TP 2 Terminale S

Suites adjacentes et convergence de $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1 Les fonctions de `xcas` utilisées

Voici les fonctions de `xcas` qui vous seront utiles dans ce TP.
`normal(expr)` renvoie l'expression `expr` simplifiée.
`evalf(a)` évalue `a` à l'aide d'un nombre flottant comportant 12 chiffres significatifs (sauf si on a changé ce nombre dans la configuration du `cas` bouton rouge `cas`).
`f(x) :=....` où `....` représente une expression de `x` permet de définir la fonction `f`.
`derive(expr(x),x)` calcule la dérivée de `expr(x)` par rapport à `x`.

2 u et v sont deux suites ajacentes de limite $\frac{\pi}{4}$

On considère les suites u et v définies par :
$u_0 = 1 - \frac{1}{3}$ et $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}$ pour $n \geq 1$.
$v_n = u_n + \frac{1}{4n+3}$ pour $n \geq 0$.
1/ Calculer les 6 premiers termes de la suite u et donner une valeur approchée de u_6 (on pourra utiliser le tableur (bouton jaune `mtrw`)).
2/ Calculer les 6 premiers termes de la suite v et donner une valeur approchée de v_6 (on pourra utiliser le tableur (bouton jaune `mtrw`)).
3/ Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
II/ On considère la suite de fonctions f_n de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dand $\mathbb{R}$ définie par :
$f_0(x) = x - \tan(x)$ et $f_n(x) = f_{n-1}(x) - \frac{(-1)^n}{2n+1}\tan(x)^{2n+1}$ pour $n \geq 1$.
0/ Calculer $f_n(0)$ pour tout $n \geq 0$.
1/ Calculer pour $p \geq 0$, $f_{2p}(\frac{\pi}{4})$ et $f_{2p+1}(\frac{\pi}{4})$ en fonction de u_p et de v_p.
2/ Ouvrir le tableur (bouton jaune `mtrw`) et faites afficher :
dans la colonne `A` les valeurs de n,
dans la colonne `B` les valeurs de $f_n(x)$,
dans la colonne `C` les valeurs de $f'_n(x)$,
Observez les différentes colonnes et notez le résultat de vos observations.
Déterminer la dérivée de f_n.
3/ En déduire que pour $p \geq 0$:
- la fonction f_{2p+1} est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
- la fonction f_{2p} est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

III/ Montrer que la limite de u et de v est égale à $\frac{\pi}{4}$ (on étudiera le signe de $f_{2p}(\frac{\pi}{4})$ et de $f_{2p+1}(\frac{\pi}{4})$).
Donner un encadrement de $\frac{\pi}{4}$.
Quelle erreur fait-on lorsqu'on prend $4 * u_6$ comme valeur approchée de π ?
Trouver une valeur de n pour que $4 * u_n$ et $4 * v_n$ donnent un encadrement de π de diamètre inférieur à 10^{-3}.

Correction

I/ Dans A0 on tape 0 et dans A1 on tape $\mathtt{A0}+1$ puis bouton `fill` quand A1 est en surbrillance.

Dans B0 on tape 2/3 et dans B1 on tape $\mathtt{B0}+1/(4*\mathtt{A1}+1)-1/(4*\mathtt{A1}+3)$ puis bouton `fill` quand B1 est en surbrillance.

Dans C0 on tape $\mathtt{B0}+1/(4*\mathtt{A0}+3)$ puis bouton `fill` quand C0 est en surbrillance.

La suite u est croissante car $u_n-u_{n-1}=\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}>0$ pour $n\geq 1$ (on peut taper dans l'historique : $\mathtt{normal}(1/(4*\mathtt{n}+1)-1/(4*\mathtt{n}+3))$ et on trouve : $2/(16*\mathtt{n}^2+16*\mathtt{n}+3)$).

La suite v est décroissante car $v_n-v_{n-1}=\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n-1}<0$ pour $n\geq 1$ (on peut taper dans l'historique : $\mathtt{normal}(1/(4*\mathtt{n}+1)-1/(4*\mathtt{n}-1))$ et on trouve : $2/(-16*\mathtt{n}^2+1)$).

et $v_n-u_n=1/(4*n+3)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Les suites u et v sont donc adjacentes.

II/ 1/ $f_n(0)=0$ pour tout $n\geq 0$.

2/ $f_{2p}(\pi/4)=\pi/4-v_p$ et

$f_{2p+1}(\pi/4)=\pi/4-u_p$

3/ Dans A0 on tape 0 et dans A1 on tape $\mathtt{A0}+1$ puis bouton `fill` quand A1 est en surbrillance.

Dans B0 on tape $x-\tan(x)$ et

dans B1 on tape $\mathtt{B0}-(-1)^{\mathtt{A1}}*\tan(\mathtt{x})^{2*\mathtt{A1}+1}/(2*\mathtt{A1}+1)$ puis bouton `fill` quand B1 est en surbrillance.

Dans C0 on tape $\mathtt{normal}(\mathtt{derive}(\mathtt{B0},\mathtt{x}))$ puis bouton `fill` quand C0 est en surbrillance.

On remarque que l'on a $f_n'(x)=(-1)^{n+1}*\tan(x)^{2n+2}$.

On le montre en faisant le calcul :

$$f_n(x)=x-\tan(x)+\frac{1}{3}\tan(x)^3+...-\frac{(-1)^n}{2n+1}\tan(x)^{2n+1}$$

$$f_n'(x)=1-(1+\tan(x)^2)*(1-\tan(x)^2+...+(-1)^n\tan(x)^{2n}$$

On reconnait la somme d'une série géométrique de raison : $-\tan(x)^2$.

$$f_n'(x)=1-(1+\tan(x)^2)*\frac{(1-(-\tan(x)^2)^{n+1}}{1+\tan(x)^2}=(-1)^{n+1}\tan(x))^{2n+2}$$

3/ La fonction f_{2*p} a une dérivée negative pour tout $p\geq 0$, donc f_{2*p} est décroissante. En particulier $f_{2*p}(0)=0>f_{2*p}(\pi/4)$.

La fonction f_{2*p+1} a une dérivée positive pour tout $p\geq 0$, donc f_{2*p+1} est croissante. En particulier $f_{2*p+1}(0)=0<f_{2*p+1}(\pi/4)$.

III/ On a donc pour tout $p\geq 0$:

$f_{2p+1}(\pi/4)=\pi/4-u_p>0$ et

$f_{2p}(\pi/4)=\pi/4-v_p<0$

Donc pour tout $p\geq 0$:

$u_p<\pi/4<v_p$.

On a donc $4*u_6<\pi<4*v_6=4*u_6+4/27$.

Pour avoir $4*u_n<\pi<4*v_n=4*u_n+4/4*n+3\leq 4*u_n+10^{-3}$ il faut prendre comme n un entier qui vérifie $4*n+3\geq 4000$ soit $n\geq 1000$.

Donc u_{1000} et v_{1000} donnent un encadrement de π de diamètre inférieur à 10^{-3}.