`Xcas` et les mathématiques de troisième

Renée De Graeve

8 septembre 2019

Remerciements

Je remercie :
— Bernard Parisse pour ses précieux conseils et ses remarques sur ce texte,

Ce document est disponible Ãă l'adresse Internet suivante :
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/castrois.pdf

Préface

Bernard Parisse est Maître de Conférences Ãă l'Université de Grenoble I.
Il est le développeur du logiciel de calcul formel `giac` et de son interface `Xcas`.
La version à jour se récupère sur ;
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`

Table des matières

Index

Chapitre 1

Calculs : nombres relatifs, fractions, puissances

1.1 Calculs exacts avec `Xcas`

Avec `Xcas`, on fait du calcul exact.
Avec `Xcas`, les simplifications ne se font pas automatiquement, seules les parenthèses inutiles sont enlevées et les fractions sont simplifiées. Pour avoir la forme simplifiée d'une expression, il faut utiliser la commande `normal`. On remarquera que la réponse se fait dans un éditeur d'équations, ce qui fait que l'on peut mettre en surbrillance chaque sous-arbre de l'expression et agir sur lui à l'aide des commandes situées dans les différents menus.
Pour faire les calculs :

- On effectue les calculs mis entre les parenthèses,
- On effectue les puissances,
- On effectue les multiplications et les divitions dans l'ordre de gauche à droite.
- On effectue les additions et les soustractions dans l'ordre de gauche à droite.

1.2 Calculs avec des nombres relatifs et avec des puissances

Calculer et écrire chacune des expressions de 2 façons différentes (soit en calculant les calculs mis entre les parenthèses, soit en effectuant les puissances) :

1. $-2+3*4^2/5*6-1$
2. $-2+(3*4)^2/5*6-1$
3. $-2+3*4^2/(5*6)-1$
4. $-2+(3*4)^2/(5*6)-1$
5. $-2+3*4^2/(5*6-1)$
6. $(-2+3*4^2)/5*6-1$
7. $(-2+3*4^2)/(5*6-1)$

Avec `Xcas`,

1. On tape :
   `-2+3*4^2/5*6-1`
   ou
   `-2+(3*16)/5*6-1`
   On obtient : `273/5`
2. On tape :
   `-2+(3*4)^2/5*6-1`
   ou
   `-2+12^2/5*6-1`
   On obtient : `849/5`
3. On tape :
   `-2+3*4^2/(5*6)-1`
   ou
   `-2+3*16/30-1`
   On obtient : `-7/5`
4. On tape :
   `-2+(3*4)^2/(5*6)-1`
   ou
   `-2+12^2/30-1`
   On obtient : `9/5`
5. On tape :
   `-2+3*4^2/(5*6-1)`
   ou
   `-2+3*16/29`
   On obtient : `(-10)/29`
6. On tape :
   `(-2+3*4^2)/5*6-1`
   ou
   `(-2+3*16)/5*6-1`
   On obtient : `271/5`
7. On tape :
   `(-2+3*4^2)/(5*6-1)`
   ou
   `(-2+3*16)/29`
   On obtient : `46/29`

1.3 Calculs avec des fractions et avec des racines

1. Simplifier ou calculer :
   - $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$
   - $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$
   - $\sqrt{2+\sqrt{2}}*\sqrt{2-\sqrt{2}}$

- $\sqrt{2} * \sqrt{2+\sqrt{2}} * \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} * \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Solution avec `Xcas`
`sqrt` est la fonction racine carrèe.
`normal` et `simplify` sont des fonctions qui effectuent des simplifications.
`developper` est une fonction qui développe une expression.

- On tape :
  `normal(sqrt((2+sqrt(2))/(2-sqrt(2)))+`
  `sqrt((2-sqrt(2))/(2+sqrt(2))))`
  On obtient : `2*sqrt(2)`

- On tape :
  `normal(sqrt((2+sqrt(3))/(2-sqrt(3)))+`
  `sqrt((2-sqrt(3))/(2+sqrt(3))))`
  On obtient : `4`

- On tape :
  `normal(sqrt(2+sqrt(2))*sqrt(2-sqrt(2)))`
  On obtient : `sqrt(2)`

- On tape :
  `normal(sqrt(2)*sqrt(2+sqrt(2))*(sqrt(2+sqrt(2+sqrt(2)))*`
  `sqrt(2-sqrt(2+sqrt(2)))))`
  On obtient : `2`
  Pour avoir le détail des calculs, on tape :
  `A:=sqrt(2)*sqrt(2+sqrt(2))*(sqrt(2+sqrt(2+sqrt(2)))*`
  `sqrt(2-sqrt(2+sqrt(2))))`
  `developper(A^2)`
  On obtient :
  `2*(sqrt(2)+2)*(sqrt(sqrt(2)+2)+2)*(-(sqrt(sqrt(2)+2))+2)`
  Puis on met en surbrillance :
  `(sqrt(sqrt(2)+2)+2)*(-(sqrt(sqrt(2)+2))+2)`
  et on appuie sur `simplify` du clavier `kbd` de `Xcas`.
  On obtient :
  `2*(sqrt(2)+2)*(-(sqrt(2))+2)`
  Puis on met en surbrillance :
  `(sqrt(2)+2)*(-(sqrt(2))+2)`
  et on appuie sur `simplify` du clavier `kbd` de `Xcas`.
  On obtient la valeur de `A^2` :
  `2*2`
  `A` est positif donc `A` est égal à `2`

2. Simplifier ou calculer :
   - $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}$
   - $\dfrac{-2}{3} * (\dfrac{-3}{-5} + \dfrac{-5}{6}) - \dfrac{3}{5} * (\dfrac{-5}{4} - \dfrac{7}{12})$

- $2\sqrt{45}+3\sqrt{12}-\sqrt{20}-6\sqrt{3}$
- $2\sqrt{605}+3\sqrt{3125}-4\sqrt{845}$
- $2\sqrt{25}+3\sqrt{12}-\sqrt{48}$

Solution avec `Xcas`

- On tape :
  `(1/3+3/2)/(4/5-1/2);`
  On obtient : `55/9`
- On tape :
  `-2/3*(-3/-5+-5/6)-3/5*(-5/4-7/12);`
  On obtient : `113/90`
- On tape :
  `normal(2*sqrt(45)+3*sqrt(12)-sqrt(20)-6*sqrt(3));`
  On obtient : `4*sqrt(5)`
- On tape :
  `normal(2*sqrt(605)+3*sqrt(3125)-4*sqrt(845));`
  On obtient : `45*sqrt(5)`

3. Écrire avec un dénominateur rationnel :
   - $\frac{-2}{3-\sqrt{5}}+\frac{3}{5+3\sqrt{5}}$
   - $\frac{-7}{1+\sqrt{2}}-(\frac{3}{2-3\sqrt{2}})*(\frac{-7}{4-\sqrt{2}})$

   Solution avec `Xcas`

   - On tape :
     `normal(-2/(3-sqrt(5))+3/(5+ 3*sqrt(5)))`
     On obtient : `(-(sqrt(5))-45)/20`
   - On tape :
     `normal(-7/(1+sqrt(2))-(3/(2-3*sqrt(2)))*(-7/(4-sqrt(2))))`
     On obtient : `(-17*sqrt(2)+11)/2`

1.4 Identités remarquables

1.4.1 $16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}$ est un carré

Montrer que $16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}$ est un carré.
On remarquera que 16=5+11 et que l'on peut mettre $\sqrt{5}$ en facteur dans $\sqrt{55-10\sqrt{29}}$.
Soient les nombres :
$a=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$ et
$b=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$
Montrer que $a=b$
Solution
On a :
$16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}=5+11-2\sqrt{29}+2*\sqrt{5}*\sqrt{11-2\sqrt{29}}$
Donc :
$16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}=(\sqrt{5}+\sqrt{11-2\sqrt{29}})^2$
On écrit b en se servant de ce qui précède :
$b=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{5}+\sqrt{11-2\sqrt{29}}$

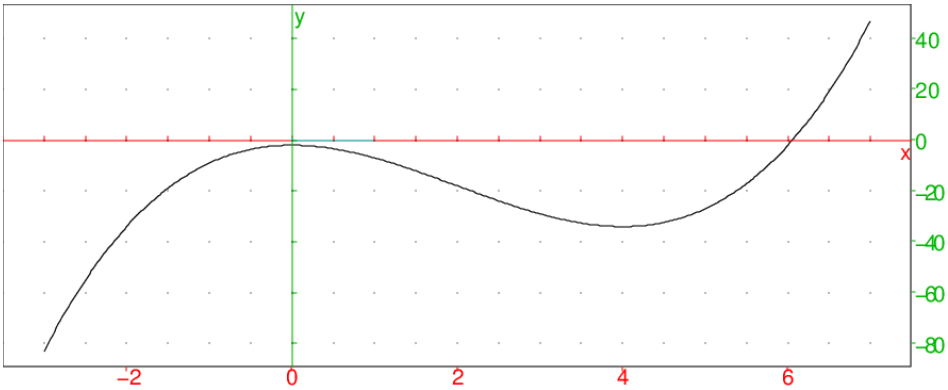
On a donc :
$(b-\sqrt{5})^2 = 11+2\sqrt{29}+11-2\sqrt{29}+2\sqrt{11+2\sqrt{29}}\sqrt{11-2\sqrt{29}}$
$(b-\sqrt{5})^2 = 22+2\sqrt{121-4*29} = 22+2\sqrt{5}$
Donc :
$b=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}=a$

1.4.2 $10^{21}+1$ est-il premier ?

Soit $n = 10^{21}+1$.
n est-il premier ?
Solution On sait que :
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
On a donc :
$n = 10^{21}+1=(10^7)^3+1$ donc n est divisible par 10^7+1 et
$n=(10^7+1)(10^{14}-10^7+1)$
On tape :
```
isprime(10^21+1)
```
On obtient :
```
faux
```
On tape :
```
ifactor(10^7+1)
```
On obtient :
```
11*909091
```
On tape :
```
ifactor(10^21+1)
```
On obtient :
```
7^2*11*13*127*2689*459691*909091
```

1.4.3 Résolution de $(x+1)^3 = x^3+(x-1)^3$ pour $x \in N$

Trouvers trois entiers successifs tels que le cube du plus grand soit égal à la somme des cubes des deux autres. **Solution**
On note $n-1,\ n,\ n+1$ les trois entiers successifs et on veut résoudre dans $\mathbb{N}$:
$(x+1)^3 = x^3+(x-1)^3$ c'est à dire :
$x^3-6x^2-2=0$.
Soit $f(x)=x^3-6x^2-2$.
Étudions puis traçons le graphe de cette fonction :
On voit squ'elle s'annule en un point proche de $x=6$.
On tape :
```
f(x):=x^3-6x^2-2
plotfunc(f(x),x=-3..7)
```
On obtient :



On tape :
`f(6),f(7)`
On obtient :
`-2,47`
$(x+1)^3 = x^3 + (x-1)^3$ n'a donc pas de solutions dans $\mathbb{N}$

1.4.4 Résolution de $(x+1)^2 = x^3 + (x-1)^3$ pour $x \in N$

Trouvers trois entiers successifs tels que le carré du plus grand soit égal à la somme des cubes des deux autres. **Solution**
On note $n-1,\ n,\ n+1$ les trois entiers successifs et on veut résoudre dans $\mathbb{N}$:
$(x+1)^2 = x^3 + (x-1)^3$ c'est à dire :
$2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 0.$
On a :
$2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 2x^2(x-2) + (x-2) = (x-2)(2x^2+1)$ Comme $2x^2+1 > 0$ quand $x \in \mathbb{R}$ la seule solution de $(x+1)^2 = x^3 + (x-1)^3$ est $x = 2$.
Cette solution est entière donc les 3 entiers répondant à la question sont (1,2,3) et on a bien $3^2 = 9 = 2^3 + 1^3 = 8 + 1$

1.4.5 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est racine d'un polynÂ̂t'me à coefficients entiers

Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est racine d'un polynÂ̂t'me à coefficients entiers.
Solution
On pose :
$a = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$
On a :
$a^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$
donc :
$(a^2-5)^2 = a^4 - 10a^2 + 25 = 4 * 6 = 24$ On a donc :
$a^4 - 10a^2 + 1 = 0$
$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est donc une racine du polynÂ̂t'me :
$x^4 - 10x^2 + 1$

1.5 Calculs avec des puissances

Mettre sous forme d'un produit de puissances de nombres premiers

1. • $15 * 45^2$

- $21^2 * 28^2 * (-45)^2$
- $\dfrac{6^2 * 20 * 21}{64 * 3^3}$
- $\dfrac{6^2 * 20 * 21 * 28}{64 * 3^3}$

2. Le nombre $2^2 * 6 * 3^{20} * 5^2$ est-il un cube parfait ?
3. Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier $2 * 3^2 * 5$ pour que ce produit soit un cube parfait et un carré parfait.

Solution avec `Xcas`

`factoriser_entier` est une fonction qui factorise les nombres entiers en produit de facteurs premiers

1. - On tape :
     `(6^2*20*21*28)/(2^3*40*3^3)`
     On obtient : `49`
     On tape :
     `factoriser_entier(49)`
     On obtient : `7^2`
     Pour avoir le détail des calculs il faut appliquer la fonction `factoriser_entier` au numérateur et au dénominateur.
     On tape :
     `factoriser_entier(6^2*20*21*28)/factoriser_entier(2^3*40*3^3)`
     On obtient : `2^6*3^3*5*7^2/(2^6*3^3*5)`
     Il reste ensuite à simplifier à la main !
   - On tape :
     `(6^2*20*21*28)/(64*3^3)`
     On obtient : `245`
     On tape :
     `factoriser_entier(245)`
     On obtient : `5*7^2` Pour avoir le détail des calculs il faut appliquer la fonction `factoriser_entier` au numérateur et au dénominateur.
     On tape :
     `factoriser_entier(6^2*20*21*28)/factoriser_entier(64*3^3)`
     On obtient : `2^6*3^3*5*7^2/(2^6*3^3)`
     Il reste ensuite à simplifier à la main !
2. On tape :
   `factoriser_entier(2^2*6*3^20*5^2)`
   On obtient : `2^3*3^21*5^2`
   Le nombre $2^2 * 6 * 3^{20} * 5^2$ n'est pas un cube parfait car la puissabce de 5 n'est pas divisible par 3.
3. Pour que $2 * 3^2 * 5^3$ soit un cube parfait et un carré parfait, il faut que les puissances de sa décomposition en facteurs premiers soient des multiples de 6. On tape :
   `factoriser_entier((2*3*5)^6/(2*3^2*5^3))`
   On obtient : `2^5*3^4*5^3`

Chapitre 2

Le calcul littéral

2.1 Le calcul littéral et exact avec `Xcas`

`Xcas` peut faire des calculs avec des lettres car les variables de `Xcas` sont soit des variables symboliques, soit des variables contenant des expressions.
Par exemple si on tape :
`a:=3` cela veut dire que l'on stocke 3 dans le variable `a`. Ainsi la lettre `a` sera remplacée dans les calculs par `3`.
Maintenant si on tape :
`purge(a)`, cela enlève la valeur stockée dans la variable `a`. Ainsi dans les calculs, la lettre `a` restera `a`.
`Xcas` fait du calcul exact : les nombres entiers comme $100!$ seront calculés avec tous leurs chiffres et le nombres réels comme $\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}$ ne seront pas remplacés dans les calculs par leurs valeurs approchées.
Attention
`Xcas` ne sous entend pas le signe `*` (sauf si il s'agit du produit d'un nombre et du nom d'une variable), par exemple :
en mathématiques le produit $x+1$ par $3x+2$ s'écrit $(x+1)(3x+2)$ mais
avec `Xcas` on écrit `(x+1)*(3*x+2)` ou `(x+1)*(3x+2)`,
en mathématiques $2mx$ est le produit de 2, de m et de x, mais
avec `Xcas` ce produit s'écrit `2*m*x` ou `2m*x` ou `2x*m`.

2.2 Exercices

- Simplifier : $(\frac{25}{49})^2 * (\frac{14}{15})^3 * (\frac{21}{5})$
- Simplifier : $\frac{(a^2b^3c^4)^2}{(a^2b^2c^2)^3}$
- Factoriser $50!$
- Les nombres $123456789, 12345678901, 12345678923$ sont-ils premiers ? Dans le cas où ils ne sont pas premiers donner leur décomposition en facteurs premiers.

Solution avec `Xcas`
`isprime` est une fonction qui teste si un nombre est premier en renvoyant `vrai` ou `faux`.

- On tape :
  `(25/49)^2*(14/15)^3*(21/5)`
  On obtient : `8/9`
- On tape :
  `normal((a^2*b^3*c^4)^2/(a^2*b^2*c^2)^3)`
  On obtient : `c^2/a^2`
- On tape :
  `factoriser_entier(50!)`
  On obtient :
  `2^47*3^22*5^12*7^8*11^4*13^3*17^2*`
  `19^2*23^2*29*31*37*41*43*47`
- On tape :
  `isprime(123456789)`
  On obtient : `faux`
  On tape :
  `factoriser_entier(123456789)`
  On obtient : `3^2*3607*3803`
  On tape :
  `isprime(12345678901)`
  On obtient : `faux`
  On tape :
  `factoriser_entier(12345678901)`
  On obtient : `857*14405693`
  On tape :
  `isprime(12345678923)`
  On obtient : `vrai`

2.3 Les commandes sur les expressions et les équations

Expressions et équations	
`developper`	renvoie l'expression developpée
`factoriser`	renvoie l'expression factorisée
`droit`	renvoie le membre de droite d'une équation
`gauche`	renvoie le membre de gauche d'une équation
`resoudre`	renvoie la liste des solutions de l'équation
`normal`	renvoie l'expression simplifiée
`substituer`	remplace, dans une expression, une variable par sa valeur

2.4 Une activité

Soit l'expression $E = (2x-4)^2 + x^2 - 4$.

— Développer et réduire E en indiquant les étapes intermédiaires

— Factoriser E en indiquant les étapes intermédiaires

— Calculer E pour $x = 0, \frac{1}{2}, 2$

— Résoudre l'équation en x : $E = 0$

— Résoudre l'équation en x : $E = x - 2$

Solution avec `Xcas` On tape

```
E:=(2x-4)^2+x^2-4;
normal(E);
developper((2x-4)^2)+x^2-4;
normal(4*x^2-16*x+16+x^2-4);
factoriser(E);
factoriser((2x-4)^2);
factoriser(x^2-4);
factoriser(4*(x-2)^2+(x+2)*(x-2));
substituer(E,x,0);
substituer(E,x,1/2);
substituer(E,x,2)
resoudre(E=0,x);
factoriser(E);
resoudre(E=x-2,x);
factoriser(gauche(E=x-2)-droit(E=x-2))
```

2.5 Développer une expression

Exercices
Développer et réduire les expressions :

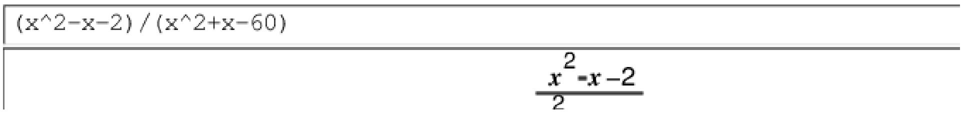
1. $(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$
2. $(a\hat{}2 + a + 1)(a\hat{}2 - a + 1) - (a\hat{}2 - 1)(a\hat{}4 + a\hat{}2 + 1)$
3. $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b) + (a - b)(b - c)(c - a)$
4. $a\hat{}2(b - c) + b\hat{}2(c - a) + c\hat{}2(a - b) + (a - b)(b - c)(c - a)$

Solutions avec `Xcas`

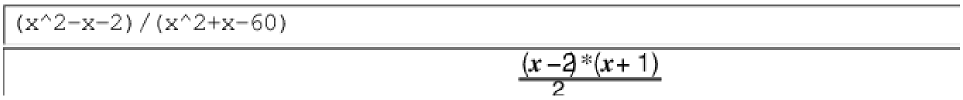
1. On tape :
   `developper((a+b+c)*(a-b)*(b-c)*(c-a))`
   On obtient :
   `-b^3*c+a^3*c-a^3*b+b*c^3-a*c^3+a*b^3`
2. On tape :
   `developper((a^2+a+1)*(a^2-a+1)-(a^2-1)*(a^4+a^2+1))`
   On obtient :
   `-a^6+a^4+a^2+2`
3. On tape :
   `normal(b*c*(b-c)+c*a*(c-a)+a*b*(a-b)+(a-b)*(b-c)*(c-a))`
   On obtient :
   `0`
4. On tape :
   `normal(a^2*(b-c)+b^2*(c-a)+c^2*(a-b)+(a-b)*(b-c)*(c-a))`
   On obtient :
   `0`

2.6 Factoriser une expression

Par exemple on tape : `(x^2-x-2)/(x^2+x-6)` et on obtient :



Puis on met en surbrillance $x^2 - x - 2$ et on clique sur `factoriser` du menu `Reecriture` ou sur `factoriser` du clavier `kbd` et on obtient :



Exercices
Factoriser :

1. $(a+b)^3 + (a+b)^2$
2. $a^2 + 4ab + 4b^2 - 1$
3. $4a^2 - 4a - 4b^2 + 1$
4. $(4a-1)^2 * +(8a+2)(a+5)$
5. $(3a-5)(a+6) + (5-3a)(a-3) + 9a - 15)$
6. $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$

Solutions avec `Xcas`

1. On tape :
   `factoriser((a+b)^3+(a+b)^2)`
   On obtient :
   `(a+b)^2*(a+b+1)`
2. On tape :
   `factoriser(a^2+4a*b+4b^2-1)`
   On obtient :
   `(a+2*b-1)*(a+2*b+1)`
3. On tape :
   `factoriser(4a^2-4a-4b^2+1)`
   On obtient :
   `(2*a-2*b-1)*(2*a+2*b-1)`
4. On tape :
   `factoriser((4a-1)^2*+(8a+2)*(a+5))`
   On obtient :
   `2*(a+5)*(4*a-1)^2*(4*a+1)`
5. On tape :
   `factoriser((3a-5)*(a+6)+(5-3a)*(a-3)+9a-15))`
   On obtient :
   `12*(3*a-5)`
6. On tape :
   `factoriser(b*c*(b-c)+c*a*(c-a)+a*b*(a-b))`
   On obtient :
   `(c-a)*(b-a)*(b-c)`

Chapitre 3

Arithmétique

3.1 La division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.
On écrit $a = b * q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ qui vérifie $0 \leq r < b$.
On dit que q est le quotient de la division euclidienne de a par b et que r est le reste de la division euclidienne de a par b.
On a : $0 \leq a - b * q < b$
On peut trouver q et r avec des soustractions successives.
On tape :

```
quoreste(a,b):={
local q;
q:=0;
tantque a>=b faire
a:=a-b;
q:=q+1;
ftantque
retourne [q,a];
}:;
```

Dans `Xcas` cette fonction existe déjà et s'appelle `iquorem`.
On tape :
`iquorem(45,7)`
On obtient :
`[6,3]`
En effet $45 = 6 * 7 + 3$
Il existe aussi `iquo(a,b)` qui renvoie le quotient `q` de la division euclidienne de a par b et `irem(a,b)` qui renvoie le reste `r` de la division euclidienne de a par b.
On tape :
`iquo(45,7)`
On obtient : `6`
On tape :
`irem(45,7)`
On obtient : `3`
Si r=`irem`(a, b) est nul, on dit que a est un multiple de b et que b est un diviseur de a.

3.2 Le PGCD

Le $PGCD(a, b)$ est le plus grand commun diviseur de a et de b.
Pour calculer le $PGCD(a, b)$ on utilise l'algorithme d'Euclide qui utilise le fait que :
si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors :
$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$.
En effet si $a = bq + r$ tous les diviseurs communs à a et b sont aussi des diviseurs de r et tous les diviseurs communs à b et r sont aussi des diviseurs de a.
Donc on cherche le $PGCD(b, r)$ et $r < b$ et on recommence. À chaque étape les restes sont positifs ou nuls et strictement décroissants donc il va arriver un moment ou un reste sera nul et donc le $PGCD(a, b)$ sera égal au dernier reste non nul.
Le programme
On tape en utilisant :
`tantque <condition> faire <instructions> ftantque` qui teste la condition si <condition> est vraie les <instructions> sont exécutés puis on teste <condition> ...et on s'arrête quand <condition> devient fausse.
`retourne` renvoie la valeur de la fonction (ici renvoie le PGCD(a,b)).

```
PGCD(a,b):={
local r;
tantque b>0 faire
r:=irem(a,b);
a:=b
b:=r;
ftantque
retourne a;
}:;
```

On tape :
`PGCD(45,30)`
On obtient :
`15`
On tape :
`PGCD(30,45)`
On obtient :
`15`
On tape :
`PGCD(1234567890,12345678)`
On obtient :
`18`
Remarque
Lorsque $a < b$ on a $a = 0 * b + a$ donc le premier reste trouvé est a. On cherche ensuite le reste de b par a...dans l'exemple `PGCD(30,45)` l'algorithme dit :
le reste de 30 par 45 est 30
le reste de 45 par 30 est 15
le reste de 30 par 15 est 0
le premier reste non nul est donc 15 donc :
`PGCD(45,30)=15`

Dans `Xcas` cette fonction existe déja et s'appelle `gcd`.
On tape `gcd(45,30)` et on obtient `15`
Exercice
Un terrain rectangulaire a comme dimension 60 m de long et 45 m de large.
On veut planter des arbres régulièrement espacés tout autour du terrain. Quelle doit être la distance entre 2 arbres consecutifs si on veut qu'il y ait un arbre sur chaque sommet du rectangle et si on veut que cette distance soit un nombre entier de mètres ?
Solution avec `Xcas`
`idivis` renvoie la liste de tous les diviseurs d'un nombre entier.
`gcd` renvoie le PGCD de 2 nombres entiers
La distance cherchée est un diviseur commun à 60 et 45.
On tape :
`gcd(60,45)`
On obtient : `15`
On tape pour avoir tous les diviseurs de 15 :
`idivis(15)`
On obtient : `[1,3,5,15]`
Donc la distance entre 2 arbres pourra être 1m, 3m, 5m ou 15m.

3.3 Rendre une fraction irréductible

Pour rendre une fraction N/D ($N \in \mathbb{Z}$ et $D \in \mathbb{Z}$) irréductible il faut diviser son numérateur N et son dénominateur D par le PGCD(N, D).
`Xcas` simplifie automatiquement une fraction en une fraction irréductible.
On tape :
`12345678/3429355`
On obtient : `18/5`
On tape :
`gcd(12345678,3429355)`
On obtient : `685871`
On tape :
`12345678/685871,3429355/685871`
On obtient : `18,5`

3.4 Le PPCM

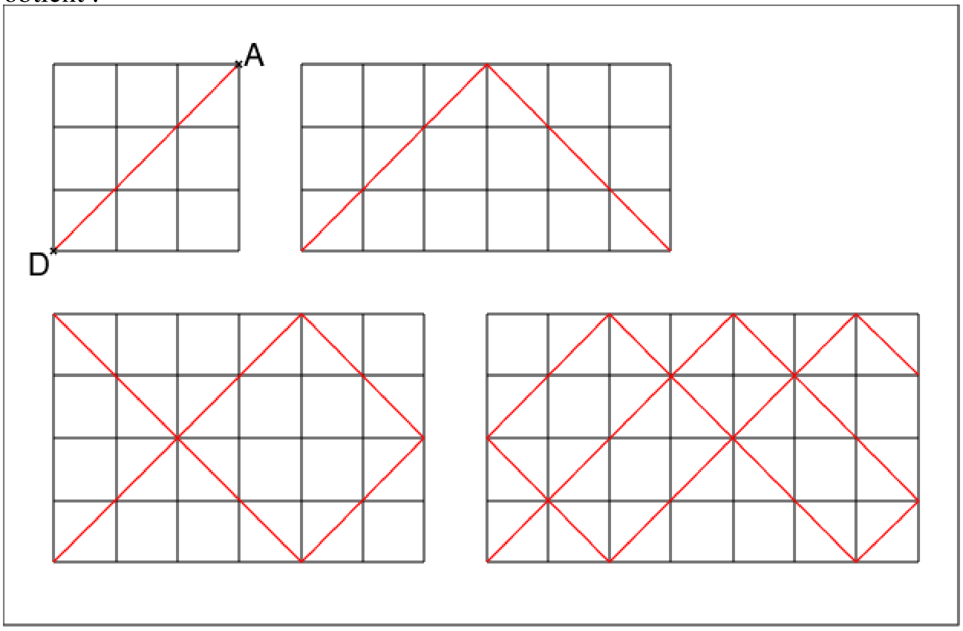
Le $PPCM(a, b)$ est le plus petit commun multiple de a et de b.
Pour calculer le $PPCM(a, b)$ on utilise $d = PGCD(a, b)$ car si $a = d * a_1$ et $b = d * b_1$ alors :
$PPCM(a, b) = d * a_1 * b_1 = a * b/PGCD(a, b)$.
Le programme

```
PPCM(a,b):={
local r,p;
p:=a*b;
tantque b>0 faire
```

```
r:=irem(a,b);
a:=b
b:=r;
ftantque
retourne p/a;
}:;
```

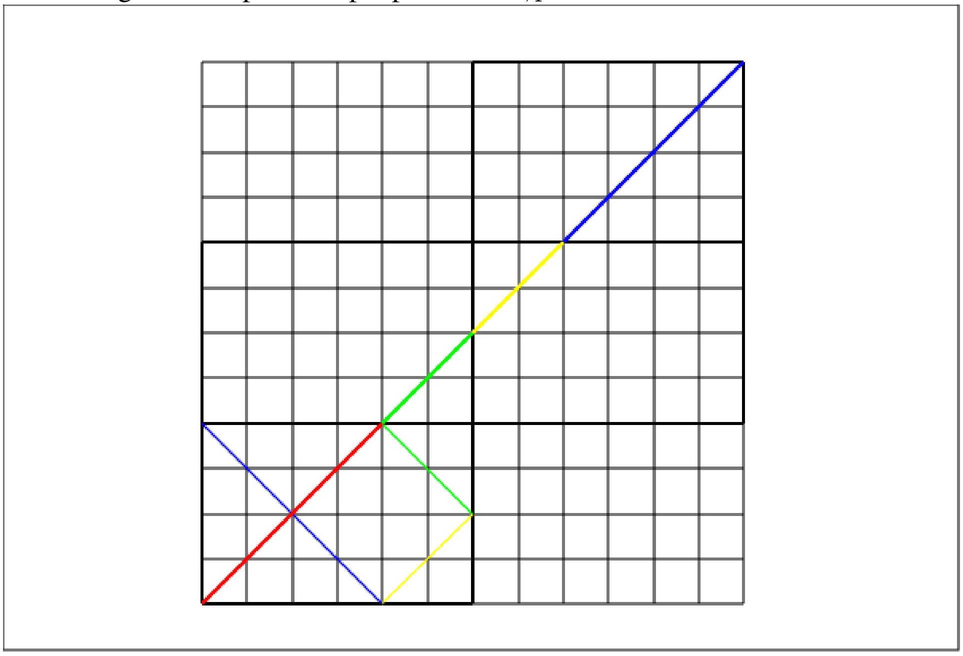
On tape :
`PPCM(45,30)`
On obtient :
`90`
On tape :
`PPCM(1234567890,12345678)`
On obtient :
`846754313282190`

Dans `Xcas` cette fonction existe déja et s'appelle `lcm`.
On tape `lcm(45,30)` et on obtient `90`
Exercice
Soient 2 entiers a et b et un damier rectangulaire de dimension a x b.
Le point de dÃl'part est un sommet et on avance en ligne droite selon une diagonale de chaque carré. Quand on arrive sur un bord, on rebondit à angle droit et on s'arrête quand on atteint un sommet du rectangle.
Quel est en fonction de a et p le nombre de carreaux traversés ?
Solution
Regardons quelques exemples :
$a = b = 3$, $n = 6, p = 3$, $a = 6, b = 4$ et $a = 7, b = 4$, on fait les dessins, on obtient :



on remarquera que le dernier trajet n'est pas terminé...
Cas général
On fait une symétrie du damier par rapport au bord rencontré de façon que le trajet

soit une ligne droite par exemple pour $n = 6, p = 4$:



Pour cela on tape :

```
segment(-6+k*i,6+k*i)$(k=-5..7);
segment(k-5*i,k+7*i)$(k=-6..6);
rectangle(-6-5*i,-5*i,2/3,affichage=epaisseur_ligne_2);
rectangle(-6-i,-i,2/3,affichage=epaisseur_ligne_2);
rectangle(-i,6-i,2/3,affichage=epaisseur_ligne_2);
rectangle(3*i,6+3*i,2/3,affichage=epaisseur_ligne_2);
segment(-2-i,-3*i,affichage=2);
segment(-2-5*i,-3*i,affichage=3);
segment(-2-5*i,-6-i,affichage=4);
segment(-2-i,i,affichage=2+epaisseur_ligne_2);
segment(2+3*i,i,affichage=3+epaisseur_ligne_2);
segment(2+3*i,6+7*i,affichage=4+epaisseur_ligne_2);
segment(-6-5*i,-2-i,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
```

Si on a dessiné le damier rectangulaire de dimension $a\ x\ n$ avec a en abscisse et b en ordonnée, on remarqre que :
on rencontre les bords horizontaux chaque fois que le nombre de carreaux traversés est un multiple de b et
on rencontre les bords verticaux chaque fois que le nombre de carreaux traversés est un multiple de a.
Donc on arrivera la première fois à un sommet du rectangle lorsque que le nombre de carreaux traversés est le plus petit multiple commun de a et b.

3.5 Arithmogrammes

Un arithmogramme est une opération arithmétique dans laquelle les chiffres des nombres en jeu sont représentés par des lettres sachant que 2 lettres distinctes (d'un même énoncé) repésentent 2 chiffres distincts.

3.5.1 Une opération simple

Reconstituer l'opération :

```
  E C O L E
+ E L E V E
-----------
  L E C O N
```

Les solutions On note `p,q,r,s` les retenues éventuelles qui sont égales soit à 0 soit à 1. Cela donne :

```
  p q r s
  E C O L E
+ E L E V E
-----------
  L E C O N
```

La lettre `E` apparait plusieurs fois et doit vérifier `E`$\neq$ `0` puisque c'est le premier chiffre du nombre `ECOLE`.
On a :
`E+E+p=L` et `E+E=10*s+N`.
`E+E+p=L` entraine que `E`$\in$ `{1,2,3,4}`.
ce qui entraine que `s=0` et puisque `N` et `L` sont représentent des chiffres différents on en déduit que `p=1` et donc on sait que :
`E`$\in$ `{1,2,3,4}`, `N=2*E`, `L=2*E+1` (on a bien `2E,2E+1,E` qui sont différents).
On doit donc résoudre :

```
  1 q r 0
  E C O L E
+ E L E V E
-----------
  L E C O N
```

c'est à dire il faut trouver les chiffres qui correspondent aux 6 lettres :
`E C O L V N`.
Ce qui donne comme équations avec `E`$\in$ `{1,2,3,4}` :
`N=2*E`, `L=2*E+1` et :
`L+V=10*r+O`
`O+E+r=10*q+C`
`C+L+q=10+E`
`C+L+q=10+E` donc `C=9-E-q`
`O+E+r=10*q+C` donc `O=10*q+9-2*E-r`
Comme `9-2*E-r>=0` on en déduit que `q=0` et donc que `O=9-2*E-r`
`L+V=10*r+O` donc
`V=10*r-2*E-1+9-2*E-r=9*r+8-4*E`.
On a ainsi obtenu toutes les lettres en fonction de `E` :
`N=2*E, L=2*E+1, C=9-E, O=9-2*E-r, V=9*r+8-4*E` avec `r=0` ou

r=1.
Si E=1 alors r=0 car V=9*r+4 et donc N=2, L=3, C=8, O=7 et V=4.
Si E=2 alors L=5, et O=5 donc pas de solution.
Si E=3 alors O=3 donc pas de solution.
Si E=4 alors alors r=1 car V=9*r-8 et donc N=8, L=9, C=5, O=0 et V=1.
On vérifie, on tape :

```
a:=10000*E+1000*C+100*O+10*L+E;b:=10000*E+1000*L+100*E+10*V+E
c:=10000*L+1000*E+100*C+10*O+N
E:=1;N:=2;L:=3;C:=8;O:=7;V:=4
a,b,a+b,c
```

On obtient bien a+b=c :

```
(18731,13141,31872,31872)
```

On tape :

```
E:=4;N:=8;L:=9;C:=5;O:=0;V:=1
a,b,a+b,c
```

On obtient bien a+b=c :

```
(45094,49414,94508,94508)
```

Il y a donc 2 solutions :
18731+13141=14972 et
45094+49414=94508

3.5.2 Une opération ayant 18 solutions

Reconstituer l'opération :

```
  R I E N
+ R I E N
-----------
  T O U T
```

La mise en oeuvre
Il se trouve que ce problème a 18 solutions et on peut donc faire travailler la classe par groupe en repartissant les tâches de chaque groupe.
Pour cela on fait avec toute la classe les premières déductions à partir des équations à résoudre.
Il faut trouver la valeur de 7 lettres différentes.
On note p,q,r les retenues éventuelles qui sont égales soit à 0 soit à 1. Cela donne :

```
  p q r
  R I E N
+ R I E N
-----------
  T O U T
```

Comme 2*N=10*r+T, on en déduit que T est pair.
Comme on a T est pair et T=2*R+p, on en déduit que :
p=0 et R∈ {1,2,3,4}

Comme `T=2*R=2*N-10*r` on en déduit que :
`r=1` (car `R` et `N` doivent être différents.
Donc `T=2*R` et `N=R+5`
On doit donc résoudre :

```
  0 q 1
  R I E N
+ R I E N
-----------
  T O U T
```

On peut alors répartir les élèves en 8 groupes que l'on nommera 10,11,20,21,30,31,40,41 :
Le groupe 10 doit résoudre l'opération avec `R=1` et `q=0` :

```
  0 0 1
  1 I E N
+ 1 I E N
-----------
  T O U T
```

Le groupe 11 doit résoudre l'opératuion avec `R=1` et `q=1` :

```
  0 1 1
  1 I E N
+ 1 I E N
-----------
  T O U T
```

etc.... **Les solutions** Pour obtenir et pour vérifier les solutions obtenues par les élèves, on va faire un programme qui fera varier `R` de 1 jusque 4. On en déduira `T=2*R` et `N=R+5` On peut encore remarquer que `2*I+q=O` et donc que :
`I` $\in$ `{0,1,2,3,4}` et
`2000*R+200*I+20*E+2*R+10=2000*R+100*O+10*U+2*R` c'est à dire :
`10*O+U=20*I+2*E+1`
Donc on fait varier `I` de 0 jusque 4 et `E` de 0 jusque 9.
`O` et `U` sont alors le quotient et le reste de la division euclidienne de `20*I+2*E+1` par `10` i .e.
`O,U:=iquorem(20*I+2*E+1,10)`
On a besoin de pouvoir tester si les valeurs des 7 lettres sont différentes.
On ces valeurs dans une liste `L`, puis on tansforme cette liste en un ensemble `S` et on compare la taille de `L` et de `S`.
Comme dans un ensemble il n'y a que des éléments différents, si `L` et `S` ont la même taille les valeurs de `L` sont différentes et sinon elles ne le sont pas.
On écrit :

```
tousdiff(L):={
  local S;
  S:=set[op(L)];
  si size(S)==size(L) alors
```

```
    return vrai;
  sinon
    return faux;
  fsi
}:;
```

On écrit alors :

```
toutourien():={
   local R,I,E,N,T,O,U,L,a;
  L:=NULL;
  pour R de 1 jusque 4 faire
    T:=2*R;
    N:=5+R;
    pour I de 0 jusque 4 faire
      pour E de 0 jusque 9 faire
        a:=1000*R+100*I+10*E+N;
        O,U:=iquorem(20*I+2*E+1,10);
        si tousdiff([R,I,E,N,T,O,U]) alors L:=L,[a,2*a]; fsi;
      fpour;
    fpour;
  fpour;
  return size(L),L;
  }:;
```

On remarque que le programme fait 4*5*10=200 essais.
On tape :
`toutourien()`
On obtient :

```
18,[1436,2872],[1476,2952],[1486,2972],
[2067,4134],[2307,4614],
[3078,6156],[3148,6296],[3208,6416],[3458,6916],[3478,6956],
[4069,8138],[4079,8158],[4139,8278],[4179,8358],[4269,8538],
[4309,8618],[4329,8658],[4359,8718]
```

3.6 DIX^2+UN^2=CENTUN

On veut résoudre :
DIX^2+UN^2=CENTUN
dans laquelle chaque lettre représente un chiffre de 0 à 9.
La solution avec un programme On écrit :

```
tousdiff(L):={
  local S;
  S:=set[op(L)];
  return size(S)==size(L);
}:;
```

On sait que $d! = 0$ et que $u! = 0$.
On remplace i par j et e par f.

On va calculer $(100*d+10*j+x)^2+10*u+n)^2$ avec toutes les valeurs possibles pour d, j, x, u, n puis on teste si le résultat peut s'écrire $10^5*c+10^4*f+1000*n+100*t+10*u+n$.
On écrit alors :

```
centun():={
local d,j,x,u,n,c,f,t,a,b,rep;
rep:=NULL;
pour d de 1 jusque 9 faire
 pour u de 1 jusque 9 faire
  pour n de 0 jusque 9 faire
   pour j de 0 jusque 9 faire
    pour x de 0 jusque 9 faire
     si tousdiff([d,u,n,j,x]) alors
      a:=(100*d+10*j+x)^2;
      b:=(10*u+n)^2;
      c:=a+b-10*u-n
      si irem(c,100)==0 alors
       c:=c/100;
       si irem(iquo(c,10),10)==n alors
        t:=irem(c,10);
        f:=iquo(irem(c-10*n-t,1000),100);
        c:=iquo(c-100*f-10*n-t,1000);
        si tousdiff([d,j,x,u,n,c,f,t]) alors
         rep:=rep,[d,j,x,u,n,c,f,t];
        fsi;
       fsi;
      fsi;
     fsi;
    fpour;
   fpour;
  fpour;
 fpour;
fpour;
return rep;}:;
```

On tape :
`centun()`
On obtient :
`[4,8,0,7,6,2,3,1]`
On vérifie et on tape :
`480^2+76^2-236176`
On obtient :
`0`

3.7 Diviseurs et décomposition en facteurs premiers d'un entier

3.7.1 Divisibilité par 11

Montrer que : $10^0 = 1, 10^1 = 11 - 1, 100 = 9 * 11 + 1, 1000 = 1001 - 1 = 11 * 91 - 1$
Montrer que si $10^{2*p} = a*11+1$ alors $10^{2*p+1} = b*11-1$ et $10^{2*(p+1)} = c*11+1$.
En dÃľduire un critère de divisibilité par 11.
Critère de divisibilité par 11
Si $10^{2*p} = a * 11 + 1$ on a :
$10^{2*p+1} = 10 * 10^{2*p} = (11 - 1) * (a * 11 + 1) = 11 * (11 * a + 1 - a) - 1$ et
$10^{2*(p+2)} = 100 * 10^{2*p} = (9 * 11 + 1) * (a * 11 + 1) = 11 * (9 * a * 11 + a + 9) + 1$
On en déduit que :
les puissances paires de 10 sont des multiples de 11 augmentés de 1 et
les puissances impaires de 10 sont des multiples de 11 diminués de 1.
On a donc comme critère de divisibilité par 11 :
Le reste de la division par 11 d'un nombre $n = \sum_{k=0}^{N} a_k * 10^k$ est reste de la division par 11 de la différence de la somme des a_{2*p} ($p = 0..2*\texttt{iquo}(N, 2)$) et de la somme des a_{2*p+1} ($p = 1..2*\texttt{iquo}(N, 2) + 1$). On augmente s'il y a lieu la première somme d'un multiple de 11 pour que la soustraction soit possible.
Par exemple :
si $n = a_7 10^7 + a_6 10^6 + a_5 10^5 + a_4 10^7 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$, le reste de la division par 11 de n est : $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$ ou
$11 * k + (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$ avec $k \in N$ pour que $0 \leq 11 * k + (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) < 11$.
Définition : rang pair, rang impair
Soit un nombre n écrit en base 10 :
On dira que les chiffres de rang pair sont : le chiffre des unités, le chiffre des centaines etc...et que les chiffres de rang impair sont : le chiffre des dizaines, le chiffre des millièmes etc...
Par exemple si $n = 245701$, ses chiffres de rang pair sont 1,7,4 et ceux de rang impair sont 0,5,2.
Exercice
Trouver le reste de la division par 11 de 625814, de 29395 de 192738 et de 918372.
On a :
pour 625814 on a : S1=6+5+1=12 et S0=2+8+4=14 S0-S1=2
Le reste de la division de 625814 par 11 est 2.
pour 29395 on a : S1=9+9=18 et S0=5+3+2=10 S0+11-S1=3
Le reste de la division de 29395 par 11 est 3.
pour 192738 on a : S1=1+2+3=6 et S0=8+7+9=24 S0-11-S1=24-11-6=7
Le reste de la division de 192738 par 11 est 7.
pour 918372 on a : S1=9+8+7=24 et S0=1+3+2=6 S0+22-S1=4 (on remarquera que la somme S0 (resp S1) correspondant à 918372 est égale à la somme S1 (resp S0) correspondant à 19273).
Le reste de la division de 918372 par 11 est 4.
On vérifie avec `Xcas`
On tape :

```
irem([625814,29395],11)
```
On obtient :
```
[2,3]
```
On tape :
```
irem([192738,918372],11)
```
On obtient :
```
[7,4]
```

3.7.2 Les entiers pandigitaux

Définition : entier pandigital
Un entier pandigital (en grec pan=tout) est un nombre de 10 chiffres différents mais bien sûr 0 n'est pas le premier chiffre.
Exercice1
Trouver N, le plus grand nommbre pandigital divisible par 11.
Le plus grand nommbre qui s'écrit avec 10 chiffres différents est :
$a = 9876543210$.
Cherchons tout d'abord le reste de la division par 11 de $a = 9876543210$.
On a :
S0=0+2+4+6+8=20 et S1=1+3+5+7+9=25 donc
le reste R de la division de a par 11 est R=11+20-25=6. Pour trouver un nombre divisible par 11, il faut avoir :
soit S0-S1=11, soit S0-S1=-11
En effet puisque S0+S1=45 S0 et S1 sont de parité différente, on ne peut pas avoir S0-S1=0, ni 22+S0-S1=0, ni S0-S1-22=0 et on ne peut pas avoir S0-S1=33, ni S0-S1=-33 car la valeur minimale de S0 ou de S1 est 0+1+2+3+4=10 et la valeur maximale de S0 ou de S1 est 45-10=35 on a 10-35=-25<=S0-S1<=35-10=25.
Pour avoir S0-S1=11 et S0+S1=45 il faut avoir S0=28 et S1=17.
Pour avoir S0-S1=-11 et S0+S1=45 il faut avoir S0=17 et S1=28.
Pour avoir S0-S1=-11 on doit diminuer S0 de 3 et augmenter S1 de 3 et
pour avoir S0-S1=11 on doit augmenter S0 de 8 et diminuer S1 de 3.
Pour avoir S0-S1=-11 :
S0=20-3=17, S1=25+3=28, S0-S1=17-28=-11.
on peut le faire soit en échangeant un chiffre figurant dans S0 avec un chiffre figurant dans S1, soit en échangeant 3 chiffres figurant dans S0 avec trois chiffres figurant dans S1 pour avoir S0=17 et S1=28.
on peut par exemple échanger :
soit 1 avec 4 pour obtenir S0=0+2+1+6+8 et S1=4+3+5+7+9,
soit 3 avec 6 pour obtenir S0=0+2+4+3+8 et S1=1+6+5+7+9,
soit 5 avec 8 pour obtenir S0=0+2+4+6+5 et S1=1+3+8+7+9.
ou encore échanger
1 avec 2 et 3 avec 4 et 5 avec 6 pour obtenir S0=0+1+3+5+8 et S1=2+4+6+7+9,
1 avec 2 et 3 avec 4 et 7 avec 8 pour obtenir S0=0+1+3+6+7 et S1=2+4+5+8+9,
1 avec 2 et 5 avec 6 et 7 avec 8 pour obtenir S0=0+1+4+5+7 et S1=2+3+6+8+9,
3 avec 4 et 5 avec 6 et 7 avec 8 pour obtenir S0=0+2+3+5+7 et S1=1+4+6+8+9.
Pour avoir S0-S1=11 :
on doit augmenter S0 de 8 et diminuer S1 de 8 :
S0=20+8=28 et S1=25-8=17 S0-S1=28-17=11.

Puisque 8=7+1=5+3, on peut par exemple échanger :
soit 0 avec 7 et 2 avec 3 (ou 4 avec 5, ou 8 avec 9) pour obtenir :
S0=7+3+4+6+8 et S1=1+2+5+0+9 (ou S0=7+2+5+6+8 et S1=1+3+4+0+9, ou S0=7+2+4+6+9 et S1=1+3+5+0+8),
soit 2 avec 9 et 0 avec 1 (ou 4 avec 5, ou 6 avec 7) pour obtenir S0=1+9+4+6+8 et S1=0+3+5+7+2 (ou S0=0+9+5+6+8 et S1=1+3+4+7+2 ou S0=0+9+4+7+8 et S1=1+3+5+6+2),
soit 0 avec 5 et 4 avec 7 (ou 6 avec 9) pour obtenir S0=5+2+7+6+8=28 et S1=1+3+0+4+9=17 (ou S0=5+2+4+9+8 et S1=1+3+0+7+6),
soit 2 avec 7 et 0 avec 3 (ou 6 avec 9) pour obtenir S0=3+7+4+6+8 et S1=1+0+5+2+9 (ou S0=0+7+4+9+8 et S1=1+3+5+2+6),
soit 4 avec 9 et 0 avec 3 (ou 2 avec 5) pour obtenir S0=3+2+9+6+8 et S1=1+0+5+7+4 (ou S0=0+5+9+6+8 et S1=1+3+2+7+4).
On peut ensuite mettre les chiffres constituant S0 (resp S1)à n'importe place de rang pair (resp impair).
Comment trouver le plus grand nombre ?
Il faut échanger 2 chiffres aussi petits que possible : ici c'est 1 et 4.
En échangeant 1 et 4, on a obtenu S0=0+2+1+6+8 et S1=4+3+5+7+9.
Pour avoir le plus grand nombre N, il suffit d'ordonner en décroissant les chiffres de rang pair (8,6,2,1,0) et d'ordonner en décroissant les chiffres de rang impair 9,7,5,4,3.
On obtient alors $N = 9876524130$.

Exercice2
Trouver n le plus petit entier pandigital divisible par 11.
Le plus petit nommbre qui s'écrit avec 10 chiffres différents est :
$b = 1023456789$ puisque l'écriture d'un nombre ne commence pas par 0.
On a :
S0=0+3+5+7+9=24 et S1=1+2+4+6+8=21 donc
le reste R de la division de b par 11 est R=S0-S1=24-21=3. Pour trouver un nombre divisible par 11, il faut avoir :
soit S0-S1=11, soit S0-S1=-11.
Pour avoir S0-S1=11 et S0+S1=45 il faut avoir S0=28 et S1=17.
Pour avoir S0-S1=-11 et S0+S1=45 il faut avoir S0=17 et S1=28.
Pour avoir S0-S1=11 il faut donc augmenter S0 de 4 et diminuer S1 de 4.
Pour avoir S0-S1=-11 il faut donc diminuer S0 de 7 et augmenter S1 de 7.
Pour avoir S0-S1=11 :
Puisque 4=1+3, on peut échanger :
5 avec 8 et 3 avec 4 (ou 7 avec 8 et 3 avec 36 ou ce qui est équivalent 3 avec 8 et 7 avec 6).
Pour avoir S0-S1=-11 : pour diminuer S0 de 7 il faut échanger :
9 avec 2 (ou 8 avec 1).
Pour avoir le plus petit nombre il faut donc échanger 8 avec 5 et 4 avec 3.
On obtient S0=0+4+8+7+9=28=0+4+7+8+9 et S1=1+2+3+5+6=17.
On obtient alors :
$n = 1024375869$.

Exercice3
Trouver toutes les suites croissantes des chiffres constituant S0 (chiffres de rang pair) et en déduire la suite croissante correspondante des chiffres de S1 (chiffres de rang impair) pour que n soit divisible par 11. On rappelle : le chiffre des unités est de rang 0 (pair), celui des dizaines est de rang 1 (impair) etc.....
Combien-y-a-t-il d'entiers pandigitaux divisibles par 11 ?
On pose :
$n = a_9 10^9 + a_8 10^8 + a_7 10^7 + a_6 10^6 + a_5 10^5 + a410^4 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + 10a_1 + a_0$
On sait que si n est divisible par 11 on a soit S0=17 et S1=28, soit S1=17 et S0=28.
On cherche donc les valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 vérifiant :
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ et $0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 9$.
Les valeurs trouvées seront donc soit les chiffres qui constituent S0 (on peut alors en déduire S1), soit les chiffres qui constituent S1 (on peut alors en déduire S0).
On obtient :
0+1+2+5+9=17 donc 3+4+6+7+8=28
0+1+2+6+8=17 donc 3+4+5+7+9=28
0+1+3+4+9=17 donc 2+5+6+7+8=28
0+1+3+5+8=17 donc 2+4+6+7+9=28
0+1+3+6+7=17 donc 2+4+5+8+9=28
0+1+4+5+7=17 donc 2+3+6+8+9=28
0+2+3+4+8=17 donc 1+5+6+7+9=28
0+2+3+5+7=17 donc 1+4+6+8+9=28
0+2+4+5+6=17 donc 1+3+7+8+9=28
1+2+3+4+7=17 donc 0+5+6+8+9=28
1+2+3+5+6=17 donc 0+4+7+8+9=28

On a trouvé 22 possibilités pour les chiffres qui constituent S0.
Si S0 est constituée des chiffres 0,1,2,5,9 alors S1 est constituée des chiffres 3,4,6,7,8 et si S0 est constituée des chiffres 3,4,6,7,8 alors S1 est constituée des chiffres 0,1,2,5,9.
La première ligne donne comme solution 2 nombres qui sont :
$n1 = 8975624130$ et $n2 = 9857261403$ (la somme S0 de $n1$ est égale à la somme S1 de $n2$ et la somme de S1 de $n1$ est égale à la somme S0 de $n2$ et les chiffres de S0 (resp de S1) sont ordonnés $a_0 < a_2 ... < a_9$).
Chaque permutation des chiffres de S0 ou des chiffres de S1, ne mettant pas 0 comme chiffre de rang 9, donne un entier pandigital.
Pour $n1$ il y a :
5 !=120 permutations pour les chiffres de S0 et 5 !=120 permutations pour les chiffres de S1 donc
$n1$ peut générer $5!^2 = 120^2 = 14400$ nombres pandigitaux.
Pour $n2$ il y a :
5 !=120 permutations pour les chiffres de S0 et 5 !-4 !=4*4 !=96 permutations pour les chiffres de S1 (car il y a 4 ! permutations qui commencent par 0)donc
$n2$ génère $5! * 4! * 4 = 120 * 96 = 11520$ possibilites.
La première ligne génère $5!^2 + 5! * 4! * 4 = 14400 + 11520 = 25920$ Il y a 11 lignes donc 25920*11=285120 nombres pandigidaux qui sont divisibles par 11.
Il y a 10 !-9 !=9*9 !=3265920 nombres pandigidaux.

3.7.3 Amusement : Un carré magique de 4x4 entiers pandigitaux

Voici le tableau de Kurchan (Rodolpho Kurchan de Buenos Aires) : c'est un carré magique dont la somme est le nombre pandigital 4129607358.

1037956284	1036947285	1027856394	1026847395
1026857394	1027846395	1036957284	1037946285
1036847295	1037856294	1026947385	1027956384
1027946385	1026957384	1037846295	1036857294

On vérifie :
Somme des lignes :
On tape :
`1037956284+ 1036947285 + 1027856394 + 1026847395`
On obtient : `4129607358`
On tape :
`1026857394 + 1027846395 + 1036957284 + 1037946285`
On obtient : `4129607358`
On tape :
`1036847295 + 1037856294 + 1026947385 + 1027956384`
On obtient : `4129607358`
On tape :
`1027946385 + 1026957384 + 1037846295 + 1036857294`
On obtient : `4129607358`
Somme des colonnes :
On tape :
`1037956284+1026857394 +1036847295 +1027946385`
On obtient : `4129607358`
On tape :
`1036947285 +1027846395 +1037856294 +1026957384`
On obtient : `4129607358`
On tape :
`1027856394 +1036957284 + 1026947385 +1037846295`
On obtient : `4129607358`
On tape :
`1026847395+1037946285+ 1027956384+10368572941`
On obtient : `4129607358`
Somme des diagonales :
On tape :
`1037956284+ 1027846395 +1026947385 + 1036857294`
On obtient : `4129607358`
On tape :
`1026847395+1036957284 +1037856294 +1027946385`
On obtient : `4129607358`

3.7.4 Divisibilité par 13

De l'égalité : 1001=7*11*13, donner un critère de divisibilité par 7 et par 13.
Montrer que 1417 et 417001 sont divisibles par 13.

Chercher les nombres qui possèdent cette propriété.
On tape :
`iquorem(1417,13),iquorem(417001,13)`
On obtient :
`[27,1]`
On a :
1417=1001+416 et 417001 =416*000+1001 avec 1001 et 416 qui sont divisibles par 13 car on a : 1001=77*13 et 416=32*13.
On tape par exemple :
```
L1:=(1001+13*p)$(p=0..40)
L2:=(1000*13*p+1001)$(p=0..40)
L1[11],L2[11]
```
On obtient :
`1144,144001`
On tape :
`L1[16],L2[16]`
On obtient :
`1209,209001`
On tape :
`L1[32],L2[32]`
On obtient :
`1417,417001`
On tape :
`L1[0],L2[0]`
On obtient :
`1001,1001`
qui peut être considéré comme ayant cette propriété puisque 1001=001001.

3.7.5 Divisibilité par 37

Diviser 1000 par 37 et en déduire critère de divisibilité par par 37.
On tape :
`iquorem(1000,37)`
On obtient :
`[109,0],[32077,0]`

3.7.6 Tour de magie

Choisis un nombre de 3 chiffres dont l'écriture en base 10 est :
$\overline{abc}$.
Avec ce nombre forme le nombre n de 6 chiffres : $n = \overline{abcabc}$.
Ce nombre n est divisible par 7 pourquoi ? Ce nombre n est divisible par 11 pourquoi ? Ce nombre n est divisible par 13 pourquoi ? Calcule : $\dfrac{n}{7 * 11 * 13}$ et compare le résultat à $\overline{abc}$.
Peux-tu expliquez le résultat ?
Solution Puisque 1001=7*11*13 on a :
$n = \overline{abcabc} = a*100100 + b*10010 + c*1001 = 1001*(100*a + 10*b + c) =$

$1001 * \overline{abc}$
Donc $n = \overline{abcabc} = 7 * 11 * 13 * \overline{abc}$

3.7.7 Énoncé de l'exercice et une définition

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche si il existe n nombres entiers positifs et distincts $a_1, a_2, ..a_n$ qui vérifient :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ...\frac{1}{a_n} = 1$$

Définition
Un nombre entier $p \geq 2$ est **parfait** si il est égal à la somme de ses diviseurs propres (1 est compris mais pas p).

