
2. En utilisant le théorème de Green-Riemann (ou de Stokes), exprimer l'aire
$$A = \iint_Z dx \, dy$$
à l'aide d'une intégrale curviligne sur C, puis calculer A.
3. Montrer que C admet une symétrie par rapport à une droite verticale. En déduire l'abscisse de G.
4. Déterminer l'ordonnée de G :
$$y_G = \frac{1}{A} \iint_Z ydx \, dy$$
On pourra choisir des fonctions M et N telles que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = y$.

DM (adapté du partiel 2015)

1. On considère la courbe paramétrée :

$$x(t) = \frac{t^2 - 2t + 3}{t^2 - 2t}, \quad y(t) = \frac{t^2 - 3}{t}$$

   a) Faire le double tableau de variations et l'étude des branches infinies.
   b) Tracer la courbe et ses asymptotes, et indiquer par une flèche le sens de parcours sur la courbe.

2. On considère la courbe en polaires :

$$\rho = 4\sin(\theta)\cos(\theta)^2$$

   a) Étudier les symétries de la courbe.
   b) Faire le tableau de variations.
   c) Donner une équation de la tangente au point de paramètre $\theta = \pi/3$.
   d) Déterminer les valeurs de θ pour lesquels la courbe a un point singulier.
   e) Tracer la courbe.