Exercices divers et traduction pour Xcas

Renée De Graeve

17 novembre 2018

Chapitre 1

Fonctions et expressions en seconde

Objectifs S'entrainer à lire, écrire, interpréter et simplifier des expressions. Faire la distinction entre expression et fonction.

1.1 Les expressions

Une expression est une suite de termes séparés par un signe d'opération. Un terme est un nombre ou un nom de variable ou un produit ou une parenthése contenant une expression.
Convention La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.
Le signe $*$ est quelqufois omis dans l'écriture, par exemple on écrit : $2x$ au lieu de $2 * x$.

1.1.1 L'énoncé

Voici 6 expressions formées à partir de $T = 1 - x * 2 + x$ en rajoutant des parenthèses :

$$A = (1 - x) * 2 + x$$
$$B = 1 - (x * 2) + x$$
$$C = 1 - x * (2 + x)$$
$$D = (1 - x * 2) + x$$
$$F = 1 - (x * 2 + x)$$
$$G = (1 - x) * (2 + x)$$

1/ Y-a-t-il une (ou des) expression(s) égale à T ?
Si oui, pourquoi ?
2/ Calculer les valeurs de ces expressions pour $x = 1$ et pour $x = -1$.
3/ Parmi les expressions A, B, C, D, F, G :
- Lesquelles sont une somme de 2 termes ?
- Lesquelles sont une différence de 2 termes ?

- Lesquelles sont une somme algébrique de 3 termes ?
- Lesquelles sont un produit de 2 termes ?
- Lesquelles sont égales ?

4/ Simplifier les expressions A, B, C, D, F, G.
5/ Écrire toutes les expressions formées à partir de $S = 1 + x/2 * x$ en rajoutant des parenthèses.

1.1.2 Vérifions avec `Xcas`

On tape :
```
T:=1-x*2+x
A:=(1-x)*2+x
B:=1-(x*2)+x
C:=1-x*(2+x)
D:=(1-x*2)+x
F:=1-(x*2+x)
G:=(1-x)*(2+x)
```
Puis on tape pour connaitre les expressions égales à `T` :
`A==T`, `B==T`, etc...
On trouve que la réponse de `A==T` est `0` ce qui veut dire que l'expression `A` est différente de `T`.
On trouve que la réponse de `B==T` est `1` ce qui veut dire que l'expression `B` est identique à `T` etc...

1.2 Les fonctions

Une fonction rèelle f définie sur I partie de $\mathbb{R}$ est une application qui à tout nombre de x de I fait correspondre une expression $f(x)$. La valeur de la fonction en un point x est donc donnée par une expression.
Exemple avec `Xcas`
On tape :
`xpr:=3*x+2`
On définit ainsi l'expression `xpr`
On tape :
`f(x):=3*x+2`
On a ainsi défini la fonction `f`
On tape :
`subst(xpr,x=1)` et on obtient 5
On tape :
`f(1)` et on obtient 5
On tape :
`plotfunc(3*x+2)` ou,
`plotfunc(xpr)` ou,
`plotfunc(f(x))`
On obtient un seul graphe qui est le graphe de la fonction `f`

1.2.1 L'énoncé

1/ Définir 6 fonctions ayant pour valeurs respectives les expressions A, B, C, D, F, G.
2/ Tracer le graphe de ces fonctions et observer sur un même graphique.
3/ Parmi ces graphes il y a des droites et des paraboles. Retrouver le graphe de chaque fonction.

1.2.2 Vérifions avec `Xcas`

On tape pour définir les 6 fonctions :
```
a(x):=(1-x)*2+x
b(x):=1-(x*2)+x
c(x):=1-x*(2+x)
d(x):=(1-x*2)+x
f(x):=1-(x*2+x)
g(x):=(1-x)*(2+x)
```
Puis on tape pour visualiser les graphes :
`plotfunc([a(x),b(x),c(x),d(x),f(x),g(x)])`
On obtient que 5 courbes de couleurs différentes.
On peut taper progressivement :
`plotfunc([a(x)]),plotfunc([a(x),b(x)])` etc...
On voit ainsi que :

- le graphe de `a` est la droite noire,
- le graphe de `b` est une droite rouge,
- le graphe de `c` est la parabole verte,
- le graphe de `d` est la droite jaune qui se supperpose à la droite rouge,
- le graphe de `f` est la droite bleue et,
- le graphe de `g` est la parabole verte.

1.3 Résolution d'équations

1.3.1 Le trinôme du second degré

Pour résoudre les équations de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ on écrit :
$ax^2 + bx + c = a((x + b/(2a))^2 - (b^2/(4a^2) - c/a))$
Donc $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalent à $(x + b/(2a))^2 - (b^2 - 4ac)/(4a^2)) = 0$
Les solutions dépendent donc du signe de $b^2 - 4ac$.
On tape :
`solve(a*x^2+b*x+c)`
On obtient :
`[1/(2*a)*(-b+sqrt(-4*a*c+b^2)),1/(2*a)*(-b-sqrt(-4*a*c+b^2))]`
On tape :
`solve(x^2+2x-5)`
On obtient :
`[-sqrt(6)-1,sqrt(6)-1]`
On tape :
`solve(x^2+2x+5)`
On obtient :
`[-1+2*i,-1-2*i]`

1.3.2 Visualisation géométrique des racines du trinôme

Soient 2 réels s et p.
On veut visualiser les racines de $x^2 - sx + p$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $J = (0, 1)$, $P = (0, p)$, $M = (s, p)$, le cercle $C1$ circonscrit au triangle JPM et le cercle $C2$ de centre O et de rayon $\sqrt{|p|}$.

— Si le cercle $C1$ coupe l'axe x, il le coupe en 2 points qui ont pour abscisse les racines de $x^2 - sx + p$.
Dans ce cas le carré du rayon de $C1$ vaut $(s^2 + (p-1)^2)/4$ et la distance de son centre à l'axe des x vaut $(p+1)/2$ on a donc : $(p+1)^2 \leq s^2 + (p-1)^2$ c'est à dire :
le cercle $C1$ coupe l'axe x si et seulement si $s^2 - 4p \geq 0$.
Les abscisses des points d'intersections $M1$ et $M2$ ont :
comme demi-somme $s/2$ car le centre de $C1$ se projette sur Ox au point d'abscisse $s/2$ et
comme produit p car $OM1 * OM2 = OJ * OP$=puissance de O par rapport à $C1$. Ces 2 points d'intersection ont donc pour abscisses les racines de $x^2 - sx + p$

— Si le cercle $C1$ ne coupe pas l'axe x, c'est que $s^2 - 4p < 0$ donc $p \geq 0$ et le cercle $C2$ coupe la droite verticale $x = s/2$ en 2 points qui ont pour affixes les racines de $x^2 - sx + p$.
$C2$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = p$ (car $s^2 - 4p < 0$ donc $p \geq 0$) donc les ordonnées y de l'intersection avec $x = s/2$ sont les solutions de $4y^2 = 4p - s^2$.
Ces 2 points d'intersection ont donc pour affixes les racines de $x^2 - sx + p$.

Avec `Xcas`, on tape dans un niveau de géométrie :

```
assume(s=3);
assume(p=2);
J:=point(i);
P:=point(p*i);
M:=point(s+i*p);
C1:=circonscrit(J,P,M);
C2:=cercle(0,sqrt(abs(p)));
d:=droite(x=s/2):;d;
si s^2-4p>=0 alors R:=inter(C1,droite(y=0)):;
sinon R:=inter(C2,d):; fsi;
a:=evalf(affixe(R[0]));
b:=evalf(affixe(R[1]));
legende(-6+4*i,a);
legende(-6+3.5*i,b);
legende(-6+5*i,string("s=")+evalf(s));
legende(-6+4.5*i,string("p=")+evalf(p));
```

1.3.3 Simplification de $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ lorsque A^2-B est un carré parfait

Montrer que :

$$\sqrt{2}\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{A+\sqrt{A^2-B}} + \sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}$$

On tape :
`normal(expand((sqrt(A+c)+ sqrt(A-c))^2))`
On obtient :
`sqrt(-4*c^2+4*A^2)+2*A`

On tape :
`c:=sqrt(A^2-B) normal(sqrt(-4*c^2+4*A^2)+2*A)`
`2*A+sqrt(4*B)`
Donc :
$\sqrt{A+\sqrt{A^2-B}}+\sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}=\sqrt{2}\sqrt{A+\sqrt{B}}$
On tape :
`sqrt(5+sqrt(21))`
On a $5^2-21=4=2^2$, $5+2=7$ et $5-2=3$
On obtient donc :
`sqrt(7/2)+sqrt(3/2)`
On tape :
`sqrt(11+6*sqrt(2))`
On a $11^2-72=49=7^2$, $11+7=18$ et $11-7=4$
On obtient donc :
`3+sqrt(2)`
On tape :
`sqrt(11+2*sqrt(30))`
On a $11^2-120=1=1^2$, $11+1=12$ et $11-1=10$
On obtient donc :
`sqrt(6)+sqrt(5)`

On peut écrire un petit programme qui prend en entrée `(a,b,s)` pour simplifier `sqrt(a+s*sqrt(b))`.
On tape :

```
reduire2(a,b,s):={
  local c;
  si s==0  alors return sqrt(a);fsi;
  c:=round(sqrt(a^2-b*s^2));
  si c^2==a^2-b*s^2 alors
  si s>0  alors return sqrt((a+c)/2)+sqrt((a-c)/2);
  sinon
  return sqrt((a+c)/2)-sqrt((a-c)/2);
  fsi;
  fsi;
  return sqrt(a+s*sqrt(b));
}:;
```

On tape :
`reduire2(18,2,-8)`
On obtient :
`4-sqrt(2)`
On tape :
`reduire2(194320499737857776523212040,`
`97160249868928888261606031,19713979797994)`
On obtient :
`sqrt(97160249868928888261606031)+9856989898997` ou bien, on tape la fonction `simply` qui doit avoir `r=sqrt(a+sqrt(b))` comme paramètre où `b` est sans facteur carré :

```
simply(r):={
  local f,a,b,c,d;
  si sommet(r)=='^' alors
  f:=feuille(r);
  a,d:=feuille(f[0]);
  si type(a)==integer alors
  b:=feuille(d)[0];
  c:=sqrt(a^2-b);
  si (round(c))^2==a^2-b alors
  retourne sqrt((a+c)/2)+sqrt((a-c)/2)
  fsi;
  sinon
  d,a:=feuille(f[0]);
  b:=feuille(d)[0];
  c:=sqrt(a^2-b);
  si (round(c))^2==a^2-b alors
  retourne sqrt((a+c)/2)+sqrt((a-c)/2)
  fsi;
  fsi;
  fsi;
  retourne r;
}:;
```

On tape :
`simply(sqrt(9+sqrt(17)))`
ou
`simply(sqrt(sqrt(17)+9))`
On obtient :
`(sqrt(34))/2+(sqrt(2))/2` ou bien, on tape la fonction `simplyf` qui doit avoir comme paramètre `r` de la forme `rsqrt(a+s*sqrt(b))` ou `sqrt(a+sqrt(b))` :

```
simplyf(r):={
  local f,a,b,c,d,s,sb;
  si sommet(r)=='^' alors
  f:=feuille(r);
  a,d:=feuille(f[0]);
  si type(a)==integer alors
  f:=feuille(d);
  si f[1]==1/2 alors
  s:=1;
  b:=f[0];
  sinon
  s,sb:=f;
  si type(s)==integer alors
  b:=feuille(sb)[0];
  sinon
  sb,s:=f;
  b:=feuille(sb)[0];
  fsi;
```

```
  fsi;
  c:=sqrt(a^2-s^2*b);
  si  (round(c))^2==a^2-s^2*b alors
  retourne sqrt((a+c)/2)+sqrt((a-c)/2);
  fsi;
  sinon
  d,a:=feuille(f[0]);
  f:=feuille(d);
  si f[1]==1/2 alors
  b:=f[0];
  s:=1;
  sinon
  s,sb:=f;
  si type(s)==integer alors
  b:=feuille(sb)[0];
  sinon
  sb,s:=f;
  b:=feuille(sb)[0];
  fsi;
  fsi;
  c:=sqrt(a^2-s^2*b);
  si  (round(c))^2==a^2-s^2*b alors
  retourne sqrt((a+c)/2)+sqrt((a-c)/2)
  fsi;
  fsi;
  fsi;
  retourne r;
}:;
```