1. Faire l'étude pour $n = 1, 2, 3$
2. Montrer que 6 et 28 sont parfaits et que 36 n'est pas parfait.
3. Montrer que les diviseurs propres $a_1, a_2, ..a_n$ d'un nombre parfait sont solutions de $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ...\frac{1}{a_n} = 1$
   Application pour les nombres parfaits $p = 28, 496, 8128$
4. Chercher toutes les solutions de $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ...\frac{1}{a_n} = 1$ lorsque $a_1, a_2, ..a_n$ sont des diviseurs de 36.
5. Étude générale : montrer que si $b_1 > b_2 >, .. > b_n$ dont des diviseurs d'un nombre entier p vérifiant $b_1 + b_2 + .. + b_n = p$ alors :
   $a_1 = \frac{p}{b_1} < a_2 = \frac{p}{b_2} < .. < a_n = \frac{p}{b_n}$ sont solutions de $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...\frac{1}{a_n} = 1$
   et
   réciproquement si $a_1 < a_2 < .. < a_n$ sont solutions de $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...\frac{1}{a_n} = 1$
   alors il existe $p = ppcm([a_1, a_2..a_n])$ tel que :
   $b_1 = \frac{p}{a_1} > b_2 = \frac{p}{a_2} >, .. > b_n = \frac{p}{a_n}$ sont des diviseurs du nombre entier p vérifiant $b_1 + b_2 + .. + b_n = p$.
   Application Trouver une solution dans $\mathbb{N}^*$ de $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ...\frac{1}{a_{12}} = 1$
   on pourra choisir par exemple $p = 120$.

3.7.8 Une solution

1. Pour $n = 1$ la seule solution est $a_1 = 1$
   Pour $n = 2$, on cherche 2 entiers différents a_1 et a_2 qui vérifient :
   $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1$
   Supposons $a_2 > a_1$.
   a_1 est différent de 1 donc $a_1 \geq 2$
   si $a_1 = 2$ alors $a_2 = 2$ cela ne répond pas à la question car $a_1 = a_2$.
   si $a_1 \geq 3$ et si $a_2 > a_1$ on a :
   $\frac{1}{a_1} \leq \frac{1}{3}$ et

$\dfrac{1}{a_2} < \dfrac{1}{a_1} \leq \dfrac{1}{3}$ donc
$\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} < \dfrac{2}{3} < 1$
Il n'y a pas de solution pour $n = 2$
Ou bien on écrit :
a_1 et a_2 vérifient $a_1 + a_2 = a_1 a_2$ ou encore :
$a_1(a_2 - 1) = a_2$
a_2 et $a_2 - 1$ sont premiers entre eux donc a_2 divise a_1 ce qui est impossible puisque $a_2 > a_1$.

Pour $n = 3$, on cherche 3 entiers différents $a_1,\ a_2$ et a_3 qui vérifient :
$\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} = 1$
Supposons $a_3 > a_2 > a_1$.
a_1 est différent de 1 on a $a_1 \geq 2$
si $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$ on a $1 - (\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{6}$
Donc $(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 6)$ est une solution de $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} = 1$
Y-a-t-il d'autres solutions ?
si $a_1 \geq 2$
le cas $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$ vient d'être étudié donc peut-on avoir $a_2 \geq 4$?
si $a_2 \geq 4$ alors a_3 doit vérifier :
$\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} = 1 \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{a_3}$ ce qui entraine
$\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{a_3}$
soit $a_3 \leq 4$ cela ne répond pas à la question car on n'a pas $a_3 > a_2$ puisque $a_3 \leq 4 \leq a_2$
pour $n = 3$ il n'y a qu'une seule soluition qui est $(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 6)$

2. 6 et 28 sont parfaits et 36 n'est pas parfait
En effet :
6=1*2*3 et 1+2+3=6
28=4*7 ses diviseurs propres sont donc (1,2,4,7,14) et 1+2+4+7+14=28
$36 = 2^2 * 3^2$ ses diviseurs propres sont donc (1,2,3,4,6,9,12,18) et 1+2+3+4+6+12+18=55
Pour avoir la liste de tous les diviseurs, on utilise la commande `idivis` de `Xcas`.
On tape :
```
idivis(36)
```
On obtient :
```
[1,2,3,6]
```
On tape :
```
idivis(28)
```
On obtient :
```
[1,2,4,7,14,28]
```
On tape :
```
idivis(36)
```
On obtient :
```
[1,2,3,4,6,9,12,18,36]
```

3. 6 est parfait car 1+2+3=6 et en divisant cette égalité par 6 on obtient :
   $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$
   28 est parfait car 1+2+4+7+14=28 et en divisant cette égalité par 28 on obtient :
   $\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$
   Soit un nombre parfait p ayant n diviseurs propres (i.e. $n+1$ diviseurs). Soient $(d_1=1,d_2,..d_n,d_{n+1})$ les $n+1$ diviseurs ordonnés par ordre croissant i.e. $1=d_1<d_2<d_3<..<d_n<d_{n+1}=p$.
   On a :
   $\frac{d_1}{p}=\frac{1}{p}$ car $d_1=1$,
   $\frac{d_2}{p}=\frac{1}{d_n}$ car $p=d_n*d_2$,
   $\frac{d_3}{p}=\frac{1}{d_{n-1}}$ car $p=d_{n-1}*d_3*$,
   ....
   $\frac{d_{n-1}}{p}=\frac{1}{d_3}$ car $p=d_{n-1}*d_3*$,
   $\frac{d_n}{p}=\frac{1}{d_2}$ car $p=d_n*d_2$,
   On a : $1+d_2+d_3+..+d_n=d_{n+1}=p$ donc en divisant cette égalité par p on obtient :
   $\frac{1}{p}+\frac{1}{d_n}+\frac{1}{d_{n-1}}+..+\frac{1}{d_3}+\frac{1}{d_2}=1$
   On tape :
   `idivis(28)`
   On obtient :
   `[1,2,4,7,14,28]`
   On tape :
   `idivis(28)/28`
   On obtient :
   `[1/28,1/14,1/7,1/4,1/2,1]`
   On tape :
   `sum([1/28,1/14,1/7,1/4,1/2])`
   On obtient :
   `1` On tape :
   `idivis(496)`
   On obtient :
   `[1,2,4,8,16,31,62,124,248,496]`
   On tape :
   `sum([1,2,4,8,16,31,62,124,248])`
   On obtient :
   `496`
   donc 496 est un nombre parfait.
   On tape :
   `idivis(496)/496`
   On obtient :
   `[1/496,1/248,1/124,1/62,1/31,1/16,1/8,1/4,1/2,1]`
   On tape :
   `sum([1/496,1/248,1/124,1/62,1/31,1/16,1/8,1/4,1/2])`
   On obtient :
   `1` On tape :

`idivis(8128)`
On obtient :
`[1,2,4,8,16,32,64,127,254,508,1016,2032,4064,8128]`
On tape :
`sum([1,2,4,8,16,32,64,127,254,508,1016,2032,4064])`
On obtient :
`8128`
donc 8128 est un nombre parfait.
On tape :
`idivis(8128)/8128`
On obtient :
```
[1/8128,1/4064,1/2032,1/1016,1/508,1/254,1/127,1/64,
1/32,1/16,1/8,1/4,1/2,1]
```
On tape :
```
sum([1/8128,1/4064,1/2032,1/1016,1/508,1/254,1/127,
1/64,1/32,1/16,1/8,1/4,1/2])
```
On obtient :
`1`

4. On cheche les diviseurs de 36.
On tape :
`idivis(36)`
On obtient :
`[1,2,3,4,6,9,12,18,36]`
On cheche les diviseurs de 36 dont la somme est égale à 36.
On trouve 7 décompositions de 36 :
36=18+12+6
36=18+12+4+2
36=18+12+3+2+1
36=18+9+6+3
36=18+9+6+2+1
36=18+9+4+3+2
36=12+9+6+4+3+2
On vérifie, on tape :
```
18+12+6,18+12+4+2,18+12+3+2+1,18+9+6+3,18+9+6+2+1,
18+9+4+3+2,12+9+6+4+3+2
```
On obtient :
`(36,36,36,36,36,36,36)`
On tape :
```
L:=[18,12,6],[18,12,4,2],[18,12,3,2,1],[18,9,6,3],
[18,9,6,2,1],[18,9,4,3,2],[12,9,6,4,3,2]
F:=[L]/36
```
On obtient :
```
[[1/2,1/3,1/6],[1/2,1/3,1/9,1/18],[1/2,1/3,1/12,1/18,1/36],
[1/2,1/4,1/6,1/12],[1/2,1/4,1/6,1/18,1/36],
[1/2,1/4,1/9,1/12,1/18],[1/3,1/4,1/6,1/9,1/12,1/18]]
```
On tape :
`sum(F[k])$(k=0..6)`
On obtient :

`(1,1,1,1,1,1,1)`

5. On cherche $0 < a_1 < a_2 < a_3 < .. < a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :
$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ...\frac{1}{a_n} = 1$.
Supposons le problème résolu.
On réduit les fractions au même dénominateur et on note p leur dénominateur commun :
$p = ppcm([a_1, a_2, a_3, .., a_n])$ (avec `Xcas`, `lcm` est le *ppcm* d'entiers).
Il existe donc $b_1, b_2, b_3, .., b_n$ tels que :
$p = a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = ... = a_nb_n$ donc :
puisque pour tout $k = 1..n$, on a $\frac{1}{a_k} = \frac{b_k}{a_kb_k} = \frac{b_k}{p}$, on a
$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ...\frac{1}{a_n} = \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{p}$ et
$b_1, b_2, b_3, .., b_n$ sont des diviseurs de p.
On a donc à résoudre dans $\mathbb{N}^*$: $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{p} = 1$ c'est à dire
$b_1 + b_2 + ... + b_n = p$ lorsque $b_1, b_2, b_3, .., b_n$ sont des diviseurs de p.
Réciproquement, si $b_1 > b_2 > b_3 > .. > b_n$ sont des diviseurs de p vérifiant $b_1 + b_2 + ... + b_n = p$ alors
$a_1 = \frac{p}{b_1} < a_2 = \frac{p}{b_2} < .. < a_n = \frac{p}{b_n}$ sont solutions de $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ...\frac{1}{a_n} = 1$

Application Trouver une solution pour $n = 12$.
On choisit $p = 120$
On tape :
`idivis(120)`
On obtient :
`[1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120]`
On tape :
`120==30+24+15+12+10+8+6+5+4+3+2+1`
On obtient :
`vrai`
On tape :
`L:=[30,24,15,12,10,8,6,5,4,3,2,1]`
On obtient :
`[30,24,15,12,10,8,6,5,4,3,2,1]`
On tape :
`L/120`
On obtient :
`[1/4,1/5,1/8,1/10,1/12,1/15,1/20,1/24,1/30,1/40,1/60,1/120]`
On tape :
`sum(L/120)`
On obtient :
`1`
On tape :
`size(L)`
On obtient :
`12`
On tape :

`A:=denom(L/120)`
On obtient la liste des solutions a_k :
`[4,5,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120]`

3.8 Exercice : nbre de carrés d'un quadrillage traversés par un segment

Soient 2 entiers m et n.
Un rectangle de côtés mesurant m et n unités est subdivisés en $m * n$ carrés de côtés mesurant 1 unité.
Quel est le nombre de carrés traversés par une diagonale du rectangle ? **Solution**
On peut faire des essais on tape par exemple :

```
m:=21;n:=7
papier_quadrille(1,pi/2,1,x=0..m,y=0..n)
A:=point(0)
C:=point(m,n) segment(A,C)
```

On compte le nombre de carrés traversés par la diagonale du rectangle On peut supposer $m \geq n$.
Puis on modifie les valeurs de m et n en :

```
m:=22;n:=7
```

On compte etc...
On remarque que si `d:=gcd(m,n)` et si $a = m/d$ et $b = n/d$ alors la diagonale du rectangle passe par les points :
(a, b),$(2a, 2b)$,...$(d * a, d * b) = (m, n)$.
On peut donc supposer dans un premier tempps que m et n sont premiers entre eux. Pour aller de A à C on doit traverser $m - 1$ lignes verticales et $n - 1$ lignes horizontales.
Chaque fois qu'on traverse une de ces lignes on passe d'un carré a un autre.
En partant de A on traverse un premier carré, puis on traverse une des lignes (verticales ou horizontales) on est donc dans un 2ième carré etc...
donc en tout on traverse : $1 + (m - 1) + (n-) = m + n - 1$ carrés.
Si m et n ne sont pas premier entre eux le nombres de carrés traversés sera donc multiplié par d.
Donc le résultat est $pgcd(m, n) * (m + n - 1)$ (formule que l'on peut vérifier sur les essais du début !).

Chapitre 4

Équations et inéquations

4.1 Résoudre $x^2 = a$

Si $a < 0$ il n'y a pas de solution
Si $a = 0$ il y a 1 solution qui est $x = 0$
Si $a > 0$ il y a 2 solutions qui sont $x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$
Avec `Xcas`
On tape :
`resoudre(x^2=-2)`
On obtient : `[]`
On tape :
`resoudre(x^2=2)`
On obtient : `[-sqrt(2),sqrt(2)]`
On tape :
`resoudre(x^2=4+2*sqrt(3))`
On obtient : `[-(sqrt(3))-1,sqrt(3)+1]`

4.2 Résoudre une équation produit

On sait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteur est nul. Si un équation est mise sous la forme d'un produit, elle est donc facilement résoluble.
Exercices

1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + (2x-4)^2 = 10x(4x-2)$
   - $(3x+2)^2 + 7(3x+2) + 5(9x^2-4) = 0$
2. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les équations :
   - $2mx - 1 = x + 7$
   - $(m-1)x + 2x - 3 = m - 1$

Les solutions avec `Xcas`

1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + 2x - 4)^2 = 10x(4x-2)$
     On tape :
     `resoudre((6x-1)^2+(2x-4)^2=10x*(4x-2))`

On obtient : `[17/8]`
Pour avoir le détail des calculs, on tape :
`developper((6x-1)^2+(2x-4)^2=10x*(4x-2))`
On obtient : `40*x^2-28*x+17=(40*x^2-20*x)`
Donc $8x = 17$ i.e. $x = 17/8$

- $(3x+2)^2 + 7(3x+2) + 5(9x^2 - 4) = 0$
On tape :
`resoudre((3x+2)^2+7*(3x+2)+5*(9x^2-4)=0)`
On obtient : `[-2/3,1/18]`
Pour avoir le détail des calculs, on tape :
`factoriser((3x+2)^2+7*(3x+2)+5*(9x^2-4))`
On obtient : `(3*x+2)*(18*x-1)`
Donc $(3x + 2)(18x - 1) = 0$ si et seulement si $3x + 2 = 0$ ou si $18x - 1 = 0$ i.e. $x = -2/3$ ou $x = 1/18$

2. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les équations :
   - $2mx - 1 = x + 7$
   On tape :
   `resoudre(2*m*x-1=x+7)`
   On obtient : `[8/(2*m-1)]`
   Attention
   `Xcas` ne renvoie que le cas général qui n'est valable ici que si $m \neq 1/2$.
   - $(m-1)x + 2x - 3 = m - 1$
   On tape :
   `resoudre((m-1)*x+2x-3=m-1)`
   On obtient : `[(m+2)/(m+1)]`
   Attention
   `Xcas` ne renvoie que le cas général qui n'est valable ici que si $m \neq -1$

4.3 Résoudre une inéquation

Dans une inéquation on peut faire passer un terme d'un membre à l'autre à condition de changer son signe.
Dans une inéquation on peut diviser ou multiplier les 2 membres d'une inéquation par un nombre strictement positif sans changer le sens de l'inéquation et par un nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inéquation.
Exercices

1. Résoudre les équations :
   - $(6x - 1)^2 + (2x - 4)^2 = 10x(4x - 2)$
   - $(3x + 2)^2 + 7(3x + 2) + 5(9x^2 - 4) = 0$
2. Résoudre les inéquations :
   - $3(x - 1) + 7(3x - 2) < 6(x + 1)$
   - $\dfrac{3x-4}{x-1} >= 3$
3. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les inéquations :
   - $m(x - 3) > x + 2$
   - $m(x - 1) + (x - 3)(x - 7) > (x + 1)^2$

Les solutions avec `Xcas`

1. Résoudre les inéquations :
   - $3(x-1)+7(3x-2) < 6(x+1)$
     On tape :
     `resoudre(3*(x-1)+7*(3x-2)<6*(x+1))`
     On obtient : `[x<(23/18)]`
     Pour avoir le détail des calculs, on tape :
     `E:=(3*(x-1)+7*(3x-2)<6*(x+1))`
     On obtient : `(6*(x+1))>(3*(x-1)+7*(3*x-2))`
     Attention
     `Xcas` écrit toujours une inéquation avec le signe > ou >=.
     On tape :
     `developper(gauche(E)-droit(E))`
     On obtient : `-18*x+23`
     $-18*x+23 > 0$ est équivalent à $23 > 18x$ donc $x < \frac{23}{18}$
   - $\dfrac{3x-4}{x-1} >= 3$
     On tape :
     `resoudre((3*x-4)/(x-1)>=3)`
     On obtient : `[x<1]`
     Pour avoir le détail des calculs, on tape :
     `E:=(3*x-4)/(x-1)>=3`
     `factoriser(gauche(E)-droit(E))`
     On obtient : `-1/(x-1)`
     $-1/(x-1) >= 0$ est équivalent à $x-1 < 0$ donc à $x < 1$
2. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les inéquations :
   - $m(x-3) > x+2$
     On tape :
     `purge(m);resoudre(m*(x-3)>x+2,x)`
     On obtient :
     `un message disant qu'il faut faire des hypothèses sur les paramètres et donnant la solution de l'équation correspondante :` $(3m+2)/(m-1)$
     On tape :
     `supposons(m>1);`
     `resoudre(m*(x-3)>x+2,x)`
     On obtient : `[x>((3*m+2)/(m-1))]`
     On tape :
     `supposons(m<1);`
     `resoudre(m*(x-3)>x+2,x)`
     On obtient : `[x<((3*m+2)/(m-1))]`
     Pour avoir le détail des calculs, on tape :
     `E:=m*(x-3)>x+2`
     `developper(gauche(E)-droit(E))`
     On obtient : `(m-1)*x-3*m-2`
     Donc $(m-1)*x > 3*m+2$ et on termine à la main :
     si $m > 1$ alors la solution est $x > \dfrac{3*m+2}{m-1}$
     si $m < 1$ alors la solution est $x < \dfrac{3*m+2}{m-1}$

si $m = 1$ alors $3 * m + 2 = 5$ donc il n'y a pas de solution.

- $m(x-1) + (x-3)(x-7) > (x+1)^2$
  On tape :
  `purge(m);resoudre(m*(x-1)+(x-3)*(x-7)>(x+1)^2,x)`
  renvoie un message donnant la solution de l'équation correspondante ici $(m-20)/(m-12)$
  On tape alors :
  `supposons(m>12)`
  `resoudre(m*(x-1)+(x-3)*(x-7)>(x+1)^2,x)`
  On obtient un message et :
  `[x>((m-20)/(m-12))]`
  On tape alors :
  `supposons(m<12)`
  `resoudre(m*(x-1)+(x-3)*(x-7)>(x+1)^2,x)`
  On obtient un message et :
  `[x<((m-20)/(m-12))]`
  Pour avoir le détail des calculs, on tape :
  `E:=m*(x-1)+(x-3)*(x-7)>(x+1)^2`
  `developper(gauche(E)-droit(E))`
  On obtient : `(m-12)*x-m+20`
  Donc $(m-12) * x > m - 20$ et on termine à la main :
  si $m > 12$ alors la solution est $x > \dfrac{m-20}{m-12}$
  si $m < 12$ alors la solution est $x < \dfrac{m-20}{m-12}$
  si $m = 12$ alors $m - 20 = -8$ donc l'inéquation est verifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.4 Résoudre une équation ou une inéquation graphiquement

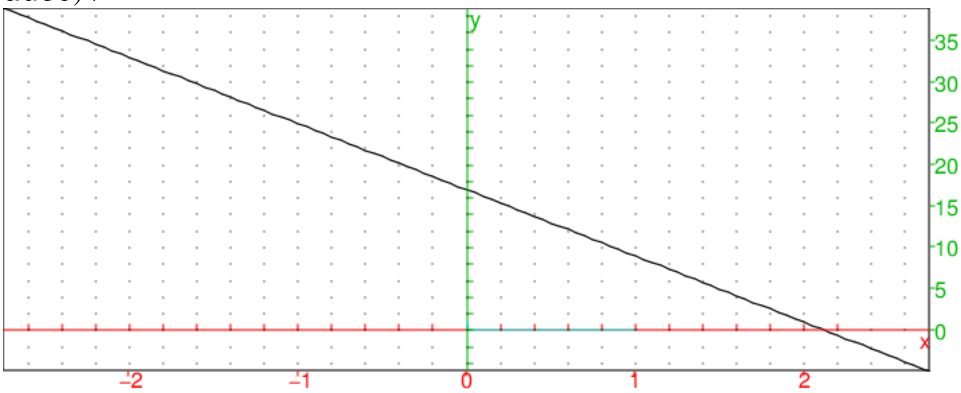
Il peut être interressant de visualiser la ou les solutions d'une équation ou d'une inéquation en la repésentant graphiquement.
Reprenons les exemples précédents :

1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + (2x-4)^2 = 10x(4x-2)$
   - $(3x+2)^2 + 7(3x+2) + 5(9x^2-4) = 0$
2. Résoudre les inéquations :
   - $3(x-1) + 7(3x-2) < 6(x+1)$
   - $\dfrac{3x-4}{x-1} >= 3$

Les solutions graphiques avec `Xcas`

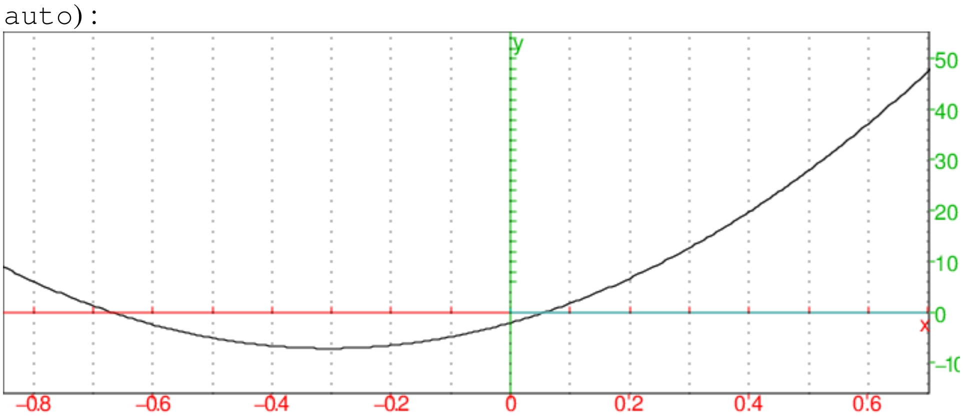
1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + (2x-4)^2 = 10x(4x-2)$
     On tape :
     `G1:=plotfunc((6x-1)^2+(2x-4)^2-10x*(4x-2))`
     On obtient après avoir fait un grossissement (cliquez sur `in` et sur

`auto)` :



On tape :
`abscisse(inter(G1,droite(y=0)))`
On obtient : `[17/8]`

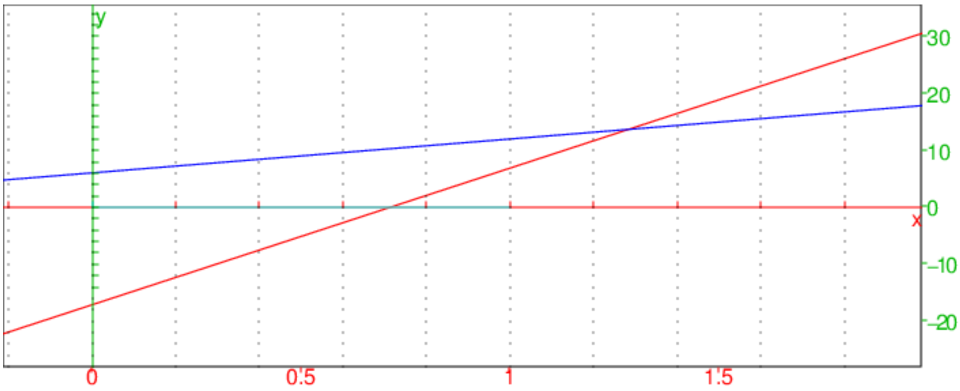
- $(3x+2)^2+7(3x+2)+5(9x^2-4)=0$
  On tape :
  `G2:=plotfunc((3x+2)^2+7*(3x+2)+5*(9x^2-4))`
  puis après avoir vu que la courbe coupe l'axe des x entre-1 et 1, on tape :
  `plotfunc((3x+2)^2+7*(3x+2)+5*(9x^2-4),x=-1..1)`
  On obtient après avoir fait un grossissement (cliquez sur `in` et sur `auto)` :



  On tape :
  `abscisse(inter(G2,droite(y=0)))`
  On obtient : `[-2/3,1/18]`

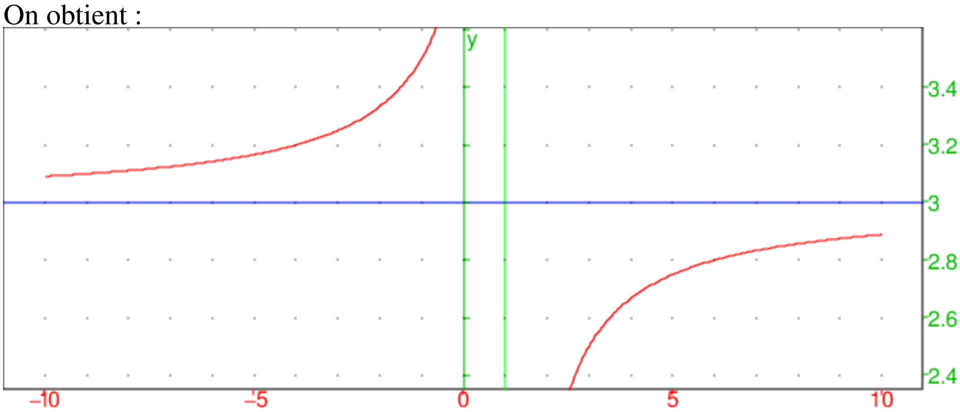
2. Résoudre les inéquations :

- $3(x-1)+7(3x-2)<6(x+1)$
  On tape :
  `d1:=droite(y=3*(x-1)+7*(3x-2),affichage=rouge);`
  `d2:=droite(y=-6*(x+1),affichage=bleu)`
  On obtient :



On tape :
```
abscisse(inter(d1,d2))
```
On obtient : `[23/18]`
Les points de la droite bleue sont au dessus des points de la droite rouge lorsque $x > 23/18$.

- $\dfrac{3x-4}{x-1} >= 3$
  On tape :
```
plotfunc((3x-4)/(x-1),x,affichage=rouge),droite(y=3,affichage=
droite(x=1,affichage=vert)
```
On obtient :



Les points de la la courbe rouge sont au dessus des points de la droite bleue lorsque $x < 1$.

Chapitre 5

Systèmes d'équations

5.1 Résoudre un système par substitution

Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$$

La 1-ière équation donne :
$y=\dfrac{2x-8}{5}$
Donc le système est équivalent à : $\left\{\begin{array}{rrl} & y & =\dfrac{2x-8}{5} \\ 3x+ & 4y & =2 \end{array}\right.$
En substituant y dans la deuxième équation, le système est équivalent à :
$\left\{\begin{array}{rrl} & y & =\dfrac{2x-8}{5} \\ 3x+ & 4\dfrac{2x-8}{5} & =2 \end{array}\right.$
La 2-ième équation donne :
$15x+8x-32=10$
$23x=42$
$x=\dfrac{42}{23}$
En reportant cette valeur dans la 1-ière équation on obtient :
$y=\dfrac{2\frac{42}{23}-8}{5}$
$y=\dfrac{84-8*23}{23*5}=-\dfrac{4*25}{23*5}-\dfrac{20}{23}$
Le système :
$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$ admet donc comme solution : $x=\dfrac{42}{23}, y=-\dfrac{20}{23}$

Avec `Xcas`, on tape :
```
linsolve([2x-5y=8,3x+4y=2],[x,y])
```
ou bien
```
resoudre_systeme_lineaire([2x-5y=8,3x+4y=2],[x,y])
```
On obtient :
```
[42/23,-20/23]
```

5.2 Résoudre un système par combinaison

La méthode par combinaison consiste à éliminer une variable en remplacant une équation par une combinaison linéaire des 2 équations. Par exemple, on élimine x dans la 2-ième équation en faisant une combinaison des 2 équations ce qui donne une nouvelle 2-ième équation : le système est alors équivalent au système composé de la 1-ière équation et cette nouvelle équation.
Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$$

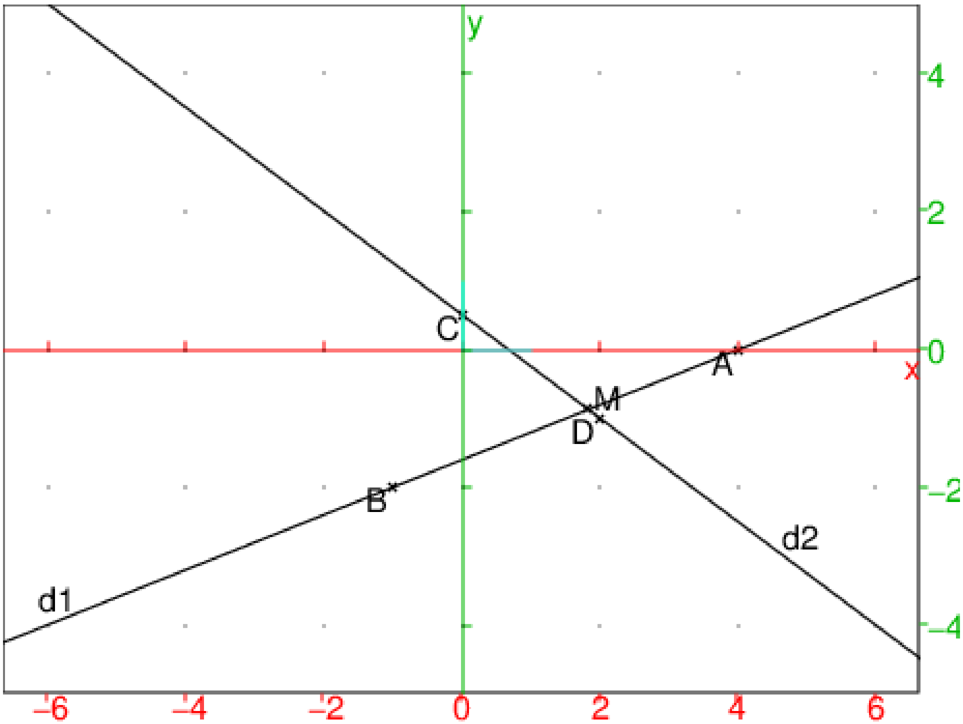
On remplace la deuxième équation par la combinaison :
3*1-ière équation -2*2-ième équation que l'on note :
$\left\{\begin{array}{ll} 2x-5y=8 & \mid *3 \\ 3x+4y=2 & \mid *-2 \end{array}\right.$
Donc le système est équivalent à :
$\left\{\begin{array}{lrr} 2x & -5y= & 8 \\ & -23y= & 20 \end{array}\right.$
Donc $y=-\dfrac{20}{23}$
En reportant cette valeur dans la première équation on obtient :
$2x+5\dfrac{20}{23}=8$
$46x+5*20=8*23$
$46x=8*23-100=84$
$x=\dfrac{24}{23}$
Le système :
$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$
admet donc comme solution : $x=\dfrac{42}{23}, y=-\dfrac{20}{30}$

5.3 Résoudre un système graphiquement

Résoudre graphiquement le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$$

Chacune de ces équations prises séparement est l'équation d'une droite et admet une infinité de solutions qui sont les coordonnées des points situés sur cette droite.
Ce système a donc comme solution les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation :
$2x-5y=8$ et $3x+4y=2$.
Traçons ces 2 droites :
La droite d'équation $2x-5y=8$ passe par les points :
A de coordonnées $x=4, y=0$ et B de coordonnées $x=-1, y=-2$
La droite d'équation $3x+4y=2$ passe par les points :
C de coordonnées $x=0, y=1/2$ et D de coordonnées $x=2, y=-1$



Avec Xcas, on tape dans un niveau de géométrie $2d$:

```
d1:=droite(2x-5y=8)
d2:=droite(3x+4y=2)
```

On peut placer les points A, B, C, D en tapant :

```
A:=point(4)
B:=point(-1,-2)
C:=point(0,1/2)
D:=point(2,-1)
```

Le point d'intersection de d_1 et d_2 est obtenu en tapant :

```
M:=inter_droite(d1,d2)
coordonnees(M)
```

On obtient :

```
[42/23,-20/23]
```

On remarquera qu'en faisant juste le dessin sur une feuille de papier, on ne pourra pas en général, déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point d'intersection mais seulement leurs valeurs approchées.

Exercice

Dans un repère orthonormé (O, x, y) représenter graphiquement les droites d_1 et d_2 qui ont comme équation respective $2x + y = 5$ et $2x - y = 3$

Soit A le point d'intersection de d_1 et d_2.

Déterminer graphiquement les coordonnées de A point d'intersection et vérifier le résultat obtenu

Déterminer l'équation de la droite OA.

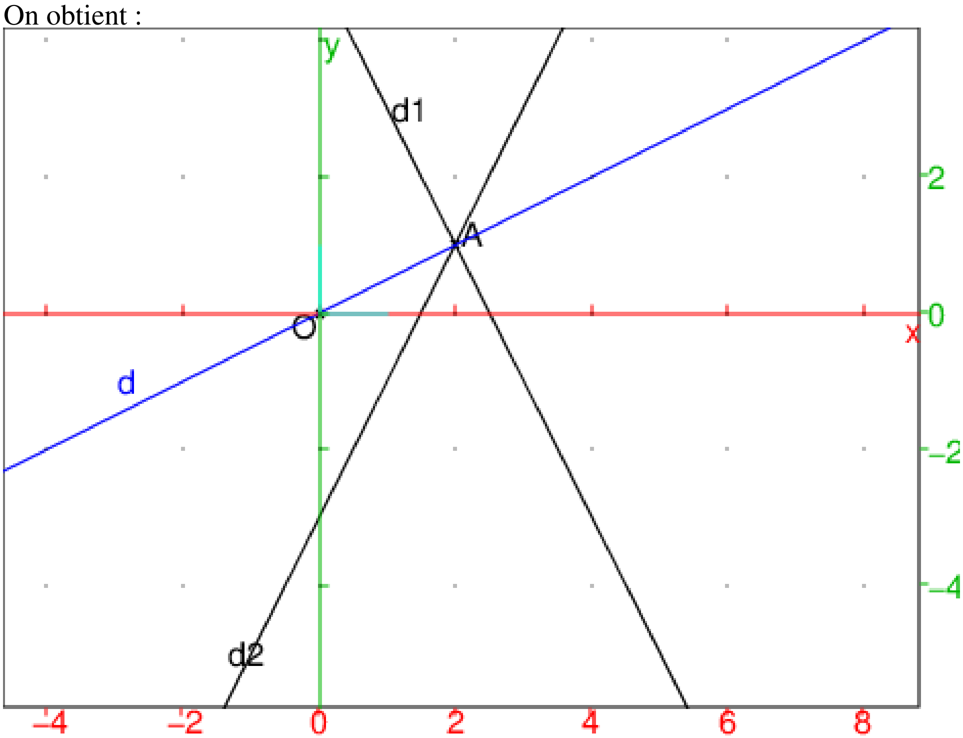
Solution avec Xcas

On tape dans un niveau de géométrie $2d$:

```
O:=point(0); d1:=droite(2x+y=5);
d2:=droite(2x-y=3);
A:=inter_droite(d1,d2)
```

`d:=droite(0,A,affichage=4);`

On obtient :



On tape :

`coordonnees(A);`

On obtient : `[2,1]`

et on vérifie que l'on a bien :

$2 * 2 + 1 = 5$ et $2 * 2 - 1 = 3$

On tape :

`equation(d);`

On obtient : `y=x/2`

On remarque que la somme des 2 équations élimine y. On va donc remplacer la 2-ième équation par la somme des 2 équations et le système est équivalent à :

$2x + y = 5$ et $4x = 8$ équivalent à

$x = 2$ et $4 + y = 5$ équivalent à

$x = 2$ et $y = 1$

On tape avec `Xcas` :

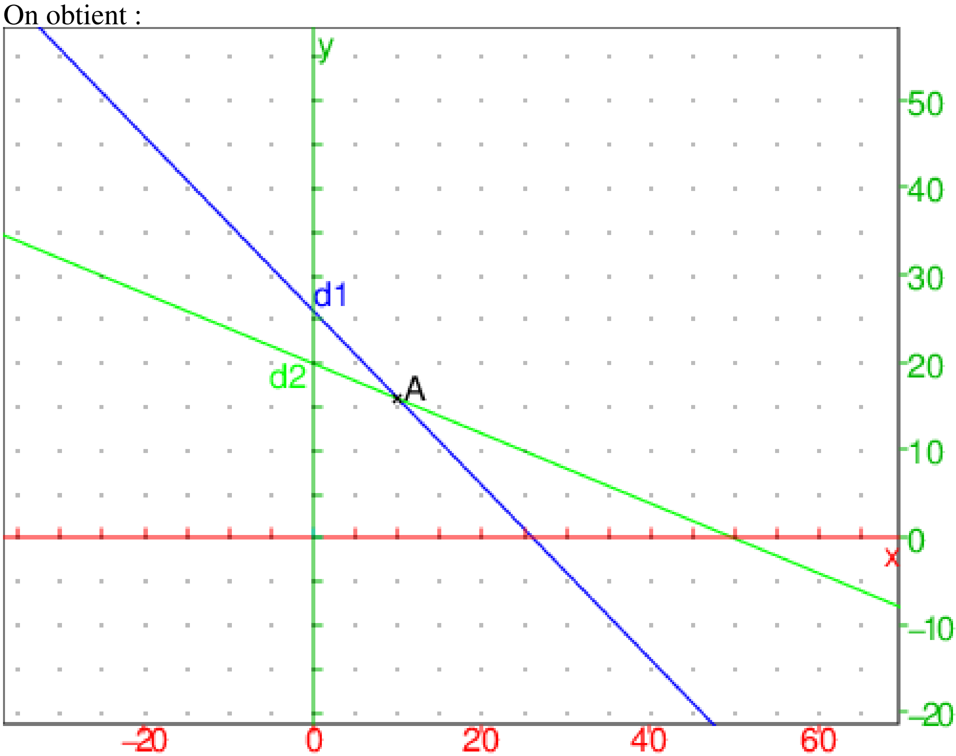
`resoudre_systeme_lineaire([2x+y=5,4+y=5],[x,y])`

On obtient : `[2,1]`

5.4 Exercices se ramenant à la résolution d'un système

1. On paye une somme de 100 euros avec des x pièces de 2 euros et y billets de 5 euros. Le nombre de pièces et de billet est 26. Calculer le nombre de pièces et le nombre de billets. On donnera une solution à l'aide d'une méthode graphique, d'une méthode algébrique et d'une méthode arithmétique. Le problème est-il possible si le nombre de pièces et le nombre de billets est un nombre entier m quelconque.

Méthode graphique avec `Xcas`
On tape :
```
d1:=droite(x+y=26,affichage=bleu)
d2:=droite(2x+5y=100):;affichage(d2,vert)
legende(20*i,"d2",quadrant3,vert)
A:=inter_droite(d1,d2)
```
On obtient :



On tape :
```
coordonnees(A)
```
On obtient :
```
[10,16]
```
Donc il y a 10 pièces de 2 euros et 16 billets de 5 euros.
Méthode algébrique avec `Xcas`
On tape :
```
linsolve([x+y=26,2x+5y=100],[x,y])
```
On obtient :
```
[10,16]
```
Donc il y a 10 pièces de 2 euros et 16 billets de 5 euros.
Méthode arithmétique
On cherche $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ tel que :
$x + y = 26$ et $2x + 5y = 100$
Pour résoudre $2x + 5y = 100$ avec des entiers relatifs on cherche une solution particulière de $2x + 5y = 100$ et on ajoute la solution générale de $2x + 5y = 0$ qui est $x = -5k, y = 2k$.
Pour avoir une solution particulière de $2x + 5y = 100$, avec des entiers de $\mathbb{Z}$, avec `Xcas`, on tape :
```
abcuv(2,5,100)
```
On obtient : `[50,0]`

Donc $x = 50 - 5k, y = 2k.$
On veut que $x + y = 26$ donc $50 - 3k = 26$ soit $k = 8$ donc :
$x = 50 - 5 * 8 = 40$ et $y = 2 * 8 = 16$
Soit le systÃÍme $x + y = m$ **et** $2x + 5y = 100$
On a $20 \leq m \leq 50$ car :
20 est la valeur minimum de m qui correspond au nombre de billets de 5 euros qu'il faut pour payer 100 euros
50 est la valeur maximum de m qui correspond au nombre de pièces de 2 euros qu'il faut pour payer 100 euros
Méthode graphique avec `Xcas`, on tape :

```
assume(m=[0,20,50,1]) d1:=droite(x+y=m,affichage=bleu)
d2:=droite(2x+5y=100):;affichage(d2,vert)
legende(20*i,"d2",quadrant3,vert)
A:=inter_droite(d1,d2)
evalf(coordonnees(A))
```

Il y a alors un curseur m qui va de 1 en 1 de 20 jusque 50.
On peut suivre les valeur de la dernière commande est voir que pour
$m = 23$ les coordonnées de A sont (5,18),
$m = 26$ les coordonnées de A sont (5,16),
$m = 29$ les coordonnées de A sont (15,14), etc..
On peut donc conjecturer que $20 - m$ doit être un multiple de 3.
Méthode algébrique
Avec `Xcas`, on tape :

```
linsolve([x+y=m,2x+5y=100],[x,y])
```

On obtient :

```
[5/3*m-100/3,-2/3*m+100/3]
```

On tape :

```
factoriser([5/3*m-100/3,-2/3*m+100/3])
```

On obtient :

```
[5*(m-20)/3,-2*(m-50)/3]
```

les nombres x et y doivent être des entiers naturels donc m doit satisfaire aux conditions :
$m - 20 \geq 0, 50 - m \leq 0$ et
$m - 20$ et $m - 50$ doivent êtr e des multiples de 3.
Donc $20 \leq m \leq 50$, et $m = 20 + 3 * k = 50 - 3 * p$ ($k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$)
soit $3(k + p) = 30$ soit $k + p = 10$ ce qui fait que l'on doit avoir :
$m = 20 + 3k$ pour $k = 0..10$.
Avec `Xcas`, on tape :

```
M:=(20+3k)$(k=0..10)
```

On obtient les valeurs de m possibles :

```
20,23,26,29,32,35,38,41,44,47,50
```

On tape :

```
SM:=([5*(M[k]-20)/3,-2*(M[k]-50)/3,20+3k])$(k=0..10)
```

On obtient les solutions $SM[k]$ et les valeurs de $m = M[k]$ correspondantes :

```
[0,20,20],[5,18,23],[10,16,26],[15,14,29],[20,12,32],
[25,10,35], [30,8,38],[35,6,41],[40,4,44],[45,2,47],
[50,0,50][0,20],[5,18],[10,16],[15,14],[20,12],
```

`[25,10],[30,8],[35,6],[40,4],[45,2],[50,0]`
Méthode arithmétique
Si $2x + 5y = 100$ avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ c'est que :
x est divisible par 5 puisque $2x = 100 - 5y = 5(20 - y)$ donc $x = 5k$
y est divisible par 2 puisque $5y = 100 - 2x = 2(50 - x)$ donc $y = 2p$
Le système devient :
$x + y = 5k + 2p = m$ et $2x + 5y = 10k + 10p = 100$ soit
$5k + 2p = m$ et $p = 10 - k$
$5k + 20 - 2k = m$ et $p = 10 - k$
Donc $m = 20 + 3k = 50 - 3p$

2. Trouver les 2 facteurs d'un produit sachant que l'un est le triple de l'autre et que si on augmentait chacun de 4 le produit augmenterait de 224.
   Solution
   Soient x et y les 2 facteurs on a :
   $x = 3y$ et $(x + 4)(y + 4) = xy + 224$
   Puisque $(x + 4)(y + 4) = xy + 4(x + y + 4)$, il faut résoudre le système :
   $x = 3y$ et $x + y = 224/4 - 4 = 56 - 4 = 52$ ce qui revient à résoudre le système :
   $x = 3y$ et $3y + y = 52$
   Donc $y = 13$ et $x = 39$ Vérifions :
   $xy = 13 * 39 = 507$ et $17 * 43 = 731$ et on a bien $731 - 507 = 224$
   Avec `Xcas`, on tape :
   `linsolve([x=3y,(x+4)*(y+4)=x*y+224],[x,y])`
   On obtient :
   `[39,13]`
3. J'ai trois fois l'age de mon fils et quand mon fils aura l'age que j'ai nous aurons ensemble 104 ans.
   Quel est mon age et quel est celui de mon fils ?
   Solution
   Soient x mon age et y celui de mon fils. On a :
   $x = 3y$ et mon fils aura l'age que j'ai dans $x - y$ ans Dans $x - y$ ans j'aurai $x + x - y = 2x - y$ ans et mon fils aura x ans. Ensemble on aura donc $2x - y + x = 104$
   Il faut donc résoudre le système :
   $x = 3y$ et $3x - y = 104$ ce qui revient à résoudre le système :
   $x = 3y$ et $9y - y = 8y = 104$
   Donc $y = 104/8 = 13$ et $x = 39$.
   Vérifions :
   Dans $39 - 13 = 26$ ans, j'aurai $39 + 26 = 65$ ans et mon fils aura $13 + 26 = 39$ ans. Ensemble on aura bien $65 + 39 = 104$ ans
   Avec `Xcas`, on tape :
   `linsolve([x=3y,2x-y+x=104],[x,y])`
   On obtient :
   `[39,13]`

Chapitre 6

Mise en équation

6.1 Les oeufs

Une fermière va au marché vendre des oeufs dans un panier.
Elle les vend ses oeufs à 60 centimes l'un.
En enlevant ses oeufs du panier elle s'aperçoit que quatre sont cassés.
Elle décide alors de vendre ses oeufs à 65 centimes l'un pour que sa recette soit la même.
Combien le panier contenait-il d'oeufs au départ ?
Solution
Soit x le nombre d'oeufs dans le panier au départ. La recette sera donc de en euros de $60 * x$
À l'arrivée le nombre d'oeufs n'est plus que de $x - 4$.
La recette sera donc de en euros de $0.7 * (x - 4)$
La fermière a calculé le nouveau prix pour que les 2 recettes soient les mêmes donc on a :
$60 * x = 65 * (x - 4)$ donc $5x = 65 * 4$ soit $x = 13 * 4 = 52$.
Avec Xcas
On tape :
```
solve(60*x=65*(x-5))
```
On obtient :
```
[52]
```

6.2 Les courses

Pour faire ses courses Albert part avec son sac et son porte-monnaie.
Il achète de la viande chez le boucher et dépense les 2/5 de l'argent contenu dans son porte-monnaie.
Puis, il achète des fruits et des légumes au marché et dépense le quart de se qu'il lui reste dans son porte-monnaie.
Il achète ensuite du pain et des gateaux chez le boulanger pour 13.50 euros.
Il lui reste alors 9,90 euros dans son porte-monnaie.
Quelle somme avait-il au départ ? Combien a-t-il dépensé chez le boucher ? Combien a-t-il dépensé au marché ? **Solution**
Soit S la somme en euros qu'il avait au départ.

Chez le boucher il dépense $2 * S/5$ euros et il lui reste :
$S - 2 * S/5 = 3 * S/5$ euros.
Au marché il dépense $3 * S/5 * (1/4) = 3 * S/20$ euros.
Chez le boulanger il dépense 13.50 euros.
Il lui reste alors 9,90 euros
Donc on a :
$S = 2 * S/5 + 3 * S/20 + 13.50 + 9.90$
Ou encore :
$S = S(8/20 + 3/20) + 23.40$
$S * (1 - 11/20) = 23.40$
$S * 9/20) = 23.40$
Donc $S = 20 * 23.40/9 = 20 * 2.6 = 52$ euros.
Albert avait donc 52 euros dans son porte-monnaie au départ.
Il a depensé $52 * 2/5 = 20.80$ euros chez le boucher.
Il lui reste donc 31.20 euros.
Au marché il dépense $31.20/4 = 7.80$ euros
Chez le boulanger il dépense 13.50 euros.
Il lui reste alors 9,90 euros
Il dépense en tout :
$20.80 + 7.80 + 13.50 = 42.1$ euros
Il lui reste donc bien $52 - 42.10 = 9.90$ euros.
Avec Xcas
On tape :
`solve(S-2*S/5-(S-2*S/5)/4-13.50=9.90,S)`
On obtient :
`52.0`

6.3 Les aiguilles d'une horloge

À quelle heure les aiguilles d'une horloge sont-elles l'une sur l'autre pour la première fois après 12 h ?
À quelle heure les aiguilles d'une horloge sont-elles perpendiculaires pour la première fois après 3h ?
À quelle heure les aiguilles d'une horloge sont-elles dans le prolongement l'une de l'autre pour la première fois après 6h ?

Solution
Soit x le temps écoulé en heures entre midi et l'instant cherché.
Entre midi et l'instant cherché la grande aiguille a fait un tour de plus que la petite aiguille. En une heure la grande aiguille fait 1 tour et la petite aiguille fait $1/12$ième de tour.
Donc en x heures la grande aiguille fait x tours et la petite aiguille fait $x/12$ième de tour.
On a donc à résoudre :
$x = 1 + x/12$
ou encore :
$11x = 12$ soit

$x = 12/11$ heures.
Avec Xcas
On tape :
`solve(x=1+x/12)`
On obtient :
`[12/11]`
Pour transformer 12/11 heures, en heures minutes et secondes soit :

— On fait des divisions euclidiennes en utilisant `iquorem`.
  On tape :
  `iquorem(12,11)`
  On obtient :
  `[1,1]`
  ce qui signifie que $12 = 1 * 11 + 1$ i.e. que
  12/11 h=1 h+(1/11) h
  1/11 h=60*1/11 mn
  On tape :
  `iquorem(60,11)`
  On obtient :
  `[5,5]`
  ce qui signifie que $60 = 5 * 11 + 5$ i.e. que
  60/11 mn=5 mn+(5/11) mn
  5/11 mn=60*5/11 s=300/11 s
  On tape :
  `iquorem(300,11)`
  On obtient :
  `[27,3]`
  ce qui signifie que $300 = 27 * 11 + 3$ i.e. que
  300/11 s=27 s+(3/11) s
  On tape :
  `evalf(3/11)`
  On obtient :
  `0.272727272727]`
  Donc le temps écoulé depuis 12h est de 1 h 5 mn 27+3/11 s donc il sera 1 h 5 mn 27+3/11 s $\simeq$ 1 h 5 mn 27.272727272727 s

— On fait des conversions d'unités en utilisant `convert`.
  On tape :
  `propfrac(12/11)`
  On obtient :
  `1+1/11`
  On tape :
  `convert((1/11)_h,_mn)`
  On obtient :
  `5.45454545455_mn`
  On tape :
  `convert(0.45454545455_mn,_s)`
  On obtient :
  `27.272727273_s`
  On remarquera les erreurs d'arrondis.

Donc il sera 1 h 5 mn 27.272727273 s à 10^{-10} prés quand les aiguilles d'une horloge seront l'une sur l'autre pour la première fois après 12 h.

— On fait un petit programme pour convertir les heures en heures minutes et secondes.
H est le nombre d'heures à convertir, MN est le nombre de minutes à convertir et S est le nombre de secondes à convertir, h, mn et s contiennent les valeurs cherchées.
On tape :

```
conversion(H):={
local h,MN,mn,S,s;
h:=floor(H);
MN:=60*(H-h);
mn:=floor(MN);
S:=60*(MN-mn);
s:=floor(S);
retourne h+" h "+mn+" mn "+s+" s "+(S-s)+" s ";
}:;
```

ou bien :
On tape :

```
conversion1(H):={
local h,MN,mn,S,s,fs,rs;
S:=convert((H) _h,_s);
fs:=floor(S);
rs:=S-fs;
s:=normal(irem(fs,60));
MN:=convert((fs-s),_mn);
mn:=normal(irem(float2rational(MN),60));
h:=float2rational((convert(MN-mn,_h)));
retourne h,mn,s,rs;
}:;

conversion2(H):={
local h,MN,mn,S,s,fs,rs;
S:=H*3600;
fs:=floor(S);
rs:=S-fs;
s:=irem(fs,60);
MN:=iquo(fs-s,60);
mn:=irem(MN,60);
h:=iquo((MN-mn),60);
retourne h+" h "+mn+" mn "+s+" s "+rs+" s ";
h,mn,s,rs;
}:;
```

On a encore la même équation $x = 1 + x/12$, si x est le temps écoulé en heures entre 3 h et l'instant cherché, la grande aiguille a fait un tour de plus que la petite aiguille.
Donc il sera 4 h 5 mn 27+3/11 s quand les aiguilles d'une horloge seront dans le

prolongement l'une de l'autre pour la première fois après 3h.

On a encore la même équation $x = 1 + x/12$, si x est le temps écoulé en heures entre 6 h et l'instant cherché, la grande aiguille a fait un tour de plus que la petite aiguille.
Donc il sera 7 h 5 mn 27+3/11 s quand les aiguilles d'une horloge seront dans le prolongement l'une de l'autre pour la première fois après 6h.

6.4 Des moutons

Un berger dit : "Si j'avais 14 moutons de plus j'en aurais 2 fois plus que si j'en avais 51 de moins". Combien ce berger a-t-il de moutons ? **Solution**
Soit x le nombre de moutons. L'énoncé dit que :
$x + 14 = 2 * (x - 51)$
On tape :
`solve(x+14=2*(x-51))`
On obtient :
`[116]`
Le nombre cherché est donc 116 et on a bien :
116+14=130=2*(116-51)=2*65. 4+9=9*9=81.

6.5 Un nombre

Un nombre est formé de 2 chiffres dont la somme est 9. Si on permute ces 2 chiffres on obtient un nombre qui surpasse de 9 le quadruple du premier.
Quel est ce nombre ?
Solution
Soit a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités du nombre cherché.
Ce nombre est donc égal à $10 * a + b$ et le nombre obtenu en permutant a et b est donc égal à $10 * b + a$
L'enoncé dit que :
$a + b = 9$
$10 * b + a = 4 * (10 * a + b) + 9$ **Avec Xcas**
On tape :
`linsolve([a+b=9,10*b+a=4*(10*a+b)+9],[a,b])`
On obtient :
`[1,8]`
Le nombre cherché est donc 18 et on a bient : 18*4+9=9*9=81.

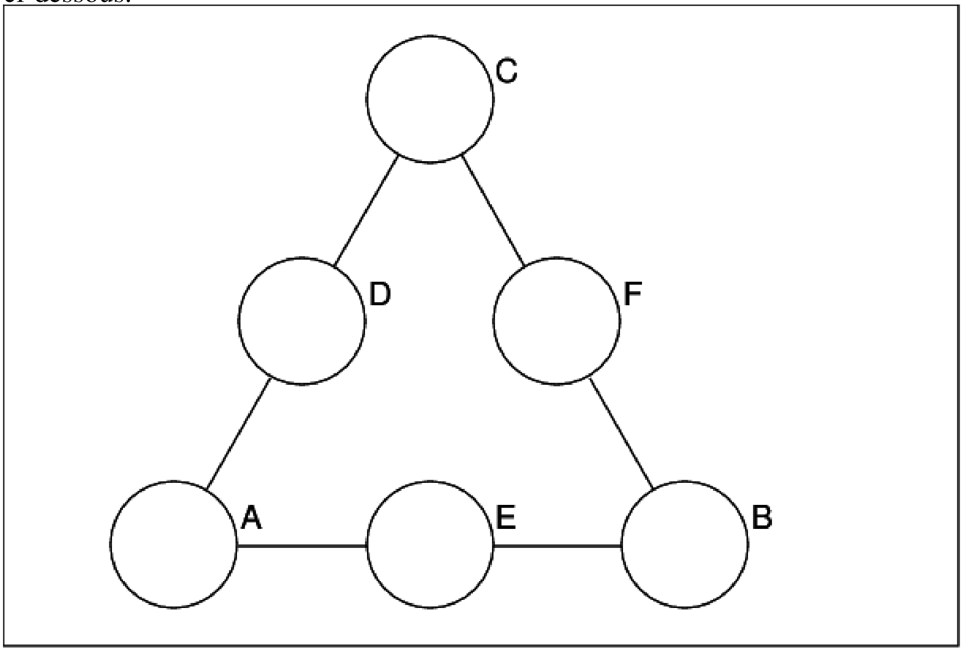
6.6 Deux facteurs

Trouver les 2 facteurs d'un produit sachant que l'un est le triple de l'autre et que si l'on augmentait chacun de 4 le produit augmenterait de 224. **Solution**
Soit a le plus petit facteur et b l'autre facteur.
L'énoncé dit que :
$b = 3 * a$ et
$(a + 4) * (b + 4) = a * b + 224$ **Avec Xcas**

On tape :
`linsolve([b=3*a,(a+4)*(b+4)=a*b+224],[a,b])`
On obtient :
`[13,39]`
On a bien 39=3*13 et
(39+4)*(13+4)=39*13+4*52+16=39*13+208+16=39*13++224

6.7 Pour chercher

Les entiers de 1 à 6 sont placés chacun une et une seule fois dans les cescles ci-dessous.