On tape (car `Xcas` remplace `sqrt(128)` par `8*sqrt(2)` :
`simplyf(sqrt(18+sqrt(128)))`
ou
`simplyf(sqrt(sqrt(128)+18))`
ou
`simplyf(sqrt(8*sqrt(2)+18))`
ou
`simplyf(sqrt(18+8*sqrt(2)))`
ou
`simplyf(sqrt(sqrt(2)*8+18))`
ou
`simplyf(sqrt(18+sqrt(2)*8))`
On obtient :
`4+sqrt(2)`
On tape :
`simplyf(sqrt(194320499737857776523212040+`
`19713979797994*sqrt(971602498689288888261606031)))`
On obtient :
`sqrt(971602498689288888261606031)+9856989898997`

1.3.4 Les formules de Cardan

Les formules de Cardan permettent de résoudre les équations de la forme : $x^3 + px + q = 0$.
Pour cela, on pose $x = u + v$ avec $uv = -p/3$ on a donc à résoudre :
$x^3 + px + q = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + q = 0.$
et on doit résoudre :
$u^3 + v^3 + q = 0$ et $u^3v^3 = -p^3/27$.
On a donc $U = u^3$ et $V = v^3$ qui sont les solutions de l'équation du 2-ième degré :
$X^2 + qX - p^3/27 = 0$ donc

— Si $4p^3 + 27q^2 \geq 0$ on a :
$U = \dfrac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}$ et
$V = \dfrac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}$
On tape :
`solve(x^3-6*x-9)`
On obtient :
`[3,1/2*(-3+(i)*sqrt(3)),1/2*(-3-(i)*sqrt(3))]`
En effet $p = -6, q = -9$ donc
$4p^3/27 + q^2 = 49$
$X^2 - 9X - (-6)^3/27 = X^2 - 9X + 8 = (X - 1)(X - 8)$.
0n a donc : $u = U^{1/3} = 8^{1/3} = 2$ et $v = V^{1/3} = 1$ donc $x = u + v = 3$ est solution et on a :
$x^3 - 6 * x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3)$

— Si $4p^3 + 27q^2 < 0$ on a :
$u^3 = U = \dfrac{-q + i\sqrt{-q^2 - 4p^3/27}}{2}$ et
$v^3 = V = \dfrac{-q - i\sqrt{-q^2 - 4p^3/27}}{2}$
$\arg(u) = -\arg(v) = t = \arg(U)/3 \pmod{2\pi/3}$ et
$\mathrm{abs}(u) = \mathrm{abs}(v) = n = \mathrm{abs}(U)^{1/3}$
Donc :
$x_1 = u + v = 2n\cos(t)$,
$x_2 = u + v = 2n\cos(t + 2\pi/3)$,
$x_3 = u + v = 2n\cos(t + 4\pi/3)$
avec $n^6 = -p^3/27$ soit $n = \sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ et
$\cos(3t) = -q/2/n^3 = \dfrac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}$

1.3.5 Simplification de $(A + \sqrt{B})^{\frac{1}{3}}$

Soient : $u = (A + \sqrt{B})^{\frac{1}{3}}$ et
$v = (A - \sqrt{B})^{\frac{1}{3}}$.
On cherche à savoir si $u + v$ est un entier.
On pose :

$u * v = p$
$U = u^3 = A + \sqrt{B}$ et $V = v^3 = A - \sqrt{B}$
On a :
$U * V = A^2 - B = (u * v)^3 = p^3$ et
$U + V = u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 + v^2 - uv) = (u + v)((u + v)^2 - 3uv) = 2A$
donc $(u + v)^3 - 3p(u + v) - 2A = 0$ donc
$u + v$ est racine de :
$S^3 - 3pS - 2A = 0$
Pour que ce trinôme ait une racine entière k il faut que $A^2 - B$ soit le cube d'un entier p et que k divise $2 * A$ i.e. $k * (k^2 - 3p) = 2 * A$.

On cherche à simplifier :
$u = (20 + 14\sqrt{2})^{1/3}$ et $v = (20 - 14\sqrt{2})^{1/3}$
On a : $A = 20,\ B = 14^2 * 2 = 392\ 2A = 40\ A^2 - B = 8 = 2^3$ donc $p = 2$.
L'équation à résoudre est : $S^3 - 6S = S(S^2 - 6) = 40$
Les diviseurs de 40 sont :
`idivis(40)`
On obtient :
`[1,2,4,8,5,10,20,40]`
On tape :
`L:=NULL;for k in idivis(40) do L:=L,k^2-6; end_for`
On obtient :
`-5,-2,10,58,19,94,394,1594`
On tape :
`[1,2,4,8,5,10,20,40].*[-5,-2,10,58,19,94,394,1594]`
On obtient :
`[-5,-4,40,464,95,940,7880,63760]`
donc $k = 4$ est solution et donc :
$u = (20+14\sqrt{2})^{1/3}$ et $v = (20-14\sqrt{2})^{1/3}$ sont les racines de $X^2 - 4X + 2 = 0$.
On tape :
`solve(x^2-4x+2)`
On obtient :
`[-sqrt(2)+2,sqrt(2)+2]`
Donc $(20 + 14\sqrt{2})^{1/3} = 2 + \sqrt{2}$ et $(20 - 14\sqrt{2})^{1/3} = 2 - \sqrt{2}$.
On vérifie, on tape :
```
normal(expand((-sqrt(2)+2)^3)),
normal(expand((sqrt(2)+2)^3))
```
On obtient :
`-14*sqrt(2)+20,14*sqrt(2)+20`

On cherche à simplifier :
$u = (9 + 4\sqrt{5})^{1/3}$ et $v = (9 - 4\sqrt{5})^{1/3}$
On a : $A = 9,\ B = 4^2 * 5 = 80\ 2A = 18\ A^2 - B = 1 = 1^3$ donc $p = 1$
L'équation à résoudre est : $S^3 - 3S = S(S^2 - 3) = 18$
Les diviseurs de 8 sont :
`idivis(18)`
On obtient :
`[1,2,3,6,9,18]`

On tape :
`L:=NULL;for k in idivis(18) do L:=L,k^2-3; end_for`
On obtient :
`-2,1,6,33,78,321`
On tape en utilisant `.*` :
`[1,2,3,6,9,18].*[L]`
On obtient :
`[-2,2,18,198,702,5778]`
alors que `[1,2,3,6,9,18]*[L]` renvoie `6696`
donc $k = 3$ est solution et donc :
$u = (9 + 4\sqrt{5})^{1/3}$ et $v = (9 - 4\sqrt{5})^{1/3}$ sont les racines de $X^2 - 3X + 1 = 0$
On tape :
`solve(x^2-3x+1)`
On obtient :
`[1/2*(3-sqrt(5)),1/2*(3+sqrt(5))]`
Donc $(9 + 4\sqrt{5})^{1/3} = (3 + \sqrt{5})/2$ et $(20 - 14\sqrt{2})^{1/3} = (3 - \sqrt{5})/2$.
On vérifie, on tape :
`normal(expand((-sqrt(5)/2+3/2)^3)),normal(expand((+sqrt(5)/2+3/2)^3))`
On obtient :
`-4*sqrt(5)+9,4*sqrt(5)+9`

Remarque
La méthode utilisée ci-dessus n'est valable que lorsque le nombre pour lequel on cherche les diviseurs est petit ! Il est donc préférable de faire évaluer par `Xcas` `u+v` puis de vérifier si `u+v` est entier.
On peut écrire un petit programme qui prend en entrée `(a,b,s)` pour simplifier `(a+s*sqrt(b))^(1/3)`.
On évite la décomposition en facteurs premiers trop longue en utilisant des `round`.
On utilise la fonction `surd` qui est la puissance $1/n$ par exemple :
si `a>0`, `surd(a,3)` renvoie `a^(1/3)` et si `a<0`, `surd(a,3)` renvoie `-(-a)^(1/3)`
On tape :

```
reduire3(a,b,s):={
  local c,d,r;
  si s==0  alors return a^(1/3);fsi;
  c:=round(surd(a^2-b*s^2,3));
  d:=round(surd(a+sqrt(b*s^2),3)+surd(a-sqrt(b*s^2),3));
  si (c^3==a^2-b*s^2) alors
  si (d*(d^2-3*c)==2*a) alors
  r:=solve(x^2-d*x+c);
  si s>0 alors return r[1]; else return r[0]; fsi;;
  fsi;
  fsi;
  return (a+s*sqrt(b))^(1/3);
}:;
```

On tape :
`reduire3(9,5,-4)`
On obtient :
`1/2*(3-sqrt(5))`

On tape :
`reduire3(747,5,428)`
On obtient :
`4*sqrt(5)+3`
On tape (avec `Digits:=30`) :
`reduire3(957707601542343957074807589821177843432, 9716024986949,291480749606796380809804976)`
On obtient :
`sqrt(9716024986949)+9856989898997`

1.3.6 Exercices divers de résolution d'équations

Résoudre :

— $x^2 + 2x + 2 = 0$
On tape :
`csolve(x^2+2x+2=0)`
Ou on tape si on a coché `Complexe` dans la configuration du CAS :
`solve(x^2+2x+2=0)`
On obtient :
`[-1-i,-1+i]`

— $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$
On tape :
`solve(x^4-6x^2+6=0)`
On obtient si on a coché `Sqrt` dans la configuration du CAS :
`[-(sqrt(sqrt(3)+3)),-(sqrt(-(sqrt(3))+3)), sqrt(-(sqrt(3))+3),sqrt(sqrt(3)+3)]`

— $x^6 - 26x^5 + 250x^4 - 1160x^3 + 2749x^2 - 134x + 1320 = 0$
On tape :
`solve(x^6-26x^5+250x^4-1160x^3+2749x^2-3134x+1320=0)`
On obtient :
`[1,2,3,4,5,11]`

— $x^4 - ax^3 - 6x^2 + 6ax^2 + 11x^2 - 11ax - 6x + 6 = 0$
On tape :
`solve(x^4-a*x^3-6*x^3+6a*x^2+11x^2-11a*x-6x+6a=0)`
On obtient :
`[3,2,1,a]`

— $x^4 - \pi x^3 - 6x^2 + 6\pi x^2 + 11x^2 - 11\pi x - 6x + 6 = 0$
On tape :
`solve(x^4-pi*x^3-6*x^3+6*pi*x^2+11x^2-11*pi*x-6x+6*pi=0)`
On obtient :
`[3,2,1,pi]`

— $x^5 - 3x - 1 = 0$
On tape :
`solve(x^5-3x-1=0)`
On obtient :
Attention ! Extension algébrique non implémentée pour les poly [1,0,0,0,-3,-1]
`[-1.2146480427,0.80295100117280154l3e-1+`

```
1.328355109820654077*i,
0.802951001172801541 3e-1-1.328355109820654077*i,
-0.3347341419433526871,1.388791984407254183]
```

— $4\sin(x)^2\cos(x)^2+\cos(2x)^2=1$
On simplifie, on tape :
`simplify(4*sin(x)^2*cos(x)^2+cos(2x)^2-1)`
On obtient :
`0`
On résoud, on tape :
`solve(4*sin(x)^2*cos(x)^2+cos(2x)^2=1)`
On obtient (`All_trig_sol` est coché ou pas dans la configuration du CAS) :
`[x]`

— $4\cos(x)^3-3\cos(x)-\sin(2x)-\cos(3x)=0$
On simplifie, on tape :
`simplify(4*cos(x)^3-3*cos(x)-sin(2x)-cos(3x))`
On obtient :
`-2*cos(x)*sin(x)` On résoud, on tape :
`solve(4*cos(x)^3-3*cos(x)-sin(2x)-cos(3x)=0)`
On obtient si `All_trig_sol` n'est pas coché dans la configuration du CAS :
`[0,pi/2,-pi/2,pi]`
On obtient si on a coché `All_trig_sol` dans la configuration du CAS :
`[2*n_0*pi,(4*n_1*pi+pi)/2,(4*n_2*pi-pi)/2,2*n_3*pi+pi]`

— $4\cos(x)\cos(2x)\cos(3x)=1$
On tape :
`solve(4*cos(x)*cos(2x)*cos(3x)=1)`
On obtient si `All_trig_sol` n'est pas coché dans la configuration du CAS :

```
[pi/3,-pi/3,2*pi/3,-2*pi/3,pi/8,-pi/8,7*pi/8,-7*pi/8,
3*pi/8,-3*pi/8,5*pi/8,-5*pi/8]
```

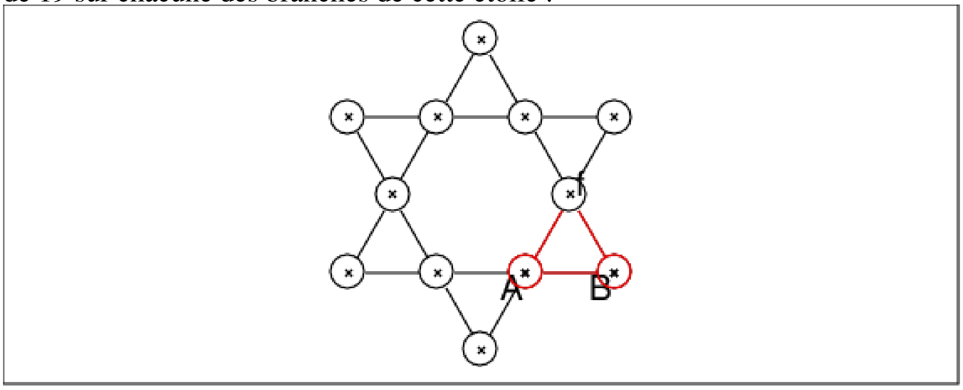
On obtient si on a coché `All_trig_sol` dans la configuration du CAS :

```
[(6*n_6*pi+pi)/3,(6*n_6*pi-pi)/3,(6*n_7*pi+2*pi)/3,
(6*n_7*pi-2*pi)/3,(16*n_8*pi+pi)/8,(16*n_8*pi-pi)/8,
(16*n_9*pi+7*pi)/8,(16*n_9*pi-7*pi)/8,(16*n_10*pi+3*pi)/8,
(16*n_10*pi-3*pi)/8,(16*n_11*pi+5*pi)/8,(16*n_11*pi-5*pi)/8]
```

— le système linéaire :
$[x+2y+3z=1, x+3y+2z=1, 3x+y+2z=1]$
On tape :
`linsolve([x+2y+3z=1,x+3y+2z=1,3x+y+2z=1],[x,y,z])`
On obtient :
`[1/6,1/6,1/6]`

— le système linéaire :
$[x+2y+3z=\pi+5, 2x+3y+2z=2\pi+5, 3x+\pi y+\pi z=5\pi]$
On tape :
`linsolve([x+2y+3z=pi+5,2x+3y+2z=2*pi+5,3x+pi*y+pi*z=5*pi],[x,y,z])`
On obtient :
`[pi,1,1]`

— L'étoile aux nombres : Avec des nombres de 1 à 8, il faut obtenir un total de 19 sur chacune des branches de cette étoile :



Faire le programme dessinant l'étoile.

Solution

On cherche à résoudre un système de 6 équations linéaires ayant 7 inconnues `a,b,c,d,f,g,h`.

On tape :

```
linsolve([a+5+d+g=19,a+c+f+h=19,b+5+c+8=19,b+d+8+2=19,
g+8+3+h=19,f+8+3+2=19],[a,b,c,d,f,g,h])
```

On obtient :

```
[11-d,9-d,-3+d,d,6,3,5]
```

Pour obtenir des nombres entre 1 et 8 il faut choisir `d` compris entre 4 et 8.
Il y a donc 5 solutions.

On tape :

```
[11-d,9-d,-3+d,d,6,3,5]$(d=4..8)
```

On obtient :

```
[[7,5,1,4,6,3,5],[6,4,2,5,6,3,5],[5,3,3,6,6,3,5],
[4,2,4,7,6,3,5],[3,1,5,8,6,3,5]]
```

Remarque

On tape pour avoir la matrice associée au système :

```
M:=syst2mat([a+5+d+g=19,a+c+f+h=19,b+5+c+8=19,
b+d+8+2=19,g+8+3+h=19,f+8+3+2=19],[a,b,c,d,f,g,h])
```

On obtient :

```
[[1,0,0,1,0,1,0,-14],[1,0,1,0,1,0,1,-19],[0,1,1,0,0,0,0,-6],
[0,1,0,1,0,0,0,-9],[0,0,0,0,0,1,1,-8],[0,0,0,0,1,0,0,-6]]
```

En supprimant dans `M` les colonnes d'indice 3 et 7 on obtient :

```
M1:=[[1,0,0,0,1,0],[1,0,1,1,0,1],[0,1,1,0,0,0],
[0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,1],[0,0,0,1,0,0]]
```

On a `det(M1)` renvoie `2`

Donc `M1` est inversible et la solution est :

```
[a,b,c,f,g,h]:=normal(inverse(M1)*[14-d,19,6,9-d,8,6])
```

On obtient :

```
[11-d,9-d,-3+d,6,3,5]
```

En supprimant dans `M` les colonnes d'indice 1 et 7 on obtient :

```
M2:=[[0,0,1,0,1,0],[0,1,0,1,0,1],[1,1,0,0,0,0],
[1,0,1,0,0,0],[0,0,0,0,1,1],[0,0,0,1,0,0]]
```

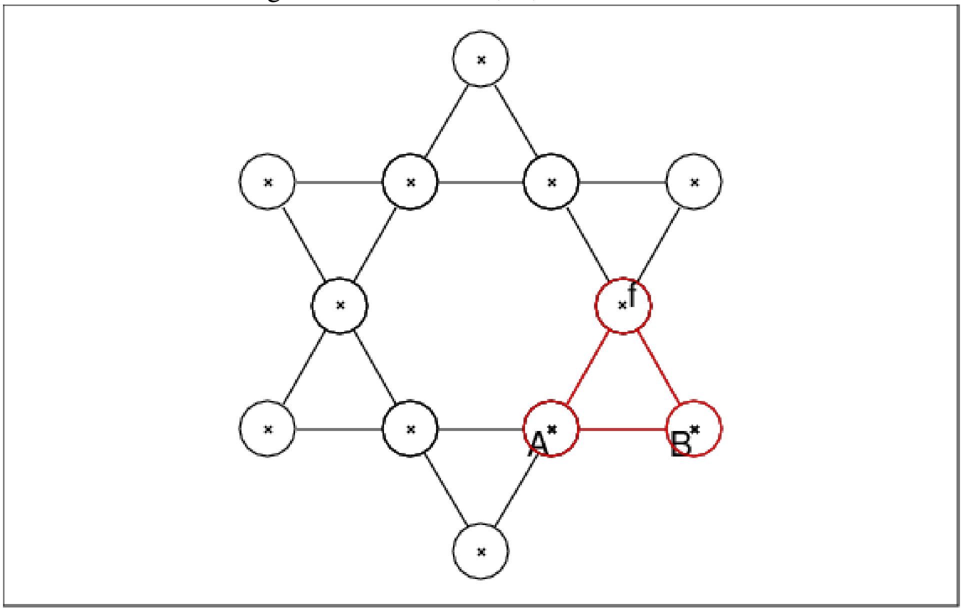
On a `det(M2)` renvoie `2`

Donc M2 est inversible et la solution est :
`[b,c,d,f,g,h]:=normal(inverse(M2)*[14-a,19-a,6,9,8,6])`
On obtient :
`[-2+a,8-a,11-a,6,3,5]`
On tape :
`[-2+a,8-a,11-a,6,3,]$(a=3..7)`
On obtient les 5 solutions :
```
[[3,1,5,8,6,3,5],[4,2,4,7,6,3,5],[5,3,3,6,6,3,5],
[6,4,2,5,6,3,5],[7,5,1,4,6,3,5]]
```

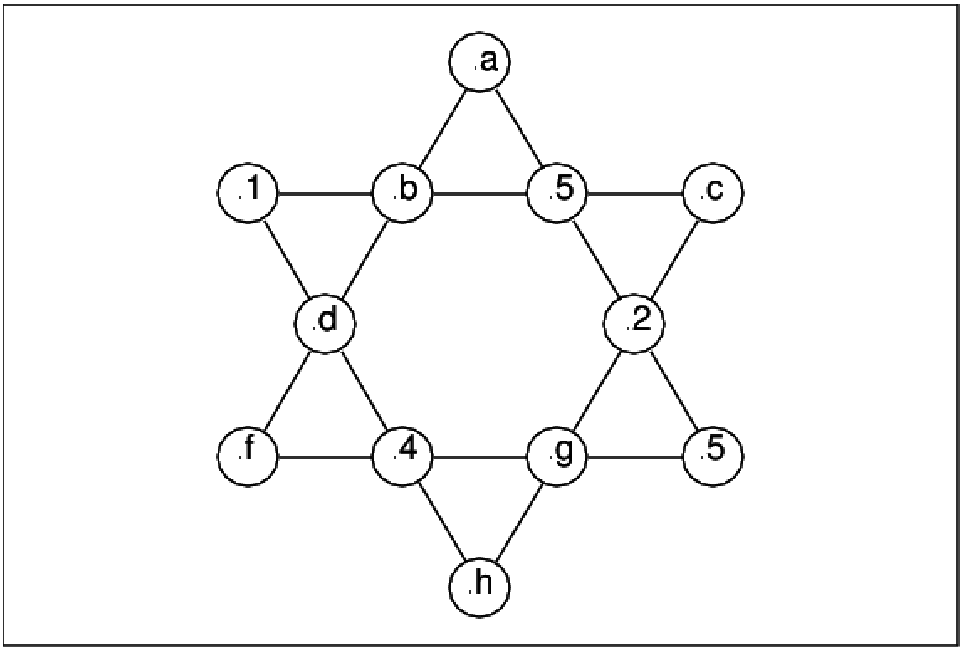
Le programme de l'étoile
On tape :
```
tricercle(A,B,r):={
  local C,l,L;
  l:=longueur(A,B);
  C:=A+(B-A)*exp(i*pi/3);
  L:=NULL;
  L:=L,cercle(A,r);
  L:=L,cercle(B,r);
  L:=L,segment(A+r/l*(B-A),A+(l-r)/l*(B-A));
  L:=L,segment(A+r/l*(C-A),A+(l-r)/l*(C-A));
  L:=L,segment(B+r/l*(C-B),B+(l-r)/l*(C-B));
  retourne L;
}:;
tricercles(A,B,r):={
  local C,D,L0,L1,j;
  L1:=NULL;
  L0:=A,B;
  pour j de 1 jusque 6 faire
    L1:=L1,tricercle(A,B,r);
    C:=A+(B-A)*exp(i*pi/3);
    D:=A+(B-A)*2*exp(i*pi/3);
    A:=C;
    B:=D;
    L0:=L0,A,B;
  fpour;
retourne [L0],[L1];
}:;
```
On tape dans un niveau de géométrie :
```
tricercles(point(0),point(10),2)[1];;
legende(-0.5,"3");
legende(9.2+i*17.2,"8");
legende(-10.6+i*17.2,"5");
legende(-5.7-i*8.9,"2");
legende(-10.6,"8");
legende(-5.4+i*25.7,"a");
legende(-20.6+i*17.2,"b");
legende(-0.5+i*17.2,"c");
```

```
legende(-15.8+i*8.5,"d");
legende(4.5+i*8.5,"f");
legende(-20.6,"g");
legende(9.2,"h");
```

On a :
`tricercle(A,B,r)` trace un triangle équilatéral direct avec 2 cercles de rayon `r` et de centre `A` et `B`.
`L:=tricercles(A,B,r)` (`A` est en `"3"` et `B` en `"h"`)
`L[1]` trace une étoile constituée de `tricercle`.
`Affixe:=normal(affixe(L[0]))` renvoie la liste des affixes des points notés : `"3","h","f","8","c","a","5","b","d","g","8","2"`.
On tape :
```
A:=point(0);B:=point(10);L:=tricercles(A,B,2);
affichage(tricercle(A,B,2),1);legende(L[0][2],"f")
```
On obtient avec en rouge `tricercle(A,B,2)` :



— Une aute étoile aux nombres : Avec des nombres de 1 à 8, il faut obtenir un total de 15 sur chacune des branches de cette étoile :



On tape :

```
linsolve([a+12=15,b+c+6=15,d+h+5=15,f+g+9=15,
a+b+f+d=15,c+g+h+2=15],[a,b,c,d,f,g,h])
```

On obtient :

```
[3,-4+g+h,13-g-h,10-h,6-g,g,h]
```

Pour obtenir des nombres entre 1 et 8 il faut choisir `g` compris entre 1 et 4, `h` compris entre 2 et 8 et avoir `g+h` compris entre 5 et 12.
Donc on doit choisir :
si `g=1` alors `h` est compris entre `4` et `8`,
si `g=2` alors `h` est compris entre `3` et `8`,
si `g=3` alors `h` est compris entre `2` et `8`,
si `g=4` alors `h` est compris entre `2` et `8`,
si `g=5` alors `h` est compris entre `2` et `7`,
On obtient 5+6+7+7+6=31 solutions On tape :

```
([3,-4+g+h,13-g-h,10-h,6-g,g,h]$(h=5-g..8))$(g=1..3),
([3,-4+g+h,13-g-h,10-h,6-g,g,h]$(h=2..7))$(g=4..5),
([3,-4+4+8,13-4-8,10-8,6-4,4,8]
```