On suppose que :
$A+E+B=B+F+C=C+D+A=S$ Quelles sont les valeurs possibles de S ? Pour chaque valeur de S trouver toutes les solutions.
Solution On calcule :
1+2+3+4+5+6=6*7/2=21
$2(A+B+C)+D+E+F=3S$ $A+B+C+D+E+F=21$ Donc :
$s_1=A+B+C=3S-21=3(S-7)$
On doit avoir :
$6=1+2+3 \leq s_1=A+B+C \leq 4+5+6=15$ et $A+B+C$ divisible par 3 et par $S-7$ $A+B+C+D+E+F=21$ est divisible par 3 donc
$s_2=D+E+F=21-s_1$ est aussi divisible par 3.
Les valeurs possibles de (s_1,s_2) sont :
$(6,15),(9,12),(12,9),(15,6)$
Les valeurs possibles de $S=(2s_1+s_2)/3$ sont donc :
$(2*6+15)/3=9,(2*9+12)/3=10,(2*12+9)=11,(2*15+6)=12$

Lorqu'on a trouvé une solution on peut en déduire 5 autres solutions :
par permutations circulaires dans le sens direct puis par symétrie AEBFCD->CDAEBF->BFCDAE

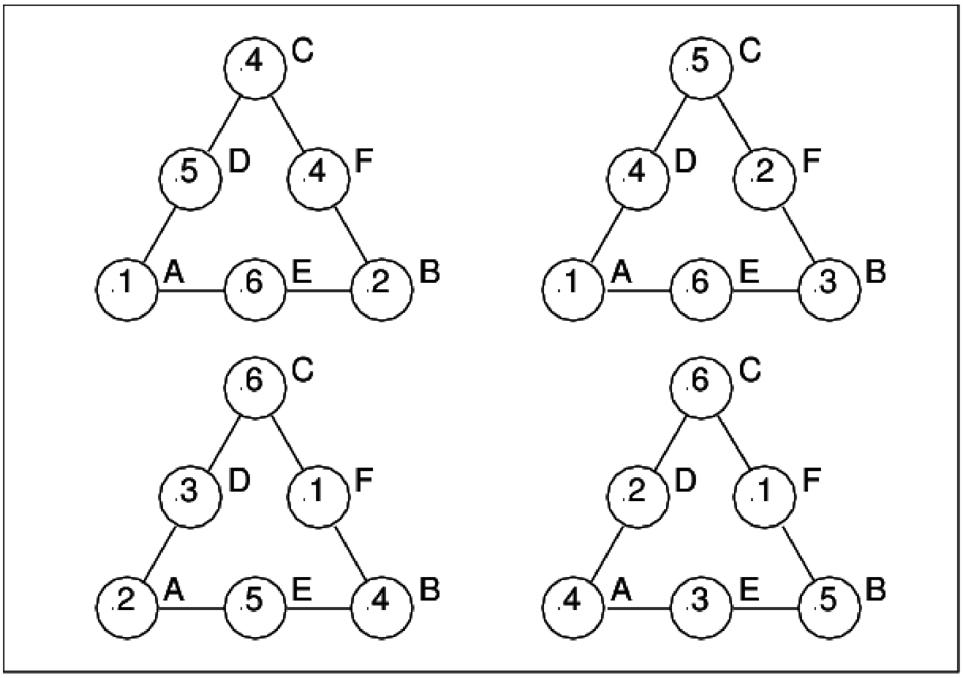
AECDBF->BFAECD->CDBFAE
On considèra dans la suite ces 6 soluitons comme étant égales.
Cherchons les solutions possibles pour $S = 9$.
Si $S = 9$ on a $s_1 = 6$ et $s_2 = 15$ donc :
$A + B + C = 1 + 2 + 3 = 6$ et $E + F + D = 15$
Si $A = 1$ $B = 2$ $C = 3$ alors :
$A + E + B = 3 + E = 9$ donc $E = 6$
$B + F + C = 5 + F = 9$ donc $F = 4$
$C + D + A = 4 + D = 9$ donc $D = 5$
Pour $S = 9$ on a comme solution $(A, B, C, D, E, F) = (1, 2, 3, 5, 6, 4)$.

Cherchons les solutions possibles pour $S = 10$.
Si $S = 10$ on a $s_1 = 9$ et $s_2 = 12$ donc :
$A + B + C = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4 = 9$ et $E + F + D = 12$
Si $A = 1$ $B = 2$ $C = 6$ alors :
$A + E + B = 10 = 3 + E$ donc $E = 7$ impossible
Si $A = 1$ $B = 3$ $C = 5$ alors :
$A + E + B = 4 + E = 10$ donc $E = 6$
$B + F + C = 8 + F = 10$ donc $F = 2$
$C + D + A = 6 + D = 10$ donc $D = 4$
Si $A = 2$ $B = 3$ $C = 4$ alors :
$A + E + B = 5 + E = 10$ donc $E = 5$
$B + F + C = 7 + F = 9$ donc $F = 2 = A$ impossible
Pour $S = 10$ on a comme solution $(A, B, C, D, E, F) = (1, 3, 5, 4, 6, 2)$.

Cherchons les solutions possibles pour $S = 11$.
Si $S = 11$ on a $s_1 = 12$ et $s_2 = 9$ donc :
$A + B + C = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5 = 12$ et $E + F + D = 9$
Si $A = 1$ $B = 5$ $C = 6$ alors $A + E + B = 6 + E = 11$ donc $E = 5 = B$ impossible
Si $A = 2$ $B = 4$ $C = 6$ alors :
$A + E + B = 6 + E = 11$ donc $E = 5$ $B + F + C = 10 + F = 11$ donc $F = 1$
$C + D + A = 8 + D = 11$ donc $D = 3$ Si $A = 3$ $B = 4$ $C = 5$ alors :
$A + E + B = 7 + E = 12$ donc $E = 5 = C$ impossible
Pour $S = 11$ on a comme solution $(A, B, C, D, E, F) = (2, 4, 6, 3, 5, 1)$.

Cherchons les solutions possibles pour $S = 12$.
Si $S = 12$ on a $s_1 = 15$ et $s_2 = 6$ donc :
$A + B + C = 4 + 5 + 6 = 15$ et $E + F + D = 6$
Si $A = 1$ $B = 5$ $C = 6$ alors :
$A + E + B = 6 + E = 11$ donc $E = 5 = B$ impossible
Si $A = 4$ $B = 5$ $C = 6$ alors :
$A + E + B = 9 + E = 12$ donc $E = 3$
$B + F + C = 11 + F = 12$ donc $F = 1$
$C + D + A = 10 + D = 12$ donc $D = 2$
Pour $S = 12$ on a comme solution $(A, B, C, D, E, F) = (4, 5, 6, 2, 3, 1)$.

Il y a donc 4 solutions différentes :



Pour faire le dessin on tape pour `p:=0` (resp 14,-10*i,14-10*i), en modifiant la valeur des légendes :

```
A:=cercle(p,1);
B:=cercle(8+p,1);
C:=cercle(4+p+i*sqrt(3)*4,1);
D:=cercle(2+i*sqrt(3)*2+p,1);
E:=cercle(4+p,1);
F:=cercle(6+i*sqrt(3)*2+p,1);
segment(1+p,3+p);
segment(5+p,7+p);
segment(1/2+i*sqrt(3)/2+p,3/2+i*sqrt(3)*3/2+p);
segment(15/2+i*sqrt(3)/2+p,13/2+i*sqrt(3)*3/2+p);
segment(11/2+i*sqrt(3)*5/2+p,9/2+i*sqrt(3)*7/2+p);
segment(5/2+i*sqrt(3)*5/2+p,7/2+i*sqrt(3)*7/2+p);
legende(-0.5+p,"1");
legende(7.5+p,"2");
legende(3.5+p+i*sqrt(3)*4,"3");
legende(1.5+p+i*sqrt(3)*2,"5");
legende(3.5+p,"6");
legende(5.5+p+i*sqrt(3)*2,"4");
```

Chapitre 7

Notion de fonction

Il ne faut pas confondre expression et fonction. Une expression est une combinaison de nombres et de variables reliés par des opérations alors qu'une fonction associe à une variable une expression. Par exemple, `a:=x^2+2*x+1` dÃľfinit une expression et `b(x):=x^2+2*x+1` dÃľfinit une fonction. On obtient la valeur de l'expression `a` en 0, avec `subst(a,x=0)` et la valeur de la fonction `b` en 0, avec `b(0)`.

7.1 Image d'un nombre par une fonction

Soit f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cela veut dire que pour tout a dans $\mathbb{R}$ f associe le nombre $f(a)$ de $\mathbb{R}$. On dit que $f(a)$ estv l'image de qa par f.

Exemple

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Trouver l'image des nombres -2,-1,0,1,2 Avec `Xcas`, on tape :

```
f(x):=x^3-3x+2
f(k)$(k=-2..2)
```

On obtient les valeurs de $f(-1), f(0), f(1), f(2)$:

```
0,4,2,0,4
```

Factoriser $f(x)$.

$f(x)$ s'annule pour $x = 1$ et pour $x = -2$ donc $(x - 1)$ et $(x + 2)$ sont des facteurs de $f(x)$.

Donc $f(x) = (x - 1) * (ax^2 + bx + c) = x^3 - 3x + 2$

On en déduit par identification que $a = 1$, $c = -2$ et $b - a = 0$ donc :

$f(x) = (x - 1)(x^2 + x - 2)$

$x^2 + x - 2$ s'annule lorsque $x = -2$ donc ;

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ d'où :

$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

Avec `Xcas`, on tape :

```
factoriser(f(x))
```

On obtient :

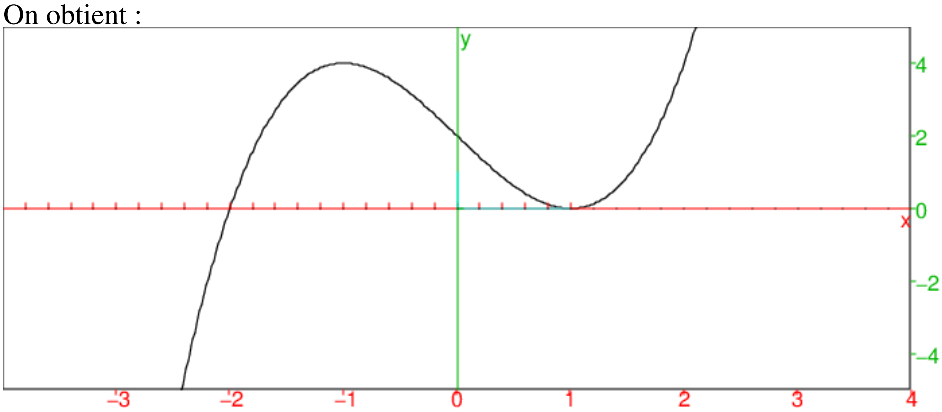
```
(x-1)^2*(x+2)
```

7.2 Antécédent(s) d'un nombre par une fonction

Les ou l'antécédent(s) d'un nombre b par une fonction f sont les nombres a tels que $f(a) = b$.
Exemple
Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
Trouver les antécédent(s) des nombres 0,2,4.
Avec `Xcas`, on tape :
`solve(f(x)=0,x)`
On obtient :
`[-2,1]`
On tape :
`solve(f(x)=2,x)`
On obtient :
`[-(sqrt(3)),0,sqrt(3)]`
On tape :
`resoudre(f(x)=4,x)`
On obtient :
`[-1,2]`

7.3 Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction est l'ensemble des points de coordonnées $x, f(x)$ dans un repère Oxy
Exemple
Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
Tracer le graphe de f sur l'intervalle [-3,3].
On tape :
`plotfunc(f(x),x=-3..3))`
On obtient :



Chapitre 8

Fonctions linéaires et affines

Une fonction linéaire réelle est une fonction de la forme $f(x) = ax$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$
Une fonction affine réelle est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ avec $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

8.1 Représentation d'une fonction linéaire

Soit un repère orthonormé Oxy.
La représentation graphique d'une fonction linéaire $f(x) = ax$ est une droite passant par l'origine O du repère et qui a comme de pente a. On dit que cette droite a pour équation $y = ax$
Avec `Xcas`, on ouvre un niveau de géométrie 2d (Alt+g).
On clique sur `Edit` de ce niveau et on choisit `Ajouter paramètre`.
Une boite de dialogue préremplie s'ouvre : on valide avec `OK` et on obtient au niveau 1 comme ligne de commande :
`assume(a=[0,-5,5,0.1])`
cela provoque la mise en place d'un curseur (sous le pavé situé à droite de lécran graphique) qui permet de changer les valeurs de `a`.
On tape :
`droite(y=a*x)`
Puis on fait bouger le curseur.
On obtient :
`Le graphe de la droite d'équation` $y = ax$ `pour différentes valeurs de` a.

8.2 Représentation d'une fonction affine

Soit un repère orthonormé Oxy.
La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite de pente a passant par le point B de coordonnées $0, b$ On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$
Avec `Xcas`, on ouvre un niveau de géométrie 2d (Alt+g).
On clique sur `Edit` de ce niveau et on choisit `Ajouter paramètre`.

Une boite de dialogue préremplie s'ouvre : on valide avec `OK` et on obtient au niveau 1 comme ligne de commande :
`assume(a=[0,-5,5,0.1])`
cela provoque la mise en place d'un curseur (sous le pavé situé à droite de lécran graphique) qui permet de changer les valeurs de `a`.
On refait la même chose ou on recopie la commande pour avoir au niveau 2
`assume(b=[0,-5,5,0.1])`
cela provoque la mise en place d'un curseur (sous le pavé situé à droite de lécran graphique) qui permet de changer les valeurs de `b`.
On tape :
`droite(y=a*x+b)`
Puis on fait bouger le curseur `a` et le curseur `b`.
On obtient :
Le graphe de la droite d'équation $y = ax+b$ pour différentes valeurs de a et de b

8.3 Représentation graphique des solutions (x, y) de l'équation $ax + by + c = 0$

On suppose que soit $b \neq 0$ soit $b = 0$ et $a \neq 0$
Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à l'équation $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$.
Donc si $b \neq 0$, les points de coordonnées (x, y) de l'équation $ax + by + c = 0$ se trouvent sur la droite d'équation $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$.
Si $b = 0$ et $a \neq 0$, a l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à l'équation $ax + c = 0$.
Puisque $a \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à l'équation $x = -\frac{c}{a}$.
Les points de coordonnées (x, y) de l'équation $x = -\frac{c}{a}$ ont tous la même abscisse et se trouvent donc sur une droite parallèle à l'axe des y et qui a pour équation $x = -\frac{c}{a}$.
Donc l'équation d'une droite est de la forme $ax + by + c = 0$ ce qui représente à la fois les droites parallèles à l'axe des y (quand $b = 0$) et les droites d'équation de la forme $y = mx + p$ (avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ quand $b \neq 0$).

8.4 Fonction affine définie par 2 points

Soit une droite passant par le point A de coordonnées a_1, a_2 et par le point B de coordonnées b_1, b_2. On cherche l'équation de cette droite.
Si $a_1 \neq b_1$ l'équation de cette droite peut s'écrire $y = ax + b$.
On cherche alors a et b qui sont solution du système :
$a_2 = a_1 a + b$ et $b_2 = b_1 a + b$
On tape :
`droite(point(1,2),point(3,-1))`
On obtient :
le dessin de la droite passant par les points (1,2) et (3,-1)

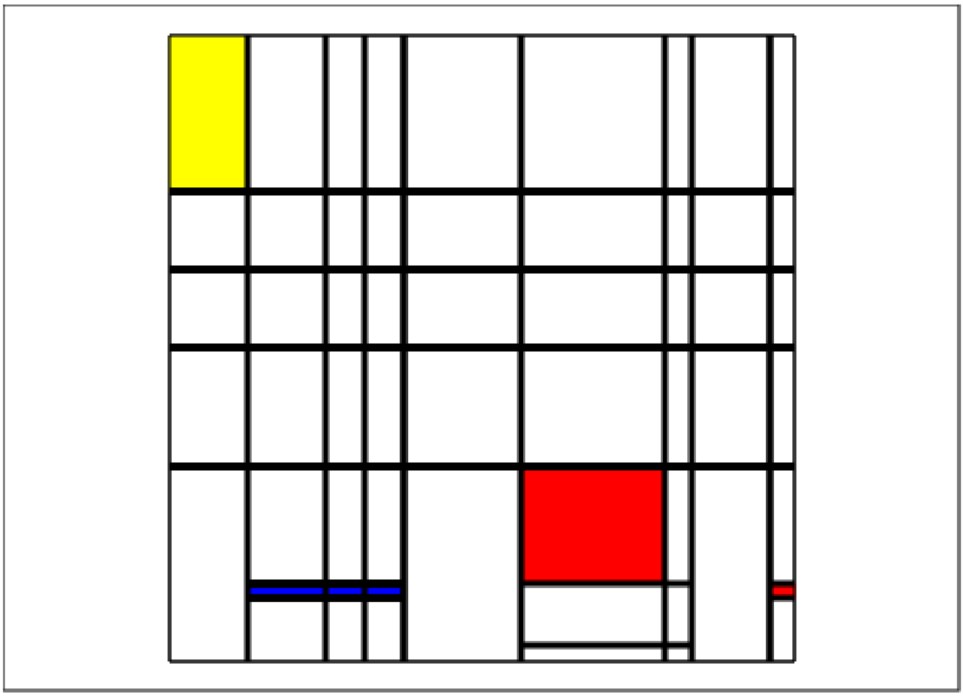
On tape :
`equation(droite(point(1,2),point(3,-1)))`
On obtient :`y=(-3*x/2+7/2)`
On tape :
`droite(point(1,2),point(3,2))`
On obtient :
`le dessin de la droite parallèle à l'axe des` y `passant par le point (0,2)`
On tape :
`equation(droite(point(1,2),point(3,2)))`
On obtient :`y=2`
On tape :
`droite(point(1,2),point(1,3))`
On obtient :
`le dessin de la droite parallèle à l'axe des` x `passant par le point (1,0)`
On tape :
`equation(droite(point(1,2),point(1,3)))`
On obtient :`x=1`
On tape :
`equation(droite(point(a1,a2),point(b1,b2)))`
On obtient :`y=((a2-b2)*1/(a1-b1)*x+(a1*b2-a2*b1)/(a1-b1))`
qui est bien sûer valable que si $a_1 \neq b_1$!

8.5 Fonction affine définie par 1 point et sa pente

On tape :
`equation(droite(point(1,2),pente=-1))`
On obtient :`y=(-x+3)`
On tape :
`equation(droite(point(0,b),pente=a))`
On obtient :`y=(a*x+b)`
On tape :
`equation(droite(point(b1,b2),pente=a))`
On obtient : `y=(-a*b1+b2+a*x)`

8.6 Reproduction d'un tableau de Piet Mondrian

Piet Mondrian est un peintre hollandais (1872 -1944). Longtemps peintre de vaches et de prairies, il a créé vers 1917 le néo-plasticisme.
Voici le tableau à reproduire :



Et voici la suite d'instructions :

```
rectangle(6i,1+6i,2,affichage=rempli+3);
rectangle(1+0.8i,3+0.8i,1/10,affichage=rempli+4);
rectangle(9/2+i,6.33+i,0.8,affichage=rempli+1);
segment(1+0.8i,3+0.8i, affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(1+1*i,3+1*i, affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(5i/2,8+5i/2,affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(3,3+8*i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(5i,8+5i,affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(6i,8+6i,affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(1,1+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(2,2+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(5/2,5/2+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(3,3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(9/2,9/2+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(19/3,19/3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(20/3,20/3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(23/3,23/3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);
segment(9/2+i,20/3+i,affichage=epaisseur_ligne_3);
segment(9/2+0.2i,20/3+0.2i,affichage=epaisseur_ligne_3);
segment(4i,8+4i,affichage=epaisseur_ligne_4);;
rectangle(23/3+0.8*i,8+0.8*i,6/10,affichage=rempli+1);
segment(23/3+0.8i,8+0.8i, affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(23/3+1*i,8+1*i, affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(23/3,23/3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
carre(0,8);
```

Chapitre 9

Proportions

9.1 Grandeurs proportionnelles

On dit que y et x sont proprotionnels si y/x est égales à une constante a qui s'appelle le coefficient de proportionnalité.
Par exemple le prix y d'un tissu est proportionnel à sa longueur x.
Exercice
Un pain de 400g est vendu dans un supermarché 0.85 euros.
Sur l'étiquette il est marqué : Prix au kilo 1.89 euros.

- Si ce prix au kilo était exact quel devrait être le prix de ce pain de 400g ?
- Si ce prix au kilo était exact quel devrait être le poids de ce pain qui coute 0.85 euros ?
- Quel est le prix réel au kilo ?

Solution

- 1 kilo=1000 grammes et 400 grammes=0.4 kilo.
  Si 1 kilo coute 1.89 euros cela veut dire que le prix y en euros est proportionnel au poids x du pain en kilo et que le coefficient de proportionnalité vaut 1.89 et on a $y = 1.89 * x$
  Donc un pain 400grammes=0.4 kilos doit couter :
  1.89*0.4=0.756 euros, soit environ 0.76 euros.
- si le prix y vaut 0.85 euros c'est que le poids x de ce pain vérifie la relation $0.85 = 1.89 * x$ donc :
  $x = 0.85/1.89 = 0.449735449735$
  Le poids de ce pain devrait être d'environ 450 grammes.
- Le prix réel au kilo est égal à y/x c'est à dire à :
  0.85/0.4=2.125 euros.

9.2 Pourcentage

9.2.1 Devis HT et TTC

Un artisan doit faire un devis qu'il estime à 500 euros HT (hors taxes).
A combien se monte le devis avec la TVA si celle-ci est de 19.6%.
Solution
Le montant de la TVA est :
500*19.6*0.01=500*0.196=98 Le montant TTC est donc :

500+98 =598 euros
ou bien directement ; le montant TTC est :
500*1.196=598 euros

Un artisan a fait un devis d'un montant de 600 euros TTC (avec la TVA).
A combien se monte le devis HT (hors taxes) si la TVA est de 19.6% ? si la TVA est de 7% ?
Solution
Si la TVA est de 19.6%, le montant HT est donc de :
600/1.196=501.67 euros.
Si la TVA est de 7%, le montant HT est donc de :
600/1.07=560.74 euros.

9.2.2 Placement sur un livret

On place sur un livret la somme de 10000 euros à un taux annuel d'intérêt de 2.5% (net d'impôts de de taxes).
Les intérêts étant versés sur le livret, quelle somme a-t-on obtenue au bout d'un an sur le livret ?
Au bout d'un an, par combien la somme initiale a-t-elle été multipliée ?
Quelle somme a-t-on obtenue au bout de 2 ans ? 5 ans ?
Solution
Au bout d'un an, on a 10000*2.5/100= 10000*0.025=250 euros d'intérêts donc au total on a sur le livret : 10000+10000*0.025=10000*1.025=10250 euros.
Au bout d'un an, la somme initiale a-t-elle été multipliée par 1.025.
Au bout de 2 ans, on a 10250*0.025=256.25 euros d'intérêts donc au total on a sur le livret : 10250+256.25=10506.25 euros ou encore
le total se monte à $10000 * 1.025 * 1.025 = 10000 * 1.025^2 = 10506.25$ euros.
Au bout de 5 ans, on a $10000 * 1.025^5 = 11314.08$ euros sur le livret.
On place sur un livret la somme de S euros à un taux annuel d'intérêt de $t * 0.01$ (net d'impôts de de taxes).
Quelle somme a-t-on obtenue au bout d'un an ?
Les intérêts étant versés sur le compte, ils rapportent aussi des intérêt.
Quelle somme a-t-on obtenue au bout de n ans ?
Au bout d'un an on a : $S * (1 + t * 0.01)$ euros
Au bout de n ans on a : $S * (1 + t * 0.01)^n$ euros

Chapitre 10

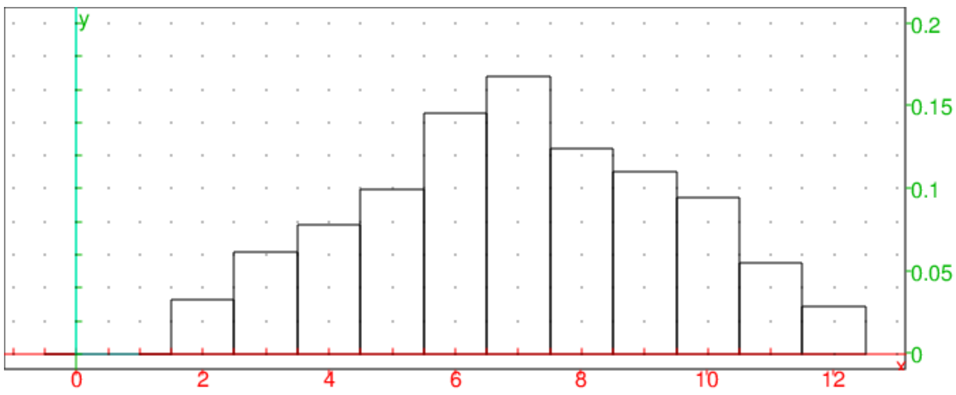
Statistiques

10.1 Série statistique donnée par une liste

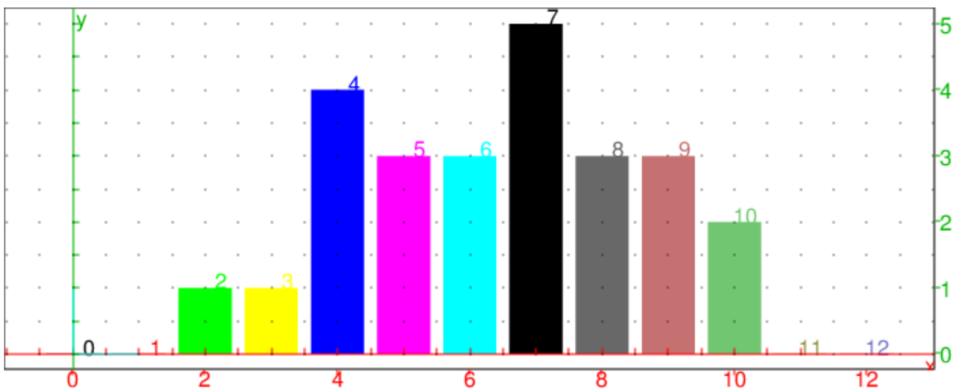
On jette 2 dés cubiques non pipés et on note la somme obtenue dans une liste R.
Simuler ce jet 25 fois de suite à l'aide de Xcas.
Calculer les fréquences de chaque issue et construire l'histogramme (i.e. le diagramme en bâtons) correspondant.
Simuler ce lancer 40 fois de suite à l'aide du tableur de Xcas.
Simuler ce lancer 1000 fois de suite à l'aide de Xcas.
Calculer les fréquences de chaque issue et constriure le diagramme en bâtons correspondant.

Avec Xcas, on tape dans une ligne de commande :
```
R:=[]; pour j de 1 jusque 25 faire R:=append(L,alea(6)+alea(6)+2);fpour;
```
ou bien on tape :
```
R:=[(alea(6)+alea(6)+2)$(k=1..25)]
```
En effet `alea(6)` renvoie un nombre choisi aléatoirement parmi les nombres `0,1,2,3,4,5` donc `alea(6)+1` renvoie un nombre choisi aléatoirement parmi les nombres `1,2,3,4,5,6`.
Attention
`alea(6)+alea(6)+2` n'est pas égal à `2*alea(6)+2` et n'est pas ègal non plus à `alea(11)+2`.
Puis on utilise `count_eq(k,R)` qui compte le nombre d'éléments de la liste R Ãľgaux Ãă k pour k allant de 0 à 12 et on tape :
```
[count_eq(k,R)$(k=0..12)]
```
Ou bien on tape directement :
`L:=[0$ 13]` cela crée une liste formée de 13 zéros.
```
R:=NULL;
```
cela crée une séquence vide
```
pour j de 1 jusque 25 faire k:=alea(6)+alea(6)+2;R:=R,k;L[k]:=L[k]+1;fpour;
```
cela effectue 25 jets de 2 dés et on crée la séquence R qui donne la suite des résultats et la liste L qui compte dans `L[k]` le nombre de fois que k a été obtenu.
```
R:=[R];
```
cela transforme la séquence R en une liste.
On obtient par exemple pour R :

`[7,8,8,3,10,5,9,4,2,7,9,6,5,10,7,7,6,6,7,4,4,4,9,5,8]`
On obtient alors pour `L` :
`[0,0,1,1,4,3,3,5,3,3,2,0,0]`
Les frequences sont donc `L/25`. On obtient
`[0,0,1/25,1/25,4/25,3/25,3/25,1/5,3/25,3/25,2/25,0,0]`
On tape :
`histogramme([[k,L[k]]$(k=0..12)])`
Ou on tape :
`histogramme(R,0.5,1)`
On obtient :

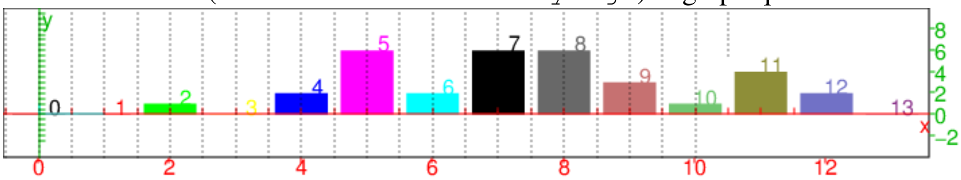


ou bien on tape :
`diagramme_batons([[k,L[k]]$(k=0..12)])`
On obtient :



Avec le tableur
On ouvre le tableur avec par exemple avec :
`Alt+t`
ou avec le menu :
`Tableur->Nouveau tableur`
qui propose 40 lignes de 0 à 39. On appuie donc sur `OK`.
Dans `A` on met les nombres entiers 0,1..39 :
pour cela on met dans `A0` : `0` et dans `A1` : `=A0+1`
puis on sélectionne `A1` et on tape `Ctrl+d` pour remplir vers le bas.
Dans `B` on met le résultat des 40 jets :
pour cela on met dans `B0` : `alea(6)+alea(6)+2`

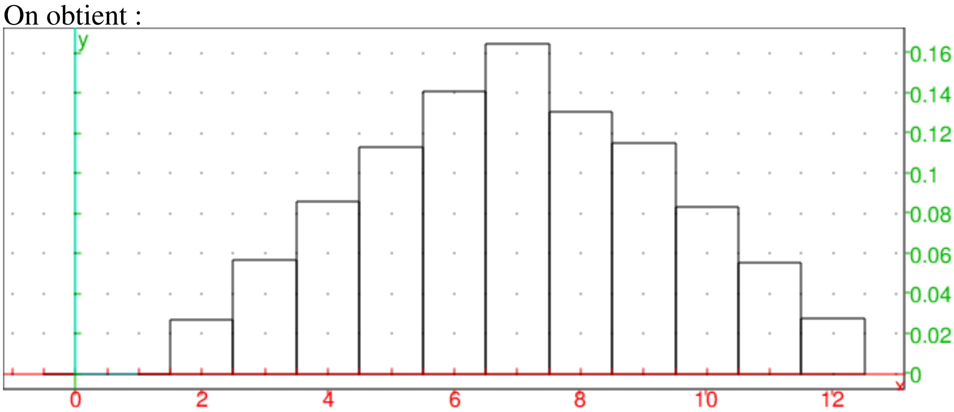
puis on sélectionne `B0` et on tape `Ctrl+d` pour remplir vers le bas.
Dans `C2` on va mettre le nombre de fois qu'il y a 2 dans `B` et dans `C3` on mettre le nombre de fois qu'il y a 3 dans `B` etc...
Pour cela, on tape dans `C2` `:=count_eq(A2,[$B$0:$B$39])` puis on sélectionne `C2` et on tape `Ctrl+d` pour remplir vers le bas.
Dans le menu `Maths` du tableur, on sélectionne :
`stats-1d->diagramme_batons` et on met `A2:A12,C` dans plage de cellule et `D0` comme cellule cible.
On obtient dans `D0:=diagramme_batons([[2,1],...[12,0]])`
et sous le tableur (ou à côté si on a décoché `Paysage`) le graphique :



Pour 1000 lancers,
on tape directement dans une ligne de commande :

```
LL:=[0$ 13]
pour j de 1 jusque 1000 faire
k:=alea(6)+alea(6)+2;LL[k]:=LL[k]+1;fpour;
```

On obtient :
`[0,0,33,62,78,100,146,168,124,110,95,55,29]`
Les 2 premiers 0 signifient que le score obtenu en jetant 2 dés n'est jamais nul et jamais égal à 1, puis 33 signifie que 2 a èté obtenu 33 fois lorsqu'on a fait 1000 lancers etc...
Les fréquences sont donc `LL/1000`
On obtient
`[0,0,33/1000,31/500,39/500,1/10,73/500,21/125,31/250,`
`11/100,19/200,11/200,29/1000]`
On tape :
`evalf(LL/1000,3)`
On obtient :
`[0.0,0.0,0.033,0.062,0.078,0.1,0.146,0.168,0.124,`
`0.11,0.095,0.055,0.029]`
On tape :
`histogramme([[k,LL[k]]$(k=0..12)])`
On obtient :



On peut aussi utiliser :
`=diagramme_batons([[k,LL[k]]$(k=0..12)])`
Calcul à la main les fréquences théoriques
Il y a en tout $6^2 = 36$ possibilités.
Calculons parmi ces 36 possibilités combien ont comme somme 2, ont comme somme 3,...,ont comme somme 12 :

- 2 est obtenu si on a fait (1,1) donc 1 fois
- 3 est obtenu si on a fait (1,2) ou (2,1) donc 2 fois
- 4 est obtenu si on a fait (1,3), (2,2) ou (3,1) donc 3 fois
- 5 est obtenu si on a fait (1,4), (2,3), (3,2) ou (4,1) donc 4 fois
- 6 est obtenu si on a fait (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) ou (5,1) donc 5 fois
- 7 est obtenu si on a fait (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) ou (6,1) donc 6 fois
- 8 est obtenu si on a fait (2,6), (3,5), (4,4) (5,3) ou (6,2) donc 5 fois
- 9 est obtenu si on a fait (3,6), (4,5) (5,4) ou (6,3) donc 4 fois
- 10 est obtenu si on a fait (4,6) (5,5) ou (6,4) donc 3 fois
- 11 est obtenu si on a fait (5,6) ou (6,5) donc 2 fois
- 12 est obtenu si on a fait (6,6) donc 1 fois

On vérifie (1+2+3+4+5)*2+6=36
Les fréquences théoriques de 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 sont donc :
`1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36, 1/6, 5/36, 1/9, 1/12, 1/18, 1/36` On tape :
`evalf([1/36,1/18,1/12,1/9,5/36,1/6,5/36,1/9,1/12,1/18,1/36],3)`
On obtient :
`[0.028,0.056,0.083,0.111,0.139,0.167,0.139,0.111,0.083,0.056,0.028]`

10.2 Série statistique donnée par un tableau ou un graphique

10.3 Pour réfléchir : un paradoxe de Simpson

On veut comparer 2 techniques (A et B) pour l'ablation des calculs rénaux. Pour cela on compare le résultat de 350 interventions faites avec la technique A et de 350 interventions faites avec la technique B. On a obtenu :
- avec la technique A il y a 273 reussites totales,
- avec la technique B il y a 289 reussites totales,
Trouver le pourcentage de reussite concernant chacune des 2 techniques.
Pourtant si on prend en compte la grosseur des calculs, on obtient :
- sur les 350 patients opérés avec la technique A il avait 263 gros calculs avec 192 reussites et 87 petits calculs avec 81 reussites,
- sur les 350 patients opérés avec la technique B il avait 80 gros calculs avec 55 reussites et 270 petits calculs avec 234 reussites.
Trouver le pourcentage de reussite concernant les gros calculs pour chacune des 2 techniques.
Trouver le pourcentage de reussite concernant les petits calculs pour chacune des 2 techniques.
Pourquoi les résultats trouvés sont-ils paradoxaux ? **Solution** Le pourcentage de reussite de la technique A est de $273/350 = 78\%$ et

le pourcentage de reussite de la technique B est de $289/350 \simeq 826\%$.
La technique B semble meilleure que la technique A puisque :
$.826\% \geq 78\%$
Pour les gros calculs :
Le pourcentage de reussite de la technique A est de $192/263 = 73\%$ et
le pourcentage dereussite de la technique B est de $55/80 \simeq 69\%$.
Cette fois les résultats sont inversés :
Pour les gros calculs, la technique A semble meilleure que la technique B puisque :
$.73\% \geq 69\%$
Pour les petits calculs :
Le pourcentage de reussite de la technique A est de $81/87 = 93\%$ et
le pourcentage dereussite de la technique B est de $234/270 \simeq 87\%$.
Cette fois les résultats sont encore inversés :
Pour les petits calculs, la technique A semble meilleure que la technique B puisque :
$.93\% \geq 87\%$
Conclusion Pour avoir un résultat fiable, il faudrait avoir le même nombre de patients ayant des gros (resp petits) calculs qui soient opérés avec destechniques différentes et comparer alors les pourcentage de reussite.
Par exemple, si on opère, avec une technique, un seul patient, si c'est une reussite peut-on dire que le pourcentage de reussite est de 100% ?
Il semble ici que la technique A est plutôt réalisée pour les gros calculs et la technique B est plutôt réalisée pour les petits calculs car cette technique est peut-être moins lourde pour la patient...

Chapitre 11

Probabilités

11.1 Équiprobabilité

On jette 3 dés à 6 faces. On suppose que ces 3 dés ne sont pas pipés (i.e. il y a équiprobabilité d'obtenir chaque face)
On ordonne par ordre croissant les 3 valeurs obtenues : m, d, M.
A gagne si $M - m < d$ et sinon c'est B qui gagne.
Le jeu est-il équitable ?

Il y a 6^3 possibilités il faut calculer le nombres de possibilités qui correspondent à $M - m > d$.
On peut faire cela avec un programme en utilisant les fonctions :
`alea` ou `rand`, `max` et `min` de `Xcas` :
`a:=rand(6)+1;b:=rand(6)+1;c:=rand(6)+1;` donne les 3 valeurs obtenues
`M:=max(a,b,c); m:=min(a,b,c);` calcule le maximum `M` et le minimum `m` de ces 3 valeurs,
`d:=a+b+c-M-m;` calcule le terme médian puisque $M + d + m = a + b + c$.
Remarque
$M - m < d$ est équivalent à $M < d + m$ et donc équivalent à $2M < a + b + c$.
On tape pour avoir une simulation de la probabilité que A gagne :

```
destrois(n):={
 local M,d,a,b,c,j,p;
 p:=0;
 pour j de 1 jusque n faire
   a:=rand(6)+1;
   b:=rand(6)+1;
   c:=rand(6)+1;
   M:=max(a,b,c);
   si 2*M<a+b+c alors p:=p+1 fsi;
   fpour;
  retourne(p/n);
  }:;
```

On peut aussi utiliser une séquence et la fonction `trier` qui trie par ordre croissant. On tape :

```
destroiss(n):={
 local M,m,d,S,j,p;
 p:=0;
 pour j de 1 jusque n faire
   S:=trier(rand(6)+1,rand(6)+1,rand(6)+1);
   m:=S[0];
   d:=S[1];
   M:=S[2];
   si M-m<d alors p:=p+1 fsi;
   fpour;
  retourne(p/n);
  }:;
```

On tape :
`destrois(10000)`
On obtient :
`2561/5000`
On tape :
`destrois(100000)`
On obtient :
`25591/50000`
Le jeu est donc favorable à A.

```
probadestrois():={
 local M,a,b,c,p;
 pour a de 1 jusque 6 faire
  pour b de 1 jusque 6 faire
   pour c de 1 jusque 6 faire
    M:=max(a,b,c);
    si 2M<a+b+c alors p:=p+1 fsi;
   fpour;
  fpour;
 fpour;
 retourne(p/6^3);
  }:;
```

Ou bien on tape :

```
probadestroiss():={
 local M,m,d,a,b,c,p,S;
 pour a de 1 jusque 6 faire
  pour b de 1 jusque 6 faire
   pour c de 1 jusque 6 faire
    S:=trier(a,b,c);
    m:=S[0];
    d:=S[1];
    M:=S[2];
    si M-m<d alors p:=p+1 fsi;
```

```
   fpour;
  fpour;
 fpour;
 retourne(p/6^3);
  }:;
```

On tape :
`probadestrois()`
ou `probadestroiss()`
On obtient :
`37/72 (≃ 0.513888888889)`
Calcul à la main
Il y a en tout $6^3 = 216$ possibilités.
Calculons le nombre de cas favorables pour que A gagne.

- Si $M - m = 5$ on doit avoir $M - m = 5 < d$ donc $d = 6$ les 3 possibilités sont (1,6,6) (6,1,6) et (6,6,1). Ce qui fait en tout 3 possibilités.
- Si $M - m = 4$ on doit avoir $M - m = 4 < d$ donc $d = 6$ ou $d = 5$.
  - Si $d = 6$ 3 possibilités (2,6,6),
  - si $d = 5$ (1,5,5) soit 3 possibilités ou (2,5,6) soit 3 !=6 possibilités.

  Ce qui fait en tout 3+3+6=12 possibilités.
- Si $M - m = 3$ on doit avoir $M - m = 3 < d$ donc $d = 6$ ou $d = 5$ ou $d = 4$.
  - Si $d = 6$ 3 possibilités (3,6,6),
  - si $d = 5$ (2,5,5) 3 possibilités ou (3,5,6) soit 3 !=6 possibilités,
  - si $d = 4$ (1,4,4) 3 possibilités ou (2,4,5) 3 !=6 possibilités ou (3,4,6) 3 !=6 possibilités.

  Ce qui fait en tout 3*3+3*6=27 possibilités.
- Si $M - m = 2$ on doit avoir $M - m = 2 < d$ donc $d = 6$ ou $d = 5$ ou $d = 4$ ou $d = 3$.
  - si $d = 6$ 3 possibilités (4,6,6),
  - si $d = 5$ (3,5,5) 3 possibilités ou (4,5,6) soit 6 possibilités,
  - si $d = 4$ (2,4,4) 3 possibilités ou (3,4,5) 6 possibilités ou (4,4,6) 3 possibilités,
  - si $d = 3$ (1,3,3) 3 possibilités ou (2,3,4) 6 possibilités ou (3,3,5) 3 possibilités.

  Ce qui fait en tout 4*3+5*6=36 possibilités.
- Si $M - m = 1$ on doit avoir $M - m = 1 < d$ donc $d = 6$ ou $d = 5$ ou $d = 4$ ou $d = 3$ ou $d = 2$.
  - Si $d = 6$ 3 possibilités (5,6,6),
  - si $d = 5$ (4,5,5) 3 possibilités ou (5,5,6) soit 3 possibilités,
  - si $d = 4$ (3,4,4) 3 possibilités ou (4,4,5) 3 possibilités,
  - si $d = 3$ (2,3,3) 3 possibilités ou (3,3,4) 3 possibilités,
  - si $d = 2$ (1,2,2) 3 possibilités ou (2,2,3) 3 possibilités.

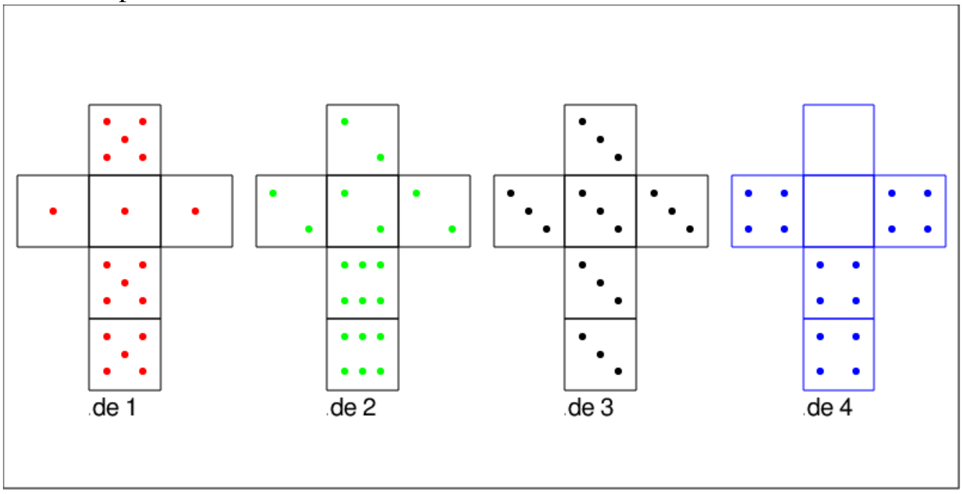
  Ce qui fait en tout 3*9=27 possibilités.
- Si $M - m = 0$ on doit avoir $M - m = 0 < d$ donc $M = m = d$ et $d = 6$ ou $d = 5$ ou $d = 4$ ou $d = 3$ ou $d = 2$ ou $d = 1$. Ce qui fait en tout 6 possibilités.

On fait le total soit :

3+12+27+36+27+6=111 cas possibles. Donc la probabilité pour A de gagner est :
`111/216` on obtient `37/72`

11.2 Comment gagner en jouant avec les 4 dés du jeu de Win

Ce jeu a été inventé par Bradley Efron (Université de Stanford).
On dispose de 4 dés particuliers : à vous de les simuler ! ! !



Les voici :
On pourra utiliser un dé a 6 faces en simulant par exemple :
le $de1$ si on a obtenu 1,2 ou 3 le score est 1 et sinon le score est 5.
le $de2$ si on a obtenu 1,2,3 ou 4 le score est 2 et sinon le score est 6.
le $de3$ fait toujours 3
le $de4$ si on a obtenu 1 ou 2 le score est 0 et sinon le score est 4.

Voici le programme faisant la figure ci-dessus :

```
facede(n,c,x,y,l):={
  local C;
  switch(n){
  case 0:{C:=NULL;break;}
  case 1:{C:=cercle(x+i*y+l/2*(1+i),l/18);break;}
  case 2:{C:=cercle(x+i*y+l/4+3*l/4*i,l/18),cercle(x+i*y+3*l/4+l/4*i,
case 3:{C:=cercle(x+i*y+l/2*(1+i),l/18),cercle(x+i*y+l/4+3*l/4*i,l/18
case 4:{C:=cercle(x+i*y+l/4+3*l/4*i,l/18),cercle(x+i*y+3*l/4+l/4*i,l/
case 5:{C:=cercle(x+i*y+l/2*(1+i),l/18),cercle(x+i*y+l/4+3*l/4*i,l/18
case 6:{C:=cercle(x+i*y+l/2+l*i/4,l/18),cercle(x+i*y+l/2+3*l*i/4,l/18
};
  retourne (carre(x+i*y,x+i*y+l),affichage(C,c+rempli));
  }:;
de1(c,l):={
  local L;
 L:=NULL;
L:=L,facede(5,c,0,0,l);
L:=L,facede(5,c,0,l,l);
```

```
L:=L,facede(1,c,0,2*l,l);
L:=L,facede(1,c,0-l,2*l,l);
L:=L,facede(1,c,0+l,2*l,l);
L:=L,facede(5,c,0,3*l,l);
return L;
}:;
de2(c,l):={
  local L;
 L:=NULL;
L:=L,facede(6,c,20,0,l);
L:=L,facede(6,c,20,l,l);
L:=L,facede(2,c,20,2*l,l);
L:=L,facede(2,c,20-l,2*l,l);
L:=L,facede(2,c,20+l,2*l,l);
L:=L,facede(2,c,20,3*l,l);
return L;
}:;
de3(c,l):={
  local L;
 L:=NULL;
L:=L,facede(3,c,40,0,l);
L:=L,facede(3,c,40,l,l);
L:=L,facede(3,c,40,2*l,l);
L:=L, facede(3,c,40-l,2*l,l);
L:=L, facede(3,c,40+l,2*l,l);
L:=L, facede(3,c,40,3*l,l);
return L;
}:;
de4(c,l):={
  local L;
 L:=NULL;
L:=L,facede(4,c,60,0,l);
L:=L,facede(4,c,60,l,l);
L:=L,facede(0,c,60,2*l,l);
L:=L,facede(4,c,60-l,2*l,l);
L:=L,facede(4,c,60+l,2*l,l);
L:=L,facede(0,c,60,3*l,l);
return L;
}:;
```

Puis dans un écran de géométrie, on tape :

```
de1(1,6);
de2(2,6)
de3(0,6);
de4(4,6)
legende(-2*i,"de 1");
legende(20-2*i,"de 2")
```

```
legende(40-2*i,"de 3");
legende(60-2*i,"de 4");
```

`Le jeu`

Vous faites une partie de 20 lancers chacun (avec l'ordinateur 200 lancers).
Vous laissez votre adversaire choisir le dé avec lequel il veut jouer. Sur la ligne ci -dessus, vous choisiez le dé suivant celui qu'il a choisi (celui qui suit le dernier dé est le premier dé).
Chaque joueur lance son dé et celui qui fait le meilleur score augmente son total de 1 point. Montrez que :
le dé 2 gagne en moyenne le dé 1,
le dé 3 gagne en moyenne le dé 2,
le dé 4 gagne en moyenne le dé 3,
le dé 1 gagne en moyenne le dé 4.
`Remarque`
Vous pouvez autorisé votre adversaire à choisir le dé avec lequel il veut jouer avant chaque lancer. Vous choisiez toujours le dé suivant sur la ligne.
Variante1 : le jeu1
On change la règle :
Vous laissez votre adversaire choisir le dé avec lequel il veut jouer et celui qui fait le meilleur score augmente son total du score obtenu. Quel est le dé que vous avez intérêt à choisir ?
Variante2 : le jeu2
On change la règle :
On joue avec 2 dés : le joueur A joue avec les dés $de1$ et $de3$ et le joueur B joue avec les dés $de2$ et $de4$.
Le jeu est-il équitable : a) lorsque celui qui fait le meilleur score augmente son total de 1 point.
b) lorsque celui qui fait le meilleur score augmente son total de son score.
Sinon qui va gagner A ou B ?

La solution

On remarquera que :
le $de1$ fait en moyenne un score de $1/2 + 5/2 = 3$
le $de2$ fait en moyenne un score de $2 * 2/3 + 6/3 = 10/3$
le $de3$ fait en moyenne un score de 3
le $de4$ fait en moyenne un score de $4 * 2/3 = 8/3$
Pourtant le $de3$ bat le $de2$ et le $de4$ bat le $de1$. En effet pour chacun des choix de votre adversaire, en choisissant le dé suivant vous gagnez avec une probabilité égal à 2/3 en effet : Soit X_j la variable aléatoire égale à la valeur du lancer du de_j.
Pour le jeu avec $de1$ et $de2$: le $de2$ gagne avec la probabilité :
$P((X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup X_2 = 6) = P(X_1 = 1) * P(X_2 = 2) + P(X_2 = 6) = 1/2 * 2/3 + 1/3 = 2/3$
Pour le jeu avec $de2$ et $de3$: le $de3$ gagne avec la probabilité :
$P(X_2 = 2 \cap X_3 = 3) = P(X_2 = 2) * P(X_3 = 3) = 2/3 * 1 = 2/3$
Pour le jeu avec $de3$ et $de4$: le $de4$ gagne avec la probabilité :
$P(X_3 = 3 \cap X_4 = 4) = P(X_3 = 3) * P(X_4 = 4) = 1 * 2/3 = 2/3$
Pour le jeu avec $de4$ et $de1$: le $de1$ gagne avec la probabilité :
$P((X_4 = 0 \cap X_1 = 1) \cup X_1 = 5) = P(X_4 = 0) * P(X_1 = 1) + P(X_1 = 5) =$

$) = 1/3 * 1/2 + 1/2 = 2/3$
Pour les autres possibilités on a :
Pour le jeu avec $de3$ et $de1$: le jeu est équitable avec la probabilité :
$P(X_3 = 3 \cap X_1 = 1) = P(X_1 = 5) * P(X_3 = 3) = 1/2$
Pour le jeu avec $de4$ et $de2$: le $de2$ gagne avec la probabilité :
$P((X_4 = 0 \cap X_2 = 2) \cup (X_2 = 6)) = P(X_4 = 0) * P(X_2 = 2) + P(X_2 = 6) =$
$1/3 * 2/3 + 1/3 = 5/9$
On peut simuler ce jeu avec `Xcas`, on tape :

```
lancer(n):={
switch(n){
  case 1:{si rand(2)==0 alors return 5; sinon return 1; fsi;break;}
  case 2:{si rand(3)==2 alors return 6; sinon return 2; fsi;break;}
  case 3:{return 3;break;}
  case 4:{si rand(3)==0 alors return 0; sinon return 4; fsi;break;}
};
}:;
jeu(a):={
local b,S1,S2,j,L1,L2;
  b:=a+1; si b==5 alors b:=1; fsi;
S1:=0;
S2:=0;
pour j de 1 jusque 2000 faire
L1:=lancer(a);
L2:=lancer(b);
si L1>L2 alors S1:=S1+1;
sinon S2:=S2+1;
fsi;
fpour;
return(S1,S2,evalf(S1/2000,S2/2000));
}:;
```

On tape :
`jeu(1)`
On obtient :
`670,1330,0.335,0.665`
On tape :
`jeu(2)`
On obtient :
`672,1328,0.336,0.664`
On tape :
`jeu(3)`
On obtient :
`658,1342,0.329,0.671`
On tape :
`jeu(4)`
On obtient :
`659,1341,0.3295,0.6705`

Variante1 : le jeu1
Pour chacun des choix cherchons l'espérance du gain $G(j, k)$ du joueur jouant avec le dé de_j quand sont adversaire joue avec le dé de_k.
Si X_j est la variable aléatoire égale à la valeur du lancer du de_j Pour le jeu avec $de1$ et $de2$, le $de2$ gagne. Voici les espérances des gains :
$E(G(1, 2)) = 5 * P(X1 = 5 \cap X_2 = 2) = 5/2 * 2/3 = 5/3$
$E(G(2, 1) = 2*P((X_1 = 1 \cap X_2 = 2)+6*(X_2 = 6) = 2*1/2*2/3+6*1/3 = 8/3$
Pour le jeu avec $de2$ et $de3$, le jeu est équitable. Voici les espérances des gains :
: $E(G(2, 3)) = 6 * P(X2 = 6) = 6/3 = 2$
$E(G(3, 2) = 3 * P((X_2 = 2) = 3 * 2/3 = 2$
Pour le jeu avec $de3$ et $de4$, le $de4$ gagne. Voici les espérances des gains :
$E(G(3, 4)) = 3 * P(X_4 = 0) = 3 * 1/3 = 1$
$E(G(4, 3) = 4 * P((X_4 = 4) = 4 * 2/3 = 8/3$
Pour le jeu avec $de4$ et $de1$, le $de1$ gagne. Voici les espérances des gains :
$E(G(4, 1)) = 4 * P(X_4 = 4 \cap X_1 = 1)) = 4 * 2/3 * 1/2 = 4/3$
$E(G(1, 4) = 1*P(X_4 = 0\cap X_1 = 1)+5*P((X_1 = 5) = 1/3*1/2+5*1/2 = 8/3$
Pour le jeu avec $de3$ et $de1$, le $de1$ gagne. Voici les espérances des gains :
$E(G(3, 1)) = 3 * P(X_1 = 1) = 3 * 1/2 = 3/2$
$E(G(1, 3) = 5 * P(X_1 = 5) = 5 * 1/2 = 5/2$
Pour le jeu avec $de4$ et $de2$, le $de2$ gagne. Voici les espérances de gain :
$E(G(4, 2)) = 4 * P(X_4 = 4 \cap X_2 = 2)) = 4 * 2/3 * 2/3 = 16/9$ $E(G(2, 4) = 2 * P(X_4 = 0 \cap X_2 = 2) + 6 * P((X_2 = 6) = 2 * 1/3 * 2/3 + 6 * 1/3 = 22/9$
Si votre adversaire choisi :
le $de1$ il faut encore choisir le $de2$,
le $de2$ il faut encore choisir le $de3$ et alors le jeu est équitable,
le $de3$ il faut encore choisir le $de4$,
le $de4$ il faut encore choisir le $de1$,
On peut simuler ce jeu avec `Xcas`, on tape :

```
lancer(n):={
switch(n){
  case 1:{si rand(2)==0 alors return 5; sinon return 1; fsi;break;}
  case 2:{si rand(3)==2 alors return 6; sinon return 2; fsi;break;}
  case 3:{return 3;break;}
  case 4:{si rand(3)==0 alors return 0; sinon return 4; fsi;break;}
};
}:;
jeu1(a,b):={
local S1,S2,j,L1,L2;
  //b:=a+1; si b==5 alors b:=1; fsi;
S1:=0;
S2:=0;
pour j de 1 jusque 2000 faire
L1:=lancer(a);
L2:=lancer(b);
si L1>L2 alors S1:=S1+L1;
sinon S2:=S2+L2;
fsi;
```

```
fpour;
return(S1,S2,evalf(S1/2000,S2/2000));
}:;
```

On tape :
`jeu1(1,2),[5/3,8/3]`
On obtient :
`3275,5486,1.6375,2.743, [1.66666666667,2.66666666667]`
On tape :
`jeu1(2,3),[2,2]`
On obtient :
`4020,3990,2.01,1.995,[2,2]`
On tape :
`jeu1(3,4),[1,8/3.]`
On obtient :
`2073,5236,1.0365,2.618,[1,2.66666666667]`
On tape :
`jeu1(4,1),[4/3.,8/3.]`
On obtient :
`2596,5423,1.298,2.7115,[1.33333333333,2.66666666667]`
On tape :
`jeu1(3,1),[3/2.,5/2.]`
On obtient :
`3096,4840,1.548,2.42,[1.5.,2.5]`
On tape :
`jeu1(4,2),[16/9.,22/9.]`
On obtient :
`3624,4744,1.812,2.372,[1.77777777778,2.44444444444]` **Variante2 : le jeu2**
On joue avec 2 dés : le joueur A joue avec les dés $de1$ et $de3$ et le joueur B joue avec les dés $de2$ et $de4$.
On peut simuler ce jeu avec `Xcas`, on tape :

```
lancer(n):={
switch(n){
  case 1:{si rand(2)==0 alors return 5; sinon return 1; fsi;break;}
  case 2:{si rand(3)==2 alors return 6; sinon return 2; fsi;break;}
  case 3:{return 3;break;}
  case 4:{si rand(3)==0 alors return 0; sinon return 4; fsi;break;}
};
}:;
jeu2():={
local SA,SB,j,LA,LB,GA,GB;
SA:=0;
SB:=0;
GA:=0;
GB:=0;
pour j de 1 jusque 2000 faire
LA:=lancer(1)+lancer(3);
```

```
LB:=lancer(2)+lancer(4);
si LA>LB alors
SA:=SA+1;
GA:=GA+LA;
sinon
SB:=SB+1;
GB:=GB+LB;
fsi;
fpour;
return(SA,SB,evalf(SA/2000,SB/2000),GA,GB,evalf(GA/2000,GB/2000));
}:;
```

On tape :
`jeu2()`
On obtient :
`[969,1031,0.4845,0.5155],[6944,8090,3.472,4.045]`
On tape :
`jeu2()`
On obtient :
`[993,1007,0.4965,0.5035],[7076,7854,3.538,3.927]`
Si on fait le calcul, le jeu est équitable lorsque celui qui fait le meilleur score augmente son total de 1 point ($1/9+7/18=1/2$, $5/18+4/18=1/2$) et sinon le gagnant est B car :
$E(GA)=4*(1/2*2/9)+8*(1/2*7/9)=32/9\simeq 3.55555555556$ et
$E(GB)=6*(1/2*5/9)+10*2/9=35/9\simeq 3.88888888889$

11.3 La loterie "illico SOLITAIRE" et le tableur

La loterie "illico SOLITAIRE" consiste à acheter, pour 2 euros, un ticket faisant partie d'un bloc de 750 000 tickets. Pour ce bloc il y a :

```
100000 lots de     2 euros
 83000 lots de     4 euros
 20860 lots de     6 euros
  5400 lots de    12 euros
  8150 lots de    20 euros
   400 lots de   150 euros
    15 lots de  1000 euros
     2 lots de 15000 euros
```

Calculer à l'aide de `Xcas` :
La probabilité de gagner une somme supérieure ou égale à 500 euros Mettre les données dans le tableur de `Xcas` et faites apparaitre :

- le nombre de tickets gagnants
- la valeur en euros de tous les tickets gagnants
- la moyenne des gains
- le pourcentage de tickets gagnants

Combien avez-vous de chances de gagner ? (gagner signifiant avoir un lot supérieur à sa mise)

Ce jeu vous parait-il équitable ?
La solution
Dans la colonne A on met le nombre de tickets gagnants et dans la colonne B la valeur en euros de ces tickets.
On tape donc dans A_0 100000 et dans $B0$ 2 etc...
Le nombre de tickets gagnant est la somme : $A_0+A_1+...A_{10}$. Pour cela on remplit la colonne C et on met :
dans C_0 : A_0
dans $C_1 := C_0 + A_1$
et on remplit vers le bas.
En C_7 on lit 217827, ce qui représente le nombre de tickets gagnants.