On obtient les 31 solutions :

```
[3,1,8,6,5,1,4],[3,2,7,5,5,1,5],[3,3,6,4,5,1,6],[3,4,5,3,5,1,7],
[3,5,4,2,5,1,8],[3,1,8,7,4,2,3],[3,2,7,6,4,2,4],[3,3,6,5,4,2,5],
[3,4,5,4,4,2,6],[3,5,4,3,4,2,7],[3,6,3,2,4,2,8],[3,1,8,8,3,3,2],
[3,2,7,7,3,3,3],[3,3,6,6,3,3,4],[3,4,5,5,3,3,5],[3,5,4,4,3,3,6],
[3,6,3,3,3,3,7],[3,7,2,2,3,3,8],[3,2,7,8,2,4,2],[3,3,6,7,2,4,3],
[3,4,5,6,2,4,4],[3,5,4,5,2,4,5],[3,6,3,4,2,4,6],[3,7,2,3,2,4,7],
[3,3,6,8,1,5,2],[3,4,5,7,1,5,3],[3,5,4,6,1,5,4],[3,6,3,5,1,5,5],
[3,7,2,4,1,5,6],[3,8,1,3,1,5,7],[3,8,1,2,2,4,8]
```

Chapitre 2

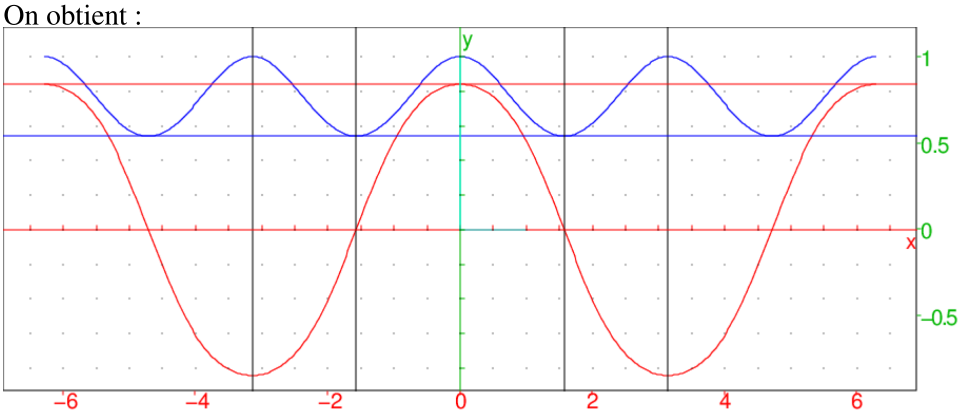
Étude de fonctions

2.1 Exercice : étude et graphe de $f(x) = \sin(\cos(x))$ et de $g(x) = \cos(\sin(x))$

Il faut étudier :
La période de f et la période de g et
les variations de f et de g sur une période.
Avec Xcas
On tape :

```
plotfunc([sin(cos(x)),cos(sin(x))],x=-2*pi..2*pi,color=[1,4]),
droite(x=pi),droite(x=-pi),droite(x=pi/2),droite(x=-pi/2)
droite(y=cos(1),color=4),droite(y=sin(1),color=1)
```

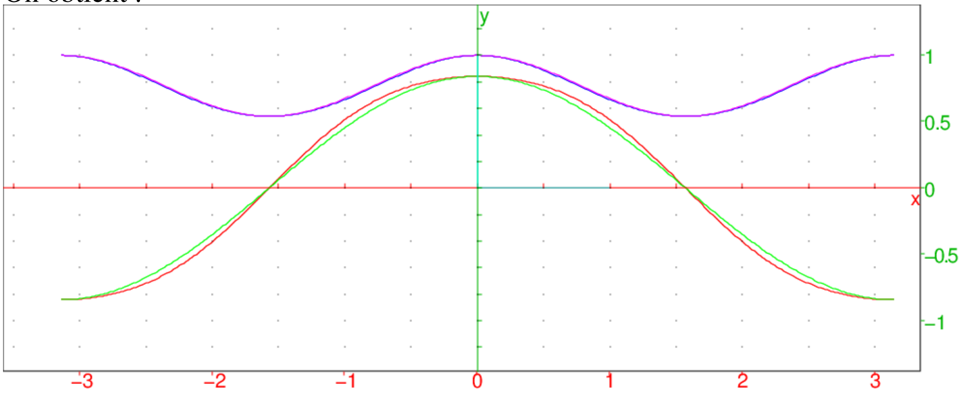
On obtient :



On a :
f est périodique de période 2π
Sur $]-\pi, \pi]$, f a un maximum en 0 et $f(0) = \sin(1)$ et f a un minimum en π et $f(\pi) = -\sin(1)$
Son graphe ressemble au graph de $y = \sin(1) * \cos(x)$....
g est périodique de période π Sur $]-\pi/2, \pi/2]$, g a un maximum en 0 et $g(0) = 1$ et g a un minimum en $\pi/2$ et $g(\pi/2) = \cos(1)(1)$
Son graphe ressemble à celui de $y = (1 - \cos(1))/2 * \cos(2 * x) + (1 + \cos(1))/2$
On tape :

```
plotfunc([sin(cos(x)),cos(sin(x))],x=-pi..pi,color=[1,4]),
plotfunc([sin(1)*cos(x),(1-cos(1))/2*cos(2x)+(1+cos(1))/2],
x=-pi .. pi,color[2,5])
```

On obtient :



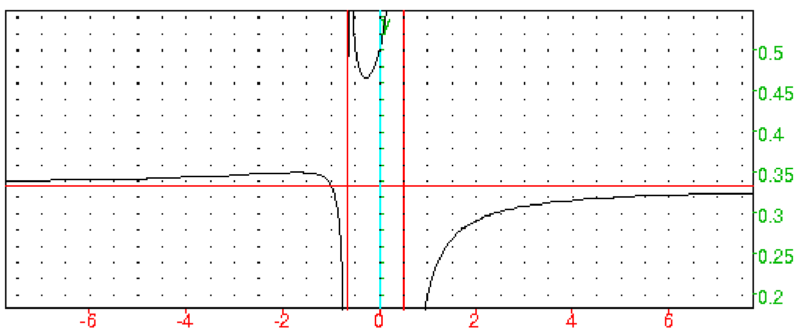
2.2 Exercice : étude de $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{6x^2+x-2}$

1. Domaine de définition
   On tape :
   `solve(6x^2+x-2)`
   On obtient :
   `[(-2)/3,1/2]`
   Donc f est définie sur $\mathbb{R} - \{-2/3, 1/2\}$
2. Dérivée
   On tape :
   `factor(diff((2x^2-1)/(6x^2+x-2))`
   On obtient :
   `(2*x^+4*x+1)/((2*x-1)^2*(3*x+2)^2)`
   On tape :
   `normal(solve(2*x^+4*x+1))`
   On obtient :
   `[(-sqrt(2)-2)/2,(sqrt(2)-2)/2]`
   On tape :
   `evalf([(-sqrt(2)-2)/2,(sqrt(2)-2)/2])`
   On obtient :
   `[-1.70710678119,-0.292893218813]`
   On tape :
   `subst((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=-1.70710678119)`
   On obtient :
   `0.35044026276`
   On tape :
   `subst((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=-0.292893218813)`
   On obtient :
   `0.465886267852`
   f a donc deux extremum en $\simeq$ (-1.71,0.35) et (-0.29,0.47)
   Donc f est :
   croissante sur $]-\infty; (-\sqrt{2}-2)/2]$
   décroissante sur $[(-\sqrt{2}-2)/2; -2/3[$
   décroissante sur $]-2/3; (\sqrt{2}-2)/2]$

croissante sur $[(\sqrt{2} - 2)/; 1/2[$
croissante sur $]1/2; +\infty[$

3. Branches infinies
   On tape :
   `limit((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=inf)`
   On obtient :
   `1/3`
   On tape :
   `limit((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=-inf)`
   On obtient :
   `1/3`
   Donc $y = \dfrac{1}{3}$ est asymptote.
   On tape :
   `limit((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=-2/3,-1)`
   On obtient :
   `-infinity`
   On tape :
   `limit((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=-2/3,1)`
   On obtient :
   `+(infinity)`
   Donc $x = \dfrac{-2}{3}$ est asymptote.
   On tape :
   `limit((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=1/2,-1)`
   On obtient :
   `+infinity`
   On tape :
   `limit((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=1/2,1)`
   On obtient :
   `-infinity`
   Donc $x = \dfrac{1}{2}$ est asymptote.

4. Graphe
   On tape :
   ```
   plotfunc((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=-8..8),
   affichage(droite(x=1/2),droite(x=-2/3),droite(y=1/3),1)
   ```
   On obtient :



2.3 Exercice : étude de $f(x) =$ acos $(\sin(x))+$ asin $(\cos(x))$

1. Domaine de définition et période.

2. Montrer que :
   $f(x+\pi) = f(\pi/2 - x) = \pi - f(x)$.
3. Graphe de f et préciser son centre de symétrie et son axe de symétrie.
4. Valeur de $f(x)$ sur $[0, \pi/2]$ et sur $\pi/2, \pi]$.

Rappels

On a :
$\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$
$\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
$\cos(x + pi) = -\cos(x)$
asin (x) est une bijection de [-1,1] sur $[-\pi/2, \pi/2]$ $\sin($ asin $(x)) = x$ et
si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ alors asin $(\sin(x)) = x$
acos (x) est une bijection de [-1,1] sur $[0, \pi]$ $\cos($ acos $(x)) = x$ et
si $x \in [0, \pi]$ alors acos $(\cos(x)) = x$
asin $(-x) = -$ asin (x)
acos $(-x) = \pi -$ acos (x)
asin $(x) +$ acos $(x) = \pi/2$
asin $(x)' = 1/\sqrt(1 - x^2)$
acos $(x)' = -1/\sqrt(1 - x^2)$

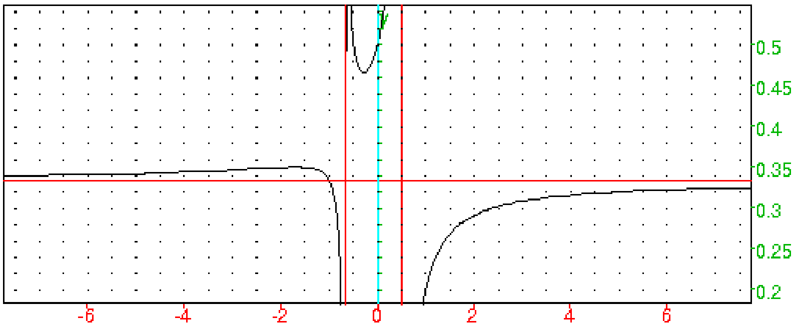
La solution avec `Xcas`

On tape :
`f(x):=acos(sin(x))+asin(cos(x))`
donc on a aussi
`f(x):=acos(cos(pi/2-x))+asin(sin(pi/2-x))`

1. $f(x + \pi) = f(\pi/2 - x) = \pi - f(x)$.
   On tape :
   `simplify(f(x+pi)+f(x))`
   On obtient :
   `pi`
   En effet :
   `f(x+pi)=acos(-sin(x))+asin(-cos(x))`
   et on a :
   acos $(-\sin(x)) = \pi -$ acos $(\sin(x))$
   asin $(-\cos(x)) = -$ asin $(\cos(x))$
   D'où le rèsultat.
   On tape :
   `simplify(f(pi/2-x)+f(x))`
   On obtient :
   `pi`
   En effet :
   `f(pi/2-x)=acos(cos(x))+asin(sin(x))`

et on a :
acos $(\sin(x)) +$ asin $(\sin(x) = \pi/2$
asin $(\cos(x)) +$ acos $(\cos(x)) = \pi/2$
D'où le rèsultat.

2. Graphe de f.
On tape :
```
f(x):=acos(sin(x))+asin(cos(x))
plotfunc(f(x))
```
On obtient :



Le point $S(\pi/4, \pi/2$ est un centre de symétrie car on a :
$f(x) + f(\pi/2 - x) = \pi$ donc
les points $A(x, f(x)$ et $B(\pi/2 - x, f(\pi/2 - x)$ sont 2 points de la courbe qui sont symétriques par rapport à S.
En effet $1/2 * (x + \pi/2 - x) = \pi/4$ et $1/2 * (f(x) + f(\pi/2 - x)) = \pi/2$.
La droite d'équation $x = 3\pi/4$ est un axe de symétrie de la courbe.
En effet $f(x + \pi) = f(\pi/2 - x)$ et donc les points $C(x + \pi, f(x + \pi)$ et $D(\pi/2 - x, f(\pi/2 - x)$ sont symétriques par rapport à la droite $x = 3\pi/4$ puisque $1/2 * (x + \pi + \pi/2 - x) = 3\pi/4$

3. Valeur de $f(x)$ sur $[0, \pi/2]$ et sur $\pi/2, \pi]$. On tape :
```
assume(x>0 and x<pi/2)
simplify(f(x))
```
On obtient :
```
pi-2*x
```
Si $x \in [0, \pi/2]$ on a $\pi/2 - x \in [0, \pi/2]$ donc $f(x) :=$ acos $(\cos(\pi/2 - x)) +$ asin $(\sin(\pi/2 - x)) = \pi - 2x$ On tape :
```
assume(x>=pi/2 and x<=pi)
simplify(f(x))
```
On obtient :
```
0
```
Si $x \in [\pi/2, \pi]$ on a $x - \pi/2 \in [0, \pi/2]$ donc
$f(x) :=$ acos $(\cos(\pi/2 - x)) +$ asin $(\sin(\pi/2 - x)) =$
acos $(\cos(x - \pi/2)) -$ asin $(\sin(x - \pi/2 -)) = x - \pi/2 - (x - \pi/2) = 0$

Chapitre 3

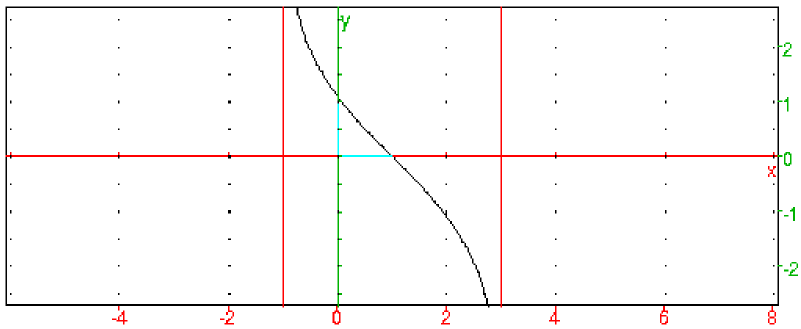
Fonctions et équations en terminale scientifique

3.1 Étude de $f(x) = \ln(\frac{x^2 - 4x + 3}{1 - x^2})$

1. Domaine de définition
   On tape :
   `solve(x^2-4x+3)`
   On obtient :
   `[1,3]`
   On tape :
   `solve(x^2-1)`
   On obtient :
   `[-1,1]`
   On tape :
   `normal((x^2-4x+3)/(1-x^2))`
   On obtient :
   `(-x+3)/(x+1)`
   On tape :
   `solve((x^2-4x+3)*(1-x^2)>0)`
   On obtient :
   `[((x>-1) && (x<1)),((x>1) && (x<3))]`
   Donc f est définie sur $]-1;1[\cup]1;3[$.
   Mais on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln(1) = 0$
2. Dérivée
   On tape :
   `factor(diff(ln((x^2-4x+3)/(1-x^2))))`
   On obtient :
   `4/((x-3)*(x+1))`
   Or $(x-3)*(x+1) < 0$ sur $]-1;3[$ donc f est décroissante sur $]-1;3[$
   On cherche si f est dérivable en $x = 1$, on tape :
   `limit(ln((x^2-4x+3)/(1-x^2))/(x-1),x=1)`
   On obtient :
   `-1`

Donc f est dérivable en $x = 1$ et sa dérivée vaut -1.

3. Branches infinies
   On tape :
   `limit(ln((x^2-4x+3)/(1-x^2)),x=-1,1)`
   On obtient :
   `+ininity`
   On tape :
   `limit(ln((x^2-4x+3)/(1-x^2)),x=3,-1)`
   On obtient :
   `-ininity`
   Donc $x = -1$ et $x = 3$ sont asymptotes.
   On tape :
   `limit((2x^2-1)/(6x^2+x-2),x=-2/3,-1)`
   On obtient :
   `-infinity`
4. Graphe
   On tape :
   `plotfunc(ln((x^2-4x+3)/(1-x^2)))`
   `affichage(droite(x=-1),droite(x=3),1), affichage(droite(y=-x+1),`
   On obtient :



3.2 Calcul de dérivée n-ième

3.2.1 Dérivée n-ième de $\cos(x)^3 + \sin(x)^3$

Calculer la derivée n-ième de la fonction $f(x) = \cos(x)^3+\sin(x)^3$ en fonction de n.
On va faire cet exercice de deux façons :
- On fait le calcul directement en cherchant les relations de récurrence entre la dérivée $n$ième et la dérivée $(n + 1)$-ième en s'aidant de `Xcas`.
- On linéarise $f(x)$ puis on dérive.

Solution

- On tape :
  `f(x):=cos(x)^3+sin(x)^3`
  `diff(f(x))`
  On obtient :

`-3*cos(x)^2*sin(x)+3*cos(x)*sin(x)^2`
On tape :
`diff(f(x),x,2)`
On obtient :
`-3*cos(x)^3-3*sin(x)^3+6*cos(x)^2*sin(x)+6*cos(x)*sin(x)^2`
On tape :
`diff(f(x),x,3)`
On obtient :
`6*cos(x)^3-6*sin(x)^3+21*cos(x)^2*sin(x)-21*cos(x)*sin(x)^2`
On tape :
`diff(f(x),x,4)`
On obtient :
`21*cos(x)^3+21*sin(x)^3-60*cos(x)^2*sin(x)-60*cos(x)*sin(x)^2`
On tape :
`diff(f(x),x,5)`
On obtient :
`-60*cos(x)^3+60*sin(x)^3-183*cos(x)^2*sin(x)+183*cos(x)*sin(x)^2`
On suppose que la derivée n-ième est de la forme :
$f(x)^{(n)} = a(n)\cos(x)^3 + b(n)\cos(x)^2\sin(x) + c(n)\cos(x)\sin(x)^2 + d(n)\sin(x)^3$ avec $u(n) = |a(n)| = |d(n)|$ et $v(n) = |b(n)| = |c(n)|$ On a la relation de récurrence :
$u(0) = 1$ et $v(0) = 0$
$u(n+1) = v(n)$ et
$v(n+1) = 3u(n) + 2v(n)$.
Les signes de |a(n),b(n),c(n),d(n)| sont les mêmes modulo 4.
On a $a(n) * c(n) = b(n) * d(n) < 0$.
On définit les fonctions :
`p(n):=ifte(irem(n,4)==0 or irem(n,4)==1,1,-1)`
`q(n):=ifte(irem(n,4)==0 or irem(n,4)==3,1,-1)`
$q(n) = p(n+1)$ donc la définition de q est inutile.
On a alors :
$f(x)^{(n)} = p(n+1)u(n)\cos(x)^3+p(n)u(n)\sin(x)^3-p(n)v(n)\cos(x)^2\sin(x)-p(n+1)v(n)\cos(x)\sin(x)^2$
Il reste à trouver en fonction de n les valeurs de $u(n)$ et de $v(n)$ en fonction de n.
On tape :
`rsolve([u(n)=v(n-1),v(n)=3*u(n-1)+2*v(n-1)],[u(n),v(n)],`
`[u(0)=1,v(0)=0])`
On obtient :
`[[3^(n+1)*1/12+(-1)^n*3*1/4,3^(n+1)*1/4-(-1)^n*3*1/4]]`
Donc :
$f(x)^{(n)} = (p(n+1)\cos(x)^3 + p(n)\sin(x)^3) * (3^n * \frac{1}{4} + (-1)^n * \frac{3}{4}) - (p(n)\cos(x)^2\sin(x) + p(n+)\cos(x)\sin(x)^2) * (3^(n+1) * \frac{1}{4} - (-1)^n * \frac{3}{4})$

— Pour linéariser on utilise la formule de Moivre :
$(\cos(x) + i * \sin(x))^3 = \cos(3x) + i * \sin(3x)$ donc
$\cos(x)^3+3*i*(1-\sin(x)^2)*\sin(x)-3*\cos(x)*(1-\cos(x)^2)-i\sin(x)^3 = \cos(3x) + i * \sin(3x)$
Donc :

$4\cos(x)^3 = \cos(3x) + 3 * \cos(x)$
$4\sin(x)^3 = -\sin(3x) + 3\sin(x)$
Ou on tape :
`tlin(cos(x)^3+sin(x)^3)`
On obtient :
`3*cos(x)/4+cos(3*x)/4+3*sin(x)/4-sin(3*x)/4`
Il reste à connaitre la dérivée n-ième de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
On a :
$\cos(x)' = -\sin(x) = \cos(x + \pi/2)$ et $\sin(x)' = \cos(x) = \sin(x + \pi/2)$
donc
$\cos(x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$ et $\sin(x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$
On en déduit que :

$$f(x)^{(n)} = \frac{1}{4}*(3(\cos(x+\frac{n\pi}{2})+\sin(x+\frac{n\pi}{2}))+3^n(\cos(3x+\frac{n\pi}{2})-\sin(3x+\frac{n\pi}{2})))$$

On vérifie et on tape :

```
k(x,n):=(q(n)*cos(x)^3+p(n)*sin(x)^3)*(3^(n+1)*1/12+
(-1)^n*3*1/4)-(p(n)*cos(x)^2*sin(x)+
q(n)*cos(x)*sin(x)^2)*(3^(n+1)*1/4-(-1)^n*3*1/4)
h(x,n):=1/4*(3(cos(x+n*pi/2)+sin(x+n*pi/2))+
3^n*(cos(3x+n*pi/2)-sin(3x+n*pi/2)))
simplify(k(x,n)-h(x,n))$(n=0..15)
```

On obtient :
`0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0`

3.2.2 Dérivée n-ième de $\exp(-x^2)$

On veut calculer la derivée n-ième de la fonction $f(x) = \exp(-x^2)$ en fonction de n.

— Montrer que $f(x)^{(n)} = \exp(-x^2)P_n(x)$ où P_n est un polynôme réel de degré n ayant pour terme de plus haut degré $a_n = (-2)^n$. De plus si n est pair $P_n(x)$ est pair et si n est impair $P_n(x)$ est impair.
— Montrer que pour $n \geq 1$ et pour tout x réel on a :
$P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$
— Montrer que, pour $n \geq \mathbb{N}$, P_n vérifie l'équation différentielle $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.
En déduire la valeur $P_n(x)$
— On tape :
`f(x):=exp(-x^2)`
`diff(f(x))`
On obtient :
`-2*x*exp(-x^2)`
On tape en décochant `sqrt` dans la configuration du CAS :
`factor(diff(f(x),x,2))`
On obtient :
`2*(2*x^2-1)*exp(-x^2)`
On tape en décochant `sqrt` dans la configuration du CAS :

`factor(diff(f(x),x,3))`
On obtient :
`-4*x*(2*x^2-3)*exp(-x^2)`
On tape en décochant `sqrt` dans la configuration du CAS :
`factor(diff(f(x),x,4))`
On obtient :
`4*(4*x^4-12*x^2+3)*exp(-x^2)`
On tape en décochant `sqrt` dans la configuration du CAS :
`factor(diff(f(x),x,5))`
On obtient :
`-8*x*(4*x^4-20*x^2+15)*exp(-x^2)`
On a obtenu :
$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -2x$, $P_2(x) = 4x^2 - 2$, $P_3(x) = -8x^3 + 12x$,
$P_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$, $P_5(x) = -32x^5 + 160x^3 - 120x$
On fait un raisonnement par récurrence pour montrer la propriété :
$f(x)^{(n)} = \exp(-x^2)P_n(x)$ où P_n est un polynôme réel de degré n avec $a_n = (-2)^n$.
Si $f(x)^{(n)} = \exp(-x^2)P_n(x)$ avec $P_n(x)$ un polynôme de degré n alors puisque
$f(x)^{(n+1)} = \exp(-x^2)(-2xP_n(x) + P_n(x)')$
on a $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P_n(x)'$ et P_{n+1} est bien un polynôme de degré $n + 1$ et $a_{n+1} = -2 * (-2)^n = (-2)^{n+1}$.
La propriété est vraie pour $n = 0$ et si la propriété est vraie pour n alors elle est vraie pour $n + 1$, donc la propriété est vraie pour tout entier naturel et on a $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P_n(x)'$ De plus si P_n est pair (resp impair), $2xP_n(x)$ et$P_n(x)'$ sont impairs (resp pairs) donc $P_{n+1}(x)$ est impair (resp pair). Comme $P_0(x) = 1$ est pair on en déduit que $P_n(x)$ est pair (resp impair) si n est pair (resp impair).