Pour avoir la somme des lots de tous les tickets gagnants, on remplit la colonne D et on met :
dans D_0 : $A_0 * B_0$
dans $D_1 := D0 + A_1 * B_1$
et on remplit vers le bas.
En D_7 on lit 989960, ce qui représente la valeur en euros de tous les tickets gagnants.
La moyenne des gains est égale à :
989960/750000.=1.31994666667 euros

Le pourcentage de tickets gagnants est égale à :
`evalf(217827/750000)` soit 0.290436.
Ce pourcentage est supérieur à 0.25 donc il y a plus d'une chance sur 4 d'avoir un ticket gagnant. MAIS, il y a 100000 tickets gagnants de 2 euros, soit des tickets qui représentent pour le parieur un gain nul !
Donc le pourcentage de tickets gagnants un lot supérieur à sa mise est égale à :
`evalf(117827/750000)` soit 0.157102666667.
On peut donc dire que le parieur à 15.7102666667 chances sur 100 de gagner plus que sa mise de 2 euros.
Celui qui organise cette loterie, si il vend tous les tickets du bloc, gagne :
`750000*2- 989960` soit 510040 euros !
Soit X la variable aléatoire égale au gain possible.
X peut prendre les valeurs :
-2 avec une probabilité de $1 - 217827/750000 = 177391/250000$
0 avec une probabilité de $100000/750000 = 2/15$
2 avec une probabilité de $83000/750000 = 83/750$
4 avec une probabilité de $20860/750000 = 1043/37500$
10 avec une probabilité de $5400/750000 = 9/1250$
18 avec une probabilité de $8150/750000 = 163/15000$
148 avec une probabilité de $400/750000 = 1/1875$
998 avec une probabilité de $15/750000 = 1/50000$
14998 avec une probabilité de $2/750000 = 1/375000$
Donc l'espérance de X est donc égale à :
$E(X) = -2*177391/250000+2*83/750+4*1043/37500+10*9/1250+18*163/15000+148*1/1875+998*1/50000+14998*1/375000 = -12751/18750 \simeq -0.680053333333$ Donc l'espérance de gain est une perte de 0.68 euros.

0n retrouve le résultat précédent puisque on mise 2 euros et que la moyenne des gains est égale à 989960/750000 euros ($\simeq$ 1.31994666667) euros, soit une perte moyenne (989960/750000-2)=-12751/18750 euros soit environ de -0.68 euros.

11.4 La loterie "CAS-H illico" et le tableur

La loterie "CAS-H illico" consiste à acheter, pour 5 euros, un ticket faisant partie d'un bloc de 15 000 000 tickets. Pour ce bloc il y a :

```
1560000 tickets gagnants de      5 euros
1760000 tickets gagnants de     10 euros
 375000 tickets gagnants de     20 euros
 112500 tickets gagnants de     50 euros
 112500 tickets gagnants de    100 euros
   3750 tickets gagnants de    500 euros
   1800 tickets gagnants de   1000 euros
     40 tickets gagnants de   5000 euros
      5 tickets gagnants de  10000 euros
      3 tickets gagnants de 100000 euros
      3 tickets gagnants de 500000 euros
```

Calculer à l'aide de `Xcas` :
La probabilité de gagner une somme supérieure ou égale à 500 euros Mettre les données dans le tableur de `Xcas` et faites apparaitre :

- le nombre de tickets gagnants
- la valeur en euros de tous les tickets gagnants
- la moyenne des gains
- le pourcentage de tickets gagnants

Voici la publicité de la loterie "CAS-H illico" :
"Plus d'1 chance sur 4 de gagner !"
Qu'en pensez-vous ?
Ce jeu vous parait-il équitable ?

La solution

Dans la colonne A on met le nombre de tickets gagnants et dans la colonne B la valeur en euros de ces tickets.
On tape donc dans A_0 1560000 et dans $B0$ 5 etc...
Le nombre de tickets gagnant est la somme : $A_0 + A_1 + ...A_{10}$. Pour cela on remplit la colonne C et on met :
dans C_0 : A_0
dans $C_1 := C_0 + A_1$
et on remplit vers le bas.
En C_{10} on lit 3925601, ce qui représente le nombre de tickets gagnants.

Pour avoir la somme des lots de tous les tickets gagnants, on remplit la colonne D et on met :
dans D_0 : $A_0 * B_0$
dans $D_1 := D0 + A_1 * B_1$

et on remplit vers le bas.
En D_{10} on lit 55500000, ce qui représente la valeur en euros de tous les tickets gagnants.
La moyenne des gains est égale à :
55500000/15000000=37/10=3.7 euros

Le pourcentage de tickets gagnants est égale à :
`evalf(3925601/15000000)` soit 0.261706733333.
Ce pourcentage est supérieur à 0.25 donc il y a plus d'une chance sur 4 d'avoir un ticket gagnant. MAIS, il y a 1560000 tickets gagnants de 5 euros, soit des tickets qui représentent pour le parieur un gain nul !
Puisque 1-0.261706733333=0.738293266667, on peut donc dire que le parieur à 73.8293266667 chances sur 100 de perdre 5 euros
Puisque 1560000/15000000.=0.104, on peut donc dire que le parieur à 10.4 chances sur 100 de ne rien gagner et de ne rien perdre.
Le pourcentage de tickets gagnants une somme supérieure strictement à 5 euros est égale à :
`evalf((3925601-1560000)/15000000)` soit 0.157706733333.
On peut donc dire que le parieur à 15.7706733333 chances sur 100 de gagner plus que sa mise de 5 euros.
Celui qui organise cette loterie, si il vend tous les tickets du bloc, gagne :
`15000000*5-55500000` soit 19500000 euros !
Soit X la variable aléatoire égale au gain possible.
X peut prendre les valeurs :
-5 avec une probabilité de $1 - 3925601/15000000 = 11074399/15000000$
0 avec une probabilité de $1560000/15000000 = 13/125$
5 avec une probabilité de $1760000/15000000 = 44/375$
15 avec une probabilité de $375000/15000000 = 1/40$
45 avec une probabilité de $112500/15000000 = 3/400$
95 avec une probabilité de $112500/15000000 = 3/400$
495 avec une probabilité de $3750/15000000 = 1/4000$
995 avec une probabilité de $1800/15000000 = 3/25000$
4995 avec une probabilité de $40/15000000 = 1/375000$
9995 avec une probabilité de $5/15000000 = 1/3000000$ 99995 avec une probabilité de $3/15000000 = 1/5000000$
499995 avec une probabilité de $3/15000000 = 1/5000000$
Donc l'espérance de X est donc égale à :
$E(X) = -5*11074399/15000000 + 5*44/375 + 15*1/40 + 45*3/400 + 95*3/400 + 495*1/4000 + 995*3/25000 + 4995*1/375000 + 9995*1/3000000 + 99995*1/5000000 + 499995*1/5000000 = -13/10$ Donc l'espérance de gain est une perte de 1.30 euros.
0n retrouve le résultat précédent puisque on mise 5 euros et que la moyenne des gains est égale à 3.7 euros, soit une perte moyenne de -1.30 euros.

11.5 La loterie "500000 CARATS illico" et le tableur

La loterie "500000 CARATS illico" consiste à acheter, pour 5 euros, un ticket faisant partie d'un bloc de 8 016 000 tickets. Pour ce bloc il y a 2 055 464 tickets gagnants :

```
 704300 tickets gagnants de      5 euros
1030000 tickets gagnants de     10 euros
 200000 tickets gagnants de     15 euros
  40000 tickets gagnants de     50 euros
  80160 tickets gagnants de    100 euros
   1000 tickets gagnants de   1000 euros
      2 tickets gagnants de  10000 euros
      2 tickets gagnants de 500000 euros
```

Calculer à l'aide de `Xcas` :
La probabilité de gagner une somme supérieure ou égale à 500 euros Mettre les données dans le tableur de `Xcas` et faites apparaitre :

— le nombre de tickets gagnants
— la valeur en euros de tous les tickets gagnants
— la moyenne des gains
— le pourcentage de tickets gagnants

Voici la publicité de la loterie "CAS-H illico" :
"Une chance sur 4 de gagner !"
Qu'en pensez-vous ?
Ce jeu vous parait-il équitable ?

La solution

Dans la colonne A on met le nombre de tickets gagnants et dans la colonne B la valeur en euros de ces tickets.
On tape donc dans A_0 704300 et dans $B0$ 5 etc...
Le nombre de tickets gagnant est la somme : $A_0+A_1+...A_{10}$. Pour cela on remplit la colonne C et on met :
dans C_0 : A_0
dans $C_1 := C_0 + A_1$
et on remplit vers le bas.
En C_{10} on lit 2055464, ce qui représente le nombre de tickets gagnants.

Pour avoir la somme des lots de tous les tickets gagnants, on remplit la colonne D et on met :
dans D_0 : $A_0 * B_0$
dans $D_1 := D0 + A_1 * B_1$
et on remplit vers le bas.
En D_7 on lit 28857500, ce qui représente la valeur en euros de tous les tickets gagnants.
La moyenne des gains est égale à :
28857500/8016000=37/10=3.59998752495 euros
Le pourcentage de tickets gagnants est égale à :
`evalf(2055464/8016000)` soit 0.256420159681.

Ce pourcentage est supérieur à 0.25 donc il y a plus d'une chance sur 4 d'avoir un ticket gagnant. MAIS, il y a 704300 tickets gagnants de 5 euros, soit des tickets qui représentent pour le parieur un gain nul !
Puisque 1-0.256420159681=0.743579840319, on peut donc dire que le parieur à 74.3579840319 chances sur 100 de perdre 5 euros
Puisque 704300/8016000.=0.0878617764471, on peut donc dire que le parieur à 8.78 chances sur 100 de ne rien gagner et de ne rien perdre.
Le pourcentage de tickets gagnants une somme supérieure strictement à 5 euros est égale à :
`evalf((2055464-704300)/8016000)` soit 0.168558383234.
On peut donc dire que le parieur à 16.8558383234 chances sur 100 de gagner plus que sa mise de 5 euros.
Celui qui organise cette loterie, si il vend tous les tickets du bloc, gagne :
`8016000*5-28857500` soit 40080000-28857500=11222500 euros !
Soit X la variable aléatoire égale au gain possible.
X peut prendre les valeurs :
-5 avec une probabilité de $1 - 2055464/8016000 = 745067/1002000$
0 avec une probabilité de $704300/8016000 = 7043/80160$
5 avec une probabilité de $1030000/8016000 = 515/4008$
10 avec une probabilité de $200000/8016000 = 25/1002$
45 avec une probabilité de $40000/8016000 = 5/1002$
95 avec une probabilité de $80160/8016000 = 1/100$
995 avec une probabilité de $1000/8016000 = 1/8016$
9995 avec une probabilité de $2/8016000 = 1/4008000$ 499995 avec une probabilité de $2/8016000 = 1/4008000$
Donc l'espérance de X est donc égale à :
$E(X) = -5*745067/1002000+5*515/4008+10*25/1002+45*5/1002+95*1/100+995*1/8016+9995*1/4008000+499995*1/4008000 = -22445/16032 \simeq -1.4$ Donc l'espérance de gain est une perte de 1.40 euros.
0n retrouve le résultat précédent puisque on mise 5 euros et que la moyenne des gains est égale à 3.59998752495 euros euros, soit une perte moyenne de -1.40 euros.

11.6 Pour comprendre l'écart type

11.6.1 Un exercice

Le comité des fêtes d'un village veut organiser une loterie en émettant 1000 billets à 2 euros.

A

Le comité des fêtes hésite entre 3 possibilités quand aux lots possibles :

1. il y a 10 billets qui gagnent 102 euros
2. il y a 43 billets qui gagnent 3,4,..32,33,33,34,...44 euros
3. il y a 100 billets qui gagnent 10.2 euros

Soient X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales au gain (en euros) du joueur qui achéte 1 billet pour chacune des 3 possibilités.

Pour chacune des 3 possibilités calculer la moyenne et l'écart type de cette variable aléatoire.
B
Après un sondage Le comité des fêtes décide d'opter pour la première solution :
sur 1000 billets à 2 euros il y a 10 billets qui gagnent 102 euros.

1. 2 amis décident d'acheter ensemble 2 billets et de se partager les gains car ils estiment qu'il auront plus de chances de gagner. Est-ce vrai ?
   Soit X_4 la variable aléatoire égales au gain (en euros) d'un des 2 amis. Calculer la moyenne et l'écart type de cette variable aléatoire X_4.
2. même question pour n $(n = 2..1000)$ amis décident d'acheter ensemble n billets et de se partager les gains
3. Les comités des fêtes de 100 villages organisent le même type de loterie : 1000 billets de 2 euros avec 10 lots de 102 euros. Un habitant d'un village voisin décide de miser :
   — 20 euros
     A-t-il interêt à acheter les billets de loterie d'un même village ou des billets de loterie de villages tous différents ? Calculer pour chacun des cas la moyenne et l'écart type de ces gains.
   — 200 euros
     Même question. Faire un graphique qui compare les probabilité d'avoir k $(k = 0..10)$ billets gagnants sur les 100 billets achetés.

11.6.2 La solution de A

— il y a 10 billets qui gagnent 102 euros X_1 peut prendre 2 valeurs :
  -2 avec la probabilité de 99/100 ou
  100 (102-2=100) avec la probabilité de 1/100 $simeq$ 0.01.
  Donc pour calculer la moyenne $m_1 = E(X_1)$, on tape :
  `m1:=-2*99/100+100*1/100`
  On obtient :
  `-49/50`$\simeq$`-0.98`
  Donc pour calculer l'écart type $\sigma(X_1)$, on tape :
  `sqrt((-2-m1)^2*99/100+(100-m1)^2*1/100)`
  On obtient :
  `7650*sqrt(11)/2500`$\simeq$`10.1488718585`
— il y a 43 billets qui gagnent 3,4,..32,33,33,34,...44 euros X_2 peut prendre 43 valeurs :
  -2 avec la probabilité de 957/1000 ou
  1,2..30 avec la probabilité de 1/1000
  31 (33-2=31) avec la probabilité de 2/1000
  32..42 avec la probabilité de 1/1000
  Donc pour calculer la moyenne $m_2 = E(X_2)$, on tape :
  `m2:=-2*957/1000+sum(n,n=1..30)*1/1000+31*2/1000+`
  `sum(n,n=32..42)*1/1000`
  On obtient :
  `-49/50`$\simeq$`-0.98`
  Donc pour calculer l'écart type $\sigma(X_2)$, on tape :

`sqrt((-2-m2)^2*957/1000+sum((n-m2)^2,n=1..30)*1/1000+`
`(31-m2)^2*2/1000+sum((n-m2)^2,n=32..42)*1/1000)`
On obtient :
`25*sqrt(73534)/1250`$\simeq$ `5.42343064858`
— il y a 100 billets qui gagnent 10.2 euros X_3 peut prendre 2 valeurs :
-2 avec la probabilité de 9/10 ou
8.2 (10.2-2=8.2) avec la probabilité de 1/10 Donc pour calculer la moyenne $m_3 = E(X_3)$, on tape :
`m3:=-2*9/10+8.2*1/10`
On obtient :
`-0.98`
Donc pour calculer l'écart type $\sigma(X_3)$, on tape :
`sqrt((-2-m3)^2*9/10+(8.2-m3)^2*1/10)`
On obtient :
`3.06`

On remarque que dans les 3 cas les moyennes sont les mêmes mais par contre les écarts types sont différents : ils sont de plus en plus petits au fur et à mesure que l'on a plus de chances d'avoir un billet gagnant en effet à moyenne égale si on a plus de chances d'avoir un billet gagnant c'est que le gain est plus petit et donc l'écart des gains à la moyenne est plus petit car l'écart type résume les écarts entre chaque résultat possible et la valeur moyenne.
Dans tous les 3 cas la vente de tous les billets rapportera au comité des fêtes la somme de 980 euros. Mais que faut-il préférer peu de gros lots ou beaucoup de petits lots ? À vous de choisir ! ! ! !

11.6.3 La solution de B

Sur 1000 billets à 2 euros il y a 10 billets qui gagnent 102 euros.

1. 2 amis décident d'acheter ensemble 2 billets et de se partager les gains.
   Soit X_4 la variable aléatoireégale au gain obtenu par l'un d'eux, X_4 peut prendre les valeurs :

   — -2 avec la probabilté :
   `comb(990,2)/comb(1000,2)`$\simeq$ 0.98009009009
   — (102-4)/2=49 avec la probabilté :
   `comb(990,1)*comb(10,1)/comb(1000,2)`$\simeq$ 0.0198198198198
   — 100 avec la probabilté :
   `comb(10,2)/comb(1000,2)`$\simeq$ 9.00900900901e-05

   Donc pour $n = 2$
   En misant 2 euros on a une chance de gagner en se mettant à 2, avec une probabilité de 0.0199099099099 (au lieu de 0.01) mais le gain risque dêtre moins important ! Pour calculer la moyenne $m_4 = E(X_4)$, on tape :
   `m4:=(-2*comb(990,2)+49*comb(990,1)*comb(10,1)+`
   `100*comb(10,2))/comb(1000,2)`
   On obtient encore la même moyenne :
   `-49/50`$\simeq$ -0.98

Pour calculer l'écart type $\sigma(X_4)$, on tape :
`sqrt(((-2-m4)^2*comb(990,2)+(49-m4)^2*comb(990,1)*`
`comb(10,1)+(100-m4)^2*comb(10,2))/comb(1000,2))`
On obtient :
`850*sqrt(609279)/92500`$\simeq$ 7.17274345342.

2. n amis décident d'acheter ensemble n billets et de se partager les gains.
Ce qu'il faut comprendre c'est que si n ($n \leq 1000$) parieurs décident de partager le gain provenant des n billets de cette loterie, l'espérance de gain d'un joueur sera toujours de -0.98 (c'est à dire une perte de -0.98 euros) mais l'écart type sera de plus en plus petit au fur et à mesure que n augmente : le cas limite étant $n = 1000$ avec un gain sûr de -0.98 euros et donc un écart type nul. **La solution de B pour** $n = 2..1000$ **avec un programme**
On doit regarder 3 cas différents :
   — $1 <= n <= 10$
     Dans ce cas le nombre p de billets gagnants peut être $0, 1..n$
   — $11 <= n <= 990$
     Dans ce cas le nombre p de billets gagnants peut être $0, 1..10$
   — $991 <= n <= 1000$
     Dans ce cas le nombre p de billets gagnants peut être $n - 990..10$

   On tape pour calculer dans chacun de ces cas la moyenne et l'écart type de la variable aléatoire égale au gain d'un parieur :

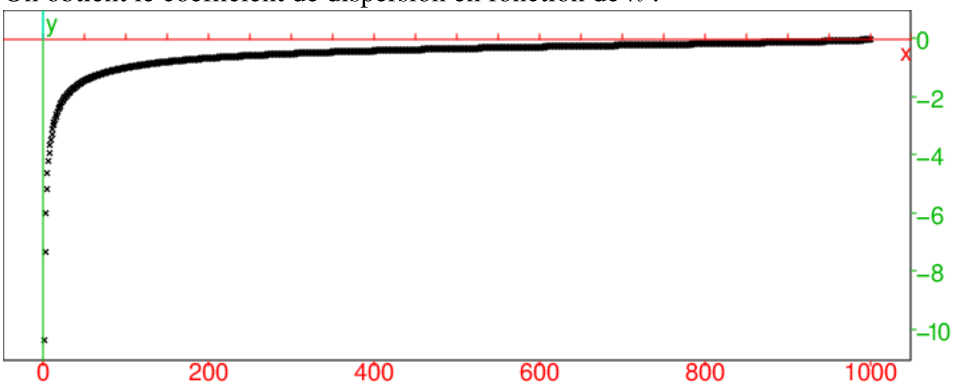
```
msigma(n):={
local p,m,sigma2;
m:=0;
sigma2:=0;
si n<=10 alors
  pour p de 0 jusque n faire
    m:=m+(102*p-2*n)/n*comb(990,n-p)*comb(10,p)/comb(1000,n);
  fpour;
  pour p de 0 jusque n faire
    sigma2:=sigma2+((102*p-2*n)/n-m)^2*comb(990,n-p)*
                    comb(10,p)/comb(1000,n);
  fpour;
sinon
  si n<=990 alors
    pour p de 0 jusque 10 faire
      m:=m+(102*p-2*n)/n*comb(990,n-p)*comb(10,p)/comb(1000,n);
    fpour;
    pour p de 0 jusque 10 faire
      sigma2:=sigma2+((102*p-2*n)/n-m)^2*comb(990,n-p)*
                      comb(10,p)/comb(1000,n);
    fpour;
  sinon
    pour p de n-990 jusque 10 faire
      m:=m+(102*p-2*n)/n*comb(990,n-p)*comb(10,p)/comb(1000,n);
```

```
    fpour;
    pour p de n-990 jusque 10 faire
      sigma2:=sigma2+((102*p-2*n)/n-m)^2*comb(990,n-p)*
                              comb(10,p)/comb(1000,n);
    fpour;
  fsi;
fsi;
retourne [m,sqrt(sigma2)];
}:;
```

Pour n fixé, on appelle mn la moyenne et sn l'écrat type et on trace les points d'abscisse n et d'ordonnée sn/mn (c'est le coefficient de dispersion) :

```
gmsigma():={
  local L,n,msn,mn,sn;
  L:=NULL;
   pour n de 1 jusque 1000 faire
    msn:=msigma(n);mn:=evalf(msn[0]);sn:=evalf(msn[1]);
    L:=L,point(n,sn/mn,affichage=1);
   fpour;
 retourne L;
}:;
```

On tape :
`gmsigma()`
On obtient le coefficient de dispersion en fonction de n :



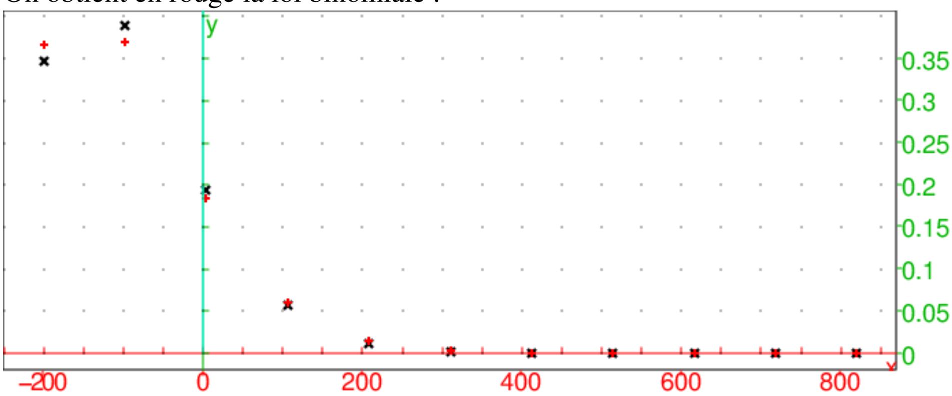
3. Les comités des fêtes de 100 villages organisent le même type de loterie : 1000 billets de 2 euros avec 10 lots de 102 euros.
   — Un habitant d'un village voisin décide de miser 20 euros
   Si il achète 10 billets de la loterie du même village :
   Soit X_5 la variable aléatoire égale au gain du parieur.
   X_5 a 11 valeurs possibles qui sont : $102 * k - 20$ pour $k = 0..10$
   Chacune de ces valeurs a une probabilité égale à :
   `comb(10,k)*comb(990,10-k)/comb(1000,10)` pour $k = 0..10$
   On tape :
   `V5:=[(102*k-20)$(k=0..10)]`
   On obtient :

`[-20,82,184,286,388,490,592,694,796,898,1000]`
On tape :
`P5:=[(comb(10,k)*comb(990,10-k)/comb(1000,10))$(k=0..10)]`
On obtient pour `evalf(P5,4)` :
`[0.904,0.09215,0.0038,8.248e-05,1.027e-06,7.505e-09,3.172e-11,7.345e-14,8.363e-17,3.758e-20,3.796e-24]`
La moyenne m_5 vaut :
`moyenne(V5,P5)` soit `-49/5`
L'écart type σ_5 vaut :
`ecart_type(V5,P5)` soit `2805*sqrt(111)/925`$\simeq$ 31.948658137
Si il achète 10 billets de la loterie de 10 villages différents :
Chaque billet à une probabilité de 1/100 dêtre gagnant car les 10 tirages sont indépendants : il s'agit alors de la loi binomiale $B(10, 1/100)$. Soit X_6 la variable aléatoire égale au gain du parieur.
X_6 a 11 valeurs possibles : les mêmes que X_5 et donc :
`V6:=V5`
Chacune de ces valeurs a une probabilité ègale à :
`binomial(10,k,1/100)=comb(10,k)*(1/100)^k*(99/100)^(10-k)`
On tape pour vair la probabilité des 11 premières valeurs :
`P6:=[binomial(10,k,1/100)$(k=0..10)]`
On obtient pour `evalf(P5,4)` :
`[0.9044,0.09135,0.004152,0.0001118,1.977e-06,2.396e-08,2.017e-10,1.164e-12,4.41e-15,9.9e-18,1e-20]` La moyenne m_6 vaut :
`moyenne(V6,P6)` soit `-49/5`
L'écart type σ_6 vaut :
`ecart_type(V6,P6)` soit `765*sqrt(110)/250`$\simeq$ 32.093550754

— Un habitant d'un village voisin décide de miser 200 euros
Il achète 100 billets de la loterie du même village :
Soit X_7 la variable aléatoire égale au gain du parieur.
X_7 a 11 valeurs possibles qui sont : $102 * k - 200$ pour $k = 0..10$
Chacune de ces valeurs a une probabilité ègale à :
`comb(10,k)*comb(990,100-k)/comb(1000,100)` pour $k = 0..10$
On tape :
`V7:=[(102*k-200)$(k=0..10)]`
On obtient :
`[-200,-98,4,106,208,310,412,514,616,718,820]`
On tape :
`P7:=[(comb(10,k)*comb(990,100-k)/comb(1000,100))$(k=0..10)]`
On obtient pour `evalf(P7,4)` :
`[0.3469,0.3894,0.1945,0.05691,0.01081,0.001391,0.0001229,7.359`
La moyenne m_7 vaut :
`moyenne(V7,P7)` soit `-98`
L'écart type σ_7 vaut :
`ecart_type(V7,P7)` soit `102*sqrt(1221)/37`$\simeq$ 96.3288287235
Si il achète 100 billets de la loterie de 100 villages différents :

Chaque billet à une probabilité de 1/100 dêtre gagnant car les 100 tirages sont indépendants : il s'agit alors de la loi binomiale $B(100, 1/100)$.
Soit X_8 la variable aléatoire égale au gain du parieur.
X_8 a 101 valeurs possibles car chaque billet peut gagner (bien que peu probable !) :
`V8:=[(102*k-200)$(k=0..101)]:;`
Chacune de ces valeurs a une probabilité ègale à :
`binomial(100,k,1/100)` On tape :
`P8:=[binomial(100,k,1/100)$(k=0..101)]:;`
On obtient pour les 14 premières valeurs approchées de `evalf(P8,4)` :
`[0.366,0.3697,0.1849,0.061,0.01494,0.002898,0.0004635,6.286e-05,7.382`
La moyenne m_8 vaut :
`moyenne(V8,P8)` soit `-98`
L'écart type σ_8 vaut :
`ecart_type(V8,P8)` soit `765*sqrt(11)/25`$\simeq$ 101.488718585

On compare les probabilités d'avoir $k = 0..10$ billets gagnants.
On tape :
```
[point(V7[k],P7[k],affichage=epaisseur_point_2)$(k=0..10),
point(V8[k],P8[k],affichage=1+point_plus+epaisseur_point_2)
$(k=0..10)]
```
On obtient en rouge la loi binomiale :



Chapitre 12

Trigonométrie-Angles-Polygones

12.1 Longueur d'un côté d'un triangle rectangle

12.1.1 Exercice 0

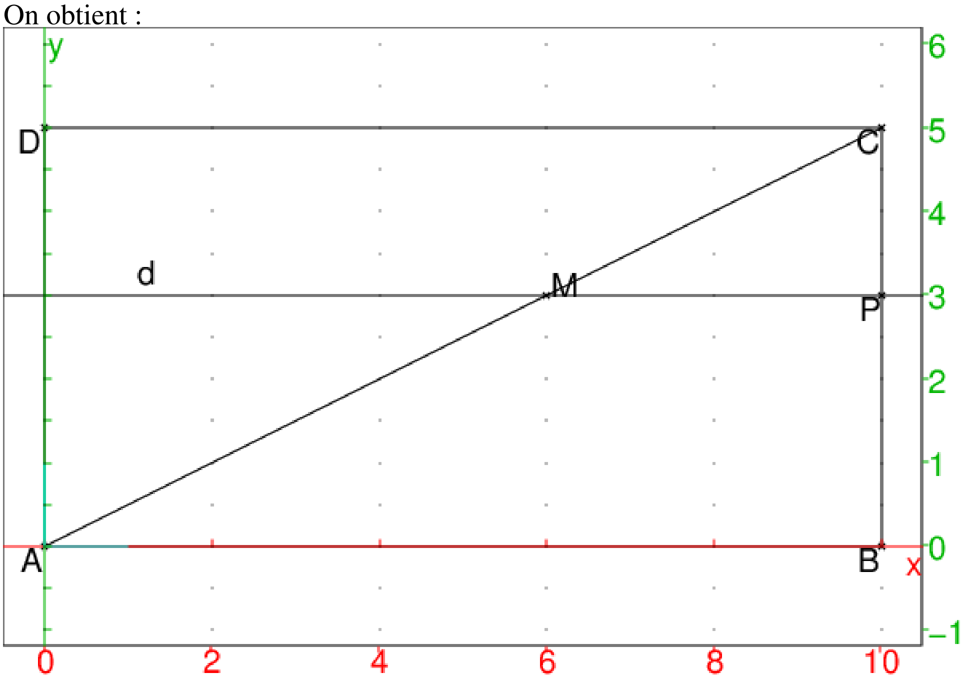
Soientt un rectangle $ABCD$ vérifiant $AB = 10$ unités et $BC = 5$ unités et P le point tel que $5 * \overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{BC}$ La diagonale AC coupe la parallèle à AB passant par P en M.

Calculer AM.

On fait la figure avec `Xcas`, on tape :

```
rectangle(0,10,1/2)
A:=point(0);B:=point(10)
C:=point(10,5);D:=point(0,5)
P:=point(10,3)
s:=segment(A,C)
d:=droite(y=3)
M:=inter_unique(s,d)
```

On obtient :



La solution
On a :
$AM = \frac{3}{5}AC$
Il suffit donc de calculer AC avec le théorème de Pythagore. On a :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 100 + 25 = 125 = 25 * 5$
Donc :
$AC = 5\sqrt{5}$
Donc :
$AM = 3\sqrt{5}$

12.1.2 Exercice 1

On peut montrer que si p est un nombre premier qui a 1 comme reste lorsqu'on le divise par 4 alors il existe deux entiers a et b tels que $p = a^2 + b^2$.
Application
$p = 61, p = 153$.
Factoriser $n = 388$ et décomposer n en une somme de 2 carrés.
Construire avec un compas le triangle ABC tel que $BC = a = \sqrt{388}$, , $AC = b = \sqrt{61}$, $AB = c = \sqrt{153}$.
Déterminer l'aire de ABC.
Inventer un exercice semblable à celui la.
La solution
On vérifie que 61 et 153 sont premiers et ont 1 comme reste lorsqu'on les divise par 4 :

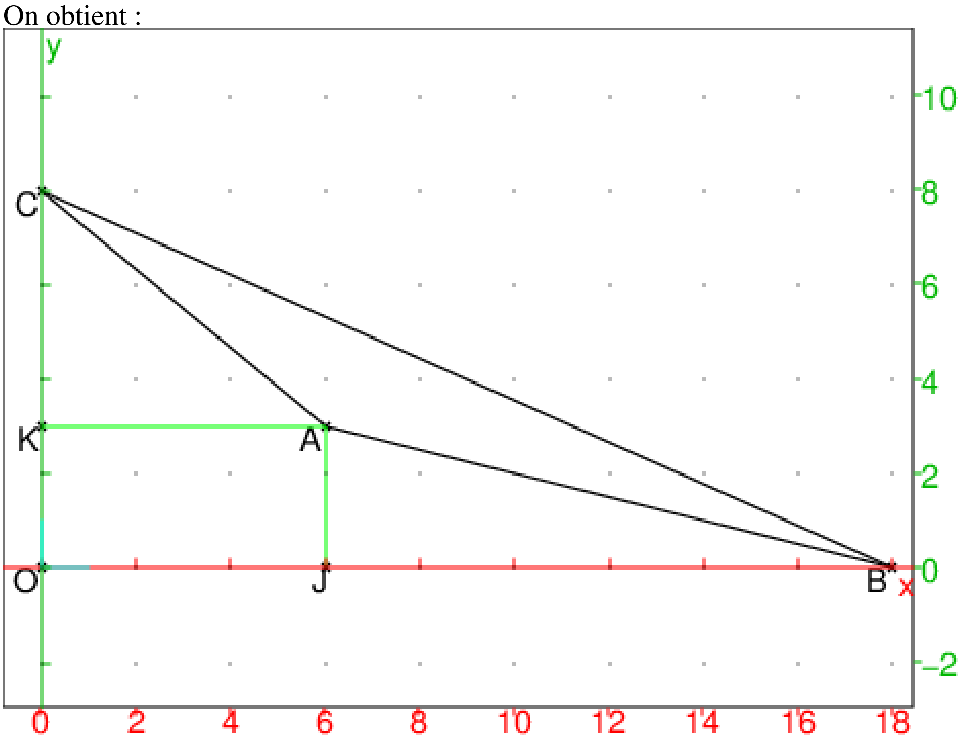
— 61 n'est pas divisible par 2,3,5,7 et comme $11^2 = 121 > 61$ on en déduit que 61 est un nombre premier.
  0n a : 61=4*15+1
— 153 n'est pas divisible par 2,3,5,7,11 et comme $13^2 = 169 > 153$ on en déduit que 153 est un nombre premier.
  0n a : 153=4*38+1

On trouve par tatonnement que :
$61 = 25 + 36 = 5^2 + 6^2$
$153 = 9 + 144 = 3^2 + 12^2$
Ou bien on utilise la fonction `pa2b2` de `Xcas` qui fait cette décomposition. `pa2b2(p)` renvoie la liste $[a, b]$ tel que $p = a^2 + b^2$ On tape `pa2b2(61)` et on obtient `[6,5]`
On tape `pa2b2(153)` et on obtient `[12,3]`
On factorise 388, on tape :
`factoriser_entier(388)` et on obtient `2^2*97`
On vérifie que 97 est premier et a 1 comme reste lorsqu'on le divise par 4 : 97 n'est pas divisible par 2,3,5,7 et comme $11^2 = 121 > 97$ on en déduit que 97 est un nombre premier.
On a : 97=4*24+1.
Donc 97 se décompose en une somme de 2 carrés.
On trouve par tatonnement que :
$97 = 16 + 81 = 4^2 + 9^2$
Ou bien on tape `pa2b2(97)` et on obtient `[9,4]`
Donc $388 = 4 * (4^2 + 9^2) = 8^2 + 18^2$

Pour construire le triangle ABC, on sait d'après le théorème de Pythagore et les résultats précédent que : $BC = a = \sqrt{388}$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés de longueur 8 et 18,
$AC = b = \sqrt{61}$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés de longueur 5 et 6,
$AB = c = \sqrt{153}$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés de longueur 3 et 12.
On remarque que 8=5+3 et que 18=6+12, d'où la construction dans un niveau de géométrie $2d$:

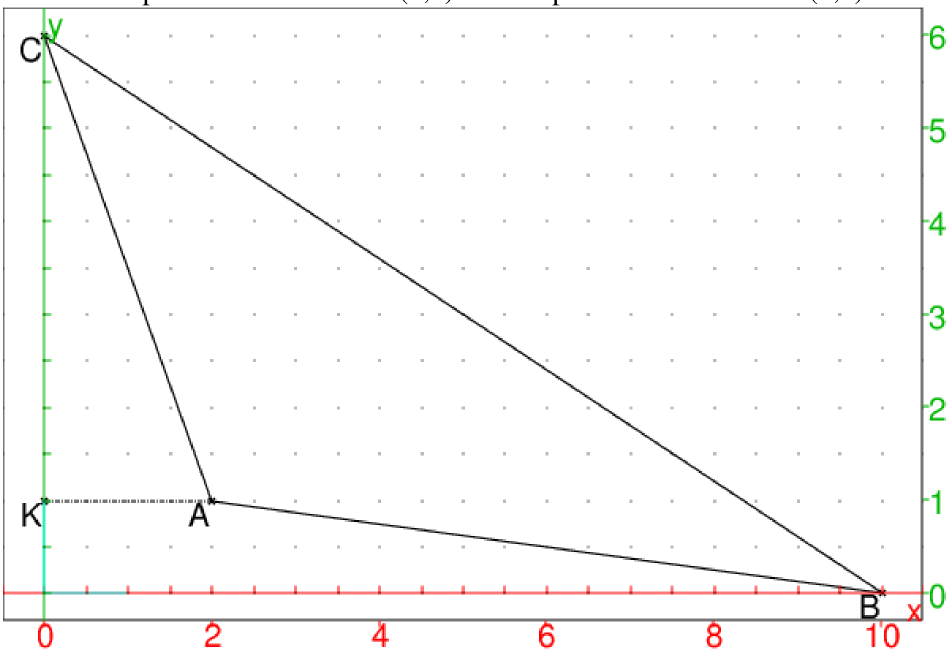
```
B:=point(18);
C:=point(0,8);
A:=point(6,3);
K:=point(3*i);
J:=point(6);
triangle (A,B,C);
segment(A,6,affichage=2);
segment(A,point(0,3),affichage=2);
```

On obtient :



On tape pour vérifier :
`longueur2(B,C),longueur2(A,C),longueur2(A,B)`
On obtient :
`388,61,153`
L'aire du triangle ABC se calcule facilement par différence :
aire de OBC est égale à 18*8/2=72.
aire de KAC est égale à 5*6/2=15.
aire de $OBAK$ est égale à 3*6+3*12/2=3*12=36.
Donc l'aire du triangle ABC est égale à 72-15-36=21.

On vérifie avec `Xcas`, on tape :
`aire(triangle(A,B,C))`
On obtient :
`21`
Pour faire un exercice de même style, il faut choisir d'avoir la même configuration pour la construction du triangle ABC.
Par exemple, on choisit B sur l'axe des x et C sur l'axe des y tels que :
$OB = 2 + 8 = 10$, $OC = 1 + 5 = 6$.
Soient A le point de coordonnées (2,1) et K le point de coordonnées (0,1).



On a alors :
$BC^2 = 100 + 36 = 136$
$AC^2 = 4 + 25 = 29$
$AB^2 = 1 + 64 = 65$
Les côtés du triangle ABC ont donc pour longueur :
$BC = \sqrt{136}$, $AC = \sqrt{29}$, $AB = \sqrt{65}$
On a :
aire de OBC est égale à 10*6/2=30.
aire de KAC est égale à 5*2/2=5.
aire de $OBAK$ est égale à 1*(2+8/2)=6.
Doncet l'aire du triangle ABC est égale à 30-5-6=19.

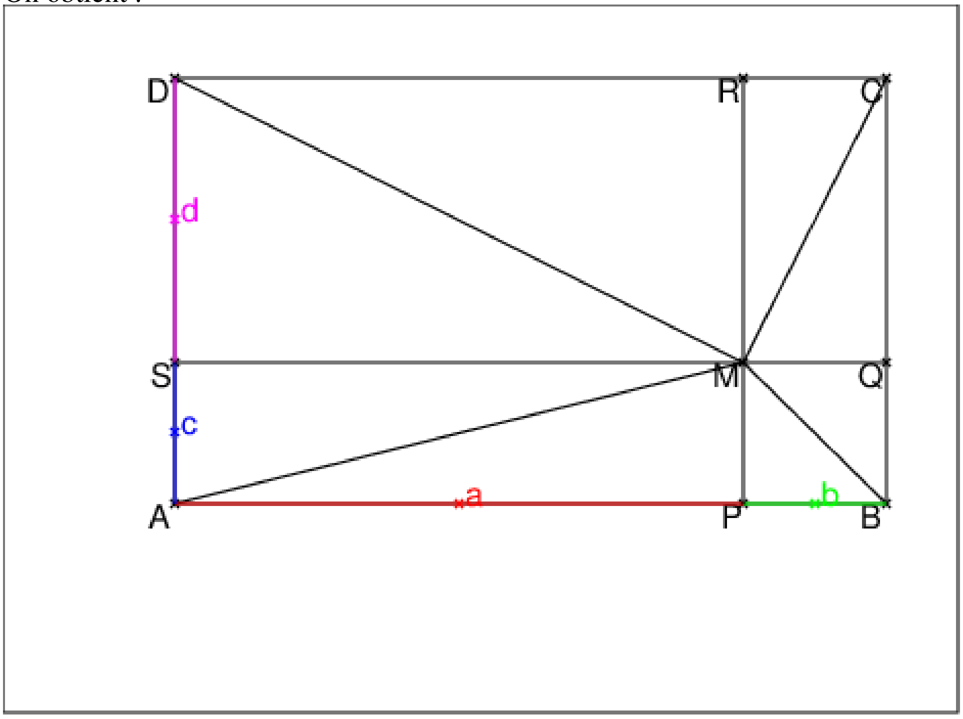
12.1.3 Exercice 2

Soient dans le plan, un rectangle $ABCD$ et un point M à l'intérieur du rectangle.
Les parallèles aux côtés du rectangle passant par M coupent :
AB en P, BC en Q, CD en R et AD en S.
On pose $a = AP$, $b = PB$, $c = AS$ et $d = SD$.
Calculer MA^2, MB^2, MC^2. MD^2 en fonction de a, b, c, d
Calculer MC^2 en fonction de MA^2, MB^2, MD^2.

Application numérique :
On donne $MA = 9$, $MB = 7$ et $MD = 6$
Calculer MC
On veut déterminer les rectangles $ABCD$ ayant cette propriété à savoir $MA = 9$, $MB = 7$ $MC = 2$ et $MD = 6$ pour un point M du plan ABC.
Pour cela on note :
$x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$ et $t = d^2$.
Déterminer le système linéaire que vérifie x, y, z, t
Résoudre ce système linéaire avec `Xcas`.
Construire un rectangle $ABCD$ ayant cette propriété.
La solution
On ouvre un niveau de géométrie 2-d.
On tape :

```
A:=point(0);
B:=point(5);
C:=point(5+i*3);
D:=point(i*3);
polygone(A,B,C,D);
M:=point(4+i);
P:=point(4);
R:=point(4+3*i);
S:=point(i);
Q;=point(5+i);
segment(A,M);
segment(B,M);
segment(C,M);
segment(D,M);
segment(P,R);
segment(S,Q);
segment(A,P,affichage=1),
point(2,legend="a",affichage=1)
segment(B,P,affichage=2),
point(4.5,legend="b",affichage=2)
segment(A,S,affichage=4),
point(i/2,legend="c",affichage=4)
segment(D,S,affichage=5),
point(i*2,legend="d",affichage=5)
```

On obtient :



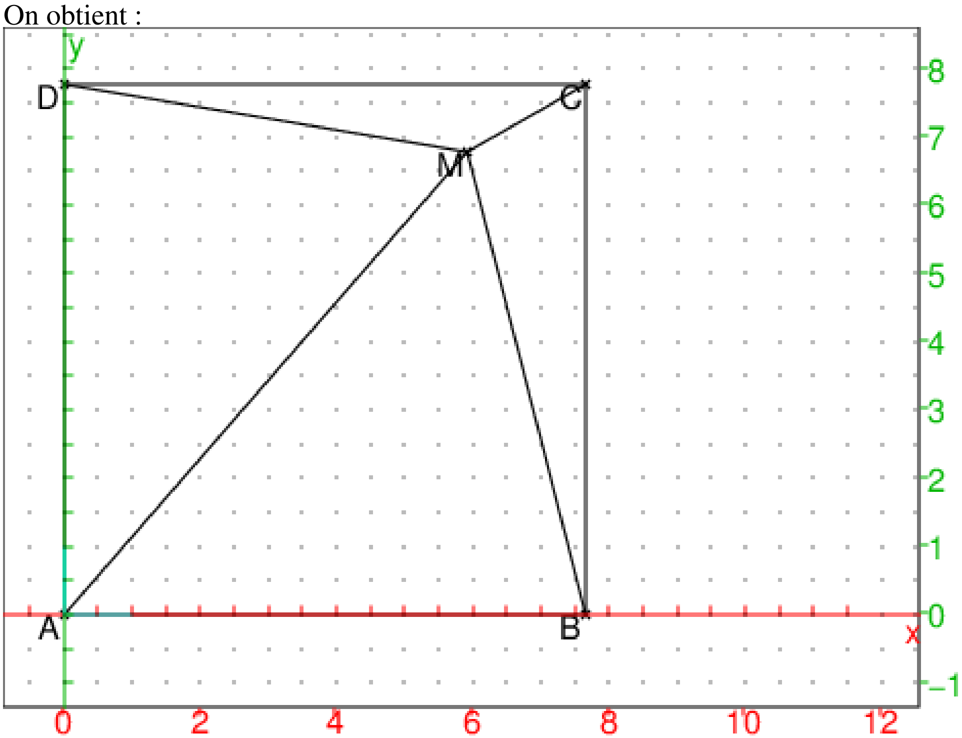
On a d'après Pythagore :
$AM^2 = a^2 + c^2$
$BM^2 = b^2 + c^2$
$CM^2 = b^2 + d^2$
$DM^2 = a^2 + d^2$
Donc :
$AM^2 + CM^= a^2 + c^2 + b^2 + d^2$
$BM^2 + DM^2 = b^2 + c^2 + a^2 + d^2$
Donc $AM^2 + CM^= BM^2 + DM^2$
On en déduit :
$CM^2 = BM^2 + DM^2 - AM^2$ On remarquera que cette relation est enore valable si M se trouve à l'extérieur du rectangle $ABCD$.
Application numérique :
$CM^2 = 49 + 36 - 81 = 4$ Donc $CM = 2$

Soit maintenant un rectangle $ABCD$ et un point M du plan ABC.
Les parallèles aux côtés du rectangle passant par M coupent :
AB en P, BC en Q, CD en R et AD en S.
On pose $a = AP$, $b = PB$, $c = AS$ et $d = SD$.
On a d'après ce qui précède :
$AM^2 = a^2 + c^2 = 81$
$BM^2 = b^2 + c^2 = 49$
$CM^2 = b^2 + d^2 = 4$
$DM^2 = a^2 + d^2 = 36$
c'est à dire si $x = a^2, y = b^2, z = c^2, t = d^2$:
x+z=81

y+z=49
y+t=4
x+t=36
Avec Xcas, on tape :
`resoudre_systeme_lineaire([x+z=81,y+z=49,y+t=4,x+t=36],[x,y,z,t])`
On obtient :
`[-t+36,-t+4,t+45,t]`
Si on choisit $d^2 = t = 1$ i.e, $d = 1$, on en déduit $a^2 = 35$, $b^2 = 3$, $c^2 = 46$
Donc le rectangle $ABCD$ a pour côté :
$AB = a + b = \sqrt{35} + \sqrt{3}$ et
$AD = \sqrt{46} + 1$
Le point M a pour coordonnées $(\sqrt{35}, \sqrt{46})$.
On tape

```
M:=point(sqrt(35),sqrt(46));
A:=point(0);
B:=point((sqrt(35)+sqrt(3)));
C:=point((sqrt(35)+sqrt(3)+i+i*sqrt(46)));
D:=point(i+i*sqrt(46));
polygone(A,B,C,D);
segment(A,M);
segment(B,M);
segment(C,M);
segment(D,M);
```

On obtient :



On tape :
`longueur(M,A)`
On obtient :

```
9
```
On tape :
```
longueur(M,B)
```
On obtient :
```
7
```
On tape :
```
longueur(M,D)
```
On obtient :
```
6
```
On tape :
```
longueur(M,C)
```
On obtient :
```
2
```

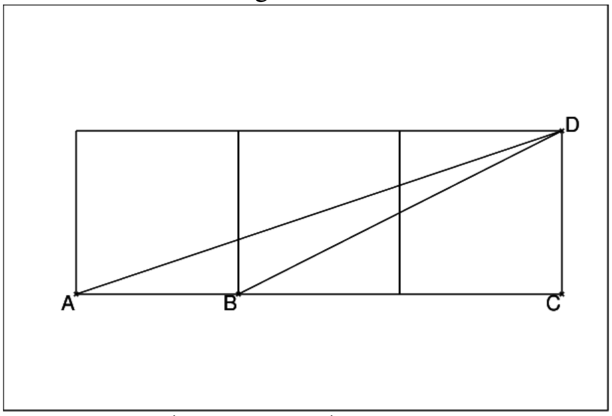
Ou bien on utilise t comme paramètre (t varie entre 0 et 4 pour que $y = b^2$ soit positif). On a $a^2 = -36 - t, b^2 = 4 - t, c^2 = 45 + t, d^2 = t$ donc on tape

```
supposons(t=[1,0,4,0.1]);
M:=point(sqrt(36-t),sqrt(45+t));
A:=point(0);
B:=point(sqrt(36-t)+sqrt(4-t));
C:=point(sqrt(36-t)+sqrt(4-t)+i*sqrt(t)+i*sqrt(45+t));
D:=point(i*sqrt(t)+i*sqrt(45+t));
polygone(A,B,C,D);
segment(A,M);
segment(B,M);
segment(C,M);
segment(D,M);
longueur(M,A);
longueur(M,B);
longueur(M,C);
longueur(M,D);
plotparam(affixe(M),t=0..4);
```

M a comme coordonnées a, b.
On a $a^2 + c^2 = 81$ et $a^2 = (36 - t), c^2 = (45 + t) = -a^2 + 81$.
donc M se trouve sur l'arc M_0M_1 du cercle de centre A et de rayon 9. avec $M0$ de coordonées $(6, 3\sqrt{5})$ et $M1$ de coordonnées $(4\sqrt{2}, 7)$.

12.2 Exercice 3

On considère la figure formée de 3 carrés :



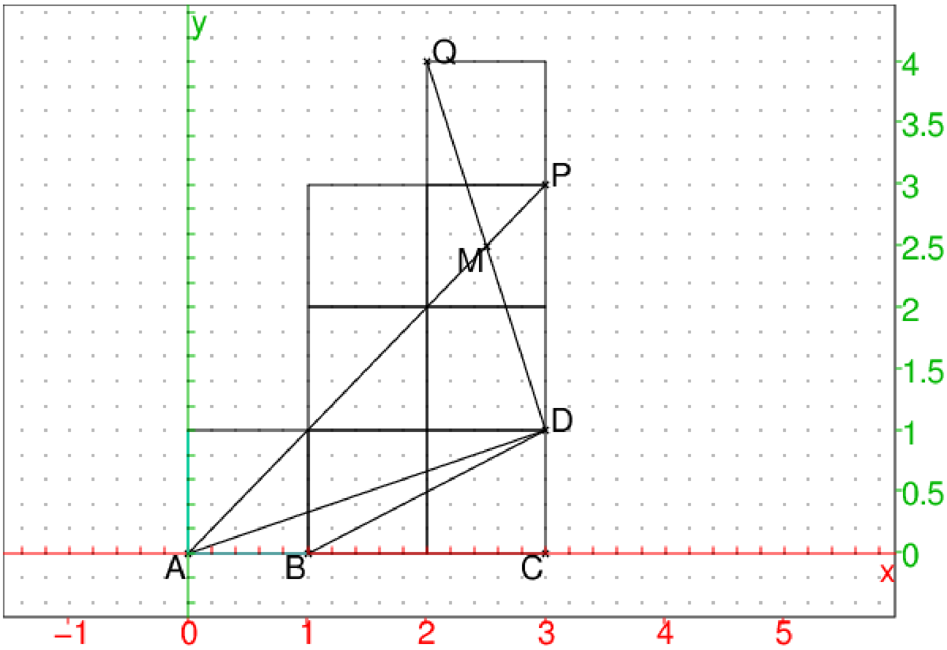
Soient $a = \widehat{CAD}$ et $b = \widehat{CBD}$.
Que vaut $a + b$? On cherchera une solution trigonométrique et géométrique.
Solution trigonométrique
On a :
$\tan(a) = \frac{1}{3} < 1$ et $a < \frac{\pi}{2}$ donc $a < \frac{\pi}{4}$
$\tan(b) = \frac{1}{2} < 1$ et $b < \frac{\pi}{2}$ donc $b < \frac{\pi}{4}$
donc
$a + b < \frac{\pi}{2}$
On a :
$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$
$\tan(a) + \tan(b) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$
$1 - \tan(a) * \tan(b) = 1 - \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$
Donc $\tan(a + b) = 1$.
On a :
$\tan(a + b) = 1$ et $a + b < \frac{\pi}{2}$ entraine que $a + b = \frac{\pi}{4}$
On tape dans un niveau de géométrie :

```
A:=point(0)
B:=point(1)
C:=point(3)
D:=point(3+i)
simplify(angle(A,C,D)+angle(B,C,D))
```

On obtient : `1/4*pi`
Solution géométrique
On considère les points :

```
P:=point(3+3*i)
Q:=point(2+4*i
```

Soit M l'intersection de AP et DQ.



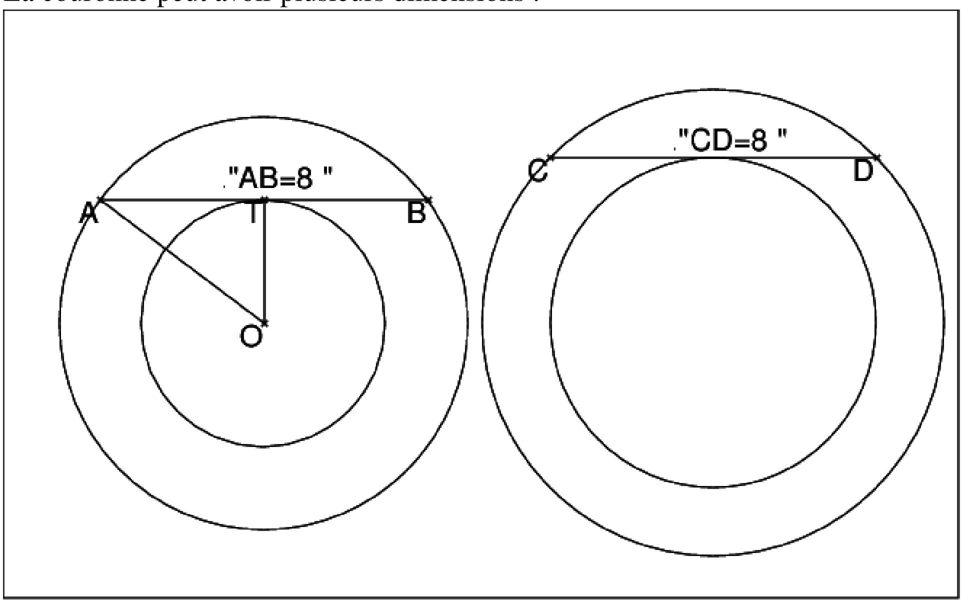
Montrer que $\widehat{CAP} = \frac{\pi}{4}$ et que le triangle DAM est rectangle en D.
Montrer que M est le milieu de DQ. En déduire que $2 * MD = AM$
Montrer que le triangle AMD est semblable au triangle BCD. En déduire que $b = \widehat{DAM}$ et que $a + b = \frac{\pi}{4}$.
En effet :
On a AP a pour pente 1 donc $\widehat{CAP} = \frac{\pi}{4}$
On a AD a pour pente $\frac{1}{3}$ et DQ a pour pente -3 donc AD et DQ sont perpendiculaires (puisque $-3 * \frac{1}{3} = -1$).
M a pour coordonées $\frac{5}{2}; \frac{5}{2}$ donc M est le milieu de DQ et $2DM = DQ$.
$AD = DQ$ car ce sont les hypothénuses de 2 triangles rectangles egaux. donc $2DM = AD$
Les triangles rectangles BCD et ADM sont donc semblables et donc $b = \widehat{DAM}$.
On a donc montrer que $\frac{\pi}{4} = \widehat{CAD} + \widehat{DAM} = a + b$.
On tape : `angle(B,C,D)==angle(AD,P)`
On obtient : `vrai`

Chapitre 13

Des calculs d'aires

13.1 Aire d'une couronne circulaire

Soit une couronne circulaire de rayons r et R ($R > r$).
On sait qu'une corde du cercle de rayon R qui est tangente au cercle de rayon r a pour longueur 8 unités.
Calculer l'aire de cette couronne.
La couronne peut avoir plusieurs dimensions :

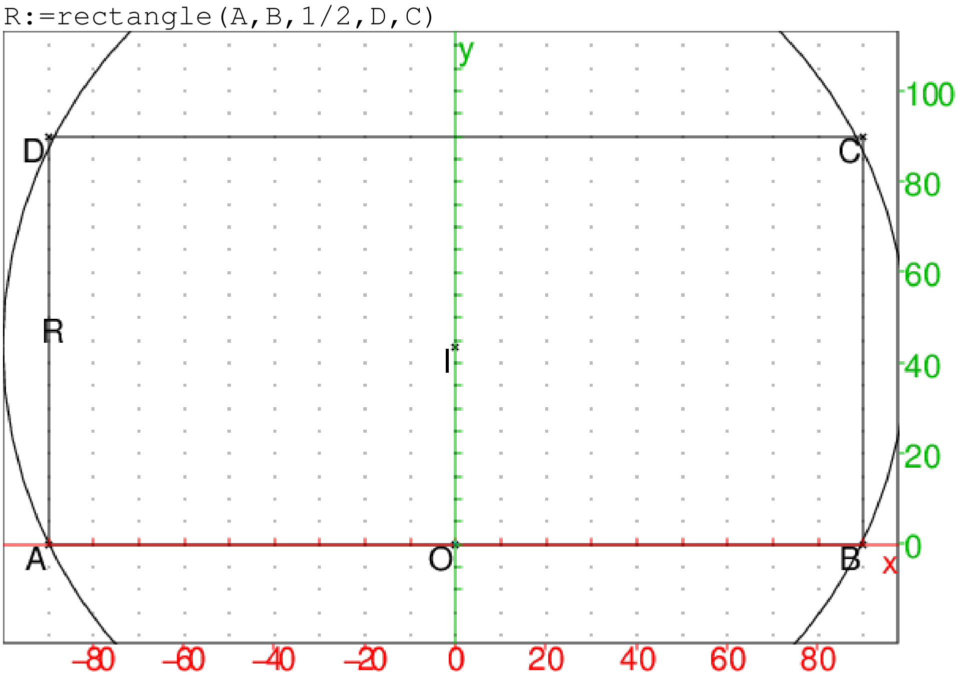


Mais son aire est toujours la même , en effet : Si O est le centre commun aux 2 cercles et si T est le point de tangence, on a :
$OA = R$, $OT = r$ et $AT = TB = 4$.
D'après le théorème de Pythagore on a :
$R^2 = r^2 + 4^2$ donc $R^2 - r^2 = 16$
L'aire de la couronne est donc :
$\pi R^2 - \pi r^2 = 16\pi$

13.2 Recouvrir une table rectangulaire avec une nappe ronde

Peut-on recouvrir une table rectangulaire de 180 cm x 90 cm avec une nappe ronde de 200 cm de diamètre ?
Essayons :
Soit R le rectangle représentant la table et N le cercle de rayon 100 représentant la nappe. Il faut placer N de façon que la longueur de 180 cm de R soit une corde de N.
Faisont une figure, on tape :

```
A:=point(-90);
B:=point(90)
O:=point(0)
R:=rectangle(A,B,1/2,D,C)
```



Le centre I du cercle N doit donc être sur l'axe des x et comme d'après Pythagore on a $OI^2 + OB^2 = IB^2 = 100^2$ on a :
$OI^2 = 100^2 - OB^2 = 100^2 - 90^2 = 1900$
Donc $0I = 10\sqrt{19} \simeq 43.5889894354$.
On tape :

`I:=point(10*sqrt(19)*i);`

Le point C est-il à l'extérieur du cercle N ? Calculons IC^2, on tape :

`normal(longueur2(I,C)]`

On obtient :

`-1800*sqrt(19)+18100` On tape :

`evalf(longueur(I,C)-longueur(I,B))`

On obtient :

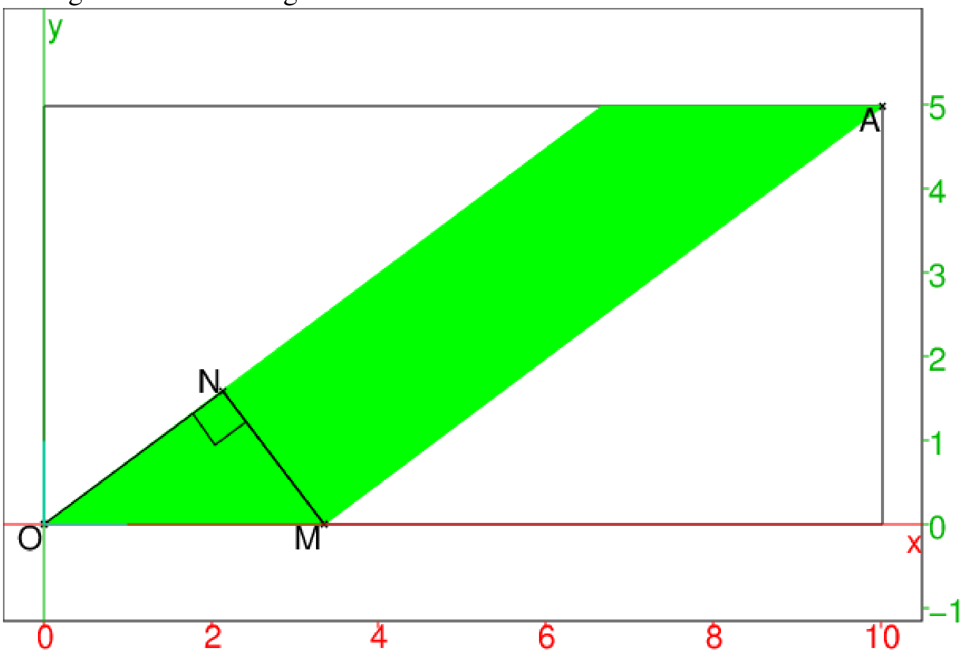
`1.26194695752`

Donc les points C et D se trouvent à l'extérieur de la nappe.
On peut aussi, pour des raisons de symétrie placer le centre de N au centre de la table i.e. au point de coordonnées $(0, 45)$.