— On fait encore un raisonnement par récurrence pour montrer que :
$P_n(x)' = -2nP_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$.
On a :
$P_1(x)' = -2 = -2 * 1 * 1$ et $P_2(x)' = 8x = -2 * 2 * P_1(x)$
La propriété est vraie pour $n = 1$
Si elle est vraie pour n alors :
$P_n(x)' = -2nP_{n-1}(x)$ et comme on a d'après la question 1 on a :
$P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P_n(x)'$ on en déduit que :
$P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$ donc
$P_{n+1}(x)' = -2P_n(x) - 2xP_n(x)' - 2nP_{n-1}(x)' =$
$-2P_n(x) + 4nxP_{n-1}(x) - 2nP_{n-1}(x)' =$
$-2P_n(x) - 2n(-2xP_{n-1}(x) + P_{n-1}(x))$.
On a d'après la question 1 :
$-2n(-2xP_{n-1}(x) + P_{n-1}(x)) = -2nP_n(x)$ donc
$P_{n+1}(x)' = -2P_n(x) - 2nP_n(x) = -2(n + 1)P_n(x)$.
La propriété est vraie pour $n = 1$ et si la propriété est vraie pour $n \geq 1$ alors elle est vraie pour $n + 1$, donc la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$.
Remarque
Plutôt que faire une récurrence, on peut aussi utiliser la formule de Leibniz

pour calculer la dérivée n-ième d'un produit, à savoir :
$(u*v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} comb(n,k)u^{(k)} * v^{(n-k)}$
On a $f'(x) = (-2x) * f(x)$ et comme les dérivées k-ième de $-2x$ sont nulle pour k>1 on a :
$((-2x) * f(x))^{(n)} = -2xf^{(n)}(x) + n(-2) * f(x)^{(n-1)} = -2xf^{(n)}(x) - 2nf(x)^{(n-1)}$
Donc :
$-2xf^{(n)}(x) - 2nf(x)^{(n-1)} = f(x)^{(n+1)}$
et pour $n \geq 1$, $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$

— On vient de montrer que pour $n \geq 1$ on a :
$P_n(x)' = -2nP_{n-1}(x)$.
En dérivant cette égalité on obtient :
$P_n(x)'' = -2nP_{n-1}(x)'$
donc on a les 2 équations :
$-2nP_{n-1}(x) = P_n(x)'$.
$-2nP_{n-1}(x)' = P_n(x)''$
Puisque $P_n(x) = -2xP_{n-1}(x) + P_{n-1}(x)'$ on en déduit que :
$2nP_n(x) = 2x * (-2nP_{n-1}(x) - (-2nP_{n-1}(x)') = 2xP_n(x)') - P_n(x)''$
Donc $P_n(x)'' - 2xP_n(x)' + 2nP_n(x) = 0$ ce qui signifie que :
pour $n \geq 1$, P_n vérifie l'équation différentielle $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.
Pour $n = 0$ on a $P_0(x) = 1$ donc P_0 vérifie aussi cette équation différentielle.
Si $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a(k)x^k$ avec $a_n = (-2)^n$ on a :
$P_n(x)' = \sum_{k=0}^{n} ka(k)x^{k-1}$ et
$P_n(x)'' = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a(k)x^{k-2}$
donc $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)a(k)x^{k-2} + (2n-2k)a(k)x^k = 0$
$$(\sum_{j=0}^{n-2}((j+2)(j+1)a(j+2) + (2n-2j)a(j))x^j) + 2a(n-1)x^{n-1} = 0$$
On obtient :
$a_{n-1} = 0$ et
$a_j = -a_{j+2}(j+2)(j+1)/(2(n-j))$.
On sait que $a(n)n = (-2)^n$ donc :
$a(n-2) = -n(n-1)a(n)/(2*2)$
$a(n-4) = -(n-2)(n-3)a(n-2)/(2*4)$
....
$a(n-2j) = -a(n-2j+2) * (n-2j+2)(n-2j+1)/(2*2j)$
Donc en multipliant membre à membre on obtient :
$$a(n-2j) = \frac{(-1)^j a(n)n!}{(n-2j)!2^{2j}j!} = (-1)^{n-j}\frac{2^{n-2j}n!}{(n-2j)!j!}$$
Puisque $a_{n-1} = 0$ on a $a(n-2j-1) = 0$
Donc :
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{iquo(n,2)} a(n-2j)x^{n-2j}$$
En résumé :
$$P_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{iquo(n,2)} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} * 2^{n-2k}x^{n-2k}$$
On vérifie :

On tape pour calculer $P_4(x)$:
```
n:=4;
(-1)^n*sum((-1)^j*n!/(j!*(n-2j)!)*2^(n-2j)*x^(n-2j),j=0..2)
```
On obtient $P_4(x)$:
```
16*x^4-48*x^2+12
```
On tape :
```
n:=5;
(-1)^n*sum((-1)^j*n!/(j!*(n-2j)!)*2^(n-2j)*x^(n-2j),j=0..2)
```
On obtient $P_5(x)$:
```
-32*x^5+160*x^3-120*x
```

3.2.3 Dérivée n-ième de $g(x) = \exp(-1/x^2)$

Soit g la fonction définie par :
$g(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $g(x) = \exp(-1/x^2)$.
Montrer que g est indéfiniment dérivable.
Puis, à l'aide de l'exercice précédent et de l'exercice suivant calculer la dérivée n-ième de $g(x)$.
g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On tape :
```
g(x):=exp(-1/x^2)
diff(g(x),x,n)$(n=1..3)
diff(g(x),x,4)
```
On obtient :
```
2*exp(-1/x^2)/x^3,(4*exp(-1/x^2)-6*x^2*exp(-1/x^2))/x^6,
(8*exp(-1/x^2)-36*x^2*exp(-1/x^2)+24*x^4*exp(-1/x^2))/x^9
(16*exp(-1/x^2)-144*x^2*exp(-1/x^2)+300*x^4*exp(-1/x^2)-
120*x^6*exp(-1/x^2))/x^12
```
Montrons par récurrence que :

$$g(x)^{(n)} = \frac{Q_n(x)}{x^{3n}} * \exp(-1/x^2)$$

où $Q_n(x)$ est un polynôme de degré $2(n-1)$.
On a d'après les calculs précédents :
$Q_1(x) = -2$
$Q_2(x) = 4 - 6 * x^2$
$Q_3(x) = 8 - 36 * x^2 + 24 * x^4$
$Q_4(x) = 16 - 144 * x^2 + 300 * x^4 - 120 * x^6$
On calcule $g(x)^{(n+1)}$ en fonction de $g(x)^{(n)}$:
si $g(x)^{(n)} = \frac{Q_n(x)}{x^{3n}} * \exp(-1/x^2)$ on a
$g(x)^{(n+1)} = 2\frac{Q_n(x)}{x^{3(n+1)}} * \exp(-1/x^2) + \frac{Q_n(x)'}{x^{3n}} * \exp(-1/x^2) - \frac{3nQ_n(x)}{x^{3n+1}} * \exp(-1/x^2)$
Donc :
$g(x)^{(n+1)} = \frac{Q_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} * \exp(-1/x^2)$ avec
$Q_{n+1}(x) = -2Q_n(x) + x^3Q_n(x)' - 3nx^2Q_n(x) = x^3Q_n(x)' + (2-3nx^2)Q_n(x)$
$Q_{n+1}(x)$ est donc bien un polynôme de degré $2 + 2(n-1) = 2n$ Montrons que g est indéfiniment dérivable en 0 et que $g^{(n)}(0) = 0$.

On tape :
`limite(g(x),x=0)`
On obtient :
`0`
g est donc continue en 0.
On tape :
`limite(g(x)/x,x=0,1)`
On obtient :
`0`
On tape :
`limite(g(x)/x,x=0,1)`
On obtient :
`0`
g est donc dérivable en 0.
On a $g^{(n)}/x = \frac{Q_n(x)}{x^{3n+1}} * \exp(-1/x^2)$.
Donc $\lim_{x->0} g^{(n)}/x = 0$
On tape :
```
assume(k,integer)
limite(g(x)/x^k,x=0,1)
```
On obtient :
`0`
On tape :
`limite(g(x)/x^k,x=0,1)`
On obtient :
`0`
Donc g est indéfiniment dérivable en 0 et $g^{(n)}(0) = 0$.
On a :
$x^3 * g'(x) = 2g(x)$
On dérive n fois $x^3 * g'(x)$ en utilisant la formule de Leibniz.
Les dérivées n-ième de x^3 sont nulles pour $n > 3$ donc :
$2g(x)^{(n)} = (x^3 * g'(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{3} C_n^k) * (x^3)^{(k)}(g(x))^{(n-k+1)}$
donc
$2g(x)^{(n)} = x^3 g(x)^{(n+1)} + 3nx^2 g(x)^{(n)} + 3n(n-1)xg(x)^{(n-1)} + 3n(n-1)(n-2)g(x)^{(n-2)}$
On en déduit que :
$Q_{n+1}(x)+(3nx^2-2)Q_n(x)+3n(n-1)x^4 Q_{n-1}(x)+3n(n-1)(n-2)x^6 Q_{n-2}(x) = 0$
Pour déterminer $Q_n(x)$ on va utiliser l'exercice précédent et l'exercice qui suit !

3.2.4 Dérivée n-ième de $g(x) = f(1/x)$

Soit f une fonction indéfiniment dérivable. On cherche à exprimer la dérivée n-ième de $g(x) = f(1/x)$ en fonction de la dérivée n-ième de f.
Puis en utilisant la valeur de la dérivée n-ième de $f(x) = exp(-x^2)$, on pourra par exemple trouver les dérivées n-ième de la fonction g définie par $g(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $g(x) = \exp(-1/x^2)$.
Pour cela on cherche à exprimer la dérivée n-ième de $g(x) = f(1/x)$ en fonction de la dérivée n-ième de f.

On tape :

```
g(x):=f(1/x)
diff(g(x),x,n)$(n=1..3)
```

On obtient :

```
-f'(1/x)/x^2,(2*f'(1/x)+f''(1/x))/x^3,
(-6*x^2*f'(1/x)-6*x*f''(1/x)-f'''(1/x))/x^6
```

On tape :

```
diff(g(x),x,4)
```

On obtient :

```
(24*x^3*f'(1/x)+36*x^2*f''(1/x)+12*x*f'''(1/x)+f''''(1/x))/x^8
```

On va montrer que :

$g^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a(k,n)x^{-n-k}f^{(k)}(1/x)$ avec $a(1,n) = (-1)^n n!$

$a(k,n) = \frac{(-1)^n n!(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!}$

$a(n,n) = (-1)^n$

On a :

$g^{(n+1)}(x) = -\sum_{k=1}^{n} a(k,n)x^{-n-k-2}f^{(k+1)}(1/x) - \sum_{k=1}^{n} a(k,n)(n+k)x^{-n-k-1}f^{(k)}(1/x)$

Donc :

$a(1,n+1) = -a(1,n)(n+1)$,

Comme $a(1,1) = -1$ on en déduit que $a(1,n) = (-1)^n n!$

$a(n+1,n+1) = -a(n,n)$,

Comme $a(1,1) = -1$ on en déduit que $a(n,n) = (-1)^n$

En posant j=k-1 dans la 2ième somme :

$\sum_{k=1}^{n} a(k,n)(n+k)x^{-n-k-1}f^{(k)}(1/x) = \sum_{j=0}^{n-1} a(j+1,n)n(n+j+1)x^{-n-j-2}f^{(j+1)}(1/x)$

Donc pour $k = 1..n-1$:

$a(k+1,n+1) = -a(k,n) - a(k+1,n)n(n+k+1)$

ou encore $j = k+1$:

$a(j,n+1) = -a(j-1,n) - a(j,n)n(n+j)$ pour $j = 2..n$

Si $a(k,n) = \frac{(-1)^n n!(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!}$ pour $k = 1..n$

$a(k,n+1) = -\frac{(-1)^n n!(n-1)!}{(k-2)!(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{(-1)^n n!(n-1)!n(n+k)}{k!(k-1)!(n-k)!}$ $a(k,n+1) = \frac{(-1)^{n+1} n!(n-1)!}{(k-2)!(k-1)!(n-k)!}(\frac{1}{n-k+1} + \frac{n+k}{k(k-1)})$.