Dans ce cas, les 4 points A, B, C, D se trouve à l'extérieur de N en effet on tape :
`evalf(longueur(i*45,B))`
On obtient :
`100.623058987`
Donc les 4 points A, B, C, D se trouve à l'extérieur et à 0.623 cm du bord de la nappe !

13.3 L'aire d'un sentier

Dans un jardin de 10 mètres sur 5 mètres, on veut faire un sentier de 2 mètres de large comme sur la figure ci-dessous.



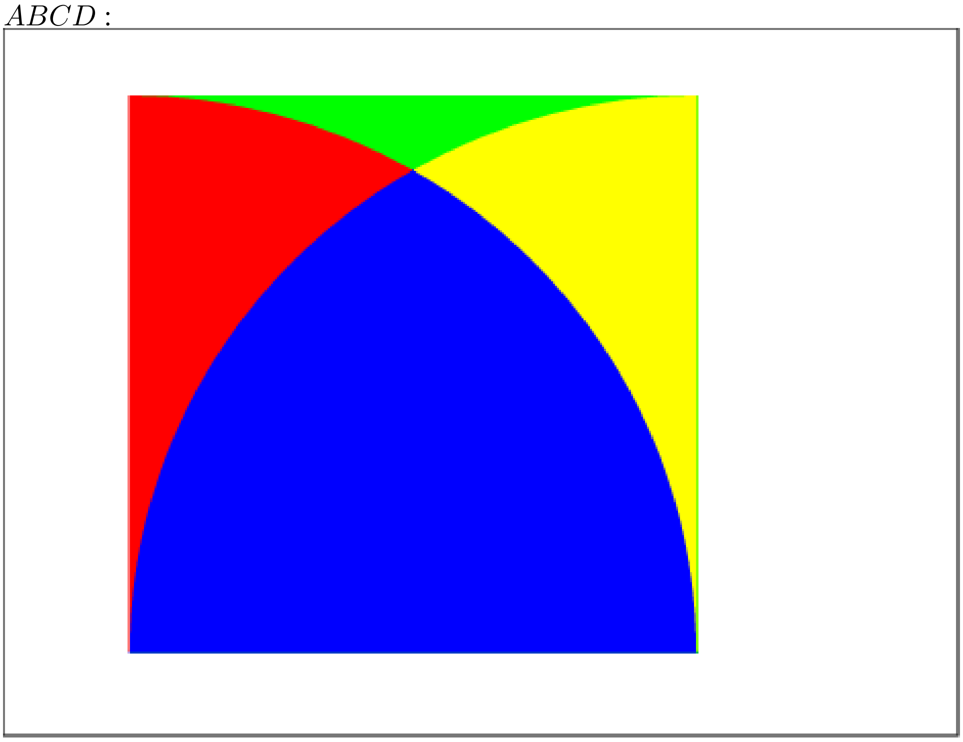
Calculer l'aire de ce sentier i.e. l'aire du parallélogramme vert.
Avec `Xcas` :
l'aire du parallélogramme vert et égale 'a $2OA$ mètres carrés.
Il faut don calculer OA. Posons $OM = x$ et $ON = a$.
On a :
$MA^2 = (10 - x)^2 + 25$ (th de Pythagore) $x^2 = 4 + a^2$
$tan(angle(O, M, N) = \frac{5}{10-x} = \frac{2}{a} = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$
Donc :
$\frac{25}{(10-x)^2} = \frac{4}{x^2-4}$
On tape :
`solve(25/(10-x)^2=4/(x^2-4))`
On obtient :
`[-50/7,10/3]`
Donc $OM = x = 10/3$ car $OM > 0$
En effet l'équation est :
$4(10 - x)^2 = 25x^2 - 100$
En simplifiant, l'équation est :
$21x^2 + 80x - 500 = 0$

Il reste à résoudre cette équation du 2nd degré :
$\Delta' = 1600 + 21 * 500 = 12100 = 110^2$ donc la solution positive est :
$x = (-40 + 110)/21 = 70/21 = 10/3$

On a donc $MA^2 = (10 - 10/3)^2 + 25$.
On tape :
`(10-10/3)^2+25)`
On obtient MA^2 :
`625/9`
Donc $MA = 25/3$
L'aire du sentier est donc : 50/3 mètres carrés.

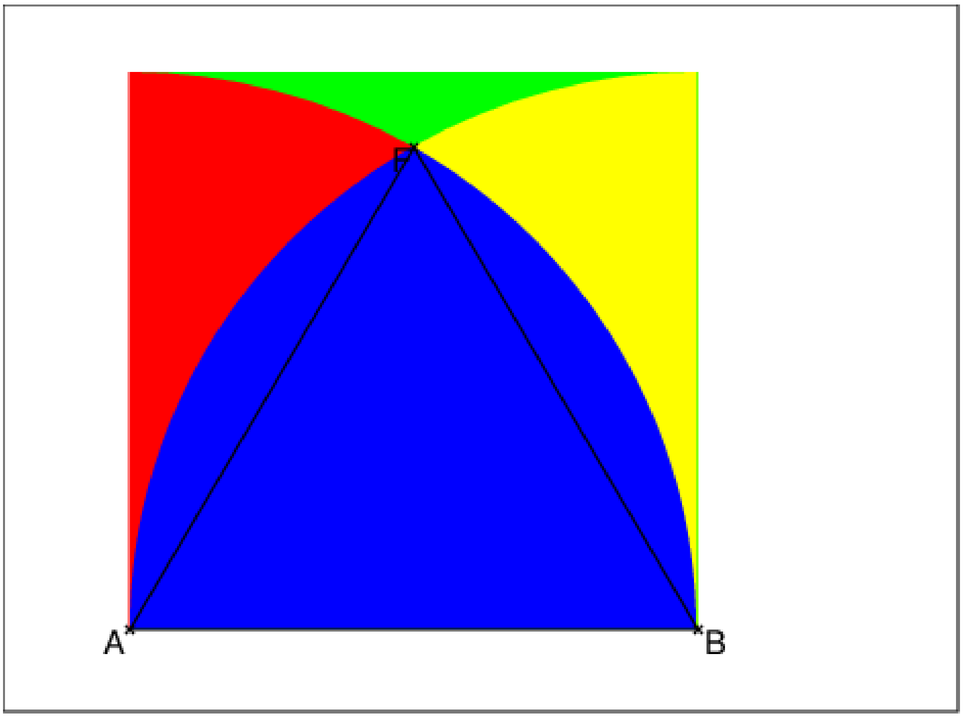
13.4 L'aire d'un secteur circulaire

Soit un carré $ABCD$ tel que $AB = 1$.
On trace l'arc de cercle BD de centre A et de rayon 1 et l'arc de cercle AC de centre B et de rayon 1.
Ces 2 arcs se coupent en F et déterminent les 4 régions ci-dessous dans le carré $ABCD$:



Calculer l'aire de chacune de ces régions.
Pour faire le dessin, on a tapé :

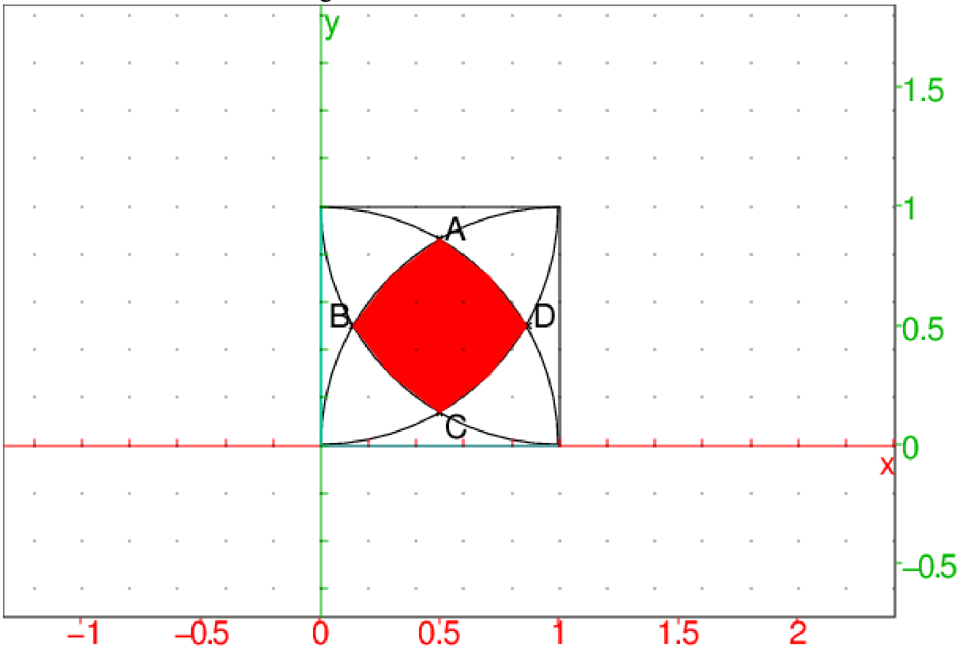
```
carre(0,1,affichage=vert+rempli);
cercle(0,1,pi/3,pi/2,affichage=1+rempli);
cercle(1,1,pi/2,2*pi/3,affichage=3+rempli);
cercle(0,1,0,pi/3,affichage=4+rempli);
cercle(1,1,2*pi/3,pi,affichage=4+rempli);
```



La somme de l'aire bleue et de l'aire du triangle èquilatèral ABF est égale à 2 fois l'aire d'un secteur angulaire d'angle $\pi/3$ et de rayon 1.
L'aire d'un secteur angulaire d'angle $\pi/3$ et de rayon 1 est égale à :
$\pi/6$
L'aire du triangle èquilatèral ABF est égale à :
$\sqrt{3}/4$
L'aire bleue est donc égale à :
$2 * \pi/6 - \sqrt{3}/4 = \pi/3 - \sqrt{3}/4$
On tape :
`evalf(pi/3-sqrt(3)/4)`
On obtient l'aire bleue :
`0.614184849304`
L'aire rouge est égale à l'aire jaune et c'est aussi la difference entre l'aire du secteur angulaire d'angle $\pi/2$ et de rayon 1 avec l'aire bleue. L'aire rouge est donc égale à $\pi/4 - \pi/3 + \sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/4 - \pi/12$.
On tape :
`evalf(-pi/12+sqrt(3)/4)`
On obtient l'aire rouge ou l'aire jaune :
`0.171213314093`
L'aire verte est égale à la difference entre l'aire du carré et la somme de l'aire rouge de l'aire jaune et de l'aire bleue.
L'aire verte est donc égale à :
$1 - (-\pi/6 + \sqrt{3}/2 + \pi/3 - \sqrt{3}/4) = 1 - \pi/6 - \sqrt{3}/4$.
On tape :
`evalf(1-pi/6-sqrt(3)/4)`
On obtient l'aire verte :
`0.0433885225095`

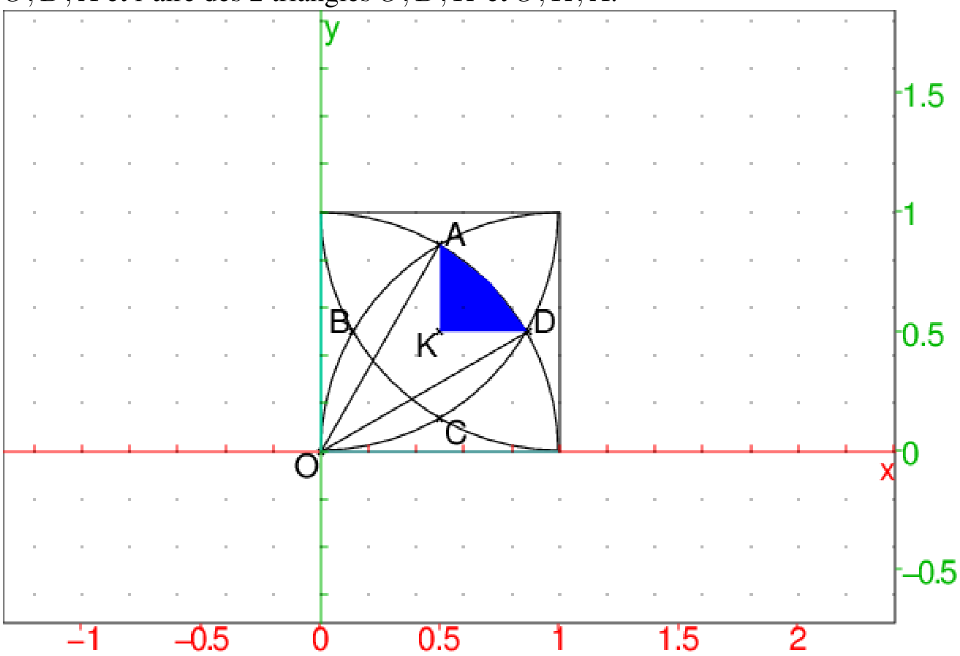
13.5 Exercice 1

On considère un carré de côté 1 cm et les cercles de centre les sommets du carré et de rayon 1 unité. On considère les intersections A, B, C, D de ces cercles qui se trouvent à l'intérieur du carré selon la figure ci-dessous : Calculer l'aire de la sur-



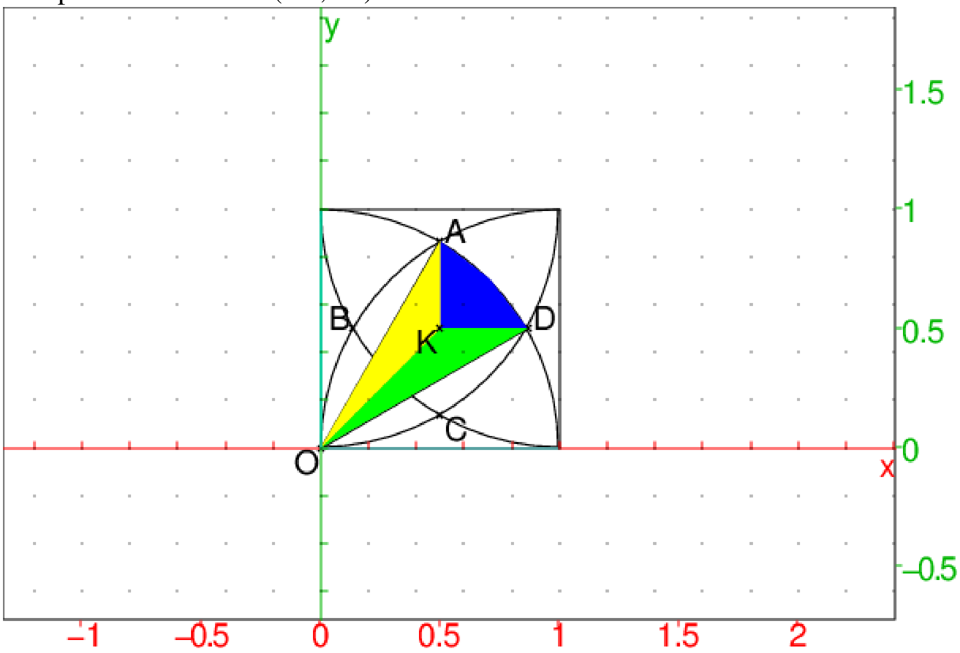
face en rouge.

Soit K le centre du carré.
On va calculer l'aire bleue en faisant la différence entre l'aire du secteur angulaire O, D, A et l'aire des 2 triangles O, D, K et O, K, A.



A a pour coordonnées $(1/2,\sqrt{3}/2)$ D a pour coordonnées $(\sqrt{3}/2,1/2)$ donc l'angle $\widehat{DOA} = \pi/6$ et l'aire du secteur ODA vaut :
$\pi/12$ cm^2.

K a pour coordonnées (1/2,1/2).



Les triangles ODK et OAK sont symétriques par rapport à OK.
$KD = \sqrt{3} - 1)/2$, donc l'aire de ODK vaut $KD * 1/2 * 1/2 = (\sqrt{3} - 1)/8$.
Donc l'aire bleue vaut :
$(\pi/12 - (\sqrt{3} - 1)/4)$ cm^2.
L'aire rouge vaut donc :
$\pi/3 - \sqrt{3} + 1) \simeq 0.315146743628$ cm^2.
On peut vérifier avec `Xcas`, on tape :

```
c:=cercle(0,1,pi/6,pi/3)
aire(c)
```

On obtient :

```
pi/12
```

On tape :

```
D:=point(sqrt(3)/2+i/2)
K:=point(1/2+i/2)
aire(0,D,K)
```

On obtient :

```
(-1+sqrt(3))/8
```

On tape :

```
normal(4*(aire(c)+2*aire(0,D,K)))
```

On obtient l'aire rouge cherchée en cm^2 :

```
-sqrt(3)+1+1/3*pi
```

Remarque
On peut aussi faire un calcul d'intégrale.
On tape pour calculer 4 fois l'aire bleue cm^2 :

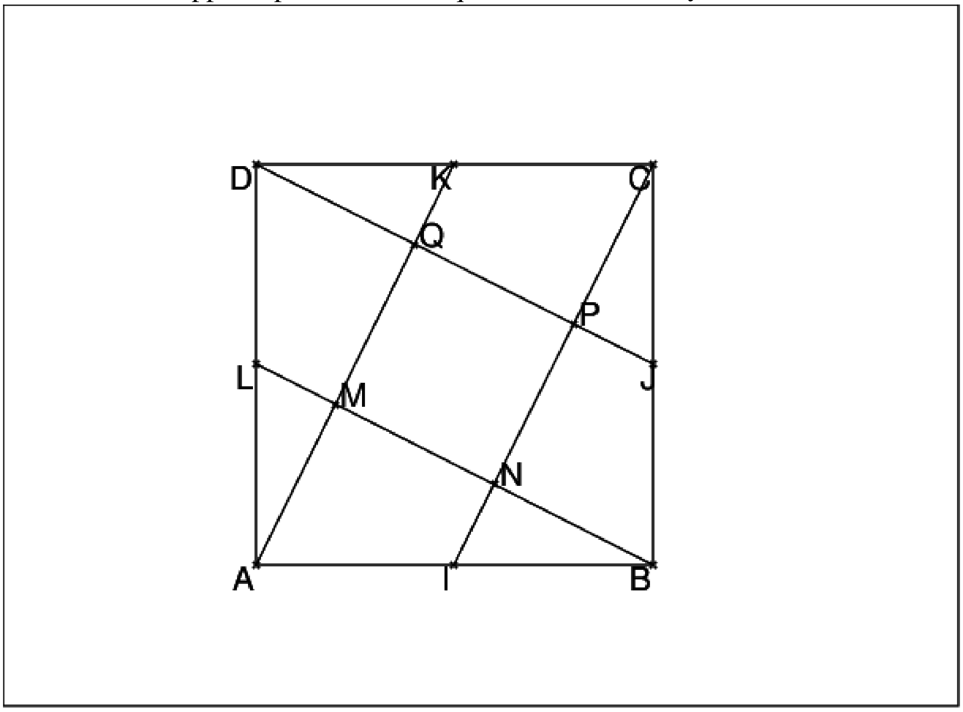
```
normal(4*int(int(1,y,1/2,sqrt(1-x^2)),x,1/2,sqrt(3)/2))
```

On obtient :

```
-(sqrt(3))+1+1/3*pi
```

13.6 Exercice2

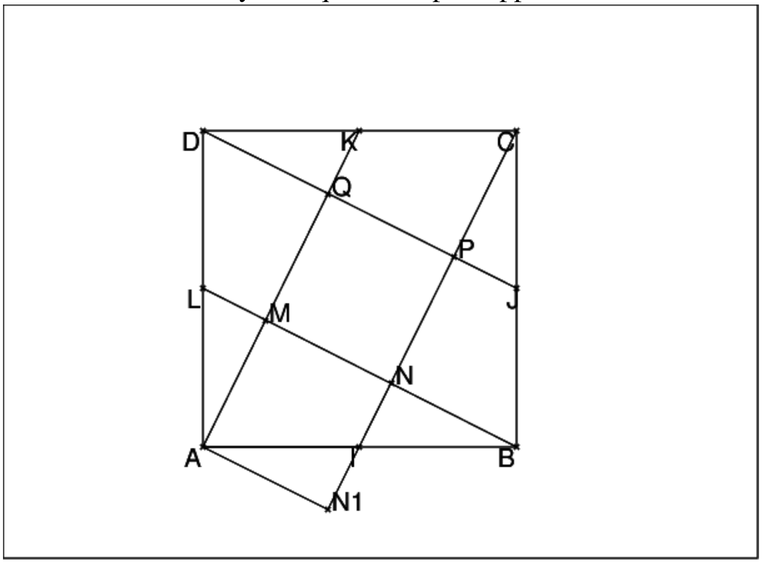
Soit un carré $ABCD$ de côté 5 cm.
Soient I, J, K, L les milieux de AB, BC, CD, DA. On joint chaque sommet au milieu du côté opposé, pour former le quadrilatère $MNPQ$.



Montrer que $MNPQ$ est un carré et calculer son aire.

Le quadrilatère $AICK$ est un parallélogramme puisque :
$AI = KC = AB/2$ et AI et KC sont parallèles.
Donc AK est parallèle à IC et $AK = IC$.
De même $BJDL$ est un parallélogramme égal à $AICK$ donc :
BL est parallèle à JD et $BL = JD$.
Donc $MNPQ$ est un parallélogramme puisque ses côtés sont parallèles 2 à 2.
Considerons les triangles rectangles ABL et DAK : ils sont égaux puisque :
$AB = AD$ et $AL = DK = AB/2$ donc $\widehat{LBA} = \widehat{KAD}$.
$\widehat{BAK} + \widehat{KAD} = \pi/2$ donc $\widehat{BAK} + \widehat{LBA} = \pi/2$
cela prouve que le triangle MAB est rectangle en M puisque :
$\widehat{AMB} + \widehat{BAK} + \widehat{ABL} = \pi$ on a $\widehat{AMB} = \pi/2$
Donc $MNPQ$ est un rectangle (parallélogramme ayant 1 angle droit.
Considérons le triangle rectangle ABM.
I est le milieu de AB, NI est parallèle à AM donc :
N est le milieu de MB et $2IN = AM$ donc $MN = NB$.
Considérons le triangle rectangle ADQ.
L est le milieu de AD, LM est parallèle à DQ donc :
M est le milieu de AQ et $LM = AD/2 = AM/2$ donc $AM = MQ$.
De même Q est le milieu de DP et P est le milieu de CN.
On a donc puisque $MN = MQ$: $NB = MN = AM = MQ$ i.e $2AM = MN = 2DQ$

Les triangles rectangles AMB et DQA sont égaux ($AB = AD$ et $\widehat{BAK} = \widehat{BAM} = \widehat{KAD} = \widehat{QAD}$) Donc on a : $AM = 2MN = AD = 2MQ$ donc $MNPQ$ est un carré.
Considerons N_1 le symétrique de N par rapport à I.



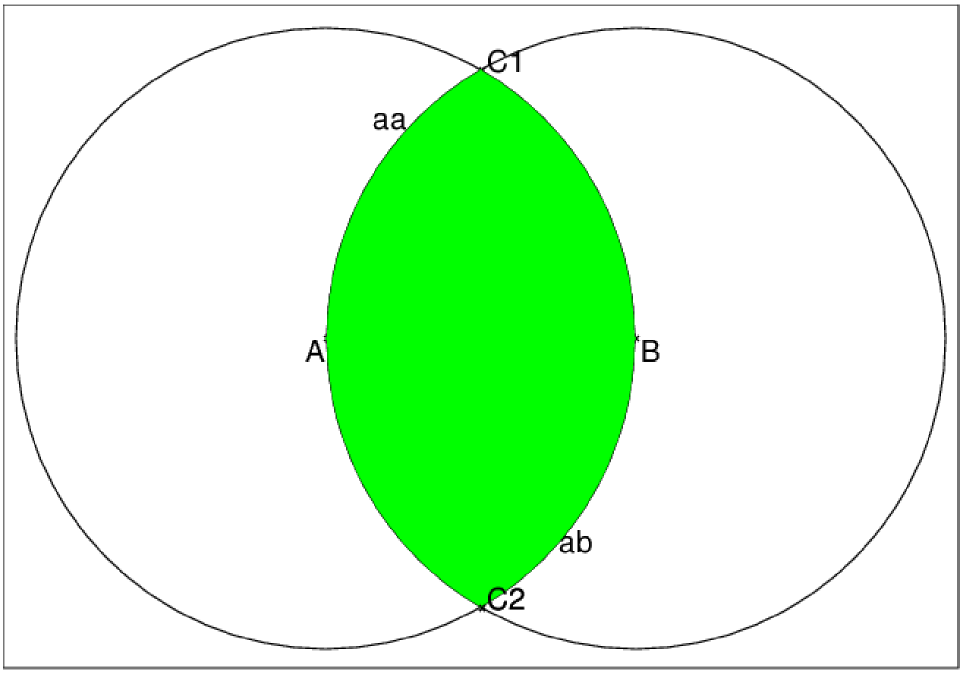
$NN1 = 2IN = AM = MN = NB = AN_1$ donc le quadrilatère AN_1NM est un carré égal au carré $MNPQ$ et dont l'aire est égale à l'aire du triangle ABM.
Les triangles ABM, BCN, CDPet DAQ sont egaux et ils ont la même aire que le carré $MNPQ$.
L'aire da $ABCD$ est de 25 cm^2 et elle est égale à 5 fois l'aire de $MNPQ$ donc l'aire de $MNPQ$est de 5 cm^2.

13.7 Exercice3

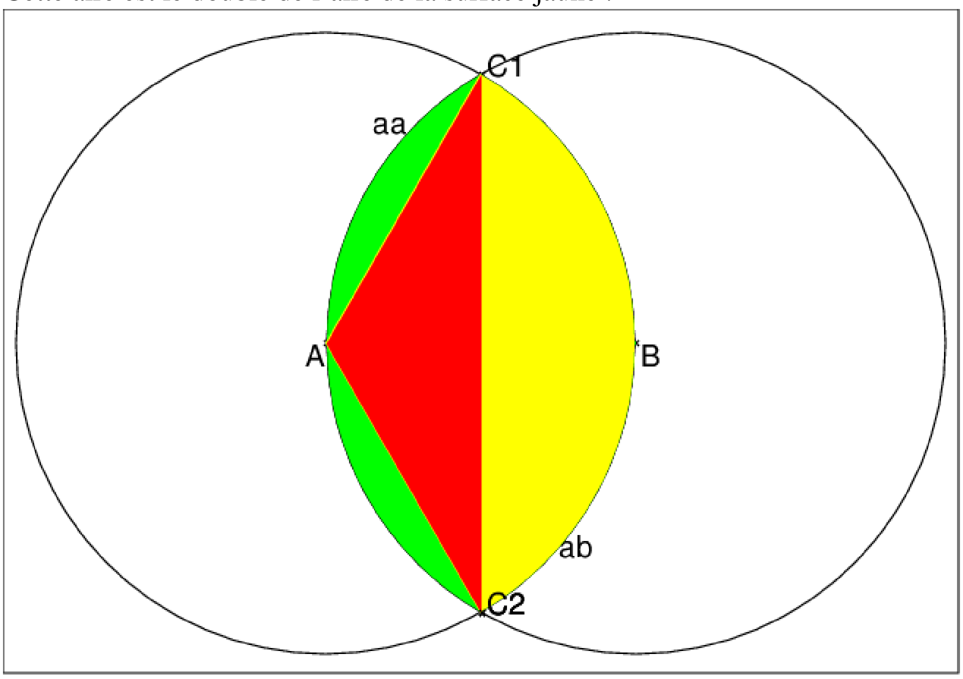
Dans une prairie, un paysan a attaché sa chèvre par 2 cordes de 5 mètres de long. Ces 2 cordes sont attachées respectivement à 2 piquets plantés à 5 mètres l'un de l'autre.
Quelle est la surface de prairie que peut brouter la chèvre.
Solution
On fait un dessin avec `Xcas`.
On tape dans un niveau de géométrie :

```
A:=point(0)
B:=point(5,affichage=quadrant4)
ca:=cercle(A,5):;ca
cb:=cercle(B,5):;cb
C1:=inter_unique(ca,cb)
C2:=inter_unique(ca,cb,[C1])
ab:=arc(C2,C1,2*pi/3)
aa:=arc(C1,C2,2*pi/3,affichage=quadrant2)
affichage([aa,ab],2+rempli)
C2:=C2
```

On obtient :



Il faut donc calculer l'aire de la surface verte qui représente la prairie que peut brouter la chèvre.
Cette aire est le double de l'aire de la surface jaune :



On calcule l'aire du secteur angulaire AC_2C_1 (surface rouge+jaune). Ce secteur angulaire a comme angle au centre $2\pi/3$ donc sont aire vaut :$5^2\pi/3$.
On tape :
`aire(ab)`
On obtient :
`25*pi/3`
On calcule l'aire du triangle AC_2C_1 (surface rouge). Cette aire est égale à l'aire du triangle équilatéral ABC_1 donc elle vaut : $5^2\sqrt{3}/4$.

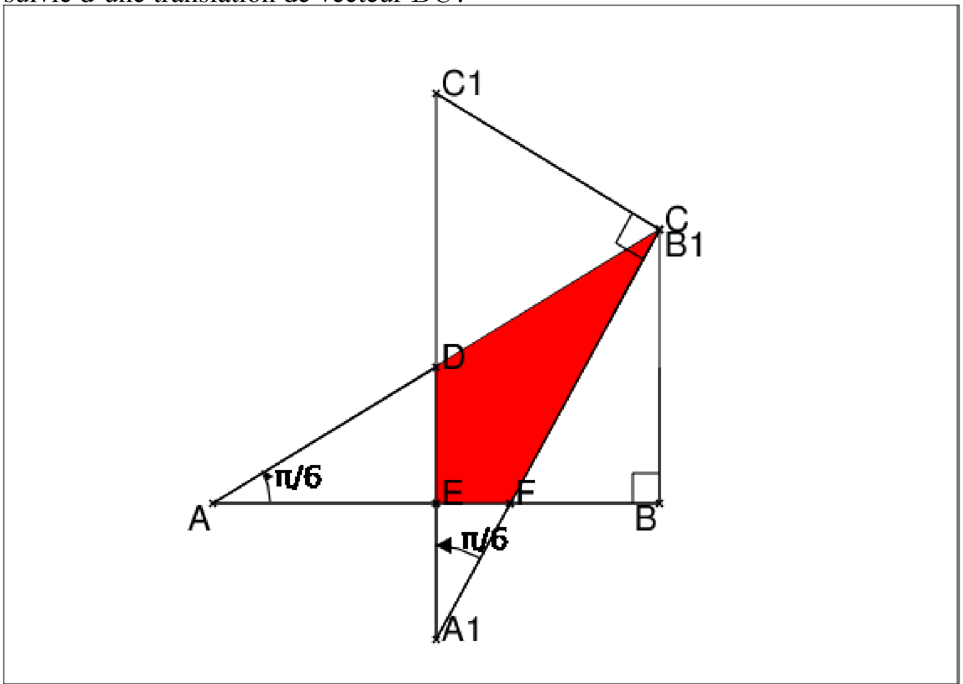
On tape :
`aire(triangle(A,C2,C1))`
On obtient :
`sqrt(3)*1/4*25`
L'aire de la surface jaune vaut donc $25\pi/3 - 25\sqrt{3}/4 = 25(4\pi/ - 3\sqrt{3})/12$
Donc la chèvre peut brouter $100\pi/ - 75\sqrt{3})/6 \simeq 30.7092424652\ m^2$.
On tape :
`2*(aire(ab)-aire(triangle(A,C2,C1)))`
On obtient :
`(-75*sqrt(3)+100*pi)/6`$\simeq 30.7092424652\ m^2$

13.8 Aire d'une intersection de 2 triangles

Rappel Soit ABC un triangle rectangle en B vérifiant $AB = h$, $AC = 2c$ et $BC = c$ (ABC est la moitié d'un triangle équilatéral de côté $2c$ découpé selon une hauteur de longueur h). Son aire est égale à :

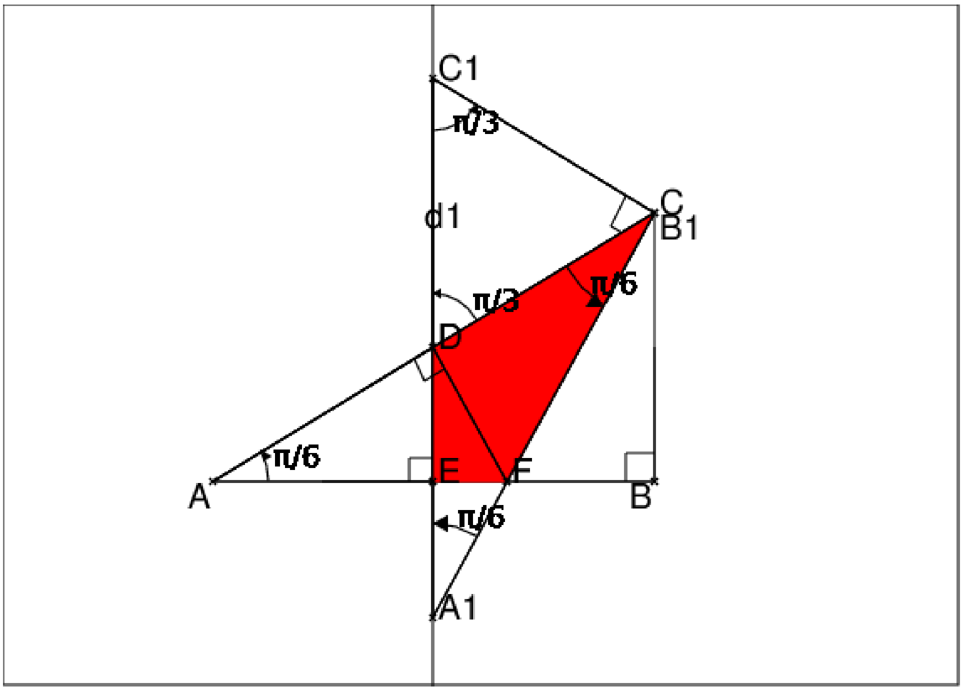
$$ch/2 = c^2\sqrt{3}/2 = h^2\sqrt{3}/6$$

Soit ABC un triangle rectangle en B vérifiant $AC = 2a$ et $BC = a$ (ABC est la moitié d'un triangle équilatéral découpé selon une hauteur).
Soit $A_1B_1C_1$ le transformé de ABC par une rotation de centre B et d'angle $pi/3$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.



Montrer que B_1 est confondu avec C.
Montrer que A_1C_1 est perpendiculaire à AB.
Montrer que DCC_1 est équilatéral.
Montrer que D est le milieu de AC
Montrer que DF est perpendiculaire à AC.
Déterminer l'aire de $CDEF$ qui est l'intersection de ces 2 triangles.

Solution



Dans la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$, B se transforme en B et dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, B se transforme en C, donc B se transforme en C donc $B_1 = C$.
Dans la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$, la droite $d = AC$ se transforme en une droite d_1 et on a $(d, d1) = \pi/3$ donc $d1$ est perpendiculaire à AB et dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, d_1 se transforme en d_1, donc la droite $d = AC$ se transforme en d_1=droite A_1C_1. Donc A_1C_1 est perpendicuaire à AB.
Puisque DA_1 est perpendiculaire à AB on a :
$\widehat{ADA_1} = \pi/3 = \widehat{CDC_1}$ Puisque $\widehat{DC_1C} = \pi/3$, le triangle DCC_1 a 2 angles égaux à $\pi/3$ donc le triangle DCC_1 est équilatéral.
Le triangle DCC_1 est équilatéral donc :
$CC_1 = a = DC = DC_1 = AC/2 = A_1B$ et $\widehat{C_1CD} = \pi/3$ donc $\widehat{DCA_1} = \pi/6$
Le triangle AFC est isocèle de sommet F, D est le milieu de AC donc FD qui est une médiane de ce triangle isocèle est aussi une hauteur.
Le triangle rectangle DFC est la moitié d'un triangle équilatéral de hauteur a donc son aire vaut : $a^2\sqrt{3}/6$.
Le triangle rectangle DEF est la moitié d'un triangle équilatéral de côté de hauteur $a/2$ (puisque D est le milieu de AC et que DE est parallèle à BC, E est le milieu de AB et $DE = CB/2 = a/2$ donc son aire vaut : $(a^2\sqrt{3}/6)/4 = a^2\sqrt{3}/24$.
Le polygone $CDEF$ a donc pour aire :

$$a^2\frac{\sqrt{3}}{6} + a^2\frac{\sqrt{3}}{24} = a^2\frac{5\sqrt{3}}{24}$$

Avec `Xcas`
On fait la figure, on tape :

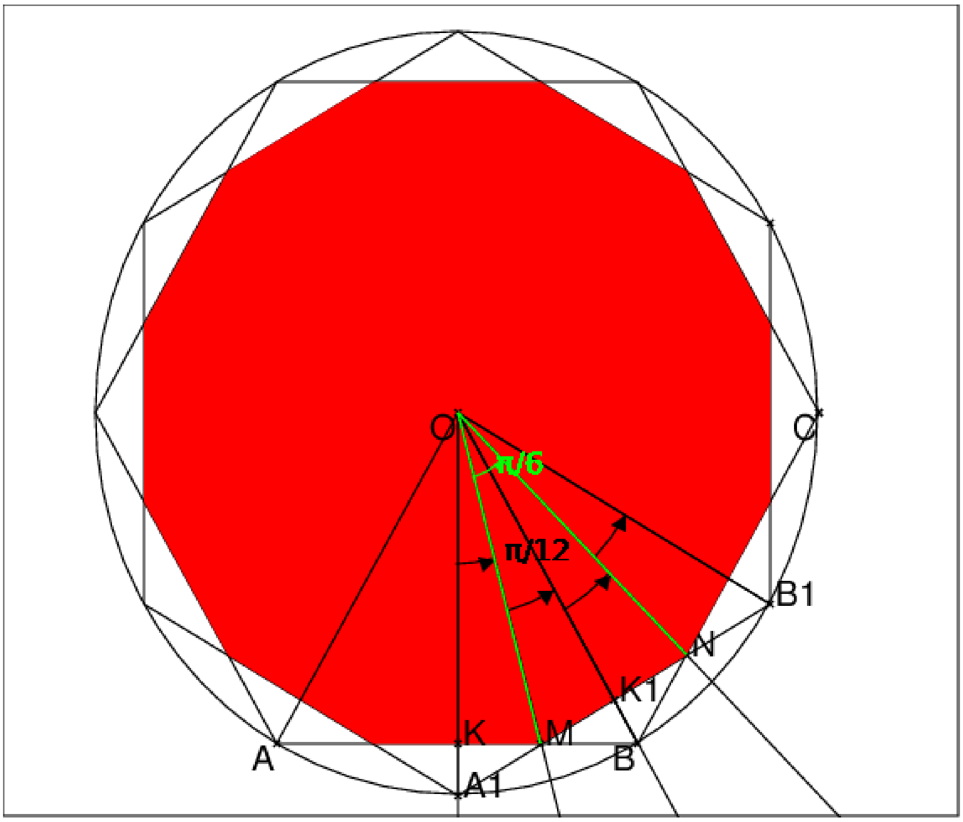
```
supposons(a=[4,0,5,0.1]);
```

```
A:=point(-a*sqrt(3));
B:=point(0);
C:=point(i*a,affichage=quadrant1);
A1:=translation(i*a, rotation(B,pi/3,A));
C1:=translation(i*a, rotation(B,pi/3,C));
triangle(C,C1,A1);
triangle(C,A,B));
D:=inter_unique(segment(A,C),segment(C1,A1));
E:=inter_unique(segment(A,B),segment(C1,A1));
F:=inter_unique(segment(A,B),segment(C,A1));
angle(A1,C,D,"pi/6");
angle(C,A,F,"pi/6");
angle(C,C1,C+(F-C)/3,"");
angle(B,F,B+(C-B)/2,"");
angle(A,F,D,"pi/6");
angle(E,D,E+(A-E)/2,"");
polygone(C,D,E,F,affichage=1+rempli);
D:=D;E:=E;F:=F;
angle(C,A,F,"pi/6");
B1:=point(i*a,affichage=quadrant4));
segment(D,F);
angle(D,C,C1,"pi/3");
angle(C1,D,C,"pi/3");
angle(D,D+(A-D)/3,F,"");
d1:=rotation(B,pi/3,droite(A,C));
```

On vérifie.
On tape :`longueur(D,E)`
On obtient : `a/2`
On tape :`aire(polygone(C,D,F))`
On obtient : `(sqrt(3))/6*a^2`
On tape : `aire(polygone(D,E,F))`
On obtient : `(sqrt(3))/24*a^2`
On tape :
`aire(polygone(C,D,E,F))`
On obtient :
`5*sqrt(3)/24*a^2`

13.9 Aire d'un hexagone et d'un dodécagone

Soit H un hexagone de centre O et de côté AB avec $OA = 0B = AB = 2a$. Soit A_1 (resp B_1) le transformé de A (resp B) dans la rotation de centre O et d'angle $\pi/6$.
On construit l'hexagone H_1 de centre O et de côté A_1B_1.
Montrer que $D = H_1 \cap H$ est un dodécagone régulier de centre 0.
Calculer l'aire de ce dodécagone D.
Solution
Soit M (resp N) l'intersection de A_1B_1 avec AB (resp avec BC).



Soit K (resp K_1) la projection de O sur AB (resp' A_1B_1).
Les triangles rectangles A_1KM, BK_1M et BK_1N sont égaux à la moitié d'un triangle équilatéral car on a :
$KA_1 = OA_1 - OK = 2a - a\sqrt{3} = a(2-\sqrt{3}) = OB - OK_1 = K_1B$.
Donc $KM = MK_1 = KA_1\sqrt{3} = 2a\sqrt{3} - 3a = a(2\sqrt{3}-3)$.
Donc OM est la bissectrice de l'angle $\widehat{KOK_1} = \pi/6$ et
ON est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOB_1} = \pi/6$.
Donc $\widehat{MON} = \pi/6 = 2\pi/12$ Donc D est un dodécagone inscrit dans le cercle de centre O et de rayon OM.
Cherchons S_D l'aire de D.
On a :
$OM^2 = KM^2+OK^2 = a^2(2\sqrt{3}-3)^2+3a^2 = a^2(24-12\sqrt{3}) = a^2(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$.
Donc $OM = a(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$.
L'aire S_T du triangle MBN vaut :
$S_T = MN * BK_1/2 = MK_1 * BK_1 = a^2(2\sqrt{3}-3)*(2-\sqrt{3}) = a^2(7\sqrt{3}-12)$.
L'aire S_H de l'hexagone H vaut $S_H = 6a^2\sqrt{3}$.
On a donc $2S_D = 2S_H - 12S_T$ soit
$S_D = S_H - 6S_T = a^2(6\sqrt{3} - 42\sqrt{3} + 72) = 36a^2(2\sqrt{3}-1)$.
Avec `Xcas`
On fait la figure, on tape :

```
supposons(a=[4,0,5,0.1]);
H:=hexagone(0,2*a,C):;H;C:=C;
O:=point(a+i*a*sqrt(3));
H1:=rotation(O,pi/6,H):;H1;
```

```
A:=point(0);
B:=point(2*a);
A1:=rotation(O,pi/6,A);
B1:=rotation(O,pi/6,B);
M:=inter_unique(segment(A,B),segment(A1,B1)):;;
N:=inter_unique(segment(C,B),segment(A1,B1));
isopolygone(M,N,12,affichage=1+rempli);
M:=affichage(M,quadrant1);
O:=O;
segment(O,A);segment(O,A1);
segment(O,B);segment(O,B1);;
K:=projection(segment(A,B),O);
K1:=projection(segment(A1,B1),O);
cercle(O,2*a);
angle(O,O+2*(A1-O),M,"pi/12"), angle(O,O+3*(M-O),B,"");
angle(O,B+2*(B-O),N,""), angle(O,N+2*(N-O),B1,"");
affichage(angle(O,M,N,"pi/6"),2);
segment(O,M,affichage=2+ligne_tiret_pointpoint);
segment(O,N,affichage=2+ligne_tiret_pointpoint);
```

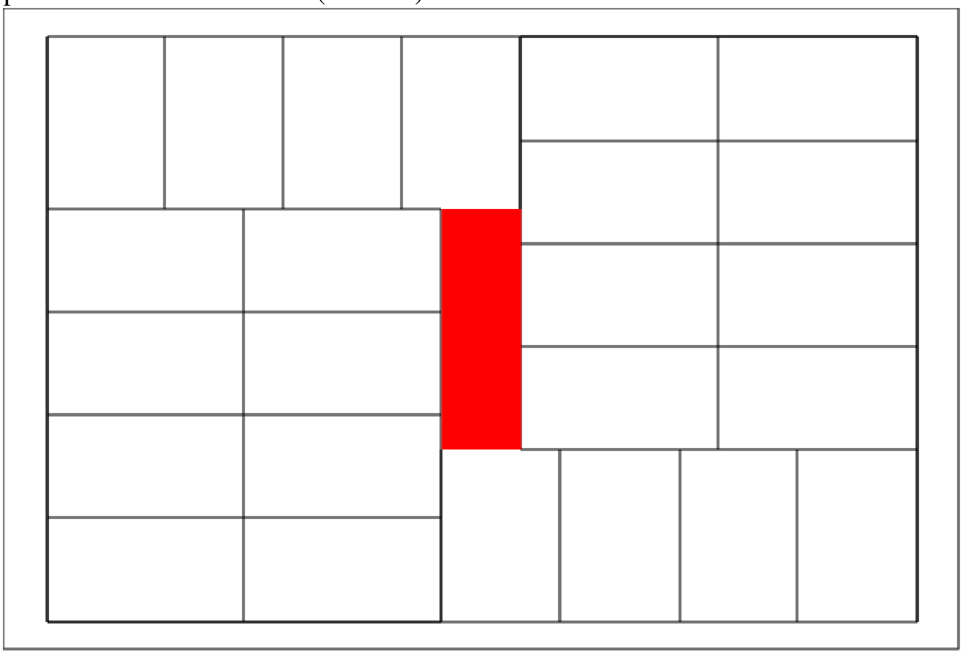
On vérifie.
On tape :
`aire(isopolygone(M,N,12)`
On obtient :
`(-36*sqrt(3)+72)*a^2`
On tape :
`longueur(O,M)`
On obtient :
`-a*sqrt(6)+3*a*sqrt(2)`
On retrouve l'aire d'un dodécagone inscrit dans un cercle de rayon R :
$12R^2\sin(\pi/6)/2 = 3R^2$.
On tape :
`3*longueur2(O,M)`
On obtient :
`36*(2-sqrt(3))*a^2`

Chapitre 14

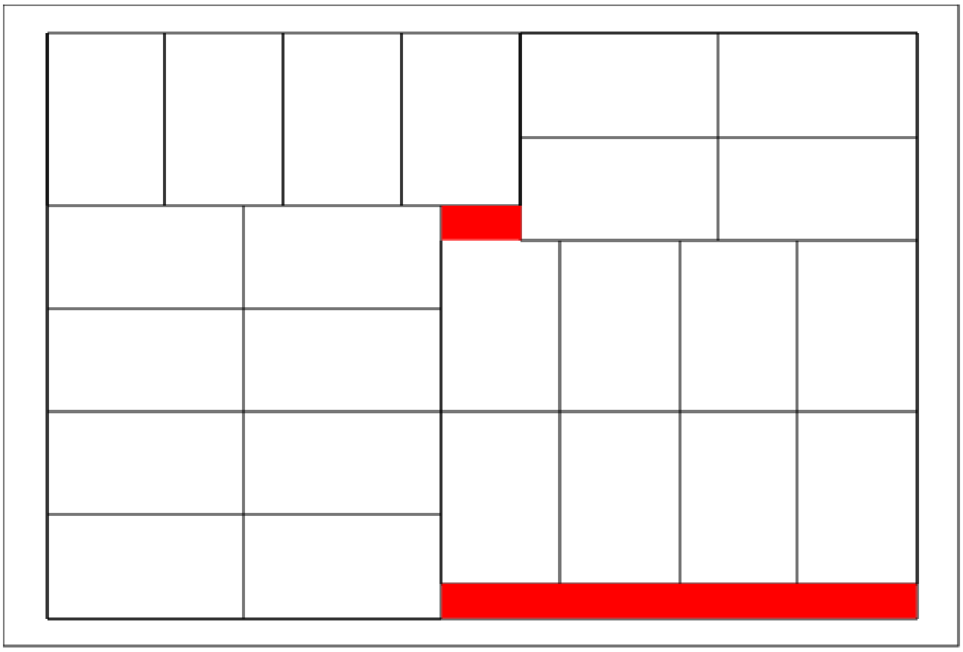
Pour chercher

14.1 Découpage

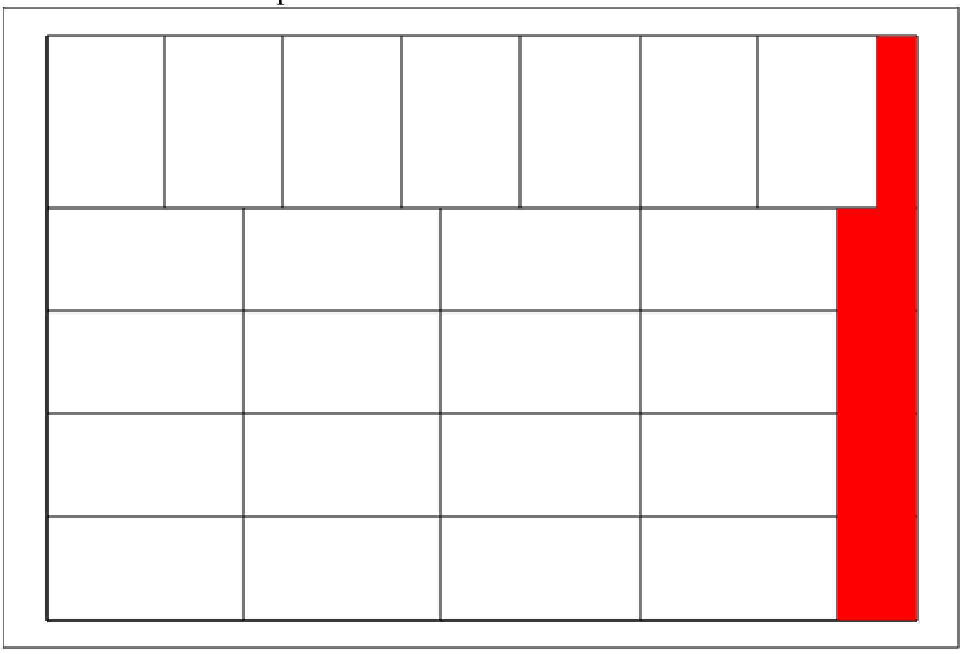
Combien peut-on découper de rectangles de 5 cm sur 3 cm dans un carton rectangulaire de 22 cm sur 17 cm ?
Même question si on veut utiliser un massicot.
Même question si le carton rectangulaire est de 22 cm sur 11 cm.
Une Solution avec des dessins
Pour le carton rectangulaire de 22 cm sur 17 cm, on obtient 24 morceaux, avec une perte minimum de 14 cm^2 ($14<3*5$)



ou encore de façon à ce que le découpage soit encore valable pour le carton de 22 cm sur 11 cm (il suffit d" enlever le rectangle du bas de largeur 6 cm. on obtient alors 16 morceaux, avec une perte de 2 cm^2)



Si on veut utiliser un massicot : on obtient 23 morceaux pour le carton de 22 cm sur 17 cm avec une perte de 29 cm^2.



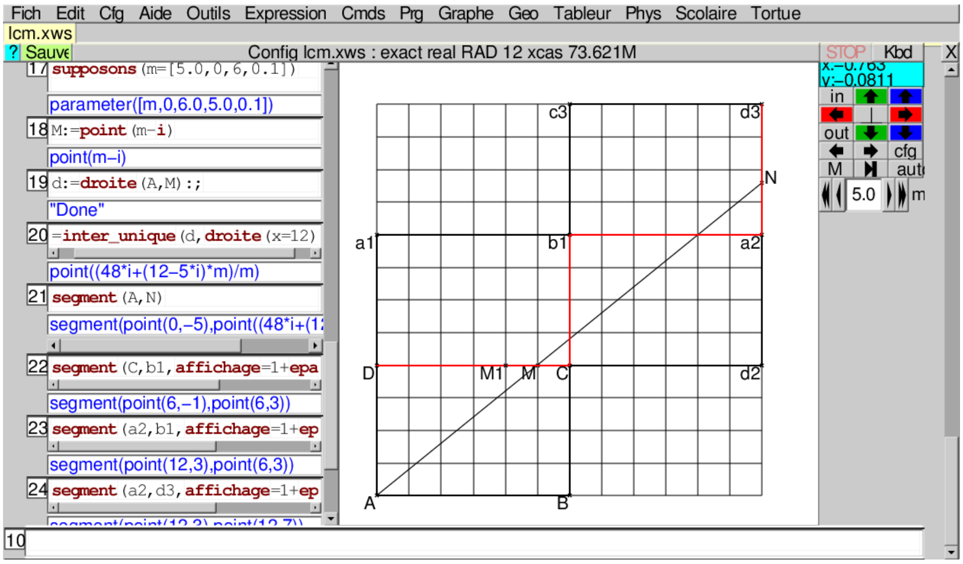
ce découpage est encore valable pour le carton de 22 cm sur 11 cm :
en enlevant le rectangle du bas de largeur 6 cm. on obtient alors 15 morceaux avec une perte de 17 cm^2.

14.2 Le billard

Soient 2 réels a et b et un billard rectangulaire $ABCD$ est de dimension a x b ($AB = a$ et $DC = b$).
Une boule de rayon négligeable est lancée de A selon une trajectoire rectiligne. Cette boule heurte le côté DC en un point M.
Après ce choc la trajectoire de la boule se fait selon le symétrique de AM par rapport à la perpendiculaire en M à DC.
Pour quelles positions de M les 4 rebonds ont lieu dans l'ordre sur DC, CB, BA, AD lorsque $a = 6$ et $b = 4$ puis dans le cas général ?
Solution On fait une simulation avec `Xcas` lorsque $a = 6$ et $b = 4$ on tape :

```
segment(k*i,12+k*i)$(k=-5..7);
segment(6+k-5*i,6+k+7*i)$(k=-6..6);
rectangle(-5*i,6-5*i,2/3,affichage=epaisseur_ligne_2);
rectangle(-i,6-i,2/3,affichage=epaisseur_ligne_2);
rectangle(6-i,12-i,2/3,affichage=epaisseur_ligne_2);
rectangle(6+3*i,12+3*i,2/3,affichage=epaisseur_ligne_2);
A:=point(-5*i);
B:=point(6-5*i);
C:=point(6-i);
D:=point(-i);
a1:=point(3*i);
b1:=point(6+3*i);
a2:=point(12+3*i);
d2:=point(12-i);
c3:=point(6+7*i);
d3:=point(7*i+12);
supposons(m=[1.3,,6,0.1]);
M:=point(m-i);
d:=droite(A,M):;
N:=inter_unique(d,droite(x=12));
segment(A,N);
segment(C,D,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
segment(C,b1,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
segment(a2,b1,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
segment(a2,d3,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
M1:=point(4-i)
```

a_1 et b_1 sont les symétriques de A et B par rapport à DC,
a_2 et d_2 sont les symétriques de $a1$ et D par rapport à $b1C$,
c_3 et d_3 sont les symétriques de C et d_2 par rapport à b_1a_2.
Le segment AN doit couper les segment DC, $Cb1$, $b1, a2$ er $d3a2$ qui sont en rouge sur la figure :



Pour $a=6$ et $b=4$, si M_1 est l'intersection de $Ad3$ avec DC, il faut que M soit sur M_1C avec $DM_1=4$.
Dans le cas général on fait les symétries ci dessus.
Dans le repère d'origine A dont l'axe des x est porté par AB et l'axe des y est porté par AD,
la droite $Ad3$ a pour équation $y=3bx/2a$ et elle coupe DC en M_1
la droite $Aa2$ a pour équation $y=bx/a$ et elle coupe DC en C M_1 a pour coordonnèes $x=2a/3$ et $y=b$.
il faut que M soit sur le segment M_1C pour que les 4 rebonds aient lieu dans l'ordre sur DC, CB, BA, AD.

14.3 Un petit problème sur la symétrie

En 2 points A et B diamétralement opposés d'une piste cyclable circulaire, deux cyclistes `Albert` et `Benoit` partent en même temps à la rencontre l'un de l'autre : `Albert` parcourt la piste dans le sens des aiguilles d'une montre à la vitesse constante v_A et `Benoit` va dans le sens inverse à la vitesse constante v_B.
Quand ils se rencontrent en un point C, ils s'arrêtent et `Albert` annonce qu'il a fait 7 km.
Ils repartent ensuite : `Albert` toujours à la vitesse constante v_A et dans le sens des aiguilles d'une montre et `Benoit` à la vitesse constante v_B et dans le sens inverse.
Quand ils se rencontrent en un point D, ils s'arrêtent et `Benoit` annonce qu'il a fait 4 km.
Déterminer la longueur de la circonférence de la piste cyclable.
Déterminer la longueur parcourue par `Albert` et par `Benoit`.
Même question si la piste a la forme d'une ellipse et si les points de départ A et B sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse.
Pour trouver
Répondre à l'une des questions :

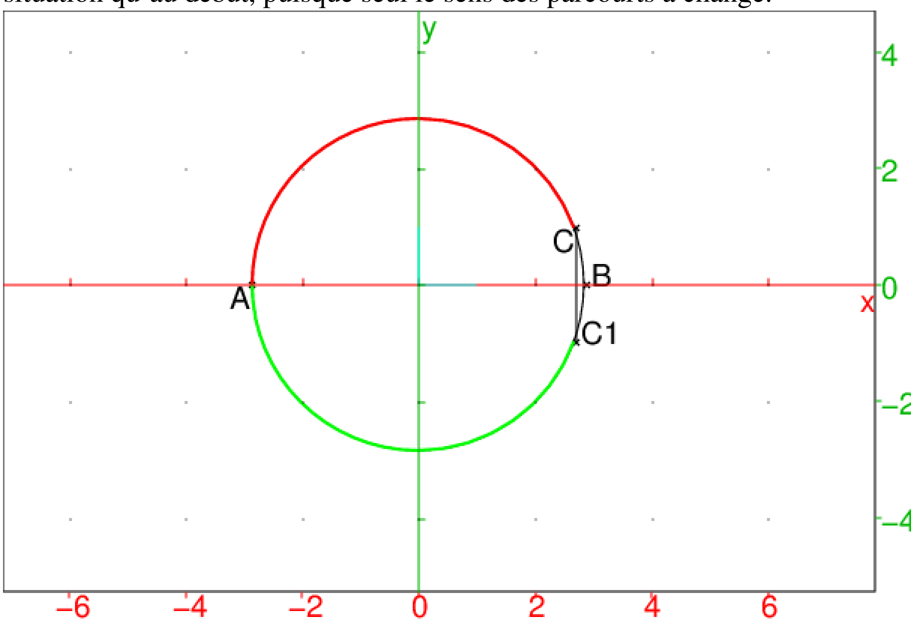
1. Si quand ils sont en C, ils rebroussent chemin où se trouve alors leur nouveau point de rencontre C_1 ?

2. Si dans les mêmes conditions (`Albert` parcourt la piste dans le sens des aiguilles d'une montre à la vitesse constante v_A et `Benoit` va en sens inverse à la vitesse constante v_B), `Albert` et `Benoit` partent en même temps d'un même point M.
   Quand `Albert` a fait 7 km, `Albert` se trouve en P et `Benoit` se trouve en Q. Trouver la position du point Q par rapport à P.
   Quand `Albert` fait 7 km de plus, `Albert` se trouve en N. Où se trouve le point N ? Où se trouve `Benoit` ?

3. répondre au problème posé.

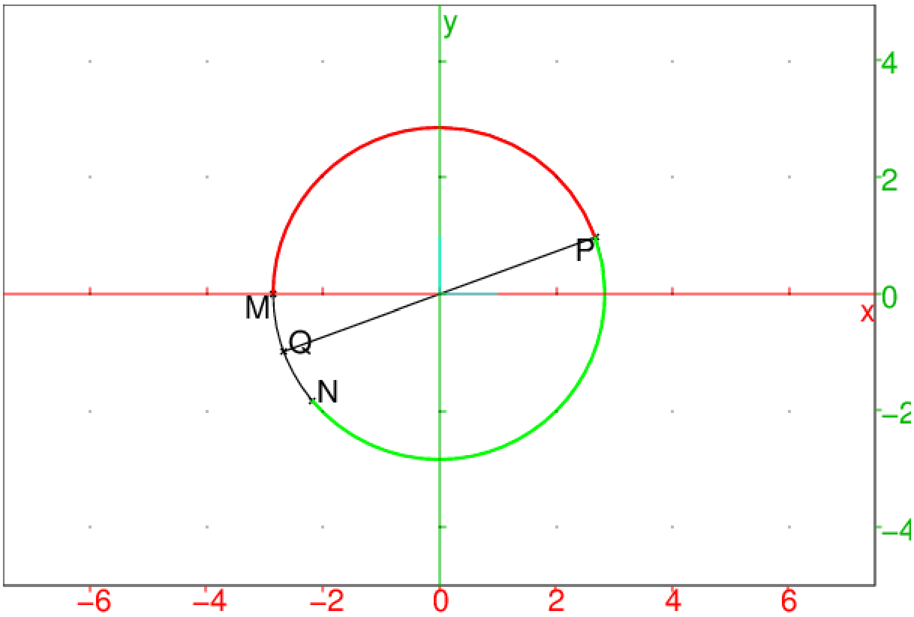
Une solution
Il est important de faire des dessins ! ! ! !

1. Si ils rebroussent chemin, quand `Albert` aura fait 7 km, `Albert` sera à nouveau en A et `Benoit` sera à nouveau en B. On se trouve dans la même situation qu'au début, puisque seul le sens des parcourts a changé.



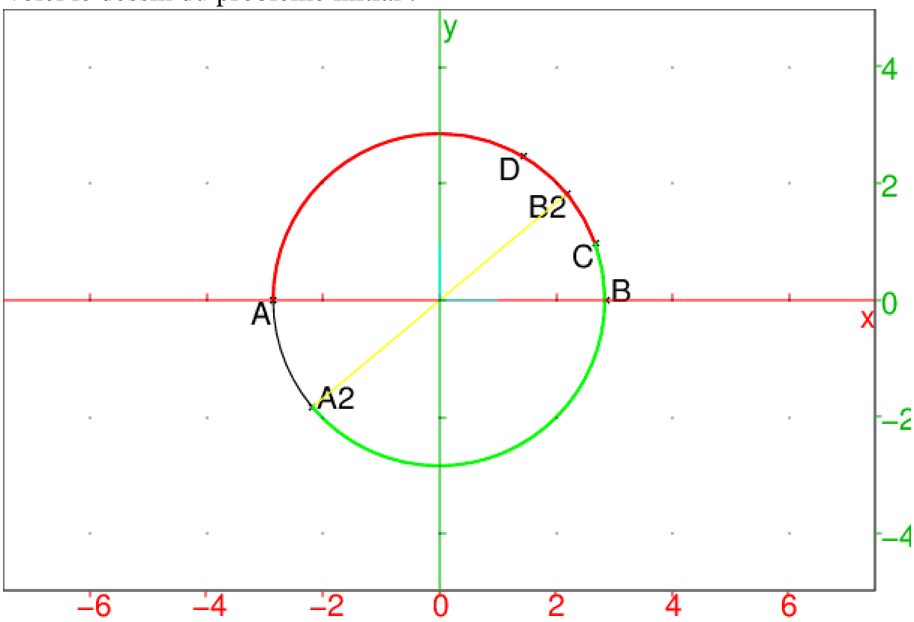
   Albert se retrouve en A et l'arc AC (en rouge) a comme longueur 7 km.
   Donc quand `Albert` fait à nouveau 7 km (en vert), `Albert` et `Benoit` se rencontreront on un point C_1 symétrique de C par rapport à AB.
   On sait que l'arc CC_1 a pour longueur 4 km et donc l'arc CB a pour longueur 2 km.
   La circonférence de la piste est donc de 7+7+4=18 km.

2. Si `Albert` et `Benoit` partent en même temps d'un même point M, lorsque `Albert` se trouve en P, il a fait 7 km et `Benoit` se trouve au point Q diamètralement opposé à P.



Selon l'énoncé, lorsque `Albert` fait à nouveau 7 km, `Albert` et `Benoit` se rencontreront en N symétrique de M par rapport à la droite PQ. Puisque l'arc MN a pour longueur 4 km, l'arc rouge MP a pour longueur 7 km, l'arc vert PN a pour longueur 7 km, la circonférence a donc pour longueur 18 km.

3. Voici le dessin du problème initial :



`Albert` et `Benoit` se rencontrent en C (arc AC=7 km)
Puis quand `Albert` se trouve en A_2 (arc A_2C=7 km), `Benoit` se trouve en B_2 (arc CB_2=arc BC) avec A_2 et B_2 diamétralement opposés. On est donc dans la même sitiation qu'au départ.
Puis `Albert` et `Benoit` se rencontrent en D (arc A_2D=7 km et arc DC=4 km)
Quand `Albert` et `Benoit` se rencontrent en D, `Albert` a fait 21 km et `Benoit` a fait 8 km.

La difficulté provient de ce que `Albert` fait 2 fois l'arc AD.
On a l'arc AC a pour longueur 7 km et l'arc CD a pour longueur 4 km.
Mais on sait que : arc BC=arc CB_2= arc B_2D. Donc l'arc BC a pour longueur 2 km. On en déduit que la demi-circonférence a pour longueur 7+2=9 km
Donc la piste circulaire a pour longueur 18 km.

14.4 Les nombres triangulaires

14.4.1 Définition

Si avec des oranges (ou des boulets de canons) on forme une pile triangulaire en mettant n oranges sur la base puis $n-1$ oranges en quinconse etc... jusqu'à avoir 1 seule orange sur la dernière ligne, alors le nombre d'oranges empilées et le nombre triangulaire $T(n)$, par exemple :
$T(0) = 0, T(1) = 1, T(2) = 2 + 1 = 3, T(3) = 3 + 2 + 1 = 6$ etc...

14.4.2 Des exercices faciles à chercher

1. Calculer $T(4)..T(7)$
2. Trouver la valeur de $T(n)$ en fonction de n.
3. Calculer le 36ième nombre triangulaire.
4. Monter que la somme de 2 nombres triangulaires successifs est un carré (i.e $T(n) + T(n + 1) = a^2$) :
   pour $n = 1$ on a $T(1) + T(2) = 1 + 3 = 4 = 2^2$,
   pour $n = 2$ on a $T(2) + T(3) = 3 + 6 = 9 = 3^2$ etc ...
5. Montrer que $8 * T(n) + 1 = b^2$:
   pour $n = 1$ on a $8 * 1 + 1 = 9 = 3^2$, pour $n = 2$ on a $8 * 3 + 1 = 25 = 5^2$ etc...
6. Montrer que 55,5050, 500500, 50005000, ..$5 * 10^{2*p+1} + 5 * 10^p$ sont des nombres triangulaires : on cherchera la valeur de n tel que :
   $T(n) = 5 * 10^{2*p+1} + 5 * 10^p$.
7. Montrer que $T(n + 1)^2 - T(n)^2 = (n + 1)^3$

Une solution

1. On a :
   $T(4) = T(3)+4 = 6+4 = 10, T(5) = 10+5 = 15, T(6) = 15+6 = 21, T(7) = 21 + 7 = 28$
   et en général si la base contient $n + 1$ oranges la rangée suivant aura n oranges et sera la base de la pile $T(n)$.
   Donc $T(n + 1) = T(n) + n + 1$.
2. Calculons $T(n)$.
   On a :
   $T(n) = n + T(n-1) = n + (n-1) + T(n-2) = ... = n + (n-1) + ... + 2 + T(1)$ On a :

$T(n) = n + (n-1) + ... + (\ 2) + 1$ et
$T(n) = 1 + (\ 2) + ... + (n-1) + n$
en ajoutant ces 2 sommes termes à terme on obtient :
$2T(n) = (n+1) + (n-1+2) + ...(2+n-1) + (n+1)$
Donc $2T(n)$ est la somme de n termes égaux à $n+1$ donc :

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

On vérifie pour $n = 7$ on a $T(7) = 7 * 8/2 = 28$

3. Pour calculer $T(36)$, il suffit d'appliquer la formule :
   $T(n) = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 36$.
   On obtient : $T(36) = 36 * 37/2 = 18 * 37 = 666$

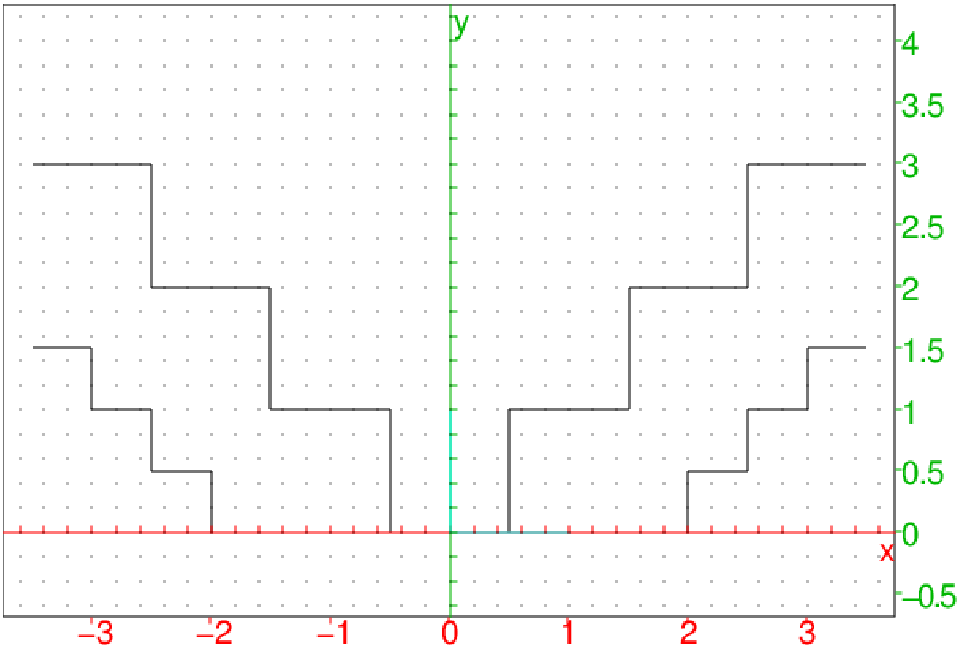
4. Calculons $T(n) + T(n+1)$.
   $T(n) + T(n+1) = \frac{n(n+1)+(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2}$
   Donc $T(n) + T(n+1) = (n+1)^2$

5. Calculons $8T(n) + 1$.
   $8T(n) + 1 = 8\frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$
   On a bien $8 * T(7) + 1 = 224 + 1 = 225 = 15^2$.
   On peut aussi voir cette relation graphiquement :

On tape pour faire un escalier de n marches de dimension $|s|$à partir du point d'affixe z qui monte vers la droite ($s > 0$) ou vers la gauche ($s < 0$) :

```
escalier(z,n,s):={
 local j,L;
 L:=NULL;
 pour j de 1 jusque n faire
   L:=L,segment(z,z+abs(s)*i);
 z:=z+abs(s)*i;
L:=L,segment(z,z+s*1);
 z:=z+s*1;
  fpour;
   retourne L;
   }:;
```

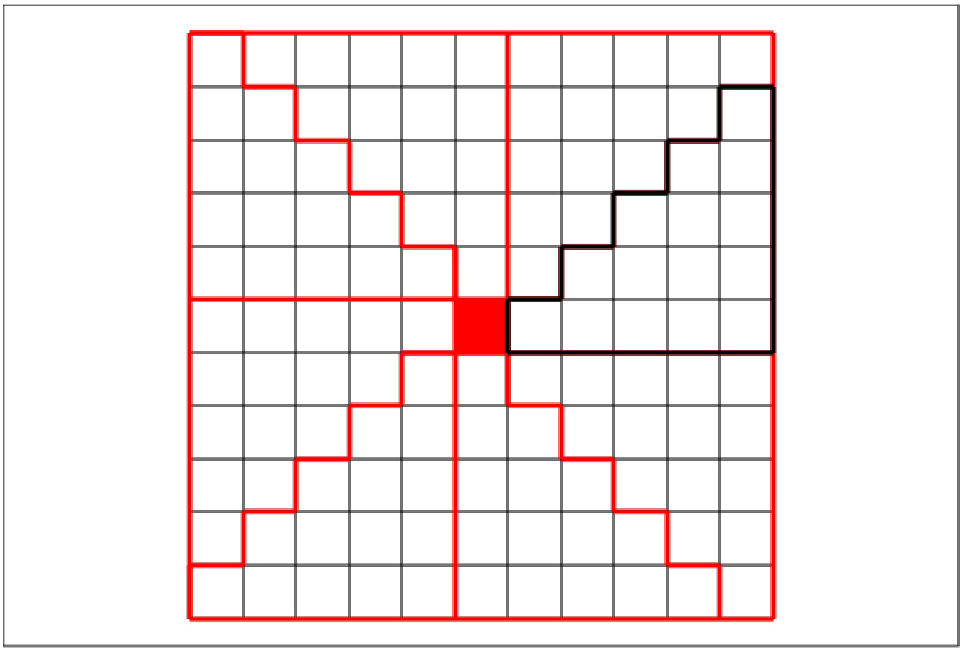
On tape :
`escalier(1/2,3,1);`
`escalier(-1/2,3,-1);`
`escalier(2,3,1/2);`
`escalier(-2,3,-1/2);`
On obtient :



On tape pour visualiser la formule $8 * T(n) + 1 = b^2$ avec $n = 5$ et $b = 2 * 5 + 1 = 11$:

```
papier_quadrille(1,pi/2,1,x=-5..6,y=-5..6);
carre(0,1,affichage=1+rempli);
segment(-1,6,affichage=1+epaisseur_ligne_3);
segment(-5+i,2+i,affichage=1+epaisseur_ligne_3);
segment(1-i,1+6*i,affichage=1+epaisseur_ligne_3);
segment(-5*i,2*i,affichage=1+epaisseur_ligne_3);
affichage(escalier(-5-5*i,5,1), 1+epaisseur_ligne_3);
affichage(escalier(5-5*i,5,-1), 1+epaisseur_ligne_3);
affichage(escalier(i,5,-1), 1+epaisseur_ligne_3);
affichage(es:=escalier(1,5,1), 1+epaisseur_ligne_3);
carre(-5-5*i,6-5*i,affichage=1+epaisseur_ligne_3);
affichage([es,segment(6+5*i,6),segment(6,1)],0+epaisseur_ligne_3);
```

On obtient :



6. Montrons que 55,5050, ..$5*10^{2*p+1}+5*10^p$ sont des nombres triangulaires.
Pour montrer que 55 est un nombre triangulaire, on cherche si il existe un entier n tel que $n(n+1)/2 = 55$.
n doit vérifier :
$n(n+1) = 110 = 11*10$ donc $n = 10$ est solution. On a donc $55 = T(10)$
Pour 5050, on cherche à r'esoudre :
$n(n+1) = 5050*2 = 10100 = 100*101$ donc $n = 10$ est solution.
On a donc $5050 = T(100)$
Plus généralement on cherche à r'esoudre :
$n(n+1) = 2*(5*10^{2*p+1}+5*10^p) = 10^{2*p+2}+10^{p+1} = 10^{p+1}(10^{p+1}+1)$
donc $n = 10^{p+1}$ est solution.
On a donc $5*10^{2*p+1}+5*10^p = T(10^{p+1})$
On vérifie :
Pour 55 $p = 0$ et $55 = T(10^1)$, pour 5050 $p = 1$ et $55 = T(10^2)$

7. Montrons que $T(n+1)^2 - T(n)^2 = (n+1)^3$.
On a :
$T(n+1)^2 - T(n)^2 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2 - n^2(n+1)^2}{4} = (n+1)^2\dfrac{(n+2)^2 - n^2}{4} =$
$((n+1)^2(n+1) = (n+1)^3$

14.4.3 Pour chercher : tout entier est-il la somme de nombres triangulaires distincts ?

Le mathématicien Karl friedrich Gauss (1777-1855) a montré que :
"Tout nombre est la somme d'au plus 3 nombres triangulaires"
L'exercice proposé ici est de savoir quels sont les entiers qui sont la somme de nombres triangulaires distincts.
La réponse est OUI pour les entiers $n > 33$.
C'est ce qu'il faut démontrer ! Pour cela on cherchera dans un premier temps quels

sont les entiers $n \leq 45$ qui sont la somme de nombres triangulaires distincts.
Puis on montrera que les entiers $n \leq T(12) = 78$ sont la somme de nombres triangulaires distincts.
Enfin on montera par récurrence que :
tous les entiers $n > 33$ sont la somme de nombres triangulaires distincts.
On tape :
`(n*(n+1)/2)$ (n=0..15)`
On obtient :
`0,1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105,120`
Les nombres triangulaires pour $0 \leq n \leq 15$ sont :
0,1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105,120)
On voit que :
2,5,8,12,23,33 ne peuvent pas être a somme de nombres triangulaires distincts.
En effet :
les seuls nombres triangulaire inférieurs à 2 sont 0, 1
les seuls nombres triangulaire inférieurs à 5 sont 0, 1, 3
les seuls nombres triangulaire inférieurs à 8 sont 0, 1, 3, 6
les seuls nombres triangulaire inférieurs à 12 sont 0, 1, 3, 6, 10 et
1+3+6=10<10+1<12<10+3
les seuls nombres triangulaire inférieurs à 23 sont 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21 et
10+1+3+6=20<15+6+1=21+1=22<23<21+3=24
les seuls nombres triangulaire inférieurs à 33 sont 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 et
28+3+1=21+10+1=15+10+6+1=32<33<15+10+6+3)34
On remarquera que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :
si $n = T(p)$ (resp $n = 1 + T(p)$) on a $n = T(0) + T(p)$ (resp $n = T(1) + T(p)$) donc n est la somme de nombres triangulaires différents.
Dans la suite de la démonstration, on n'étudiera que les entiers n qui ne sont pas des nombres triangulaires ou des nombres triangulaires plus 1.
On a $0 = T(0)$
$1 = T(1)$
$2 = 2 * T(1)$ pas distinct
$3 = 0 + 3 = T(0) + T(2)$
$4 = 1 + 3 = T(1) + T(2)$
$5 = 2 * T(1) + T(2)$ pas distinct
$6 = 0 + 6 = T(0) + T(3)$ $7 = 1 + 6 = T(1) + T(3)$
$8 = 2 * T(1) + T(3)$ pas distinct
$9 = 3 + 6 = T(2) + T(3)$
$10 = 0 + 10 = T(0) + T(4)$
$11 = 1 + 10 = T(1) + T(4)$
$12 = 2 * T(1) + T(4)$ pas distinct
$13 = 3 + 10 = T(2) + T(4)$
$14 = 1 + 3 + 10 = T(1) + T(2) + T(4)$
$15 = 0 + 15 = T(0) + T(5)$
$16 = 1 + 15 = T(1) + T(5)$
$17 = 1 + 6 + 10 = T(1) + T(3) + T(4)$
$18 = 3 + 15 = T(2) + T(5)$
$19 = 1 + 3 + 15 = T(1) + T(2) + T(5)$
$20 = 1 + 3 + 6 + 10 = T(1) + T(2) + T(3) + T(4)$

$21 = 0 + 21 = T(0) + T(6)$
$22 = 1 + 21 = T(1) + T(6)$
$23 = 2 * T(1) + T(6)$ pas distinct
$24 = 3 + 21 = T(2) + T(6)$
$25 = 10 + 15 = T(4) + T(5)$
$26 = 1 + 10 + 15 = T(1) + T(4) + T(5)$
$27 = 6 + 21 = T(3) + T(6)$
$28 = 0 + 28 = T(0) + T(7)$
$29 = 1 + 28 = T(1) + T(7)$
$30 = 3 + 6 + 21 = T(2) + T(3) + T(6)$
$31 = 3 + 28 = T(2) + T(7)$
$32 = 1 + 3 + 28 = T(1) + T(2) + T(7)$
$33 = 2 * T(1) + T(2) + T(7)$ pas distinct
$34 = 6 + 28 = T(3) + T(7)$
$35 = 1 + 6 + 28 = T(1) + T(3) + T(7)$
$36 = 0 + 36 = T(0) + T(8)$
$37 = 1 + 36 = T(1) + T(8)$
$38 = 10 + 28 = T(4) + T(7)$
$39 = 3 + 36 = T(2) + T(8)$
$40 = 1 + 3 + 36 = T(1) + T(2) + T(8)$
$41 = 3 + 10 + 28 = T(2) + T(4) + T(7)$
$42 = 1 + 3 + 28 = T(1) + T(2) + T(7)$
$43 = 1 + 6 + 36 = T(1) + T(3) + T(8)$
$44 = 6 + 10 + 28 = T(3) + T(4) + T(7)$
$45 = 0 + 45 = T(0) + T(9)$
Montrons que si $n > 33$ alors n est la somme de nombres triangulaires différents.
On note pour $p \in \mathbb{N}$, $P(p)$ la propriété : si $n \in \mathbb{N}$ et $33 < n \leq T(p)$ alors n est la somme de nombres triangulaires différents.
On va montrer tout d'abord que $P(12)$ est vraie i.e. si $33 < n \leq 78 = T(12)$ alors n est la somme de nombres triangulaires différents.

- si $33 + 1 < n < 36$ c'est vrai voir ci-dessus
- si $36 + 1 < n < 45$ c'est vrai voir ci-dessus
- si $45 + 1 < n < 55$ on a $n = 36 + a = T(8) + a$ avec $10 < a \leq 19 < T(6) = 21 < T(8) = 36$ donc
  - si $a \neq 12$ (i.e.$n \neq 48$), a est la somme de nombres triangulaires $T(k)$ différents et inférieurs à $T(6)$ donc à $T(8)$ donc $n \neq 48$ est la somme de nombres triangulaires différents.
  - si $a = 12$, on a $n = 48 = 36 + 12 = 3 + 45 = T(2) + T(9)$ donc $n = 48$ est la somme de nombres triangulaires différents.
- si $55 + 1 < n < 66$ on a $n = 36 + a = T(8) + a$ avec $20 < a \leq 30 < T(8) = 36$ donc
  - si $a \neq 23$ (i.e.$n \neq 59$), a peut s'écrire comme la somme de nombres triangulaires $T(k)$ différents et strictement inférieurs à $T(8)$ donc $n \neq 59$ est la somme de nombres triangulaires $T(k)$ différents.
  - si $a = 23$, on a $n = 59 = 36+23 = 1+3+55 = T(1)+T(2)+T(10)$ donc $n = 59$ est la somme de nombres triangulaires différents.
- si $66+1 < n < 78$ on a $n = 45+a = T(9)+a$ avec $22 < a < 33 < T(9)$
  - si $a \neq 23$ (i.e.$n \neq 68$), a peut s'écrire comme la somme de nombres

triangulaires $T(k)$ différents et strictement inférieurs à $T(9)$ donc $n \neq 68$ est la somme de nombres triangulaires $T(k)$ différents.

- si $a = 23$ on a $n = 68 = 45+23 = 3+10+55 = T(2)+T(4)+T(10)$ donc $n = 68$ est la somme de nombres triangulaires différents.

— si $78+1 < n < 91$ on a $n = 55+a = T(10)+a$ avec $24 < a < 36 = T(8)$
  - si $a \neq 33$ (i.e.$n \neq 88$), a peut s'écrire comme la somme de nombres triangulaires $T(k)$ différents et strictement inférieurs à $T(8)$ donc $n \neq 88$ est la somme de nombres triangulaires $T(k)$ différents.
  - si $a = 33$, on a $n = 88 = 55 + 33 = 10 + 78 = T(4) + T(12)$ donc $n = 88$ est la somme de nombres triangulaires différents.

On montre ensuite par récurrence que $P(p)$ est vraie pour $p \geq 12$ c'est à dire si $p \geq 12$ et si $33 < n \leq T(p)$ alors n peut sécrire comme la somme de nombres triangulaires différents.
La propriété est vraie pour $p = 12$ puisque $T(12) = 78$ et on vu ci-dessus que $P(12)$ est vraie i.e. si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $33 < n \leq 78 = P(12)$ alors n est la somme de nombres triangulaires différents.

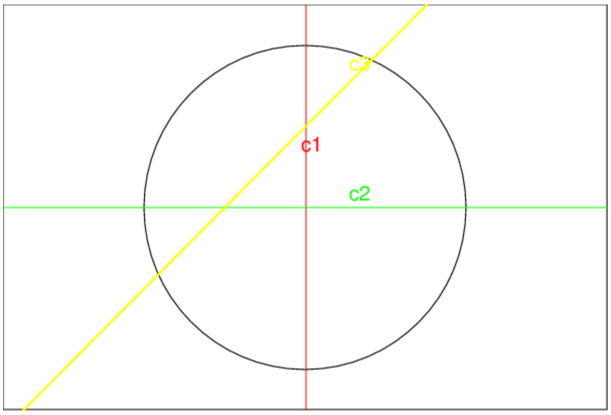
Supposons $P(p)$ vraie pour $p \geq 12$ et montrons que $P(p+1)$ est vraie.
Soient $p \geq 12$ et n un entier vérifiant $33 < n \leq T(p+1)$.

- Si $33 < n \leq T(p)$ alors d'après l'hypothèse de récurrence n est la somme de nombre triangulaires distincts.
- Si $T(p) + 1 < n < T(p+1)$, (on met des inégalités strictes car si $n = T(p) + T0)$ ou si $n = T(p+1) + T(0)$ ou si $n = T(p) + T(1)$ on a n est la somme de nombres triangulaires différents).
  On pose :
  $n = T(p) + a = T(p-3) + d$ avec $1 < a < p+1$ et
  $d = T(p) - T(p-3) + a = p + p - 1 + p - 2 + a = 3p - 3 + a$.
  On a donc :
  $n = T(p-3) + d$ avec $3p - 2 < d \leq 4p - 3 < 4p - 2$
  - Si $p = 12$, on a $n = T(9) + d = 45 + d$ avec $34 < d \leq 45$
    si $d < 45$ on a vu que d est la somme de nombres triangulaires différents et strictement inférieurs à $45 = T(9)$, donc $n = T(9) + d$ est la somme de nombres triangulaires différents.
    si $d = 45$ comme $45 = 36 + 6 + 3 = T(2) + T(3) + T(8)$ et
    $n = T(2) + T(3) + T(8) + T(9)$.
    Donc si $p = 12$, n est la somme de nombres triangulaires différents.
  - Si $p > 12$, on a $n = T(p-3) + d$ avec $34 < 3p - 2 < d \leq 4p - 3$
    on a $4p-3 = 1+2+3+4+5+(p-6)+(p-5)+(p-4)+(p-3)$
    donc si $p > 12$ on a $4p - 3 < T(p-3)$ puisque $p - 6 > 6$.
    Donc d vérifie l'hypothèse de récurrence donc d est la somme de nombres triangulaires différents et strictement inférieurs à $T(p-3)$.
    Donc $n = T(p-3) + d$ est la somme de nombres triangulaires différents.

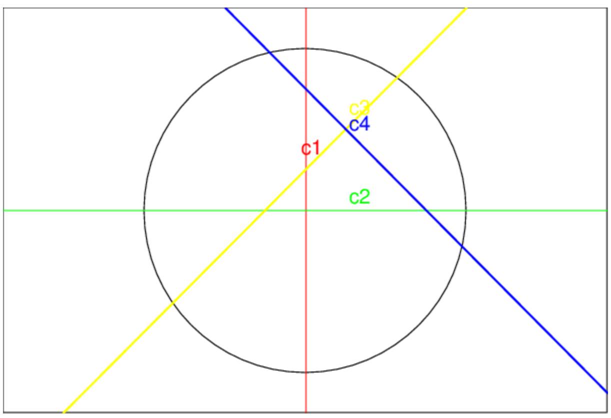
On a donc montré qui si $p \geq 12$ tout entier $n > 33$ est la la somme de nombres triangulaires différents.
Donc à part les entiers $2, 5, 8, 12, 23, 33$, tout entier est la somme de nombres triangulaires différents.

14.5 Combien de morceaux ?

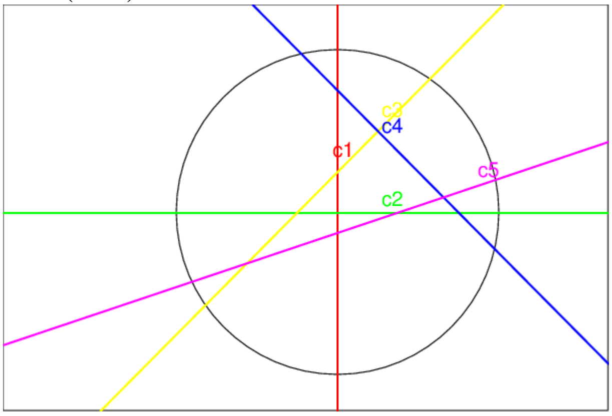
On coupe un gateau circulaire avec un couteau. Chaque coup de couteau se fait selon une droite$n$ coups Combien de moceaux peut-on faire en coupant ce gateau circulaire avec n coups de couteau ? **Une solution**
On sait qu'avec 1 coups de couteaux on peut faire 2 morceaux.
On sait qu'avec 2 coups de couteaux on peut faire 4 morceaux.
Pour $n = 3$ la réonse est 7.
Pour $n = 4$ la réonse est 11.
Faites un dessin représentant pour $n = 3$ les 7 morceaux.
Faites un dessin représentant pour $n = 4$ les 11 morceaux.
Si le gateau est tres gros combien de morceaux avec n coups de couteau ?
Pour $n = 1$ on a 2 morceaux,
Pour $n = 2$, on partage ces 2 morceaux en 2 donc $n = 4$
Pour $n = 3$, le 3ième coup de couteau va couper les 2 coupures précédentes selon 2 points et traverse 3 régions qui sont donc coupées en 2 : cela donne 2*3+(4-3)=7 morceaux.



Pour $n = 4$, le 4ième coup de couteau va couper les 3 coupures précédentes selon 3 points et traverse 4 régions qui sont donc coupées en 2 : cela donne 2*4+(7-4)=11 morceaux



Pour $n = 5$, le 5ième coup de couteau va couper les 4 coupures précédentes selon 4 points et traverse 5 régions qui sont donc coupées en 2 : cela donne donc 2*5+(11-5)=16 morceaux



De façon générale on a :
$c(n) = 2 * n + (c(n-1) - n) = c(n-1) + n$ avec $c(1) = 2$ Donc $c(n) = n + (n-1) + ... + 3 + 2 + c(1) = n(n+1)/2 + 1 = (n^2 + n + 2)/2$ On tape :

```
((n^2+n+2)/2)$(n=1..20)
```

On obtient :

```
2,4,7,11,16,22,29,37,46,56,67,79,92,106,121,137,154,172,191,211
```

Chapitre 15

Géométrie 2d

15.1 Cercle et Arc de cercle

Voici les commandes de `Xcas` qui permettent de faire un cercle :
`cercle` ou `circle` permet de définir un cercle et un arc de cercle. `arc` permet de définir un arc par 2 points et son angle au centre. Si on veut dessiner un cercle `cercle` ou `circle` a 1 ou 2 arguments :

- son équation.
  Par exemple `cercle((x-1)^2+(y-2)^2=1)`
- son centre et son rayon le centre étant un point et le rayon un nombre réel.
  Par exemple : `cercle(point(1,2),1)`
- son diamètre : les arguments sont alors 2 points.
  Par exemple : `cercle(point(1,2),point(0,3))`

Si on veut dessiner un arc de cercle AB on utilise :

1. `cercle` ou `circle` a 4 arguments
   - son centre, son rayon et les angles aux centres des points A et B (les arguments sont alors un point (pour le centre), 3 nombres réels pour le rayon et les 2 angles au centre). C'est l'axe définit par le diamètre qui détermine l'origine pour la mesure des angles au centre.
     Par exemple : `cercle(point(1,2),1,pi/4,pi/2)`
   - son diamètre et les angles aux centres des points A et B (les arguments sont alors 2 points et 2 nombres réels).
     Par exemple : `cercle(point(1,2),point(0,3),pi/6,2pi/3)`
     Attention
     `cercle(point(0,3),point(1,2),pi/6,2pi/3)` et `cercle(point(1,2),point(0,3`
     sont des arcs symétriques par rapport au diamètre
2. `arc` avec 3,4 ou 5 arguments
   - les 3 arguments sont 2 points qui sont les extrémités de l'arc et l'angle au centre.
     Par exemple : `arc(point(1,2),point(0,3),pi/2)`
   - avec 4 ou 5 arguments, on rajoute le nom d'1 ou 2 variables qui donneront le centre et le rayon du cercle contenant cet arc.
     Par exemple : `arc(point(1,2),point(0,3),pi/2,C)` dessinne l'arc et le point `C` qui est le centre du cercle supportant l'arc (`coordonnees(C)` renvoie `[0,2]`) ou

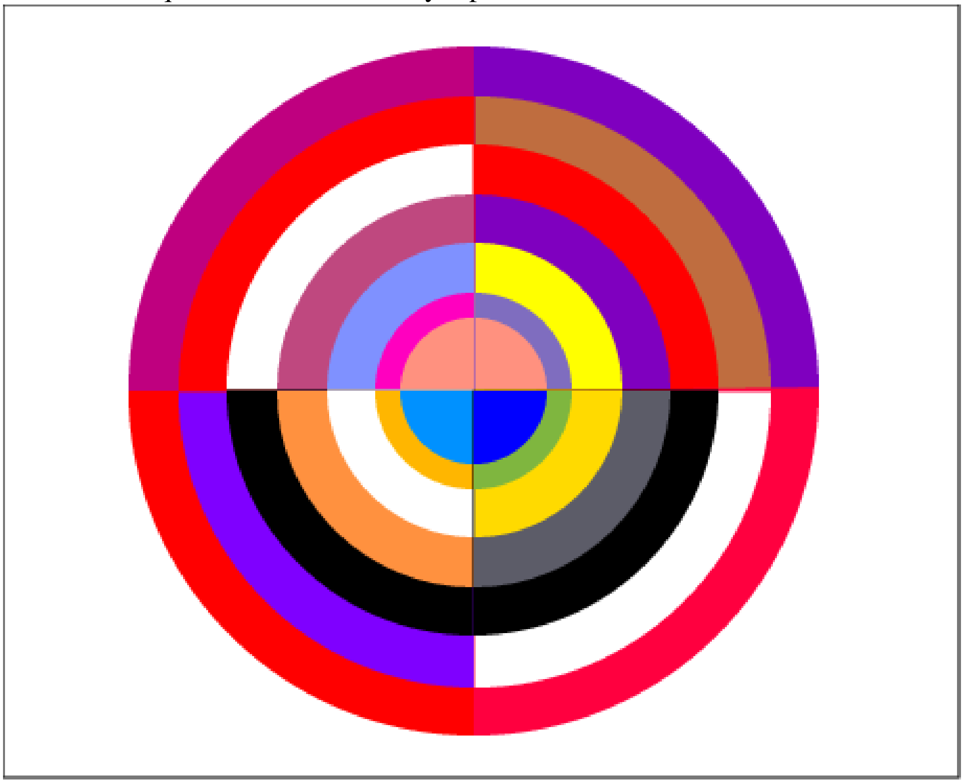
`arc(point(1,2),point(0,3),pi/2,C,r)` dessinne l'arc et le point `C` qui est le centre du cercle supportant l'arc (`coordonnees(C)` renvoie `[0,2]`) et `r` renvoie `1`.

Remarque
On peut rajouter un dernier argument aux commandes trécédentes pour gérer l'affichage par exemple :

```
cercle(point(1,2),point(0,3),pi/6,2pi/3,affichage=rempli+4)
arc(point(1,2),point(0,3),pi/2,affichage=rempli+1)
```

15.2 Reproduction d'un tableau de Robert Delaunay

Voici Disque de Robert Delaunay reproduit avec `Xcas` :

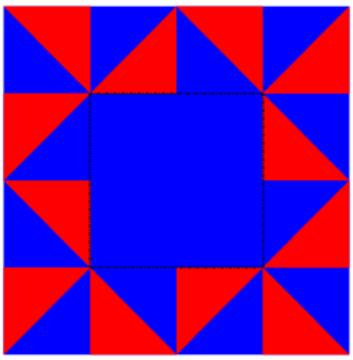


```
cercle(0,7,0,pi/2,affichage=rempli+192);
cercle(0,6,0,pi/2,affichage=rempli+123);
cercle(0,5,0,pi/2,affichage=rempli+88);
cercle(0,4,0,pi/2,affichage=rempli+192);
cercle(0,3,0,pi/2,affichage=rempli+95);
cercle(0,2,0,pi/2,affichage=rempli+195);
cercle(0,1.5,0,pi/2,affichage=rempli+172);
cercle(0,7,pi/2,pi,affichage=rempli+160);
cercle(0,6,pi/2,pi,affichage=rempli+88);
cercle(0,5,pi/2,pi,affichage=rempli+7);
cercle(0,4,pi/2,pi,affichage=rempli+164);
cercle(0,3,pi/2,pi,affichage=rempli+236);
cercle(0,2,pi/2,pi,affichage=rempli+208);
```

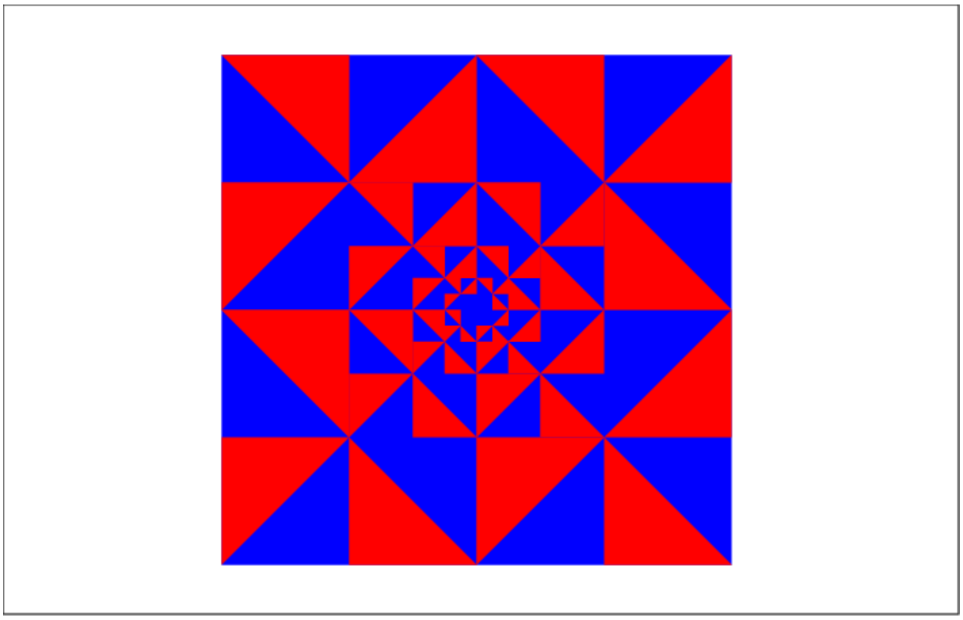
```
cercle(0,1.5,pi/2,pi,affichage=rempli+172);
cercle(0,7,pi,3pi/2,affichage=rempli+88);
cercle(0,6,pi,3pi/2,affichage=rempli+232);
cercle(0,5,pi,3pi/2,affichage=rempli);
cercle(0,4,pi,3pi/2,affichage=rempli+132);
cercle(0,3,pi,3pi/2,affichage=rempli+7);
cercle(0,2,pi,3pi/2,affichage=rempli+93);
cercle(0,1.5,pi,3pi/2,affichage=rempli+220);
cercle(0,7,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+128);
cercle(0,6,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+7);
cercle(0,5,3pi/2,pi*2,affichage=rempli);
cercle(0,4,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+24);
cercle(0,3,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+94);
cercle(0,2,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+117);
cercle(0,1.5,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+216);
```

15.3 Un dessin récursif

Soit un carré de côté $2 * n$. On réalise sur ce carré le dessin suivant :



le carrè dessiné en pointillé a comme côté n et le bord est constitué de triangles rectangles isocèles de côté $n/2$.
On fait ensuite le même dessin sur le carré en pointillé etc ...
Voici par exemple le carré lorsque l'on a reproduit le dessin 4 fois :



Voici le programme (on ne dessine que les triangles rouges) :

```
carres(n):={
 local L;
 L:=NULL;
 si n>0.5 alors
  L:=L,triangle(n/2,n,n/2+i*n/2,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(n/2*(1+i),n+i*n/2,n+i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L, triangle(n/2*(1+i),n/2+i*n,i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(i*n/2,i*n,i*n/2-n/2,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(i*n/2*(1+i),i*n-n/2,-n+i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L, triangle(i*n/2*(1+i),i*n/2-n,-n,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(-n/2,-n,-n/2-i*n/2,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(-n/2*(1+i),-n-i*n/2,-n-i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L, triangle(-n/2*(1+i),-n/2-i*n,-i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(-i*n/2,-i*n,-i*n/2+n/2,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(-i*n/2*(1+i),-i*n+n/2,n-i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L, triangle(-i*n/2*(1+i),-i*n/2+n,n,affichage=rempli+1);
  L:=L,carres(n/2);
fsi;
return L}:;
```

Puis on fait le fond bleu avec :

`carre(-8*(1+i),8*(1-i),affichage=rempli+4)`

On tape :

`carre(-8*(1+i),8*(1-i),affichage=rempli+4),carres(8)` et on obtient le dessin ci-dessus.

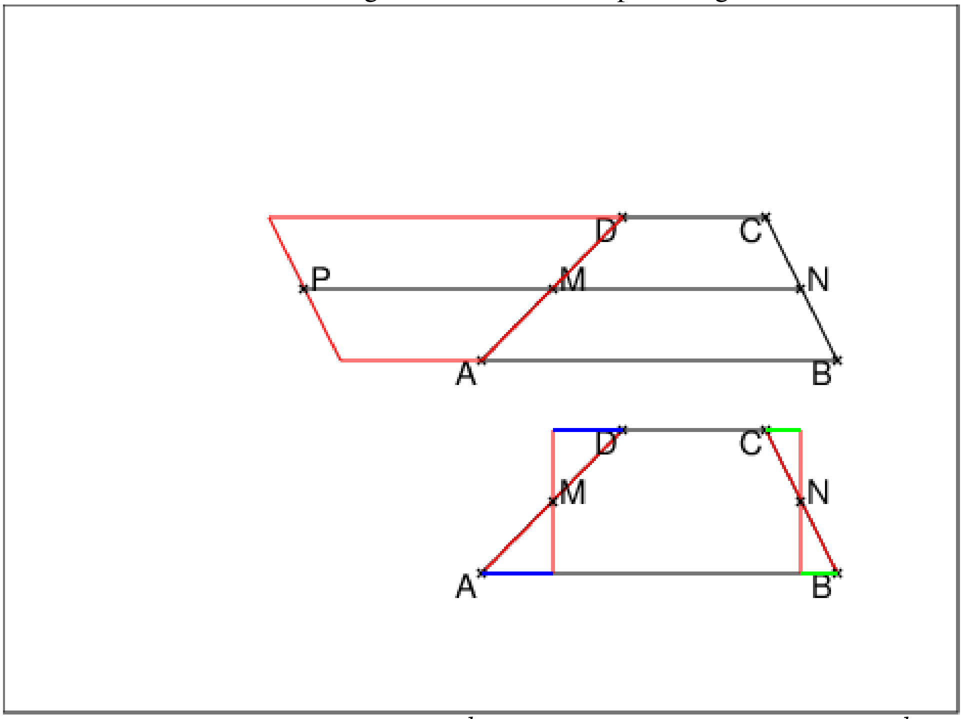
15.4 Le trapèze

Longueur du segment joignant les milieux des côtés non parallèles et aire d'un trapèze

Soient ABD un trapèze : $AB//DC$,$AB = a, DC = b$), M le milieu de AD, N le milieu de BC et les parallèles AB et DC sont distantes de h.

— Calculer la longueur du segment MN en fonction de a et b.
— Calculer l'aire du trapèze en fonction de a et b et h.
— Faire un dessin qui montre ces résultats d'un coup d'œil.

On fait les dessins :
la figure 1 est obtenue en traçant un trapèze et son symétrique par rapport à M et on obtient un parallélogramme dont 2 côtés paralléles sont de longueur $2MN$ distant de h,
la figure 2 est obtenue en traçant les segments perpendiculaires à AB passant par M et N et on obtient un rectangle dont les côtés ont pour longueur MN et h



On montre facilement que $MN = \dfrac{a+b}{2}$ et que l'aire du trapèze vaut $h(\dfrac{a+b}{2})$.
En effet :
la figure 1 est obtenue en tracant un trapèze et son symétrique par rapport à M ce qui forme un parallélogramme donc $2MN = a + b$. L'aire du trapèze est égale à l'aire du parallélogramme et vaut donc $h(\dfrac{a+b}{2})$.
la figure 2 on a $MN = AB - x - y = CD + x + y$ où x (resp y) sont les longueurs des segments en bleu (resp vert). Donc $2 * MN = AB - x - yCD + x + y = AB + CD = a + b$.
L'aire du trapèze est égale à l'aire du rectangle et vaut donc $h(\dfrac{a+b}{2})$.

Pavage avec un trapèze

Soit un trapèze $ABCD$ rectangle en A et vérifiant : $AB = 2DC = 2AD$.
On dira que ce trapèze est à droite si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\pi/2$ et qu'il est à gauche si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\pi/2$

— Avec `Xcas`, écrire une fonction `trapd(A,B)` (resp `trapg(A,B)`) qui étant donné `A` et `B` dessine le trapèze à droite (resp à gauche) `ABCD` (on pourra dans un premier temps supposé que le segment AB est horizontal, dans un deuxième temps que le segment AB est horizontal ou vertical et dans un troisième temps (trop difficile pour la classe de troisième) que le segment AB est quelconque.

— Pour faire le dessin avec `Xcas`, en colorant la surface de ces trapèzes, modifier les fonctions précédentes en `trapdr(A,B,c)` et `trapgr(A,B,c)` pour que étant donné `A` et `B` ces fonctions dessinent le trapèze `ABCD` à droite et le trapèze à gauche) dont la surface est de couleur `c` (on pourra dans un premier temps supposé que le segment AB est horizontal etc...).

— Lorsque $ABCD$ est un trapèze à droite trouver un pavage de $ABCD$ par 4 trapèzes de même dimension à savoir 3 trapèzes rectangles à droite et 1 trapèze rectangle à gauche.
— même question lorsque $ABCD$ est un trapèze à gauche.
— Faire le dessin de ces pavages avec `Xcas` en utilisant `trapd(A,B)` et `trapg(A,B)`.
— Modifier `trapd(A,B)` (resp `trapg(A,B)`) en supposant que le segment AB est horizontal ou vertical.

— La chambre d'un trapéziste a la forme d'un rectangle $ABCD$ $AB = 4.5m$ et $AD = 3m$. Il veut paver sa chambre avec 4 trapèzes rectangles de couleur différentes (à droite ou à gauche). Donner lui un ou plusieurs exemple de pavages.
— Écrire une fonction `trapd2(A,B)` et `trapg2(A,B)` qui étant donné `A` et `B` (AB horizontal ou vertical) dessine le trapèze `ABCD` dans lequel les 4 trapèzes formant le pavage sont eux aussi pavés par 4 trapèzes.
— Paver la chambre du trapéziste avec 4*4=16 trapèzes à droite ou à gauche en utilisant trapg2(A,B). Donnerlui un ou plusieurs exemple de pavages.

La solution

— On suppose que AB est horizontal, on tape :

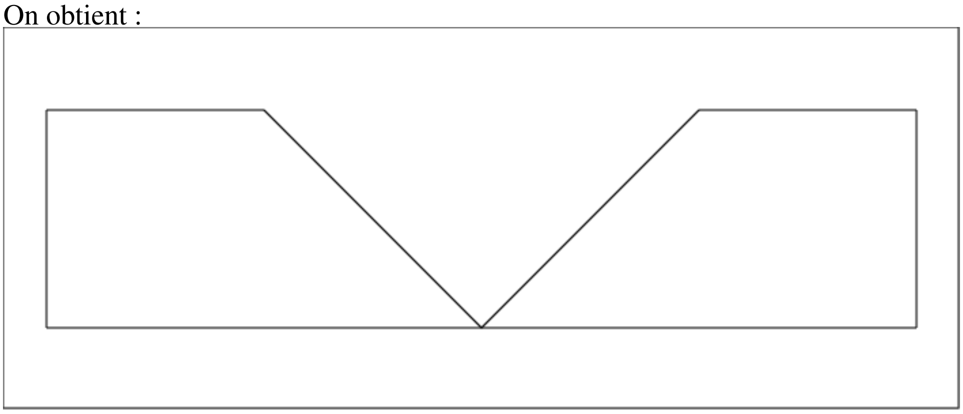
```
trapd(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
D:=point(a1,a2+(b1-a1)/2);
C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2+(b1-a1)/2);
```

```
retourne quadrilatere(A,B,C,D);
}:;
trapg(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
D:=point(a1,a2-(b1-a1)/2);
C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2-(b1-a1)/2);
retourne quadrilatere(A,B,C,D);
}:;
```

On tape :

```
trapd(0,10),trapg(20,10)
```

On obtient :



— Avec des trapèzes remplis avec la couleur c :

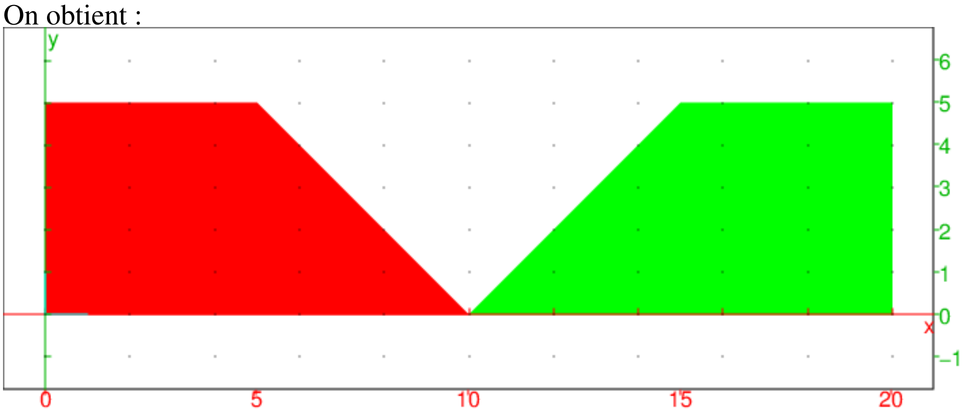
```
trapdr(A,B,c):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
D:=point(a1,a2+(b1-a1)/2);
C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2+(b1-a1)/2);
retourne quadrilatere(A,B,C,D,affichage=rempli+c);
}:;
trapgr(A,B,c):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
D:=point(a1,a2-(b1-a1)/2);
C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2-(b1-a1)/2);
```

```
retourne quadrilatere(A,B,C,D,affichage=rempli+c);
}:;
```

On tape :

```
trapdr(0,10,1),trapgr(20,10,2)
```

On obtient :



— Le pavage du trapèze droit (on suppose que AB est horizontal) avec 4 trapèzes non rempli et rempli.
On remarquera qu'il est inutile de tracer le trapèze pour lequel les bases sont verticales.

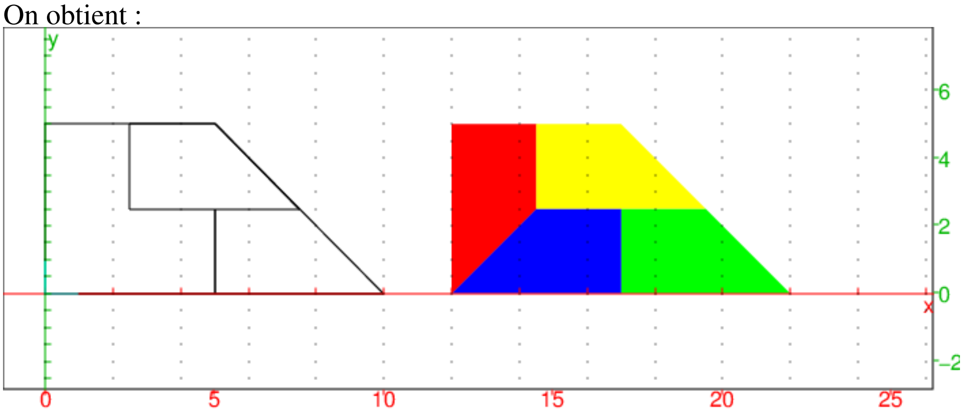
```
pavaged(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
L:=trapd(A,B);
G:=milieu(A,B);
L:=L,trapd(G,B);
E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
L:=L,trapd(E,F);
L:=L,trapg(G,A);
retourne L;
}:;
pavagedr(A,B,c1,c2,c3,c4):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
L:=trapdr(A,B,c1);
G:=milieu(A,B);
L:=L,trapdr(G,B,c2);
E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
```

```
L:=L,trapdr(E,F,c3);
L:=L,trapgr(G,A,c4);
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
paved(0,10),pavagedr(point(12),point(25),1,2,3,4)
```

On obtient :



— Le pavage du trapèze gauche (on suppose que AB est horizontal) avec 4 trapèzes non rempli et rempli.
On remarquera qu'il est inutile de tracer le trapèze pour lequel AB est vertical.