On tape :

```
factor(1/(n-k+1)+(n+k)/(k*(k-1)))
```

On obtient :

```
n*(n+1)/(k*(k-1)*(n-k+1))
```

Donc pour $k = 2..n$:

$a(k,n+1) = \frac{(-1)^{n+1} n!(n+1)!}{k!(k-1)!(n-k+1)!}$

On a donc montré par récurrence que :

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n n!(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} x^{-n-k} f^{(k)}(1/x)$$

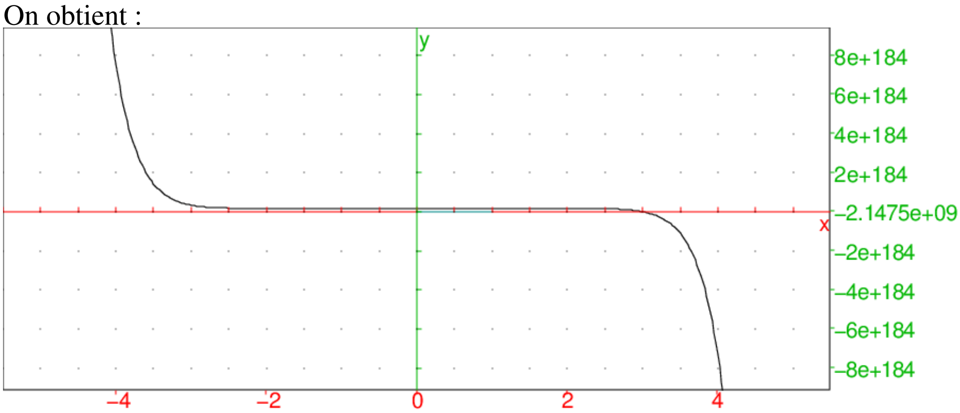
Si $f(x) = \exp(-x^2)$, on sait que :
$f^{(k)}(1/x) = P_k(1/x) \exp(-1/x^2)$
donc si $g(x) = \exp(-1/x^2) = f(1/x)$, on a :
$g^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n n!(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} x^{-n-k} P_k(1/x) \exp(-1/x^2)$
$P_k(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^{iquo(k,2)} (-1)^j \frac{k!}{j!(k-2j)!} 2^{k-2j} x^{k-2j}$
Or $P_k(1/x) = (-1)^n \sum_{j=0}^{iquo(k,2)} (-1)^j \frac{k!}{j!(k-2j)!} 2^{k-2j} x^{2j-k} = R_k(x)/x^k$ donc
$R_k(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^{iquo(k,2)} (-1)^j \frac{k!}{j!(k-2j)!} 2^{k-2j} x^{2j}$
$\sum_{j=0}^{k} c(j,k) x^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} c(k-j,k) x^j$
donc $x^{-n-k} P_k(1/x) = R_k(x)/x^{n+2k}$.

$$x^{3n} g^{(n)}(x) = (\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n n!(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} R_k(x) x^{2n-2k}) \exp(-1/x^2)$$

Donc :
$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n n!(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} R_k(x) x^{2n-2k}$ avec
$R_k(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^{iquo(k,2)} (-1)^j \frac{k!}{j!(k-2j)!} 2^{k-2j} x^{2j}$
On vérifie que :
$Q_1(x) = -2$, $Q_2(x) = 4 - 6x^2$, $Q_3(x) = 8 - 36x^2 + 24x^4$
$Q_4(x) = 16 - 144x^2 + 300x^4 - 120x^6$
On tape :
```
R(n,x):=(-1)^n*sum((-1)^j*n!/(j!*(n-2j)!)*2^(n-2j)*x^(2j),
j=0..iquo(n,2)
Q(n,x):=sum((-1)^n*(n!*(n-1)!)/(k!*(k-1)!*(n-k)!)*
R(k,x)*x^(2*n-2k),k=1..n)
Q(3,x),Q(4,x)
```
On obtient :
```
24*x^4-36*x^2+8, -120*x^6+300*x^4-144*x^2+16
```
Ouf ! c'est correct !

3.3 Calcul exact et encadrement

Trouver les entiers m et n tels que :
$n^{17} + m^{17} = 232630643127370$ et $n^{13} - m^{13} = 96887416084$

Trouver les réels x et y tels que :
$x^{17} + y^{17} = 232630643127370$ et $x^{13} - y^{13} = 96887416084$
Solution
On va faire un encadrement de n.
On a : $n^{17} < 232630643127370$ et $96887416084 < n^{13}$.
On tape :
```
a:=232630643127370; b:=96887416084
evalf(b^(1/13),a^(1/17)
```
On obtient :
```
[6.99999113947,7.00000022858]
```
Donc $n = 7$
On tape :
```
normal((7^(13)-b)^(1/13))
```
On obtient : `3`
La solution est donc $n = 7, m = 3$.
Ou bien on cherche x et y comme racine d'un polynôme.
On a $x^{17*13} = x^{221} = (a - y^{17})^{13} = (b + y^{13})^{17}$
Donc y est racine dy polynôme :
$P(y) = (a - y^{17})^{13} - (b + y^{13})^{17}$
On tape :
```
P(y):=normal((a-y^17)^13-(b+y^13)^17)
solve(P(y)=0,y)
```
On obtient : `[3]`
On tape :
```
solve(x^221=(a-3^17)^13,x)
```
On obtient : `[7]`
On tape :
```
plotfunc(P(y),y=-5..5)
```
On obtient :


Chapitre 4

Arithmétique en terminale scientifique

4.1 Énoncé sur la partie entière

Montrer que la partie entière de $a = (3+\sqrt{5})^n$ est un entier impair quelque soit l'entier n dans $\mathbb{N}$.

4.1.1 Cherchons avec `Xcas`

On peut faire des essais dans le tableur.
Dans A0 on met `1`
Dans A1 on met=`A0*(3+sqrt(5))`
Dans B0 on met =`floor(A0)`
Dans B1 on met =`floor(B1)`
Puis on remplit vers le bas.
Dans cet exercice il faut penser à associer à $(3+\sqrt{5})^n$ sa quantité conjuguée $(3-\sqrt{5})^n$.
Dans C0 on met `1`
Dans C1 on met =`C0*(3-sqrt(5))`
Dans D0 on met =`floor(A0+C0)`
Dans D1 on met =`C0*(3-sqrt(5))`
Puis on remplit vers le bas.

4.1.2 La démonstration

On remarque que :
$b = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair (d'après la formule du binôme) et que $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$.
On a donc $a < b < a+1$, ou encore $b-1 < a < b$ avec b un entier pair.
Cela prouve que la partie entière de $a = (3+\sqrt{5})^n$ est $b-1$ qui est un entier impair.

4.2 Énoncés sur le nombre de diviseurs d'un entier

4.2.1 L'énoncé 1

Quel est, parmi les entiers naturels de 1 à 2005, celui qui admet le plus de diviseurs ? Quel est ce nombre de diviseurs ? **Réponse avec** `Xcas` On tape :
`2*3*5*7`
On obtient :
`210`
On tape :
`2*3*5*7*11`
On obtient :
`2310`
Cela nous dit que le nombre est de la forme :
$2^a * 3^b * 5^c * 7^d$ avec $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$
et alors son nombre de diviseurs est :
$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$
On peut maintenant faire une recherche systématique :
Il semble qu'il faut supposer que $d \neq 0$ car avec - $b = 0, c = 0, d = 0$ on ne peut avoir que $2^1 0$ qui n'a que 11 diviseurs,
- $c = 0, d = 0$ $(a+1)(b+1)$
vaut 20 pour $a = 9$ et $b = 1$ ($2^9 * 3 = 1536$)
vaut 28 pour $a = 6$ et $b = 3$ ($2^6 * 3^3 = 1728$)
- $d = 0$ $(a+1)(b+1)(c+1)$
vaut 32 pour $a = 7$, $b = 1$ et $c = 1$ ($2^7 * 3 * 5 = 1920$)
vaut 36 pour $a = 5$, $b = 2$ et $c = 1$ ($2^5 * 3^2 * 5 = 1444$)
- si $d \neq 0$
On tape :
`210*6`
On obtient :
`1260`
et 1260 admet 3*3*2*2=36 diviseurs ou on tape :
`size(idivis(1260))`
On obtient :
`36`
On tape :
`210*8`
On obtient :
`1680`
et 1680 admet 5*2*2*2=40 diviseurs ou on tape :
`size(idivis(1680))`
On obtient :
`40`
On fait une recherche systématique :
$2^{10} = 1024$ a 11 diviseurs,
$2^9 * 3 = 1536$ a 20 diviseurs,
$2^7 * 3^2 = 1116$ a 24 diviseurs,
$2^6 * 3^3 = 1728$ a 28 diviseurs,

$2^4 * 3^4 = 1296$ a 25 diviseurs,
$2^7 * 3 * 5 = 1920$ a 32 diviseurs,
$2^5 * 3^2 * 5 = 1440$ a 24 diviseurs,
$2^4 * 3 * 5 * 7 = 1680$ a 40 diviseurs.

4.2.2 L'énoncé 2

1. Trouver le plus petit nombre entier n qui admet exactement 50 diviseurs.
2. Existe-t-il un entier m qui soit inférieur à n et qui admette plus de 50 diviseurs ?

Réponse avec `Xcas` On sait que si $n = a^p * b^q * c^r$ le nombre de diviseurs de n est $(p+1)(q+1)(r+1)$.
On a : $50 = 1 * 50 = 2 * 25 = 10 * 5 = 2 * 5 * 5 = 2 * 5^2$

1. On cherche le plus petit nombre entier qui admet exactement 50 diviseurs, donc les candidats sont :
   2^{49}
   $2^{24} * 3$
   $2^9 * 3^4$
   $2^4 * 3^4 * 5$
   C'est donc $6480 = 2^4 * 3^4 * 5$
   On tape :
   `size(idivis(6480))`
   On obtient :
   `50`
2. On doit avoir :
   $m < 2^4 * 3^4 * 5$ donc pour qu'il est plus que 50 diviseurs il faut que m soit de la forme $m = 2^p * 3^q * 5^r * 7^s$ avec $p <= 4, q < 4, r = 1, s = 1$ et $4(p+1)(q+1) > 50$.
   Essayons $p = 4, q = 2$, on a $4(p+1)(q+1) = 60 > 50$ et $m = 2^4 * 3^2 * 5 * 7 = 5040$.
   Donc $m =$ répond à la question.

4.2.3 L'énoncé 3

Soit une séquence `L` d'objets. On prend 3 objets parmi cette séquence `L`.