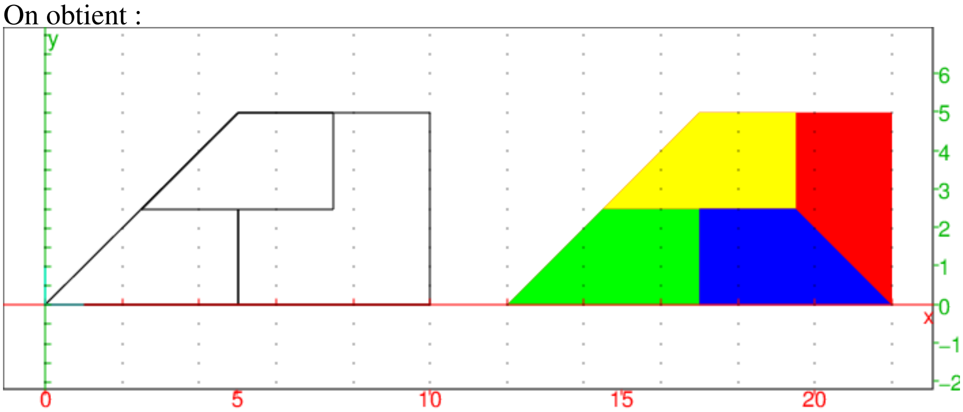
```
pavageg(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
L:=trapg(A,B);
L:=L,trapg(milieu(A,B),B);
E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
L:=L,trapg(E,F);
G:=point(a1+(b1-a1)/2,a2)
L:=L,trapd(G,A);
retourne L;
}:;
pavagegr(A,B,c1,c2,c3,c4):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors
 retourne "AB n'est pas horizontal";
fsi;
L:=trapgr(A,B,c1);
```

```
G:=milieu(A,B);
L:=L,trapgr(G,B,c2);
E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
L:=L,trapgr(E,F,c3);
L:=L,trapdr(G,A,c4);
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
pavageg(10,0),pavagegr(point(22),point(12))
```

On obtient :



— On suppose que AB est horizontal ou vertical, on tape :

```
trapdv(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (a1!=b1 et b2!=a2) alors
 retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
si (a2==b2) alors
  D:=point(a1,a2+(b1-a1)/2);
  C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2+(b1-a1)/2);
sinon
  D:=point(a1-(b2-a2)/2,a2);
  C:=point(a1-(b2-a2)/2,a2+(b2-a2)/2);
fsi
retourne quadrilatere(A,B,C,D);
}:;
trapdvr(A,B,coul):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (a1!=b1 et b2!=a2) alors
```

```
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
si (a2==b2) alors
  D:=point(a1,a2+(b1-a1)/2);
  C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2+(b1-a1)/2);
sinon
  D:=point(a1-(b2-a2)/2,a2);
  C:=point(a1-(b2-a2)/2,a2+(b2-a2)/2);
fsi
retourne quadrilatere(A,B,C,D,affichage=rempli+coul);
}:;
trapgv(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (a1!=b1 et b2!=a2) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
si (a2==b2) alors
  D:=point(a1,a2-(b1-a1)/2);
  C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2-(b1-a1)/2);
sinon
  D:=point(a1+(b2-a2)/2,a2);
  C:=point(a1+(b2-a2)/2,a2+(b2-a2)/2);
fsi
retourne quadrilatere(A,B,C,D);
}:;
trapgvr(A,B,coul):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (a1!=b1 et b2!=a2) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
si (a2==b2) alors
  D:=point(a1,a2-(b1-a1)/2);
  C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2-(b1-a1)/2);
sinon
  D:=point(a1+(b2-a2)/2,a2);
  C:=point(a1+(b2-a2)/2,a2+(b2-a2)/2);
fsi
retourne quadrilatere(A,B,C,D,affichage=rempli+coul);
}:;
```

— On peut réécrire les fonctions pavages lorsqu'on suppose AB horizontal ou

vertical.
On tape pour avoir le pavage droit avec 4 trapèzes rempli avec les couleurs $c1, c2, c3, c4$:

```
pavagedvr(A,B,c1,c2,c3,c4):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (b2!=a2 et a1!=b1) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
G:=milieu(A,B);
L:=trapdvr(G,B,c2);
L:=L,trapgvr(G,A,c4);
si (a2==b2) alors
  L:=L,trapdvr(point(a1,a2+(b1-a1)/2),A,c1);
  E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
  F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
  L:=L,trapdvr(E,F,c3);
sinon
  L:=L,trapdvr(point(a1-(b2-a2)/2,a2),A,c1);
  E:=point(a1-(b2-a2)/4,a2+(b2-a2)/4);
  F:=point(a1-(b2-a2)/4,a2+3*(b2-a2)/4);
  L:=L,trapdvr(E,F,c3);
fsi;
retourne L;
}:;
```

On tape pour avoir le pavage droit avec 4 trapèzes rempli avec les couleurs $c1, c2, c3, c4$:

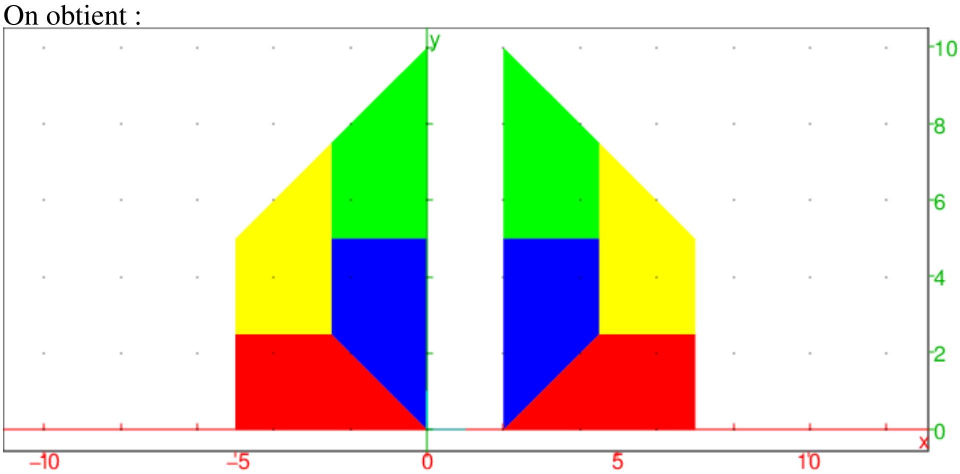
```
pavagegvr(A,B,c1,c2,c3,c4):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (b2!=a2 et a1!=b1) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
G:=milieu(A,B);
L:=trapgvr(G,B,c2);
L:=L,trapdvr(G,A,c4);
si (a2==b2) alors
  L:=L,trapgvr(point(a1,(a1-b1)/2),A,c1);
  E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
  F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
  L:=L,trapgvr(E,F,c3);
sinon
```

```
  L:=L,trapgvr(point(a1+(b2-a2)/2,a2),A,c1);
  E:=point(a1+(b2-a2)/4,a2+(b2-a2)/4);
  F:=point(a1+(b2-a2)/4,a2+3*(b2-a2)/4);
  L:=L,trapgvr(E,F,c3);
fsi;
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
pavagedvr(0,10*i,1,2,3,4),pavagegvr(2,2+10i,1,2,3,4)
```

On obtient :

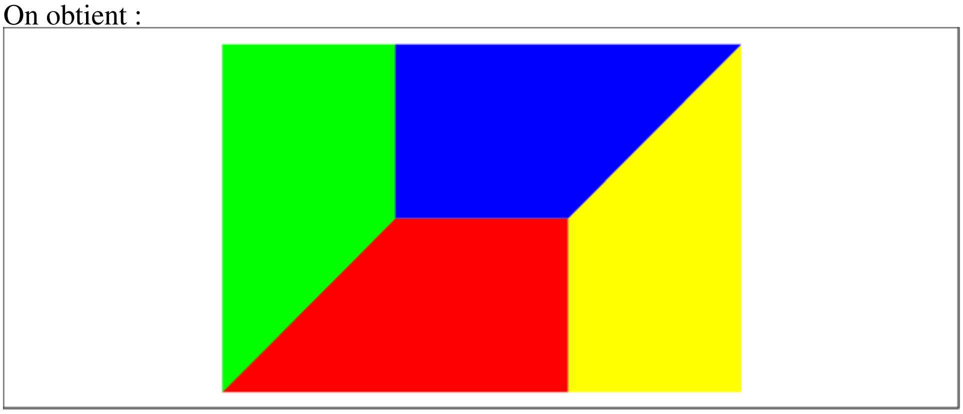


—
```
trapezist4(c1,c2,c3,c4):={
local L;
L:=trapgvr(3,0,c1);
L:=L,trapdvr(3*i,0,c2);
L:=L,trapdvr(4.5,4.5+3*i,c3);
L:=L,trapgvr(1.5+3*i,4.5+3*i,c4);
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
trapezist4(1,2,3,4)
```

On obtient :



une autre possibilité :

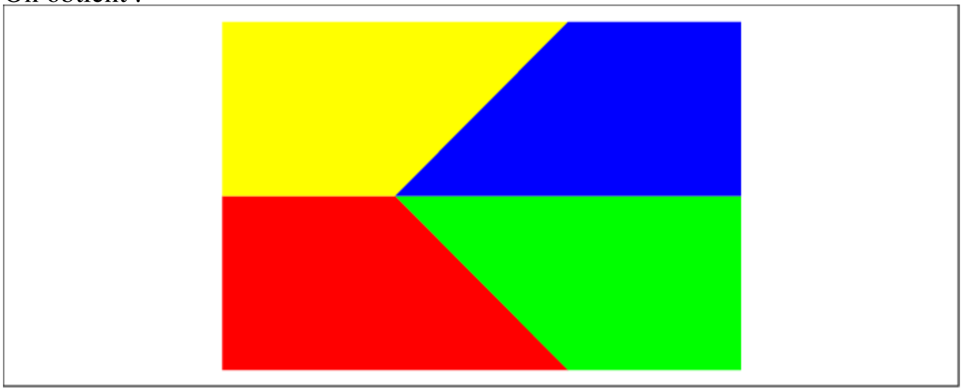
```
trapeziste4(c1,c2,c3,c4):={
local L;
L:=trapdvr(0,3,c1);
```

```
L:=L,trapdvr(4.5+1.5*i,1.5+1.5*i,c2);
L:=L,trapgvr(3*i,3+3*i,c3);
L:=L,trapgvr(4.5+1.5*i,1.5+1.5*i,c4);
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
trapeziste4(1,2,3,4)
```

On obtient :



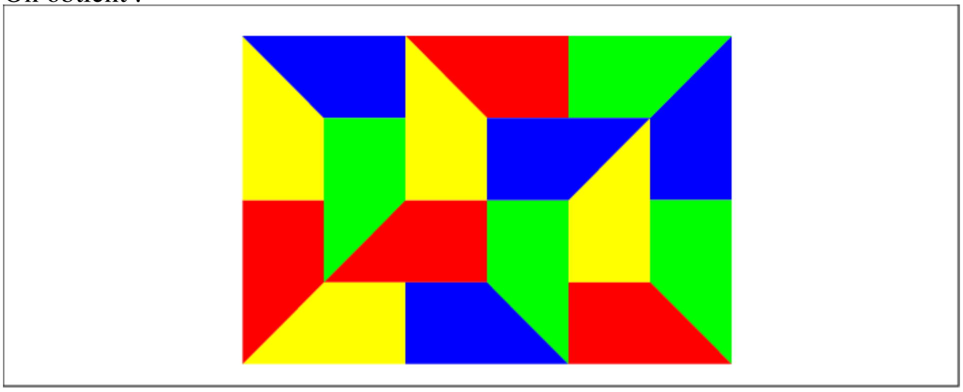
— Pavage avec 16 trapèzes

```
trapezist16(c1,c2,c3,c4):={
local L;
L:=pavagegvr(3,0,c2,c3,c1,c4);
L:=L,pavagedvr(3*i,0,c4,c1,c2,c3);
L:=L,pavagedvr(4.5,4.5+3*i,c1,c4,c3,c2);
L:=L,pavagegvr(1.5+3*i,4.5+3*i,c3,c2,c4,c1);
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
trapezist16(1,2,3,4)
```

On obtient :



— Un exemple de pavage d'un carré avec 24 trapèzes

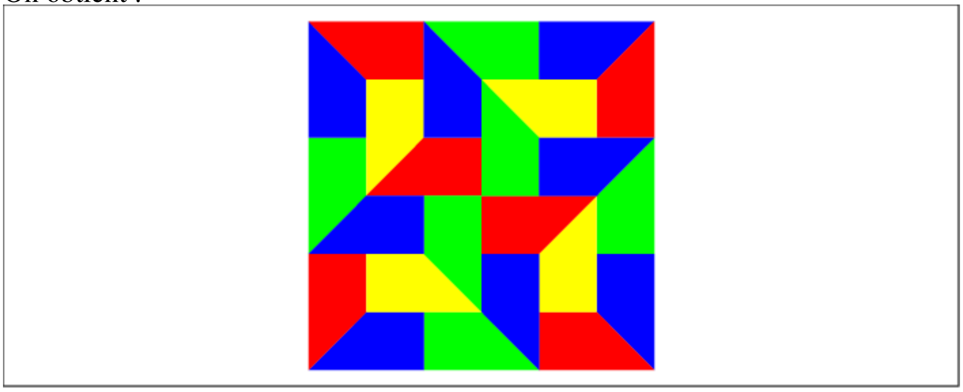
```
tapis(c1,c2,c3,c4):={
local L;
L:=pavagedvr(0,3,c1,c2,c3,c4);
L:=L,pavagedvr(4.5,4.5+3*i,c1,c2,c3,c4);
L:=L,pavagedvr(4.5+4.5*i,1.5+4.5*i,c1,c2,c3,c4);
L:=L,pavagedvr(4.5*i,1.5*i,c1,c2,c3,c4);
```

```
L:=L,trapgvr(2.25+2.25*i,3.75+2.25*i,c1);
L:=L,trapgvr(2.25+2.25*i,2.25+3.75*i,c2);
L:=L,trapgvr(2.25+2.25*i,0.75+2.25*i,c1);
L:=L,trapgvr(2.25+2.25*i,2.25+0.75*i,c2);
L:=L,trapgvr(3+1.5*i,3,c4),trapgvr(3+3*i,4.5+3*i,c4);
L:=L,trapgvr(1.5+3*i,1.5+4.5*i,c4);
L:=L,trapgvr(1.5+1.5*i,1.5*i,c4);
return L;
}:;
```

On tape :

`tapis(1,2,3,4)`

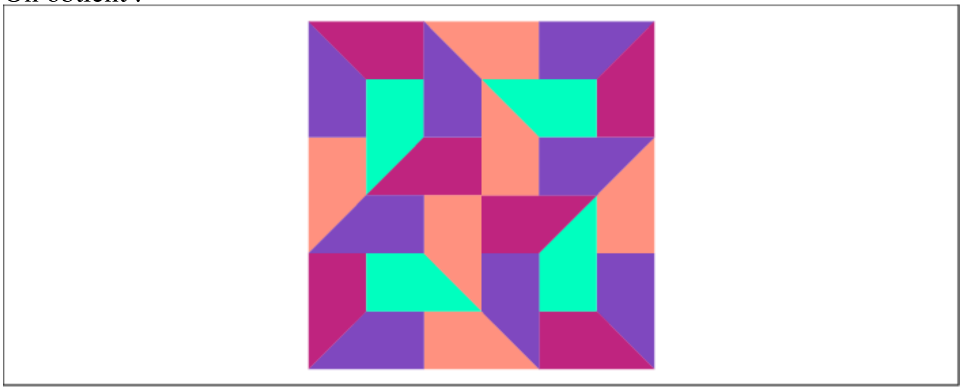
On obtient :



On tape :

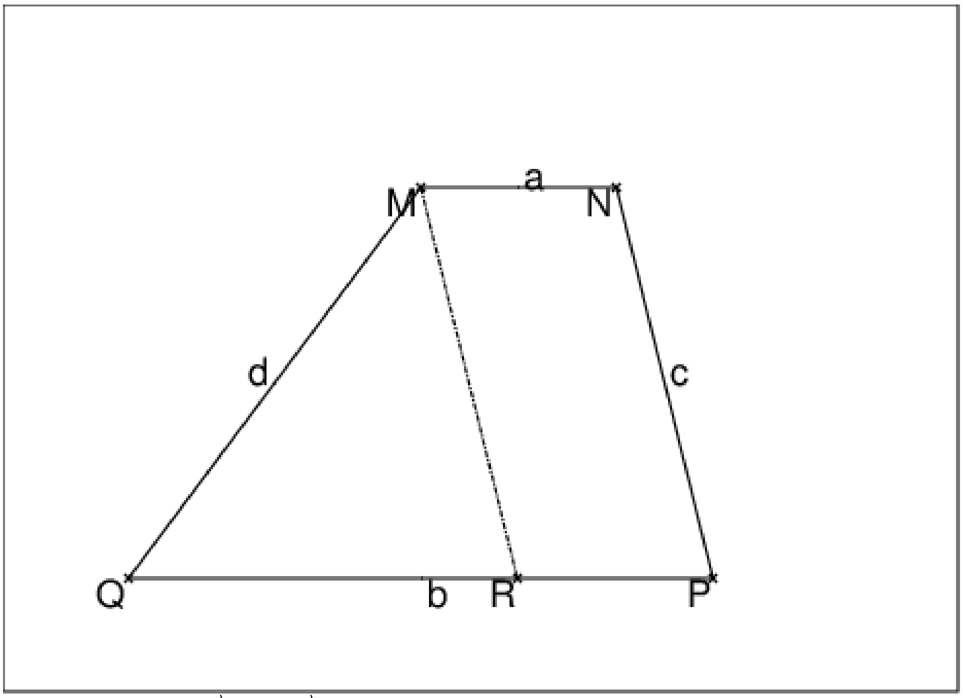
`tapis(161,172,183,194)`

On obtient :



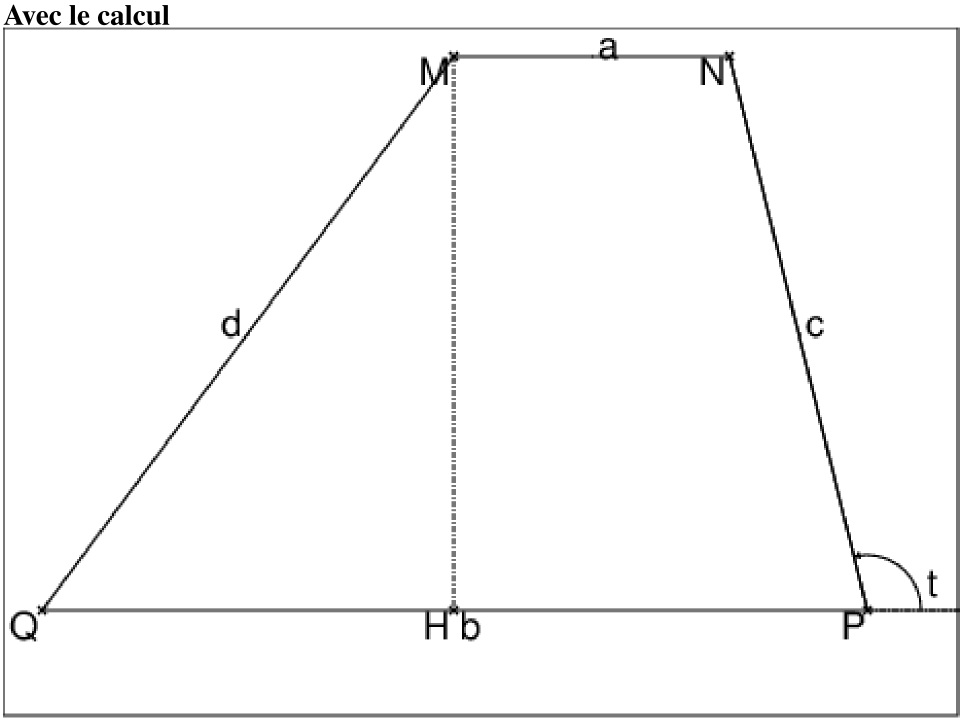
Inégalités entre les côtés d'un trapèze

Soit un trapèze $MNPQ$ ayant comme petite base $MN = a$, comme grande base $PQ = b$ ($a \leq b$) et comme autres côtés $NP = c$ et $MQ = d$.
Quelles inégalités doivent vérifier a, b, c, d pour que a, b, c, d soient les côtés d'un trapèze $MNPQ$ de petie base $MN = a$ et de grande base $PQ = b$ ($a \leq b$) ?
Avec la géométrie



Soit R tel que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NP}$. $MNPR$ est donc un parallélogramme de côtés a et c et $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$ donc $QR = b - a$.
MRQ est un triangle de côtés : $MR = c$, $QR = b - a$ et $MQ = d$.
On peut toujours tracer un parallélogramme de côtés a et c mais on ne peut tracer un triangle de côtés c, $b - a$ et d si et seulement si : $|d - c| < b - a < c + d$ (ou encore $|b - a - c| < d < b - a + c$).

Avec le calcul

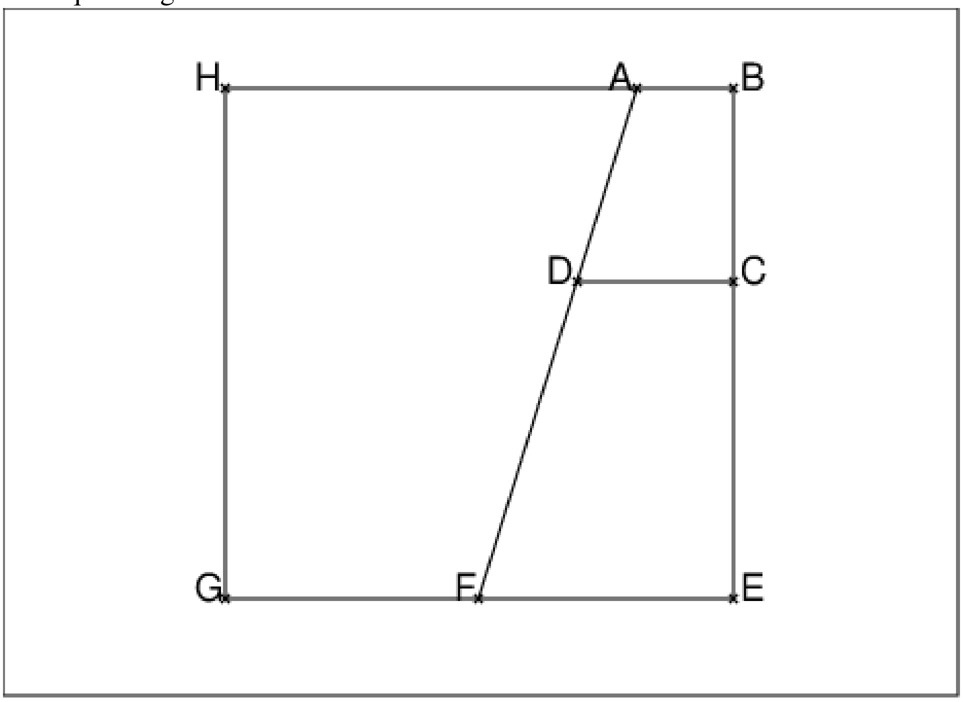


Soit H la projection orthogonale de M sur PQ.
Posons $h = MH$ et $t = (\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{PN})$

On a :
$h = c\sin(t)$ et
$d^2 = h^2 + (b - a + c\cos(t))^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ba + 2c\cos(t)(b - a)$ donc
$\cos(t) = \dfrac{d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ba}{2c(b - a)}$
Pour pouvoir définir t il faut donc que : $-1 < \dfrac{d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ba}{2c(b - a)} < 1$
Comme $2c(b - a) > 0$, cela est équivalent à :
$-2c(b - a) < \ d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ba \ < 2c(b - a)$ ou encore :
$a^2 + b^2 + c^2 - 2ba - 2cb + 2ca < d^2 < a^2 + b^2 + c^2 - 2ba + 2cb - 2ca$ i.e.
$(b - a - c)^2 < d^2 < (c + b - a)^2$
Donc la condition est puisque $d > 0$ et $b - a + c > 0$:
$|b - a - c| < d < b - a + c$

Pavage d'un carré avec 3 trapèzes semblables

On considère un carré que l'on veut paver avec 3 trapèzes semblables comme l'indique la figure :



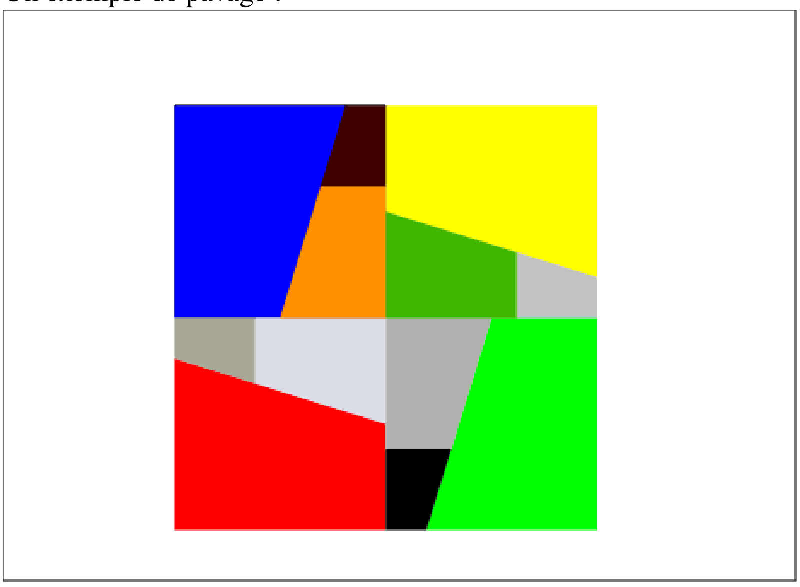
On veut qu'il existe $k > 0$ tel que :
$ABCD$ et $DCEF$ soient semblables avec $DC = k * AB$
$DCEF$ et $FGHA$ soient semblables avec $DC = k * GF$
Quelles sont les conditions pour que cela soit possible ?

Les trapèzes $ABCD$ et $DCEF$ sont semblables donc il existe k tel que :
$DC = k * AB$, $EF = k * CD$ et $CE = k * BC$.
Les trapèzes $DCEF$ et $FGHA$ sont semblables de rapport k donc :
$HA = k * GF$ et $GF = k * CE$.
Posons $a = AB$ et $b = BC$ on a :
$CD = ka$, $GF = k^2 a$, $HA = k^3 a$ et $CE = kb$ et $GH = k^2 b$.
Donc $AB = a$, $GE = 2k^2 a$, $HB = (1 + k^3)a$, $BE = (1 + k)b$ et $GH = k^2 b$.

Donc puisque $HBEG$ est un carré on a :
$GE = HB$ donc $1 + k^3 = 2k^2$, $BE = HG$ donc $1 + k = k^2$ et
$GE = HG$ donc $2k^2 a = k^2 b$ i.e. $b = 2a$.
On tape :
```
solve(1+k^3=2k^2,k)
```
On obtient :
```
[(-(sqrt(5))+1)/2,1,(sqrt(5)+1)/2]
```
On tape :
```
solve(1+k=k^2,k)
```
On obtient :
```
[(-(sqrt(5))+1)/2,(sqrt(5)+1)/2]
```
Donc pour que cela soit possible il faut que :
$b = 2a$ et $k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (on trouve pour k le nombre d'or !).
On tape :

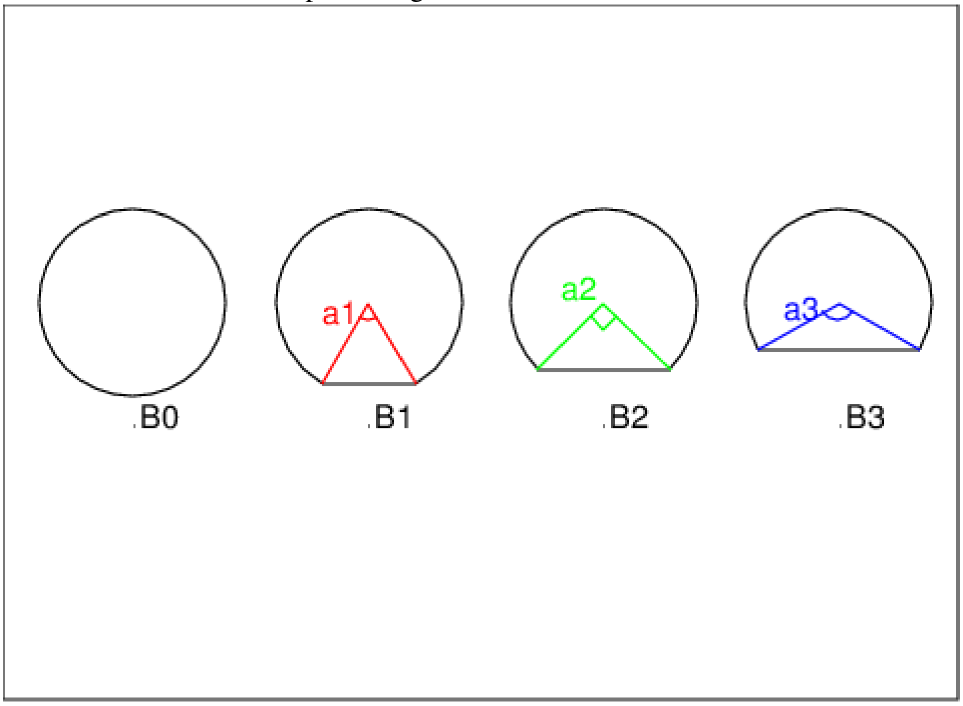
```
k:=(1+sqrt(5))/2;
A:=point(3+4i,affichage=quadrant2);
B:=point(4+4i,affichage=quadrant1);
C:=point(4+2i,affichage=quadrant1);
D:=point(4-k+2i,affichage=quadrant2);
E:=point(4+(2-2*k)*i,affichage=quadrant1);
F:=point(4-k^2+(2-2*k)*i,affichage=quadrant2);
G:=point(4-2*k^2+(2-2*k)*i,affichage=quadrant2);
H:=point(4-2*k^2+4*i,affichage=quadrant2);
polygone(H,B,E,G);
segment(C,D);
segment(A,F);
est_carre(H,B,E,G);
```

On obtient la figure ci-dessus et `est_carre(H,B,E,G)` renvoie `1`.
Un exemple de pavage :

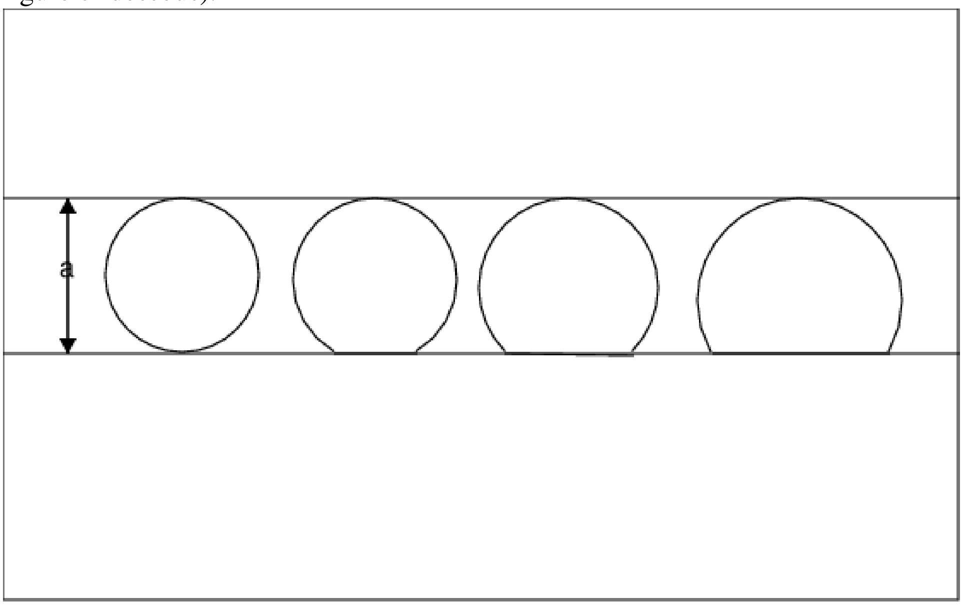


15.5 Le bassin et la piscine

Les Bassins Voici 4 bassins $B-0, B_1, B_2, B_3$. Ils sont formés par un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre $a_0 = 2\pi$, $a_1 = 5\pi/3$, $a_2 = 3\pi/2$, $a_3 = 4\pi/3$ et on ferme les 3 derniers par un segment :



Calculer les aires S_k de 4 bassins B_k ($k = 1, 2, 3$) en fonction de r.
Sur une bande de terre de largeur a, on veut implanter l'un de ces bassins (cf la figure ci-dessous).



Calculer pour chaque bassin la valeur de r en fonction de a. Calculer en fonction de a les aires A_k de 4 bassins B_k ($k = 1, 2, 3$).
0n suppose maintenant que $a = 3$.
Quel est alors le bassin qui a la plus grande surface ?

Montrer que B_3 est inscrit dans un rectangle de largeur 3 et de longueur 4. On coupe alors les bassins Bk ($k = 0, 1, 2, 3$) selon leur axe de symétrie et on accole chacune des ces moitiés à un rectangle de façon à ce que chaque bassin soit inscrit dans un rectangle de largeur 3 et de longueur 4.
Calculer alors l'aire de ces nouveaux bassins C_k ($k = 0, 1, 2, 3$)
Quel est alors le bassin C_k ($k = 0, 1, 2, 3$) qui a la plus grande surface ?

Calcul à la main
Pour calculer les aires des bassins, il faut connaitre l'aire d'un secteur angulaire et l'aire d'un triangle.
L'aire d'un triangle equilatéral de côté r est $\sqrt{3}r^2/4$.
L'aire d'un triangle rectangle isocèle de côtés $r, r, r\sqrt{2}$ est $r^2/2$.
L'aire d'un triangle isocèle d'angle $2\pi/3, \pi/6, \pi/6$, de côtés $r, r, r\sqrt{3}$ est $\sqrt{3}r^2/4$.
On a :
$S_0 = \pi r^2$
$S_1 = 5\pi r^2/6 + \sqrt{3}r^2/4$
$S_2 = 3\pi r^2/4 + r^2/2$
$S_3 = 2\pi r^2/3 + \sqrt{3}r^2/4$

Pour calculer les rayons des bassins implantés sur une bande de terre de largeur a, on doit résoudre les équations :
$a = 2 * r_0$ donc $r_0 = a/2$
$a = r_1 + r_1\sqrt{3}/2$ donc $r_1 = 2a/(2 + \sqrt{3}) = 2a(2 - \sqrt{3})$
$a = r_2 + r_2\sqrt{2}/2$ donc $r_2 = 2a/(2 + \sqrt{2}) = a(2 - \sqrt{2})$
$a = r_3 + r_3/2$ donc $r_3 = 2a/3$
Les aires A_k ($k = 1, 2, 3$) des différents bassins sont donc :
$A_0(a) = \pi a^2/4$ $A_1(a) = 5\pi r_1^2/6 + \sqrt{3}r_1^2/4 = 4a^2(2 - \sqrt{3})^2(5\pi/6 + \sqrt{3}/4) = a^2(7 - 4\sqrt{3})(10\pi/3 + \sqrt{3})$
$A_2(a) = 3\pi r_2^2/4 + r_2^2/2 = a^2(2 - \sqrt{2})^2(3\pi/4 + 1/2) = (3\pi/2 + 1)a^2(3 - \sqrt{2})$
$A_3(a) = 2\pi r_3^2/3 + \sqrt{3}r_3^2/4 = 4a^2/9(2\pi/3 + \sqrt{3}/4) = a^2(8\pi/27 + \sqrt{3}/9)$
Puis, on fait un calcul approché avec `Xcas`.

Calcul avec `Xcas`
Pour le bassin B_0 son aire $S_0 = \pi r^2$/ Pour les bassins B_k ($k = 1, 2, 3$), on cherche les coordonnées des segments A_kB_k qui ferment les bassins B_k.
Avec `Xcas`, on tape pour faire le dessin :

```
assume(r=[1,-5,5,0.1])
B0:=cercle(point(-5,0),r)
B1:=cercle(-5/2,r,-pi/3,4*pi/3),
segment(-5/2+r*(-1/2-i*sqrt(3)/2),-5/2+r*(1/2-i*sqrt(3)/2))
B2:=cercle(0,r,-pi/4,5*pi/4),
segment(r*(-sqrt(2)/2*(1+i)),r*(sqrt(2)/2*(1-i)))
B3:=cercle(5/2,r,-pi/6,7*pi/6),
segment(5/2+r*(-sqrt(3)/2-i/2),5/2+r*(sqrt(3)/2-i/2))
```

Pour calculer les aires, on tape :

```
S0:=aire(cercle(point(-5,0),r))
```

On obtient :

```
pi*r^2
```

On tape :

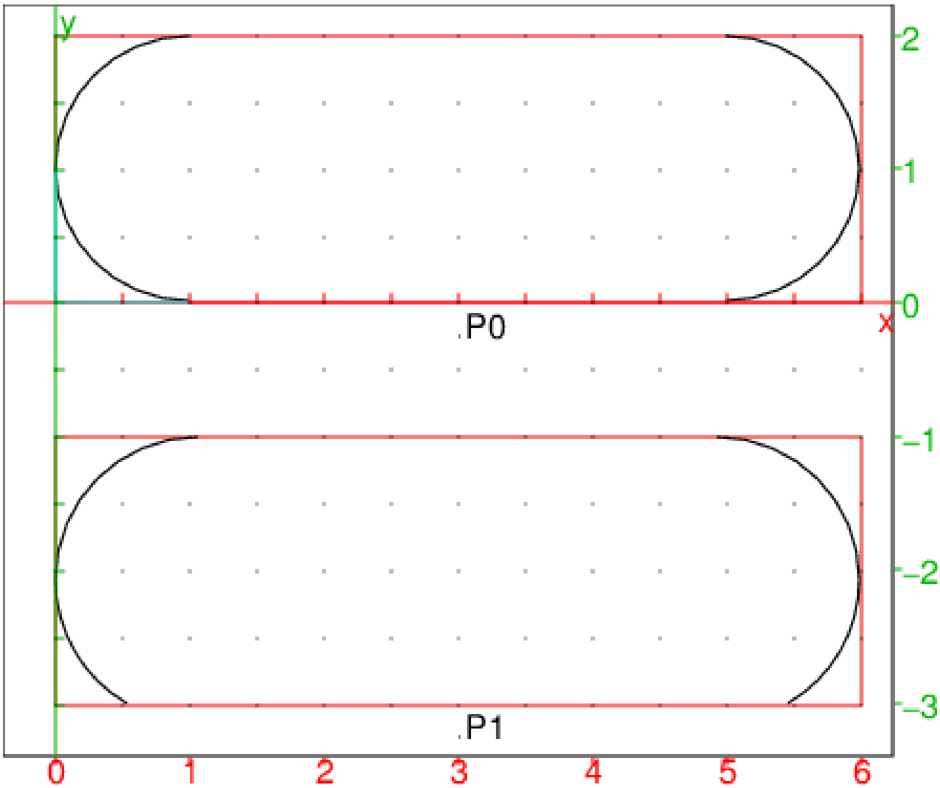
```
S1:=aire(cercle(-5/2,r,-pi/3,4*pi/3))+aire(triangle(
-5/2,-5/2+r*(-1/2-i*sqrt(3)/2),-5/2+r*(1/2-i*sqrt(3)/2)))
```
On obtient :
```
5*pi*r^2/6+(sqrt(3))/4*r^2
```
On tape :
```
S2:=aire(cercle(0,1,-pi/4,5*pi/4))+aire(triangle(
0,r*(-sqrt(2)/2*(1+i)),r*(sqrt(2)/2*(1-i))))
```
On obtient :
```
3*pi*r^2/4+1/2*r^2
```
On tape :
```
S3:=aire(cercle(5/2,r,-pi/6,7*pi/6))+aire(triangle(
5/2,5/2+r*(-sqrt(3)/2-i/2),5/2+r*(sqrt(3)/2-i/2)))
```
On obtient :
```
2*pi*r^2/3+(sqrt(3))/4*r^2
```

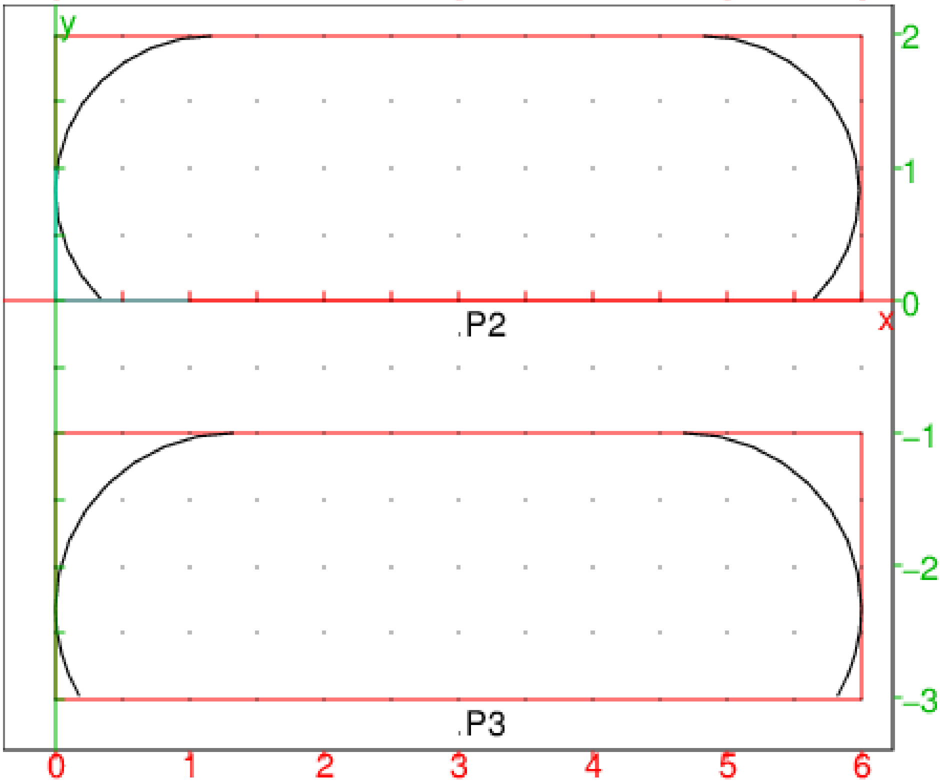
Calcul des différents rayons.
On tape :
```
r0:=normal(solve(a=2*r,r))
```
On obtient :
```
a/2
```
On tape :
```
r1:=op(normal(solve(a=r+r*sqrt(3)/2,r)))
```
On obtient :
```
(-2*sqrt(3)+4)*a
```
On tape :
```
r2:=op(normal(solve(a=r+r*sqrt(2)/2,r)))
```
On obtient :
```
(-(sqrt(2))+2)*a
```
On tape :
```
r3:=op(normal(solve(a=r+r/2,r)))
```
On obtient :
```
2*a/3
```
On tape :
```
A0:=evalf(subst(S0,r=r0))*a^2
```
On obtient :
```
0.785398163397*a^2
```
On tape :
```
A1:=evalf(subst(S1,r=r1))*a^2
```
On obtient :
```
0.876209667375*a^2
```
On tape :
```
evalf(subst(S2,r=r2))*a^2
```
On obtient :
```
A2:=0.980091001933*a^2
```
On tape :
```
A3:=evalf(factoriser(subst(S3,r=r3))*a^2)
```
On obtient :
```
1.12329235746*a^2
```

Donc :
$A_0 \simeq 0.785398163397a^2$
$A_1 \simeq 0.876209667375a^2$
$A_2 \simeq 0.980091001933a^2$
$A_3 \simeq 1.12329235746a^2$
Si $a = 3$ on a alors :
$A_0 \simeq 7.06858347057$
$A_1 \simeq 7.88588700637$
$A_2 \simeq 8.8208190174$
$A_3 \simeq 10.1096312171$
Le bassin C_0 est constitué de 2 demi-cercles de rayon 3/2 et d'un rectangle de côtés 1 et 3.
Donc son aire vaut :
$9\pi/4 + 3 \simeq A_0 + 3 \simeq 10.0685834706$
Le bassin C_1 est constitué de 2 demi-cercles de rayon :
$r_1 = 6(2 - \sqrt{3}) \simeq 1.60769515459$ et
d'un rectangle de côtés $4 - 2r_1 \simeq 0.784609690826$ et 3.
Donc son aire vaut :
$(5 * \pi/6 + \sqrt{3}/4) * r1^2 + 3 * (4 - 2 * r1) \simeq A_1 + 3 * 0.784609690826 \simeq 10.2397160788$
Le bassin C_2 est constitué de 2 demi-cercles de rayon :
$r_2 = 3(2 - \sqrt{2}) \simeq 1.75735931288$ et
d'un rectangle de côtés $4 - 2r_2 \simeq 0.485281374239$ et 3.
Donc son aire vaut :
$3\pi r_2^2/4 + r_2^2/2 + 3(4 - 2r_2) \simeq A_2 + 3 * 0.485281374239 \simeq 10.2766631401$
Le bassin C_3 est le même que B_3.
Donc son aire vaut : $2\pi/3 * 2^2 + \sqrt{3} \simeq 10.1096312171$
Dans ce cas le bassin le plus grand est C_2

La piscine

Monsieur X veut faire une piscine s'inscrivant dans un rectangle de largeur 2 unités et de longueur 6 unités mais il veut que les 2 bords les plus petits soient arrondis.
On lui propose les 4 solutions P_k ($k = 0, 1, 2, 3$) suivantes :
on coupe chaque bassin Bk ($k = 0, 1, 2, 3$) selon son axe de symétrie et on accole chacune des ces moitiés à un rectangle.
Voici les 4 propositons :





Dessiner ces 4 piscines avec `Xcas` et calculer l'aire de ces 4 piscines.
Est-ce que l'aire de la plus grande piscine correspond à l'aire du plus grand bassin ?

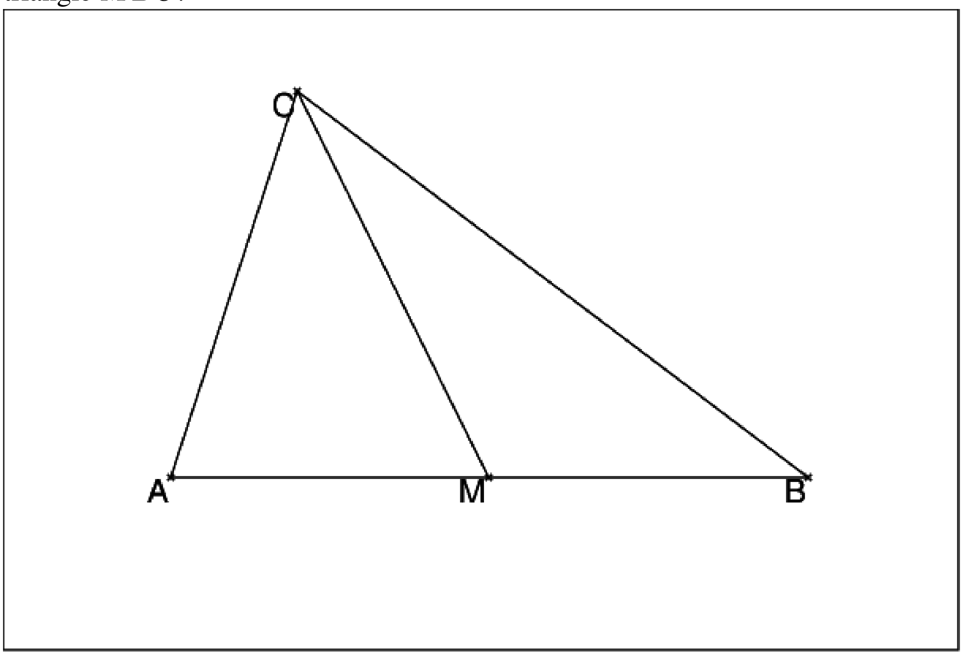
L'aire de la piscine P_k est égale à la somme de l'aire du bassin B_k et de l'aire du rectangle de largeur $a = 2$ et de longueur $3a - 2r_k = 2(3 - r_k)$. On tape :

`a:=2`
On tape :
`evalf(A0+2*(6-2*r0))`
On obtient :
`11.1415926536`
On tape :
`evalf(A1+4*(3-r1))`
On obtient :
`11.2176515906`
On tape :
`evalf(A2+4*(3-r2))`
On obtient :
`11.2340725067`
On tape :
`evalf(A3+4*(3-r3))`
On obtient :
`11.1598360965`
P_2 est la plus grande piscine et elle correspond à l'aire du bassin B_2. En effet lorsque l'aire des bassins augmente, l'aire du rectangle intérieur diminue...donc on ne peut rien dire à priori.

15.6 Le puzzle des triangles de même aire

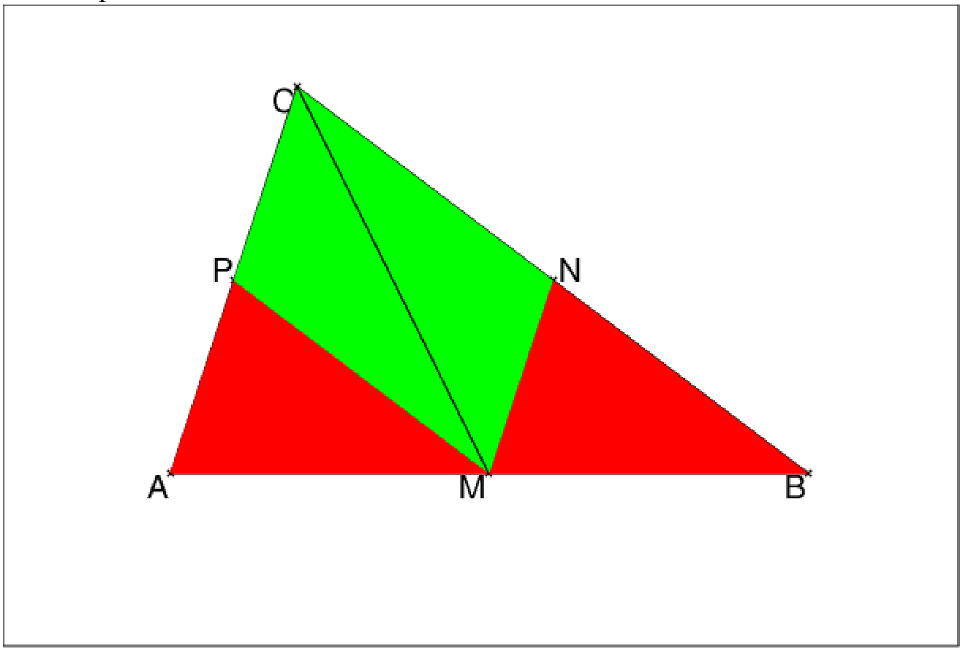
15.6.1 Pour un cas particulier

Soit ABC un triangle quelconque et soit M le mileu de BC.
Comment faire un puzzle qui permet de reconstituer soit le triangle AMC, soit le triangle MBC.

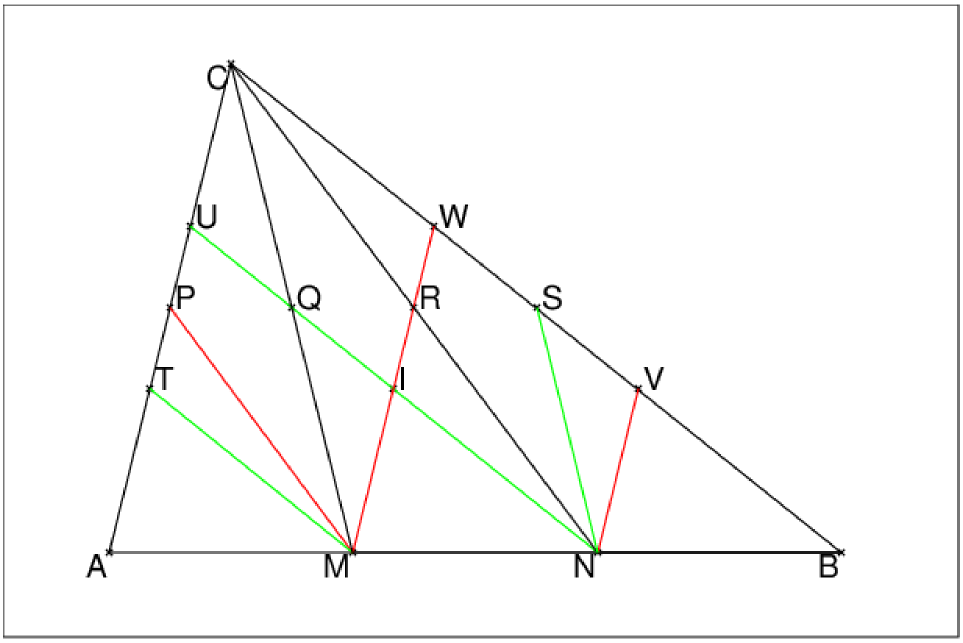


Solution On remarque que cela est possible car les 2 triangles ont la même aire. On va faire un puzzle qui a 2 pièces.

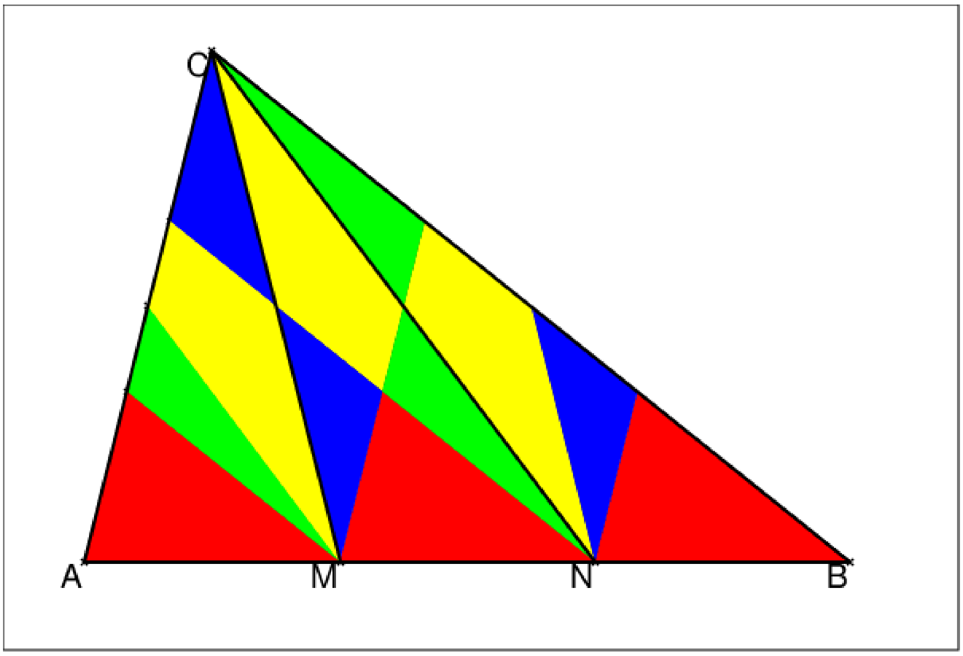
Soient N le milieu de BC et P le milieu de AC.
D'après le théorème des milieux on a :
MN est parallèle à AC et MP est parallèle à BC
$MN = AC/2 = AP = PC$ et $MP = BC/2 = NB = NC$
Donc les triangles AMP et MBN sont égaux (ils ont 3 côtés égaux) et
les triangles PMC et CMN sont égaux (ils ont 3 côtés égaux).
D'où le puzzle :



Exercice
On partage AB en trois parties égales.Faire un puzzle qui permet de reconstituer les 3 triangles ainsi déterminés.
Soient ABC un triangle quelconque et 2 points M, N du segment AB tels que le $AM = MN = NB$.
Comment faire un puzzle qui permet de reconstituer soit le triangle AMC, soit le triangle MNC, soit le triangle NBC.
On fabrique les 2 pièces qui permet de reconstituer les 2 triangles AMC et MNC en coupant selon les traits rouges issus de M et selon le segment CM.
On fabrique les 2 pièces qui permet de reconstituer les 2 triangles MNC et NBC en coupant selon les traits verts issus de N et selon le segment CN.



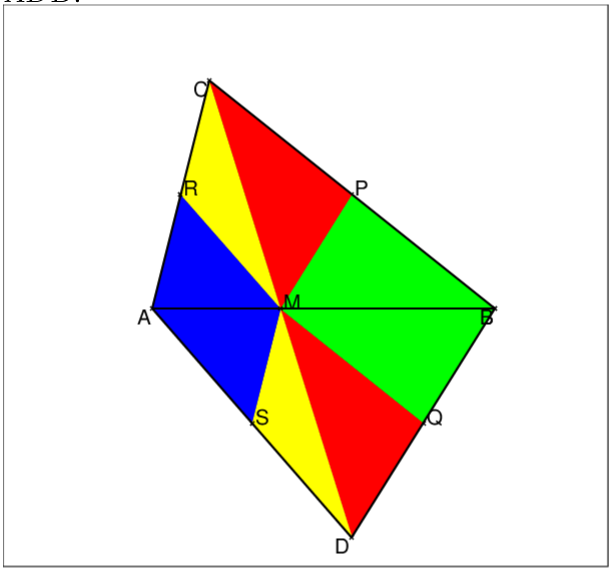
Dans le triangles MNC le trait vert et le trait rouge se coupent en I : le trait vert coupe les 2 pièces rouges en 2 morceaux : ce qui donne un puzzle de 4 pièces.



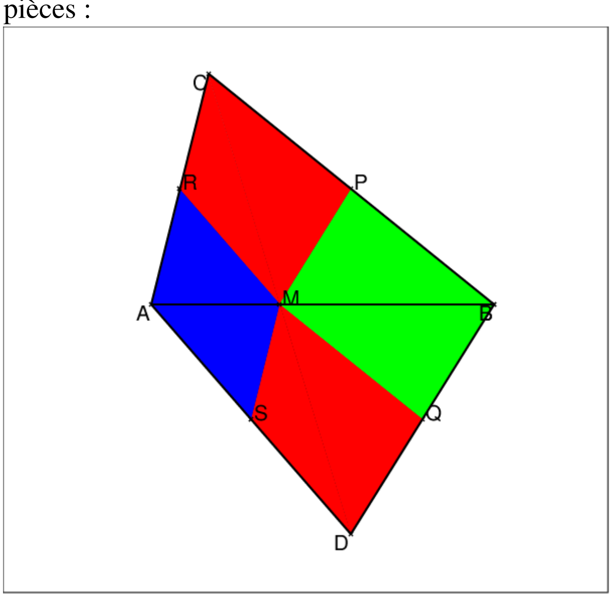
15.6.2 Pour 2 triangles de même aire et ayant un côté de même longueur

On dispose ces 2 triangles selon les 2 triangles ABC et ADB avec D et C de part et d'autre du segment AB. Soit M le point d'untesection de AB et de CD. Comme ces 2 triangles ont même aire, les hauteurs issues de C et de D sont égales

et donc C et D sont symétriques par rapport à M.
On considère le triangle ADC : M est le milieu de CD.
On est donc d'après l'exercice précédent avec 2 pièces on peut réaliser soit le triangle AMC, soit le triangle ADM. De même, si on considère le triangle BCD : M est le milieu de CD. On est donc d'après l'exercice précédent avec 2 autres pièces on peut réaliser soit le triangle BCM, soit le triangle BMD.
Avec ces 4 pièces on peut donc reconstituer soit le triangle ABC, soit le triangle ADB.

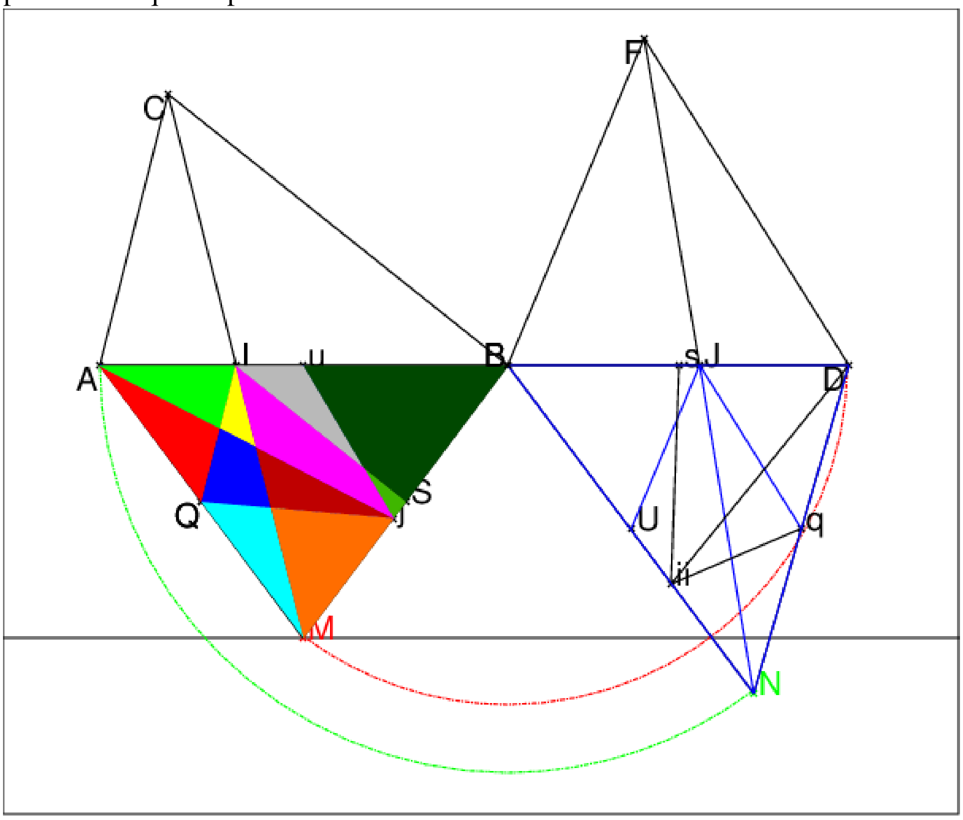


Remarque Les 2 pièces bleues sont symétriques par rapport au milieu de AM, les 2 pièces vertes sont symétriques par rapport au milieu de MB alors que les 2 pièces rouges et 2 pièces jaunes sont obtenues par translation.
On peut donc recoller la pièce jaune et la pièce rouge pour obtenir un puzzle de 3 pièces :

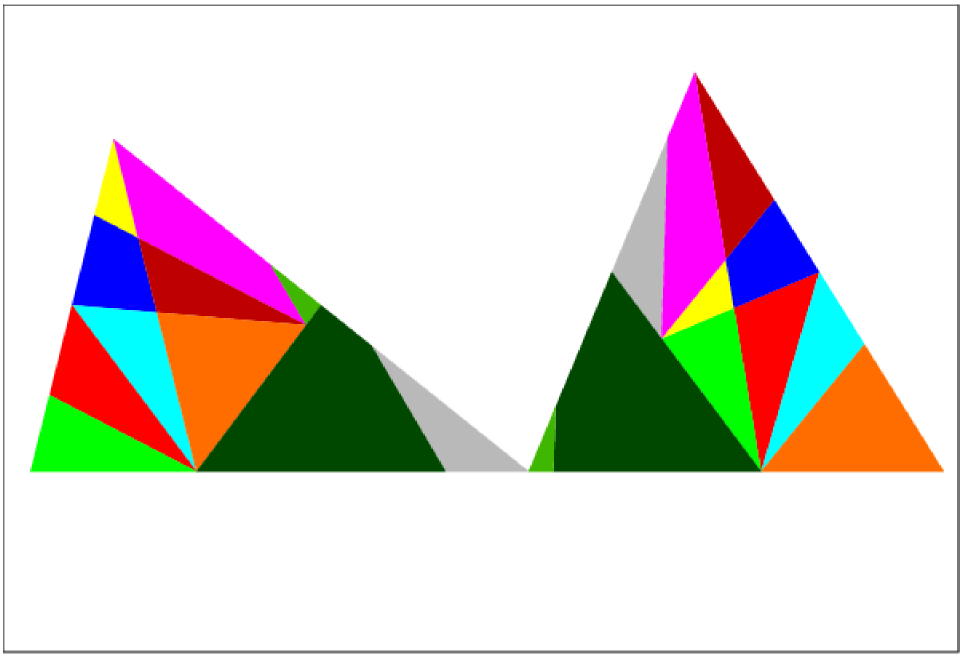


15.6.3 Pour 2 triangles de même aire

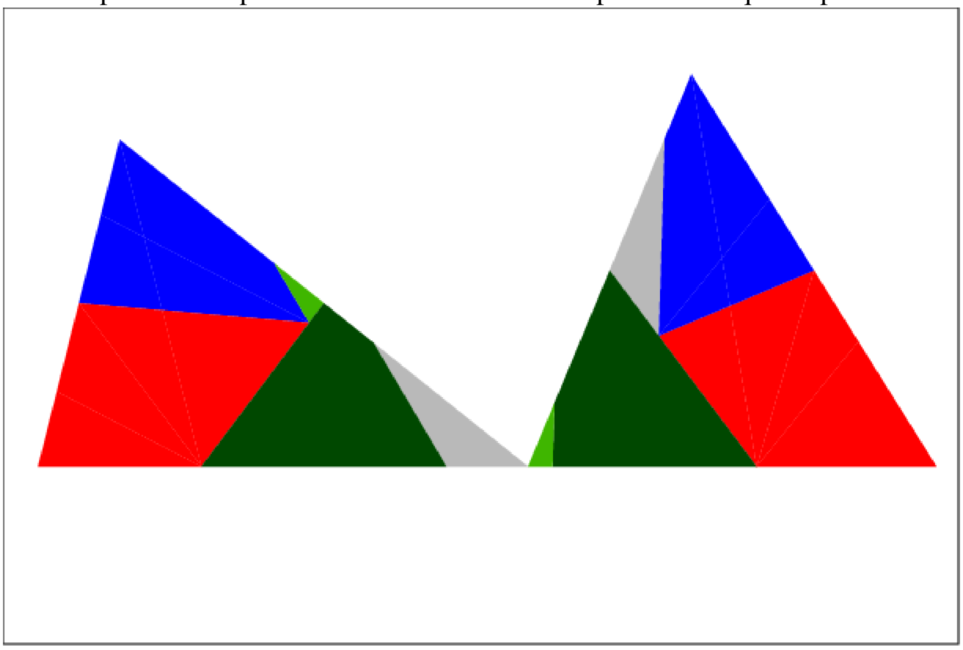
Soient ABC et BDF 2 triangles de même aire.
Pour faire les pièces du puzzle qui permet de preconstituer soit le triangle ABC, soit le triangle BDF, on va se ramener au cas précédent(triangles de même avec une base commune). Pour cela on construit le triangle BAM ayant même aire que ABC : on trace la parallèle d_0 à AB passant par C , puis sa symétrique d_1 par rapport à AB. M est alors l'intersection (la plus proche de A) du cercle de centre B et de rayon BD avec d_1.
On sait donc faire les pièces d'un puzzle (de 3 ou 4 pièces) qui permet de réaliser soit ABC soit BAM.
Ensuite, on transforme BAM par la rotation de centre B et d'angle $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BD}$ qui transforme M en D et A en N.
Les triangles BDN et BDF ont BD en commun et ils ont la même aire, donc on sait faire les pièces d'un puzzle (de 3 ou 4 pièces) qui permet de réaliser soit BDN soit BDF.
Il suffit ensuite de découper les pièces voici ce découpage si on a choisi de faire 4 pièces à chaque étape :



Voici le puzzle de 12 pièces :



Voici le puzzle de 5 pièces si on a choisi de faire 3 pièces à chaque étape :



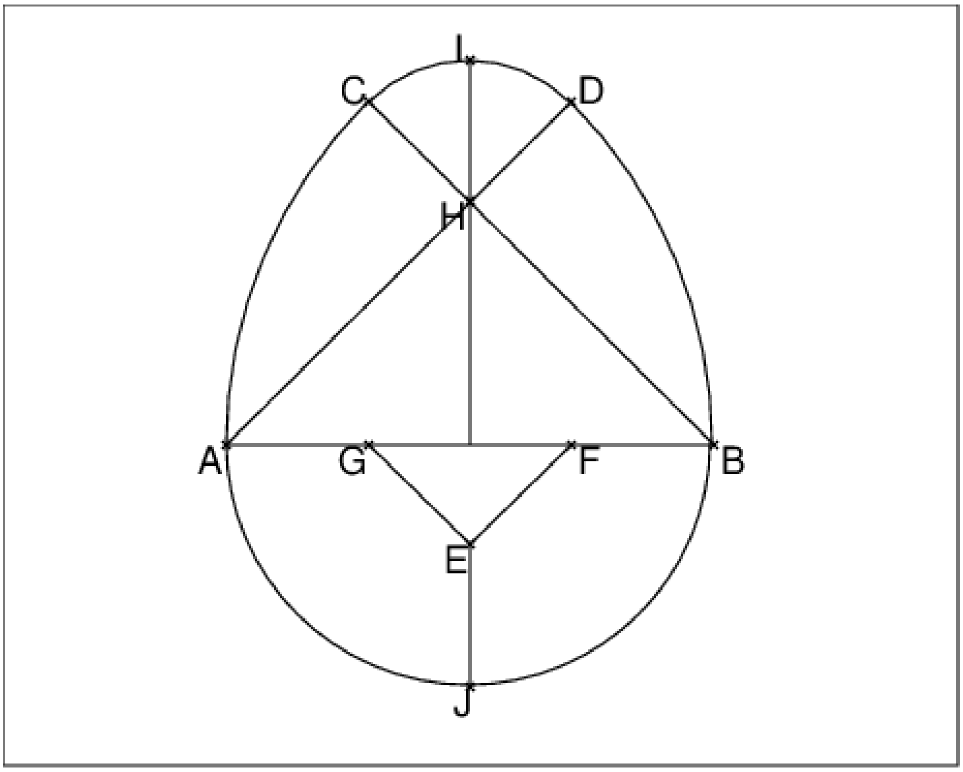
15.7 Le puzzle de l'œuf

On construit un œuf que l'on partage en 9 morceaux : parmi ces 9 morceaux il y a 2 morceaux symétriques, 3 morceaux en 2 exemplaires et un morceau tout seul. On tape :

```
r:=5;
A:=point(-r);
B:=point(r,affichage=quadrant4);
```

```
cercle(0,r,-pi,0);
I:=point(i*r*(3-sqrt(2)),affichage=quadrant2);
J:=point(-i*r);
H:=point(i*r);
cercle(B,2*r,3*pi/4,pi);;
C:=point(r+2*r*exp(3*i*pi/4),affichage=quadrant2);
cercle(A,2*r,0,pi/4);;
D:=point(-r+2*r*exp(i*pi/4),affichage=quadrant1);
cercle(H,r*(2-sqrt(2)),pi/4,3*pi/4);
E:=point(r*i*(1-sqrt(2)));
F:=point(-r*(1-sqrt(2)),affichage=quadrant4);
G:=point(r*(1-sqrt(2)));
segment(A,B);
segment(B,C);
segment(A,D);
segment(E,F);
segment(E,G);
segment(I,J);
```

On obtient :



Cet œuf est formé par du demi-cercle inférieur de diamètre $AB = 10$ et de 3 arcs de cercle.

Soit HJ le diamètre perpendiculaire à AB ($HJ = AB$).

Les 3 arcs de cercle sont :

— l'arc CA est sur le cercle de centre B et de rayon AB et a comme angle au centre $\pi/4$

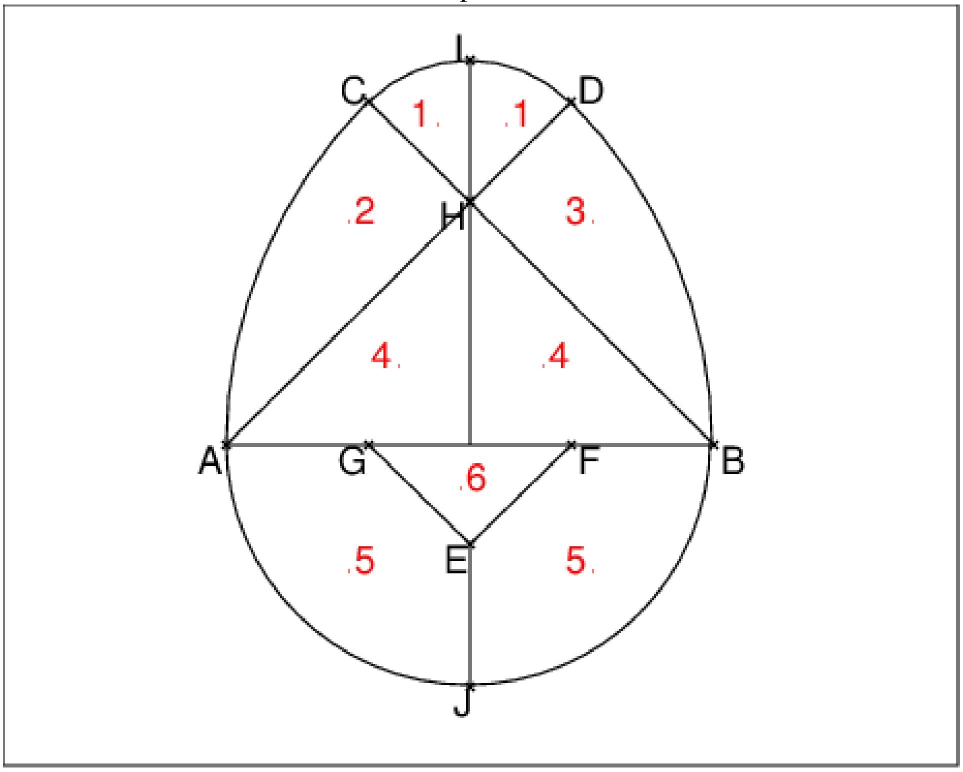
— l'arc BD est sur le cercle de centre A et de rayon AB et a comme angle au centre $\pi/4$,

— l'arc DC est sur le cercle de centre H et de rayon HD et a comme angle au centre $\pi/2$.

Le point E est sur HJ et $JE = HD$ Les points F et G sont sur AB et $EF = EG = EJ = HD$ On demande :

— Calculer HD.
— Calculer FG.
— Calculer AF et GB.
— Réaliser cette figure sur du carton et découper les pièces du puzzle.
— Chaque élève réalise avec ces pièces une figure ayant la forme d'un oiseau.
— Chaque élève représente avec `Xcas` son oiseau (en forme pleine) ainsi que la façon dont il a été fabriqué (on doit voir les 9 pièces qui le constitue).

Une solution On va numéroter ces pièces et les définir avec `Xcas` :



Pour cela on rajoute des légendes à la figure ci-dessus.

```
legende(0.7+6.6*i,1,rouge);
legende(-0.7+6.6*i,1,quadrant2,rouge);
legende(-2.5+4.6*i,2,rouge);
legende(2.5+4.6*i,3,quadrant2,rouge);
legende(-1.5+1.6*i,4,quadrant2,rouge);
legende(1.5+1.6*i,4,rouge);
legende(-2.5-2.6*i,5,rouge);
legende(2.5-2.6*i,5,quadrant2,rouge);
legende(-0.2-0.9*i,6,rouge);
```

Pour chaque pièce, on aura 4 paramètres a, r, t, c :
a donne la position de la pièce, r est le rayon de l'œuf, t est l'angle qui donne l'orientation de la pièce et c qui donne la couleur de la pièce.

Pour les piéce 1, 3, 5 qui contiennentt un arc de cercle AB (arc AB positif) a sera le centre O de cet arc et t sera l'angle que fait OA avec l'axe des x.
Pour la piéce 4 qui contiennentt un arc de cercle AB (arc AB positif) a sera le centre O de cet arc et $pi - t$ sera l'angle que fait OB avec l'axe des x.
Pour les pièces qui sont des triangles rectangles isocèle ABC direct ($AB = AC$), a sera l'affixe du sommet C et t sera l'angle que fait CA avec l'axe des x.
On tape :

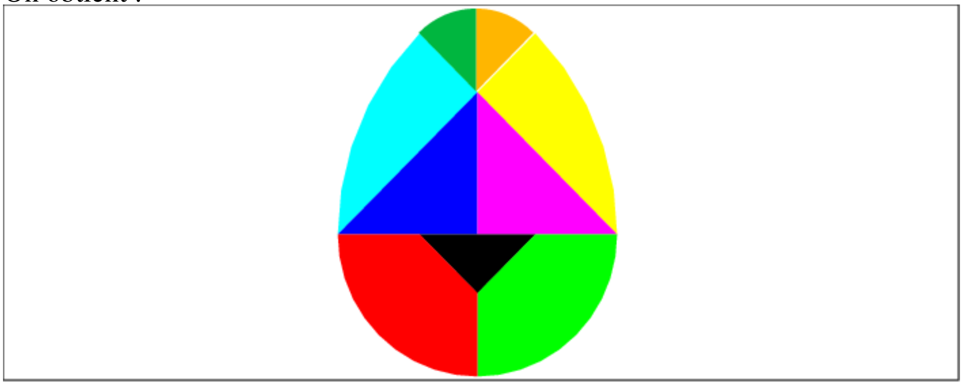
```
piece1(a,r,t,c):=affichage(cercle(a,r*(2-sqrt(2)),t,t+pi/4),rempli+c)
piece3(a,r,t,c):={
local L,j;
L:=point(a+2*r*exp(i*t));
pour j de 1 jusque 5 faire
  L:=L,point(a+2*r*exp(i*j*pi/20.)*exp(i*t));
fpour;
L:=L,point(a+r*(1+i)*exp(i*t));
return affichage(polygone(L),rempli+c);
}:;
piece2(a,r,t,c):={
local L,j;
L:=point(a-2*r*exp(i*t));
pour j de -1 jusque -5 pas -1 faire
  L:=L,point(a+2*r*exp(i*pi+i*j*pi/20.)*exp(i*t));
fpour;
L:=L,point(a+r*(-1+i)*exp(i*t));
return affichage(polygone(L),rempli+c);
}:;
piece4(a,r,t,c):=triangle(a,a+r*exp(i*t),a+r*(1+i)*exp(i*t),
                          affichage=rempli+c):;
piece5(a,r,t,c):={
local L,j;
L:=point(a+r*exp(i*t));
pour j de 1 jusque 10 faire
  L:=L,a+r*exp(i*j*pi/20.)*exp(i*t);
fpour;
L:=L,a+r*(sqrt(2)-1)*i*exp(i*t),a+r*(sqrt(2)-1)*exp(i*t);
return affichage(polygone(L),rempli+c);
}:;
piece6(a,r,t,c):=triangle(a,a+r*(2-sqrt(2))*exp(i*t),a+r*(2-sqrt(2))*
```

On tape :

```
piece2(5,5,0,6);
piece3(-5,5,0,3);
piece1(5*i,5,pi/4,1);
piece1(5*i,5,pi/2,2);
piece4(-5,5,0,4);
piece4(5*i,5,-pi/2,5);
```

```
piece6(-5*(sqrt(2)-1),5,-pi/4,0);
piece5(0,5,-pi/2,2);
piece5(0,5,pi,1);
```

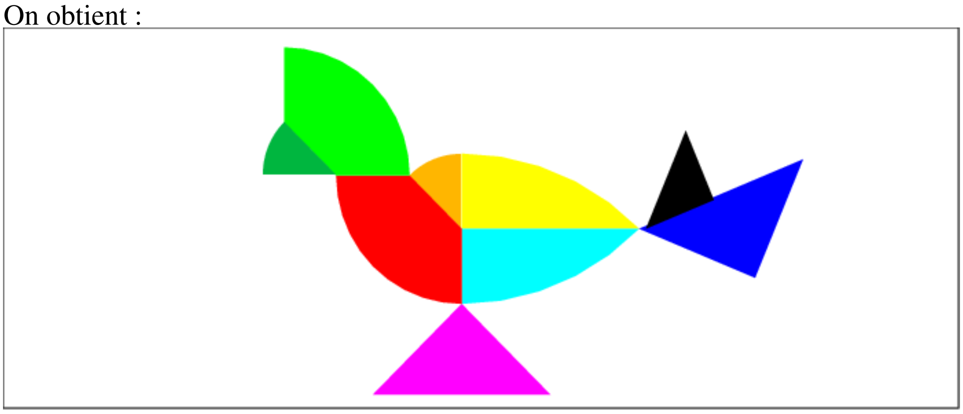
On obtient :



Voici 2 exemples d'oiseaux...

```
oiseau1(a,r):={
 local L;
L:= piece4(a,r,3*pi/4,5);
L:= L,piece3(r/sqrt(2)*(-1+i)+2*i*r*(2-sqrt(2))-2*r*i,r,pi/4,3);
L:= L,piece1(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i*(2-sqrt(2)),r,pi/2,93);
L:= L,piece2(r/sqrt(2)*(-1+i)+2*r*i,r,3*pi/4,6);
L:= L,piece5(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i,r,pi,1);
L:= L,piece5(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i-sqrt(2)*r,r,0,2);
L:= L,piece1(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i-r,r,3*pi/4,101);
L:= L,piece4(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i*(2-sqrt(2))+r*sqrt(2),r,-pi/8,4);
L:= L,piece6(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i*(2-sqrt(2))+3*r-
     r*sqrt(2)+i*i*(2-sqrt(2)),r,pi/8,0);
return L;
}:;
```

Puis : `oiseau1(0,5)`
On obtient :



On tape :

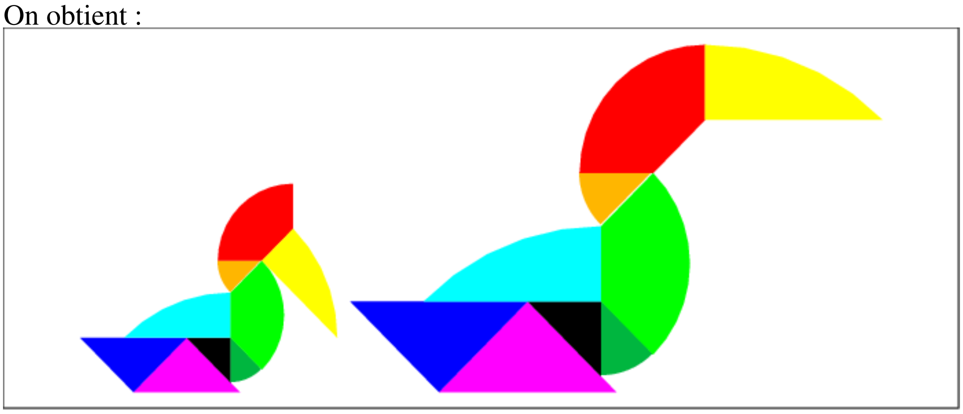
```
oiseau2(a,r,b):={
  local L;
L:= piece4(a,r,3*pi/4,5);
```

```
L:=L,piece4(a+r*sqrt(2)/2*(-3+i),r,-pi/4,4);
L:=L,piece6(a+(3*sqrt(2)-4)/2*(-1+i)*r,r,pi/2,0);
L:=L,piece1(a-(3*sqrt(2)-4)/2*r+i*r/sqrt(2),r,-pi/2,101);
L:=L,piece2(a-(3*sqrt(2)-4)/2*r+i*r/sqrt(2)-i*r*sqrt(2),r,-pi/4,6)
L:=L,piece5(a-(3*sqrt(2)-4)/2*r+i*r/sqrt(2)+r*(sqrt(2)-1)/sqrt(2)*(-1
r,-pi/4,2);
L:=L,piece1(a-(3*sqrt(2)-4)/2*r+i*r/sqrt(2)+(-1+i)*r*(1-1/sqrt(2))+
r*(1+i)/sqrt(2),r,-pi,93);
L:=L,piece5(a+r*(-1+i)*sqrt(2)/2+r*(1+i)+(sqrt(2)-1)*r,r,pi/2,1);
si b==0 alors
  L:=L,piece3(a+r*(-1+i)*sqrt(2)/2+r*(1+i)+r*(sqrt(2)-1)-i*r,r,pi/4,3
sinon
   L:=L,piece3(a+r*(-1+i)*sqrt(2)/2+r*(1+i)-(1+i)*r,r,0,3);
fsi;
return(L);
}:;
```

Puis :

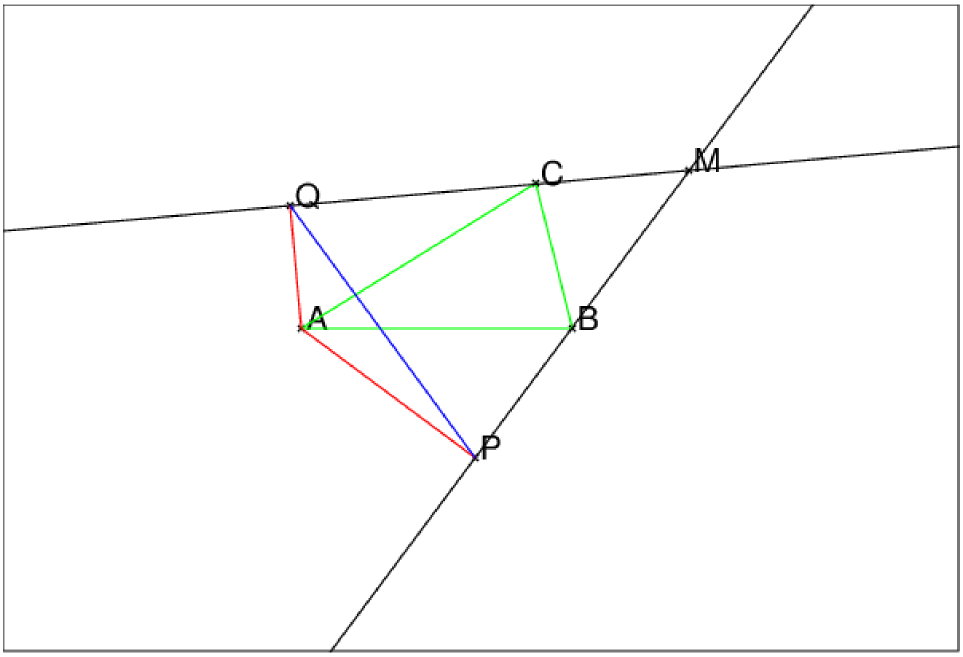
`oiseau2(0,3,1),oiseau2(15,5,0)`

On obtient :

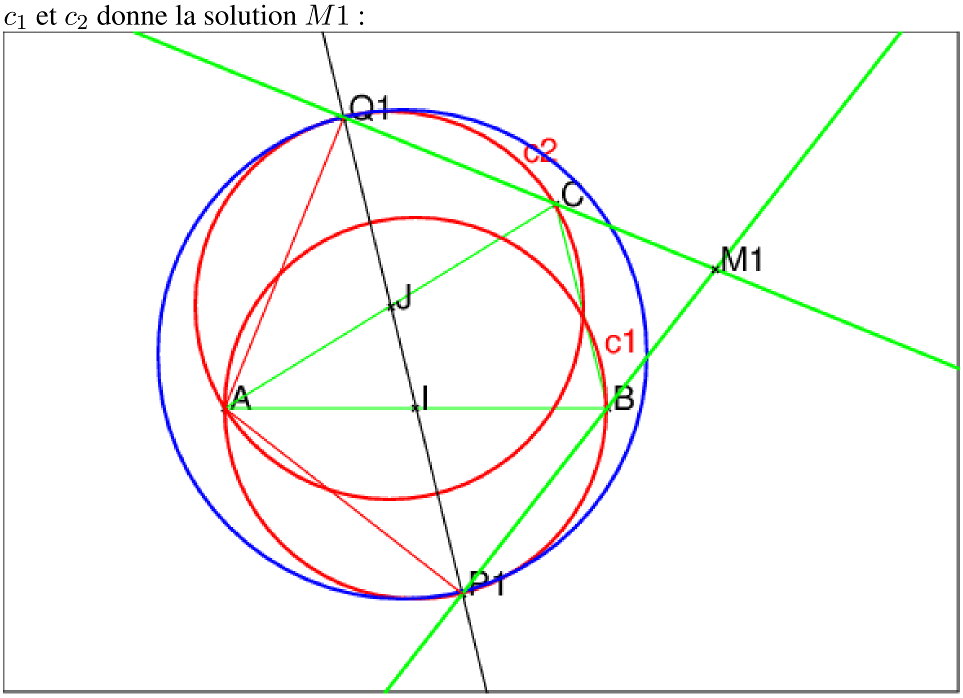


15.8 Trouver le maximum d'une longueur

Soient ABC un triangle quelconque et un point M distinct de A, B et C. On note P et Q les projections orthogonales de A respectivement sur MB et MC. Où placer le point M pour que la longueur PQ soit maximum ?



Solution
Le point P se trouve sur le cercle c_1 de diamètre AB et
le point Q se trouve sur le cercle c_2 de diamètre AC.
On cherche donc le maximum de PQ lorsque P est sur c_1 et Q sur c_2.
Si I est le milieu de AB, I est le centre de c_1 et
si J est le milieu de AC, J est le centre de c_2.
La construction du cercle c tangent à c_1 (en P_1) et tangent à c_2 (en Q_1) et contenant c_1 et c_2 donne la solution $M1$:



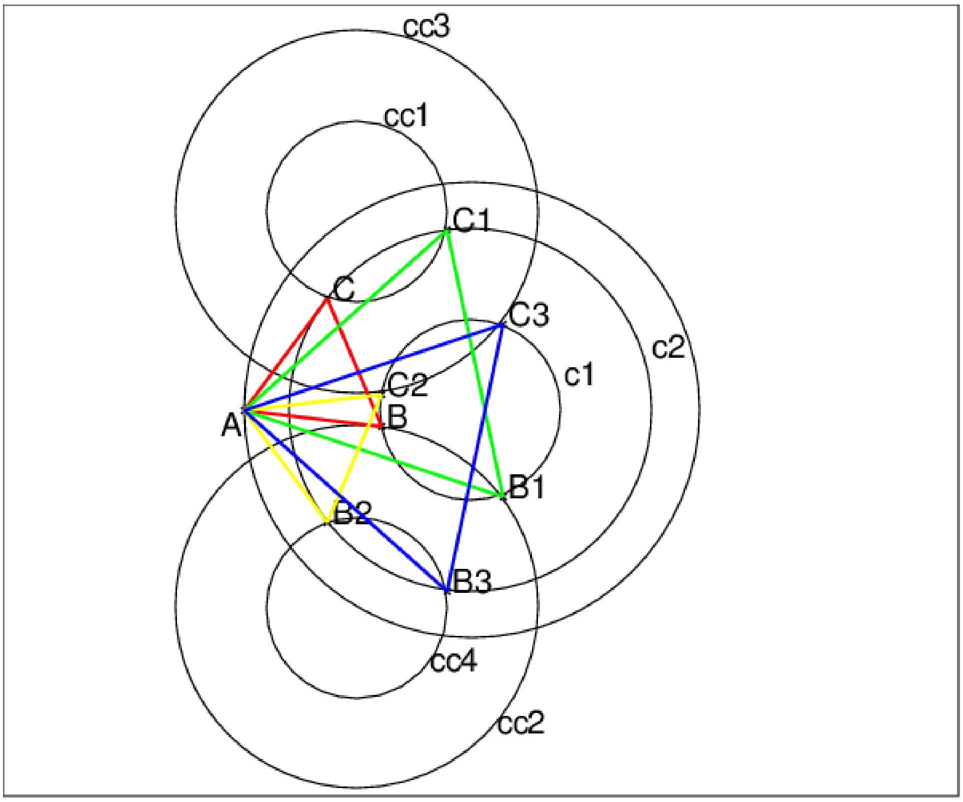
On tape :

```
A:=point([-4,'affichage'=0]);
B:=point([2,0,'affichage'=0]);
```

```
C:=point([1.2,3.2,'affichage'=0]);
T:=triangle(A,B,C,affichage=2):;T;
c1:=cercle(A,B,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
c2:=cercle(A,C,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
I:=milieu(A,B);
J:=milieu(A,C);
d2:=droite(I,J):;d2;
Q:=inter_unique(c2,d2,Q);
P1:=inter_unique(c1,d2,P);
cercle(P1,Q1,affichage=4+epaisseur_ligne_2);
droite(Q1,C,affichage=2+epaisseur_ligne_2), droite(P1,B,affichage=2+ep
M1:=inter_unique(droite(Q1,C), droite(P1,B));
segment(A,Q1,affichage=1);
segment(A,P1,affichage=1);
```

15.9 Les rotations

Soient 3 cercles concentriques de rayons 2,4,5 et un point A sur le cercle de rayon 5.
Construire les triangles équilatèraux directs ABC avec B sur le cercle de rayon 2 et C sur le cercle de rayon 4 et les triangles équilatèraux direct ABC avec B sur le cercle de rayon 4 et C sur le cercle de rayon 2.
Solution
Soient c_1 le cercle de rayon 2 et c_1 le cercle de rayon 4.
Si le triangle ABC est équilatéral direct, si B est sur c_1 et C sur c_2 alors C est l'image de B par la rotation r de centre A et d'angle $\pi/3$. Soient cc_1 est le transformé de c_1 par r et cc_2 est l'image de c_1 par la rotation $r1$ de centre A et d'angle $-\pi/3$, on a alors :
C est sur c_2 et sur cc_1 et B est sur c_1 et sur cc_2 ce qui donne sur la figure les triangles ABC et AB_1C_1.
Si on choisit B en $B2$ sur c_2, on obtient les triangles AB_2C_2 et AB_3C_3.

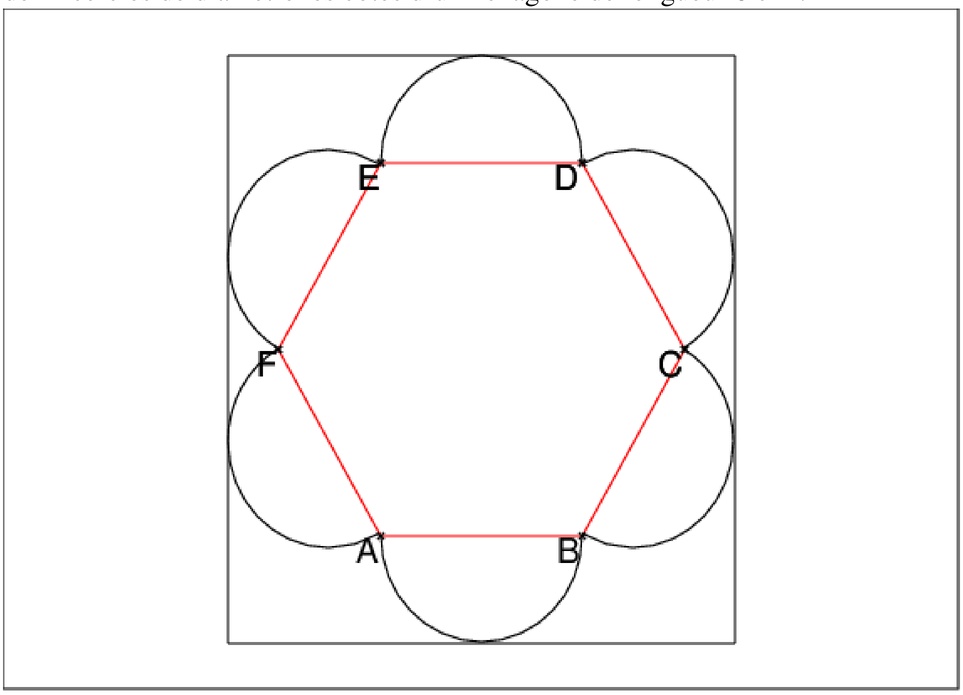


On tape :

```
c1:=cercle(0,2);
c2:=cercle(0,4);
cercle(0,5);
A:=point(-5);
cc1:=rotation(A,pi/3,c1);
cc2:=rotation(A,-pi/3,c2);
B:=inter_unique(c1,cc2);
C:=inter_unique(c2,cc1);
B1:=inter_unique(c1,cc2,[B]);
C1:=inter_unique(c2,cc1,[C]);
T:=triangle(A,B,C):;
T1:=triangle(A,B1,C1):;
cc3:=rotation(A,pi/3,c2);
cc4:=rotation(A,-pi/3,c1);
B2:=inter_unique(c2,cc4);
C2:=inter_unique(c1,cc3);
T2:=triangle(A,B2,C2):;
B3:=inter_unique(c2,cc4,[B2]);
C3:=inter_unique(c1,cc3,[C2]);
T3:=triangle(A,B3,C3):;
affichage(T,1+epaisseur_ligne_2);
affichage(T1,2+epaisseur_ligne_2);
affichage(T2,3+epaisseur_ligne_2);
affichage(T3,4+epaisseur_ligne_2);
```

15.10 Exercice

Dans un tissu rectangulaire on peut découper la forme suivante constituée de 6 demi-cercles de diamètre les côtés d'un hexagone de longueur 8 cm :

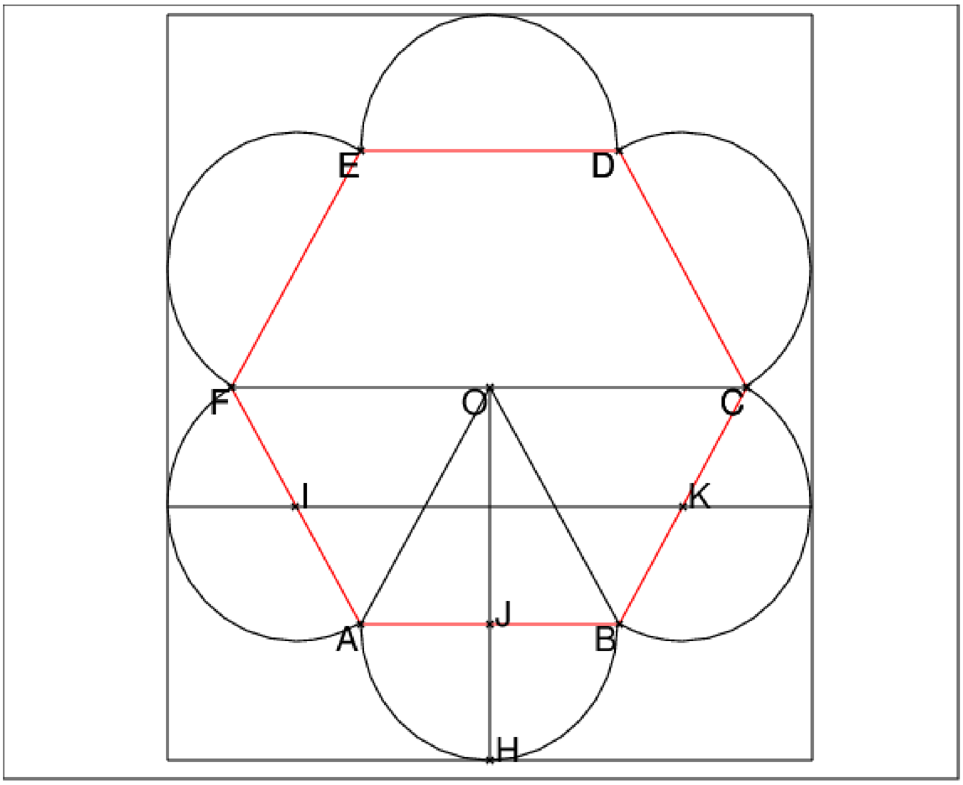


Quelle est la dimension du tissu ?
Quelle est le périmètre et l'aire de la forme découpée ?

Solution

Soient :

O le centre de l'hexagone, I (resp J, K) les milieu de AF (resp AB, BC) et H l'intersection de OJJ avec le cercle de diamètre AB.



Les côtés de l'hexagone ont pour longueur 8 cm donc :
le triangle OAB est équilatèral de côté 8 cm et sa hauteur OJ vaut donc $4\sqrt{3}$ cm.
Les demi-cercles ont pour rayon 4cm donc $OH = 4\sqrt{3} + 4 = 4(\sqrt{3} + 1)$ cm.
La longueur du rectangle est donc $8(\sqrt{3} + 1) \simeq 21.856406$ cm AB et FC sont parallèles (car $ABCDEF$ est un hexagone) et puisque I est le milieu AF et K est le milieu BC, IK est parallèle à FC et on a $IK = 3 * 4 = 12$ cm.
La largeur du rectangle est donc $4 + IK + 4 = 20$ cm Les dimensions du tissu sont donc :

$$20x8(\sqrt{3} + 1)$$

Le périmètre de la forme découpée est égal au périmètre de 3 cercles de rayon 4 cm, soit $3 * 2\pi * 4 = 24\pi$ cm
L'aire de la forme découpée est égal à l'aire de l'hexagone plus l'aire de 3 cercles de rayon 4 cm, soit : $3 * 8 * 4 * \sqrt{3} + 3 * \pi * 4^2 = 96\sqrt{3} + 3 * \pi * 16 \simeq 317.07332$ cm^2

Chapitre 16

Géométrie dans l'espace

16.1 Le tétraèdre régulier

16.1.1 Travail préparatoire

Faire découper par chaque élève dans du papier 4 triangles équilatéraux égaux de côté $a = 3cm$.
Réunir 3 de ces triangles (qu'on nomme $S1AB$, $S2BC$ et $S3CA$) de façon à réunir $S1, S2, S3$ en S et d'obtenir une pointe de sommet S et de base ABC (les 3 triangles seront reunis selon SA, SB, SC) :
on obtient un tétraèdre dont la face est ABC manquante. Cette face manquante peut être comblée par le 4-ième triangle équilatéral ABC. Fixer ce 4-ième triangle aux 3 autres et projeter S en H sur cette face ABC. Les questions :

1. Où se trouvent H ?
2. Calculer AH,BH,CH,SH.
3. Calculer l'angle que font les faces SAB, SBC, SCA avec la face ABC.
4. Calculer le volume de ce tétraèdre régulier en fonction de $a = AB$.
5. Ouvrir maintenant la pointe coupant SA, SB, SC pour obtenir une figure plane (S va redevenir 3 points $S1, S2, S3$). Qu'obtient-on ?
6. Où se trouvent alors les points A, B, C ?
7. Que décrivent les points $S1, S2, S3$ lorsque l'on replie le triangle $S1S2S3$ pour former le tétraèdre $SABC$.

Si $B1$ est la projection de $S3$ sur AC, on a :
$S3B1 = a\sqrt{3}/2$, $B1H = a\sqrt{3}/6$ et
$SH^2 = SB1^2 - B1H^2 = 3a^2/4 - 3a^2/36 = 2a^2/3$ L'angle b que font les faces entre elles a donc pour tangente :
$\tan(b) = SH/B1H = a\sqrt{2}/\sqrt{3}/(a\sqrt{3}/6) = 6\sqrt{2}/3 = 2\sqrt{2}$

16.1.2 Vérification et calculs avec `Xcas`

On ouvre un niveau de géométrie 3d. On choisit de construire un tétraèdre de côté 3.

1. On tape :

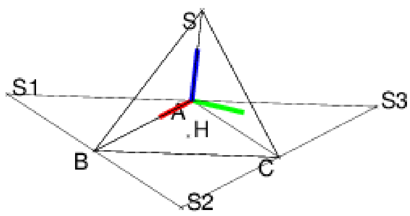
```
A:=point(0,0,0);
B:=point(3,0,0);
C:=point(3/2,sqrt(3)*3/2,0);
T:=tetraedre(A,B,C):;T;
S:=sommets(T)[3];
H:=projection(plan(A,B,C),S);
normal(coordonnees(H))
```

On obtient pour H : `[3/2,(sqrt(3))/2,0]`

2. On tape :
   `normal(longueur(A,H),longueur(B,H),longueur(C,H))`
   On obtient : `sqrt(3),sqrt(3),sqrt(3)`
   On tape :
   `normal(longueur(S,H))`
   On obtient : `sqrt(6)`
3. On tape :
   `angle(plan(S,A,B),plan(A,B,C))`
   On obtient : `acos(1/3)`
4. On tape pour avoir le volume du tétraèdre T
   `normal(1/3*longueur(S,H)*aire(triangle(A,B,C)))`
   On obtient : `9*sqrt(3)/4`
5. On tape :

```
A:=point(0,0,0);
B:=point(3,0,0);
C:=point(3/2,sqrt(3)*3/2,0);
T:=tetraedre(A,B,C):;T;
S:=sommets(T)[3];
S1:=rotation(droite(A,B),pi-acos(1/3),S);
S2:=rotation(droite(B,C),pi-acos(1/3),S);
S3:=rotation(droite(C,A),pi-acos(1/3),S);
triangle(S1,S2,S3);
```

On obtient :



6. On tape :
   `normal(coordonnees(milieu(S1,S3))-coordonnees(A))`
   On obtient : `[0,0,0]`
   ou on tape :
   `normal(coordonnees(milieu(S1,S3)))==normal(coordonnees(A))`
   On obtient : `1` c'est à dire `vrai`
   On tape :
   `normal(coordonnees(milieu(S1,S2))-coordonnees(B))`
   On obtient : `[0,0,0]`
   On tape :
   `normal(coordonnees(milieu(S2,S3))-coordonnees(C))`
   On obtient : `[0,0,0]`

Remarque
Si on veut avoir les résultats en fonction de a il faut ajouter le paramètre a avec `Edit` du niveau de géométrie 3d puis ajouter paramètre en mettant par exemple que a varie de 0 à 5 et en mettant $a = 3$ ce qui donne comme niveau 1 :
`assume(a=[3,0,5,0.1])` puis on modifie fes définitions :
`B:=point(a,0,0);`
`C:=point(a/2,a*sqrt(3)/2,0);`
les longueurs sont alors multipliées pas $a/3$ et le volume par $a^3/27$.

16.1.3 Faire une animation avec `Xcas`

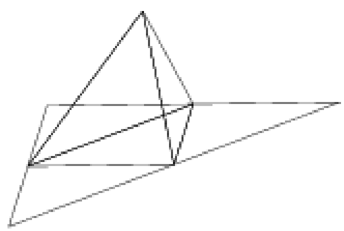
Faire une animation qui montre comment en pliant un triangle équilatéral, on obtient un tétraédre régulier. On pose $a = 6$ et on a $\tan(b) = 2\sqrt{2}$ donc $b = \text{atan}(2\sqrt{2}) \simeq 1.23$ $S1$ subit une rotation d'un angle allant de 0 à $\pi - b \simeq 1.91$. On note MNP le triangle $S1S2S3$ et on note $S1$ le transformé de M par la rotation d'axe AB etc ...
Faire attention à l'orientation de l'axe de la rotation ! ! !
On tape :

```
tetreganim(t):={
local S1,S2,S3,A,B,C,c,K,M,N,P;
M:=point(0,0,0):;
N:=point(6,0,0):;
P:=point(3,3*sqrt(3),0):;
triangle(M,N,P);
A:=milieu(M,P);
B:=milieu(M,N);
C:=milieu(N,P);
S1:=rotation(droite(B,A),t,M);
S2:=rotation(droite(C,B),t,N);
S3:=rotation(droite(A,C),t,P);
retourne [affichage(triangle(S1,A,B),1+rempli),
          affichage(triangle(S2,C,B),2+rempli),
          affichage(triangle(S3,A,C),4+rempli)];
}:;
```

Puis, on tape dans des lignes de commandes (WX-=-3,WX+=7 et les autre-5 et +5) : `L1:=seq([tetreganim(t)],t=0..1.91,0.1):;`
`L2:=seq([tetreganim(t)],t=1.91..0,-0.1):;`
`animation(L1,L2)`
On obtient :

16.2 Le tétraèdre non régulier ayant 4 faces égales

On veut plier une feuille triangulaire pour en faire un tétraèdre.

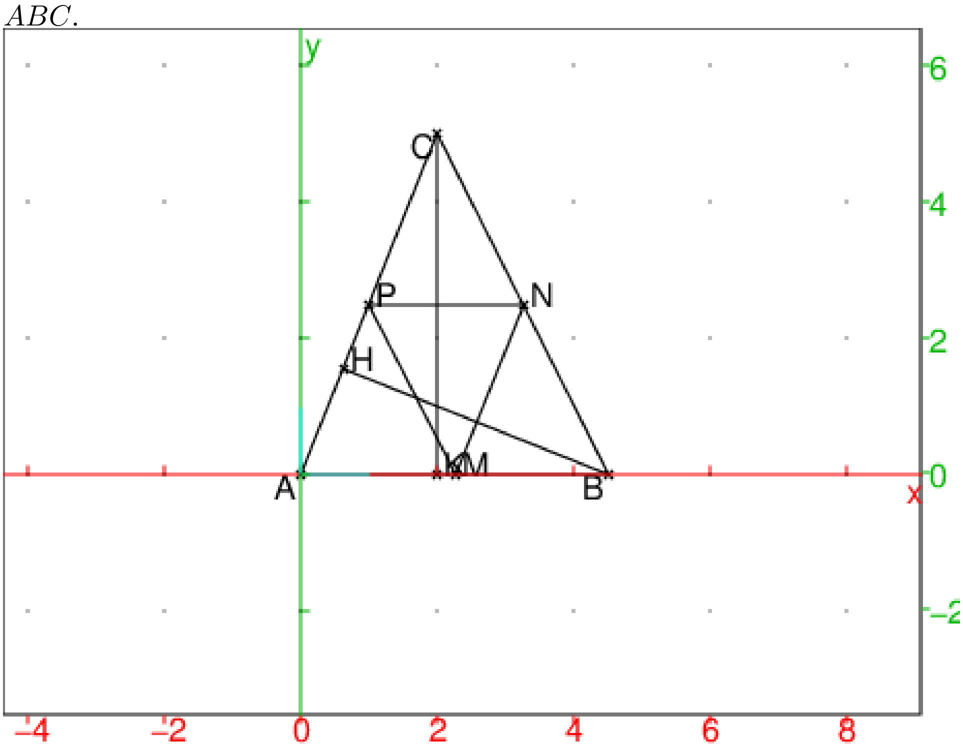


Cela est-il toujours possible ?

16.2.1 Travail préparatoire

Soit un triangle ABC. On veut le plier pour en faire un tétraèdre $MNPQ$. On veut plier le triangle ABC pour amener A, B, C en le sommet Q.
Si cela est possible on aura :

$MA = MB = MQ$ si M est le point de pliure sur AB,
$NB = NC = NQ$ si N est le point de pliure sur BC,
$PA = PC = PQ$ si P est le point de pliure sur AC.
Donc le triangle MNP est le triangle qui joint les milieux des côtés du triangle ABC.



Peut-on toujours amener A, B, C en le sommet Q ?
Regardons tout d'abord en géométrie plane les propriétés de la figure formée par ABC et MNP.
Soient J le symétrique de B par rapport à MN et K le symétrique de C par rapport à PN (cela revient à réaliser les plis MN et PN).
Montrer que

— le triangle MNP a ses côtés parallèles aux côtés de ABC,
— $MN = AC/2$, $NP = AB/2$ et $MP = BC/2$,
— J est le pied de la hauteur de ABC issue de B
— K est le pied de la hauteur de ABC issue de C

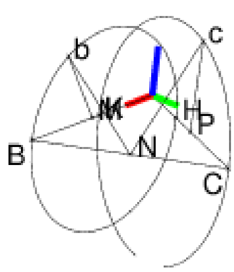
Regardons maintenant en géométrie dans l'espace où se déplacent les points $S2$ et $S3$ ($S2$ (resp $S3$) est le nom de B (resp C)) quand on fait le pliage.

— Montrer que $S2$ et $S3$ sont sur la sphère de diamètre BC (i.e. centre N et rayon $BC/2$),
— Montrer que $S2$ est aussi sur une 2ième sphère. Laquelle ?
— Montrer que $S3$ est aussi sur une 3ième sphère. Laquelle ?
— Lorsque l'on plie selon MN, on fait subir au point $S2$ une rotation. Quel est l'axe de cette rotation ?
— En déduire que $S2$ décrit un cercle de centre le milieu de BJ.
Ce cercle est l'intersection de 2 sphères lesquelles ? Montrer que le plan de ce cercle est le plan perpendiculaire en J à AC.
— Lorsque l'on plie selon PN, on fait subir au point $S3$ une rotation. Quel

est l'axe de cette rotation ?

— En déduire que $S2$ décrit un cercle de centre le milieu de CK.
  Ce cercle est l'intersection de 2 sphères lesquelles ? Montrer que le plan de ce cercle est le plan perpendiculaire en K à AB.
— le problème sera possible si les cercles que décrivent $S2$ et $S3$ se coupent, c'est à dire si les plans de ces 2 cercles se coupent en dehors de la sphère de diamètre BC. Qu'est-ce que cela signifie pour l'orthocentre H du triangle ABC ?
— Qu'est-ce que cela signifie pour les angles du triangle ABC ?

Lorsqu'on plie la feuille selon MN, que décrit le point B ? Lorsqu'on plie la feuille selon NP, que décrit le point C ? C décrit un cercle de diamètre CK situé dans le plan perpendiculaire à NP.
Ce cercle est la base d'un cône d'axe NP et de demi-angle au sommet l'angle $\widehat{CNP} = \widehat{CBA}$.
B décrit un cercle de diamètre BH situé dans le plan perpendiculaire à NM.
Ce cercle est la base d'un cône d'axe NM et de demi-angle au sommet l'angle $\widehat{BNM} = \widehat{BCA}$.
Ces cercles se coupent-ils ?
On a si $BC = a$ et $AC = b$: $HB = a * \sin(C)$ et $CK = b\sin(A)$
Si $\widehat{A} + \widehat{C} > \widehat{B}$ les 2 cercles se coupent.
Comme $\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{B} = \pi$ on en déduit que l'on doit avoir $\widehat{B} < \pi/2$
de même on montre que l'on doit avoir $\widehat{C} < \pi/2$ et $\widehat{A} < \pi/2$. Donc le problème est possible si le triangle de départ n'a que des angles aigus.



16.2.2 Les relations dans un triangle ABC

Avant de faire une animation, on va rappeler les relations qui relient les hauteurs, le rayon R du cercle circonscrit et l'aire S aux 3 cotés a, b, c du triangle

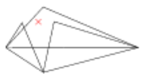
ABC.
Rappel
Soit un triangle ABC.
On note h_a (resp h_b, h_c) la hauteur issue de A (resp B, C),
H l'orthocentre de ABC
A_1 le pied de la hauteur issue de A
A_2 le milieu de AA_1
M (res N, P) les milieux de AB (resp BC, AC)
R le rayon du cercle circonscrit
O le centre du cercle circonscrit et
S l'aire du triangle ABC.
Si a (resp b, c) représente la longueur du côté BC (resp AC, AB), on pose $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ on a alors :
O est l'intersection des médiatrices de AB et BC,
H est le transformé de O par l'homothétie de centre G et de rapport -2.
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$R = \dfrac{abc}{4S}$ $AA_1 = h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$
$AH = 2ON = 2\sqrt{R^2 - a^2/4} = \sqrt{4R^2 - a^2}$
$A_2H = AH - \dfrac{h_a}{2} = \sqrt{4R^2 - a^2} - \dfrac{S}{a}$
Si on plie le triangle selon MP, MN et NNP afin de reunir les points A, B, C en S de façon à former le tétraèdre $SMNP$, alors A se projette en H orthocentre de ABC.
Si a_1 est l'angle de la face AMP avec la face MNP on a :
$\cos(a_1) = 2HA_2/AA_1 = a{*}HA_2/S = \dfrac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{S} - 1 = \dfrac{a^2\sqrt{4b^2c^2 - 4S^2}}{2S^2} - 1$
De même si b_1 (resp $c1$) est l'angle de la face BNP (resp CMP) avec la face MNP on a :
$\cos(b_1) = \dfrac{b^2\sqrt{4a^2c^2 - 4S^2}}{2S^2} - 1$
$\cos(c_1) = \dfrac{c^2\sqrt{4a^2b^2 - 4S^2}}{2S^2} - 1$
La hauteur du tétraèdre est alors :
$h = AA_2 \sin(a_1) = \dfrac{S}{a}\sin(a_1)$
Pour faiire une animation on a besoin de connaitre les angles a_1, b_1, c_1.
On fait calculer ces angles par `Xcas` avec les formules ci-dessus.
On tape :
```
c:=longueur(A,B);b:=longueur(A,C);a:=longueur(C,B);p:=(a+b+c)/2
```
On obtient :
```
6,6.10327780787,3.64005494464,7.87166637625
```
On tape :
```
S:=sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c));2*S/c;R:=a*b*c/4/S;sqrt(4*R^2-c^2)
```
On obtient :
```
10.5,3.5,3.17375236615,2.07142857143
```
On tape :
```
a1:=acos(-1+a^2*sqrt(c^2*b^2-4*S^2)/(2*S^2));pi-a1
```
On obtient :

`0.638952150388,2.5026405032`
On tape :
`b1:=acos(-1+b^2*sqrt(c^2*a^2-4*S^2)/(2*S^2));pi-b1`
On obtient :
`1.55719046484,1.58440218875`
On tape :
`c1:=acos(-1+c^2*sqrt(a^2*b^2-4*S^2)/(2*S^2));pi-c1`
On obtient :
`1.3860741241,1.75551852949`
On tape :
`h:=S/a*sin(a1)`
On obtient :
`1.72022779697`
Le sommet du tétraèdre est donc :
`Q:= point(5.0,1.42857142857,1.72022779697)` On tape :
`angle(plan(Q,M,P),plan(M,N,P))`
On obtient $\pi - a_1$:
`2.5026405032`
On tape :
`angle(plan(Q,P,M),plan(M,N,P))`
On obtient a_1 :
`0.638952150388`

16.2.3 Réalisation d'une animation du pliage

```
animtriABC(t):={
local A,B,C,M,N,P,S1,S2,S3;
A:=point(0,0,0):;
B:=point(6,0,0);
C:=point(5,3.5,0);
triangle(A,B,C);
M:=milieu(A,B);
N:=milieu(B,C);
P:=milieu(A,C);
S1:=rotation(droite(M,P),t,A);
S2:=rotation(droite(N,M),t*1.58/2.5,B);
S3:=rotation(droite(P,N),t*1.76/2.5,C);
retourne triangle(M,P,S1),triangle(N,M,S2),triangle(N,P,S3);
}:;
```

Puis, on tape : `L1:=seq([animtriABC(t)],t=0..2.5,0.1):;`
`L2:=seq([animtriABC(t)],t=2.5..0,-0.1):;`
`affichage(Q,1+epaisseur_point_2),animation(L1,L2)`
On obtient :



Chapitre 17

Compléments

17.1 Le tableur de Xcas

On va utiliser le tableur sur un exemple.
L'énoncé
Au 1ier janvier 2010, A veut emprunter 120000 euros. Les intérêts de cet emprunt ont un taux de 3.8 % si la durée du prêt est inférieur ou égale à 15 ans et un taux de 4 % l'an si la durée du prêt est entre 15 et 20 ans.
Le remboursement du pret se fait annuellement : 1ier remboursement 1ier janvier 2011, 2nd remboursement 1ier janvier 2012 etc...).
Sachant que A souhaite un remboursement annuel égal à 9600 euros (soit 800 euros par mois), quel sera dans ce cas le taux de son emprunt et en combien de temps le prêt sera-t-il rembourser ?
Donner le coût de l'emprunt.
Trouver par essais-erreurs le montant du remboursement annuel minimum pour pouvoir bénéficier du taux de 3.8%.
Calculer alors le coût de l'emprunt dans ce cas.
On ouvre un niveau de tableur (Alt+t) :
Dans A_0, on tape 120000
Dans B_0, on tape 0.038
Dans C_0, on tape 9600
Dans A_1, on tape $= A_0 + A_0 * \$B\$0 - \$C\$0$
puis on recopie cette formule vers le bas on trouve en A_j les sommes à rembourser au début de la $j$ième année.
On a A_{17} =2595.92037452 ce qui veut dire qu'au 1ier janvier 2027 il reste encore à rembourser=2595.92 euros donc au 1ier janvier 2028 il faudra encore rembourser : 2595.92037452*1.038=2694.56534875$\simeq$ 2694.57 euros (ou encore A_{18} =-6905.43465124 donc au 1ier janvier 2028 il faudra encore rembourser 9600-6905.43465124=2694.56534876$\simeq$ 2694.57 euros).
Donc le taux applicable dans ce cas est de 4%.
On modifie la valeur de B_0 on remplace 0.38 par 0.04.
On obtient alors :
A_{17} =6251.94053315 ce qui veut dire qu'au 1ier janvier 2027 (apres 17 remboursements de 9600 euros) il reste encore à rembourser=6251.94 euros donc au 1ier janvier à la fin de l'année 2028 il faudra encore rembourser 6251.94053315*1.04=6502.01815448$\simeq$ 6502.02 euros (ou encore A_{18} =-3097.98184553 donc au 1ier janvier de l'année

2028 il faudra encore rembourser 9600-3097.98184553=6502.01815447$\simeq$ 6502.02 euros).
Le coût de l'emprunt est donc :
17*9600+6502.02-120000=49702.02 euros
Le banquier offre un taux de 3.8 % si la durée du prêt est inférieur ou égale à 15 ans.
On fait des essais en augmentant le montant du remboursement la valeur de la case A_{15} (somme qui reste due au bout de 15 ans i.e après 15 remboursements) soit négative.
On trouve que pour un remboursement annuel de 10643 euros (soit environ 887 euros par mois) A_{15}=-9.06558396714.
Le montant des intérêts est donc de :
10643*15-9.06558396714-120000=39635.934416$\simeq$ 39635.93 euros