1. Écrire un programme `triplets` qui renvoie la séquence de dimension `comb(size(L),3)` constituée par les 3 objets obtenus.
   Application numérique :
   `L` est la liste des diviseurs de $n = 12$.
2. Soit un entier `n`. On cherche 3 diviseurs différents `n1,n2,n3` de `n`, tels que `n1+n2+n3` soit aussi un diviseur de `n`.
   Modifier le programme précédent en `solutions` pour obtenir toutes les solutions.
   Application numérique :
   $n = 12$
   $n = 60$
   $n = 6279$

Solution avec `Xcas`

1. On tape :

```
triplets(L):={
  local LR,LT,j,k,l,s;
  LR:=NULL;
  LT:=NULL;
  s:=size(L)-1;
  pour j de 0 jusque s-2 faire
    pour k de j+1 jusque s-1 faire
      pour l de k+1 jusque s faire
        LT:=LT,[L[j],L[k],L[l]];
      fpour;
    fpour;
  fpour;
  retourne LT;
}:;
```

   On tape pour $n = 12$:
   `LT:=triplets(idivis(12));size(LT);comb(3);comb(6,3)`
   On obtient :
   `[1,2,3],[1,2,4],[1,2,6],[1,2,12],[1,3,4],[1,3,6],`
   `[1,3,12],[1,4,6],[1,4,12],[1,6,12],[2,3,4],[2,3,6],`
   `[2,3,12],[2,4,6],[2,4,12],[2,6,12],[3,4,6],[3,4,12],`
   `[3,6,12],[4,6,12],20,20`

2. On tape :

```
solutions(n):={
  loc[1,3,12],al LR,LT,L,j,k,l,s;
  LR:=NULL;
  LT:=NULL;
  L:=idivis(n);
  s:=size(L)-1;
  pour j de 0 jusque s-2 faire
    pour k de j+1 jusque s-1 faire
      pour l de k+1 jusque s faire
        LT:=LT,[L[j],L[k],L[l]];
      fpour;
    fpour;
  fpour;
  s:=size(LT)-1;
  pour j de 0 jusque s faire
    si irem(n,sum(LT[j]))==0 alors
      LR:=LR,LT[j];
    fsi;
  fpour;
  retourne LR;
}:;
```

On tape pour $n = 12$:
`LS:=solutions(12);size(LS)`
On obtient 2 solutions (sur les 20 triplets) :
`[1,2,3],[2,4,6],2`
On tape pour $n = 60$:
`LS:=solutions(60);size(LS)`
On obtient 20 solutions (sur les 220 triplets) :
```
[1,2,3],[1,2,12],[1,3,6],[1,4,5],[1,4,10],[1,4,15],
[1,5,6],[2,3,5],[2,3,10],[2,3,15],[2,4,6],[2,6,12],
[3,4,5],[3,5,12],[3,12,15],[4,5,6],[4,6,10],[4,6,20],
[5,10,15],[10,20,30],20
```
On tape pour $n = 6279$:
`LS:=solutions(6279);size(LS)`
On obtient 9 solutions (sur les 560 triplets) :
```
[1,7,13],[1,21,69],[1,69,91],[3,7,13],[3,13,23],
[3,23,273],[7,23,39],[21,91,161],[23,161,299],9
```

4.2.4 L'énoncé 4

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
Trouver les nombres $n = 2^p * 3^q$ sachant que $12 * n$ a 2 fois plus de diviseurs que n.
Solution
n a $(p+1)*(q+1)$ diviseurs et $12n = 2^{p+2} * 3^{q+1}$ a $(p+3)*(q+2)$ diviseurs
On doit donc résoudre $(p+3)*(q+2) = 2*(p+1)*(q+1)$ c'est à dire :
$p*q-4-q = 0$ ou encore $q*(p-1) = 4 = 4*1 = 2*2 = 1*4$.
p et q sont des entiers donc on peut avoir :
$q = 4$ et $p = 2$ c'est à dire $n = 2^2 * 3^4 = 81 * 4 = 324$ ou
$q = 2$ et $p = 3$ c'est à dire $n = 2^3 * 3^2 = 9 * 8 = 72$ ou
$q = 1$ et $p = 5$ c'est à dire $n = 2^5 * 3 = 32 * 3 = 96$. On vérifie avec `Xcas`.
On tape :
`size(idivis(81)),size(idivis(12*81))`
On obtient :
`15,30`
On tape :
`size(idivis(72)),size(idivis(12*72))`
On obtient :
`12,24`
On tape :
`size(idivis(96)),size(idivis(12*96))`
On obtient :
`12,24`

4.2.5 L'énoncé 5

Soient $(a, b, c, m, p, q) \in \mathbb{N}^6$.
Calculer le produit des diviseurs du nombre $a^m b^p c^q$. On pourra chercher le produit des diviseurs des nombres :

$2^3 * 3^2$, $2^3 * 3^2 * 5$, $2^3 * 3^5 * 5^7$.
Solution avec `Xcas`
Produit des diviseurs de $2^3 * 3^2$
On tape :
`L:=idivis(2^3*3^2)`
On obtient :
`[1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72]`
On tape :
`map(L,ifactor)`
On obtient :
`[1,2,3,2^2,2*3,2^3,3^2,2^2*3,2*3^2,2^3*3,2^2*3^2,2^3*3^2]`
On voit que 2 apparait :
3 fois avec comme puissance 1,
3 fois avec comme puissance 2 et
3 fois avec comme puissance 3 donc
2 apparait dans le produit des diviseurs de $2^3 * 3^2$ avec comme puissance :
$(1 + 2 + 3) * 3 = 18$ On voit que 3 apparait :
4 fois avec comme puissance 1,
4 fois avec comme puissance 2 donc
3 apparait dans le produit des diviseurs de $2^3 * 3^2$ avec comme puissance :
$(1 + 2) * 4 = 12$ On vérifie, on tape :
`ifactor(product(L))`
On obtient :
`2^18*3^12`
Produit des diviseurs de $2^3 * 3^2 * 5$
On tape :
`L1:=idivis(2^3*3^2*5)`
On obtient :
`[1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,36,40,45,60,72,90,120,180,360]`
On tape :
`map(L1,ifactor)`
On obtient :
$[1, 2, 3, 2^2, 5, 2 * 3, 2^3, 3^2, 2 * 5, 2^2 * 3, 3 * 5, 2 * 3^2, 2^2 * 5, 2^3 * 3, 2 * 3 * 5,$
$2^2 * 3^2, 2^3 * 5, 3^2 * 5, 2^2 * 3 * 5, 2^3 * 3^2, 2 * 3^2 * 5, 2^3 * 3 * 5, 2^2 * 3^2 * 5, 2^3 * 3^2 * 5]$
On voit que 2 apparait :
3*2=6 fois avec comme puissance 1 (on a $2 * 3^j * 5^k$ pour $j = 0, 1, 2$, $k = 0, 1$),
3*2=6 fois avec comme puissance 2 et
3*2=6 fois avec comme puissance 3 donc
2 apparait dans le produit des diviseurs de $2^3 * 3^2 * 5$ avec comme puissance :
$(1 + 2 + 3) * 3 * 2 = 36$ On voit que 3 apparait :
4*2=8 fois avec comme puissance 1 (on a $3 * 2^j * 5^k$ pour $j = 0, 1, 2, 3$, $k = 0, 1$),
4*2=8 fois avec comme puissance 2 donc
3 apparait dans le produit des diviseurs de $2^3 * 3^2 * 5$ avec comme puissance :
$(1 + 2) * 8 = 24$ On voit que 5 apparait :
4*3=12 fois avec comme puissance 1 (on a $5*2^j*5^k$ pour $j = 0, 1, 2, 3$, $k = 0, 1, 2$)
donc
3 apparait dans le produit des diviseurs de $2^3 * 3^2 * 5$ avec comme puissance :
12 On vérifie, on tape :

```
ifactor(product(L1))
```
On obtient :
```
2^36*3^24*5^12
```
Produit des diviseurs de $2^3 * 3^5 * 5^7$
Dans ce produit 2 apparait sous la forme :
$2 * 3^j * 5^k$, $2^2 * 3^j * 5^k$,$2^3 * 3^j * 5^k$ pour $j = 0..5$ et $k = 0..7$
Donc 2 apparait dans le produit des diviseurs de $2^3 * 3^5 * 5^7$ avec comme puissance $(1 + 2 + 3) * 6 * 8 = 288$
Dans ce produit 3 apparait sous la forme :
$3 * 2^j * 5^k$, $3^2 * 2^j * 5^k ... 3^5 * 2^j * 5^k$ pour $j = 0..3$ et $k = 0..7$
Donc 3 apparait dans le produit des diviseurs de $2^3 * 3^5 * 5^7$ avec comme puissance $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) * 4 * 8 = 480$
Dans ce produit 5 apparait sous la forme :
$5 * 2^j * 3^k$, $5^2 * 2^j * 3^k ... 5^7 * 2^j * 3^k$ pour $j = 0..3$ et $k = 0..5$
Donc c apparait dans le produit des diviseurs de $2^3 * 3^5 * 5^7$ avec comme puissance $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) * 4 * 6 = 672$

On vérifie, on tape :
```
L2:=idivis(2^3*3^5*5^7):;
```
On obtient :
```
Done
```
On vérifie, on tape :
```
ifactor(product(L2))
```
On obtient :
```
2^288*3^480*5^672
```
Cas général : produit des diviseurs du nombre $a^m b^p c^q$ Dans ce produit a apparait sous la forme :
$a * b^j * c^k$, $a^2 * b^j * c^k ... a^m * b^j * c^k$ pour $j = 0..p$ et $k = 0..q$
Donc a apparait dans le produit des diviseurs de $a^m b^p c^q$ avec comme puissance $(1 + 2 + .. + m) * (p + 1) * (q + 1) = m * (m + 1) * (p + 1) * (q + 1)/2$
Dans ce produit b apparait sous la forme :
$b * a^j * c^k$, $b^2 * a^j * c^k ... b^p * a^j * b^k$ pour $j = 0..m$ et $k = 0..q$
Donc b apparait dans le produit des diviseurs de $a^m b^p c^q$ avec comme puissance $(1 + 2 + .. + p) * (m + 1) * (q + 1) = p * (m + 1) * (p + 1) * (q + 1)/2$
Dans ce produit c apparait sous la forme :
$c * a^j * b^k$, $c^2 * a^j * b^k ... c^q * a^j * b^k$ pour $j = 0..m$ et $k = 0..p$.
Donc c apparait dans le produit des diviseurs de $a^m b^p c^q$ avec comme puissance $(1 + 2 + .. + q) * (m + 1) * (p + 1) = p * (m + 1) * (p + 1) * (q + 1)/2$
On pose :
$\alpha = (1 + 2 + .. + m) * (p + 1) * (q + 1) = m * (m + 1) * (p + 1) * (q + 1)/2$,
$\beta = (1 + 2 + .. + p) * (m + 1) * (q + 1) = p * (m + 1) * (p + 1) * (q + 1)/2$,
$\gamma = (1 + 2 + .. + q) * (m + 1) * (p + 1) = q * (m + 1) * (p + 1) * (q + 1)/2$,
Le produit des diviseurs du nombre $a^m b^p c^q$ est alors :
$a^\alpha b^\beta c^\gamma$.
Le produit des diviseurs du nombre $n = a_1^{m_1} .. a_p^{m_p}$ est alors :
$a_1^{\alpha_1} * .. * a_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_k = \dfrac{m_k}{2} \prod_{j=1}^{p} (m_j + 1)$

On vérifie, on tape :
`m:=3; p:=5; q:=7;`
`alpha:=m*(m+1)*(p+1)*(q+1)/2`
On obtient :
`288`
On tape :
`beta:=p*(m+1)*(p+1)*(q+1)/2`
On obtient :
`480`
On tape :
`gamma:=q*(m+1)*(p+1)*(q+1)/2`
On obtient :
`672`
Ou on tape :
`P:=product(k+1,k,3,7,2)/2`
On obtient :
`96`
On tape :
`(P*k)$ (k=3..7,2)`
On obtient :
`(288,480,672)`

4.2.6 L'énoncé 6

Calculer la somme des diviseurs de $n = 360$, puis calculer la somme des diviseurs d'un entier n quelconque.
Vérification du résultat obtenu pour $n = 16632$.
Application
Trouver le ou les entier(s) n sachant que la somme des diviseurs de n vaut 24 ? vaut 28 ? vaut 1170 ? **Solution avec** `Xcas`
Pour faire la liste des diviseurs de $360 = 2^3 \times 3^3 \times 5$ on peut écrire :
Les diviseurs de 2^3 : 1, 2, 4, 8,
Les diviseurs de 3^2 : 1, 3, 9,
Les diviseurs de 5 : 1, 5.
Puis on remplace la première ligne par la ligne obtenue en multipliant cette première ligne successivement par les éléments de la deuxième ligne et on obtient 2 lignes :
1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72,
1, 5,
Les diviseurs de 5 : 1, 5.
Puis on remplace la première ligne par la ligne obtenue en multipliant cette première ligne successivement par les éléments de la deuxième ligne et on obtient la ligne des diviseurs de 360 :
1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72,
5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.
On tape :
`D:=idivis(360)`
On obtient :

```
[1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,36,40,45,60,72,90,120,180,360]
```

Pour calculer la somme on va calculer successivement la somme des éléments des première lignes obtenues :
$S_1 = (1 + 2 + 4 + 8) = 15$
$S_2 = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9) = 15 * 13$
$S_3 = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5) = 15 * 13 * 6 = 1170$
On tape :

```
sum(D)
```

On obtient :

```
1170
```

Soit $n = a_1^{m_1}..a_p^{m_p}$ on a alors comme première ligne :
$1, a_1, a_1^2, ..., a_1^{\alpha_1}$ qui a comme somme :
$S_1 = 1 + a_1 + a_1^2 + .. + a_1^{m_1} = \dfrac{a_1^{m_1+1} - 1}{a_1 - 1}$
Puis on remplace cette première ligne par la ligne obtenue en la multipliant successivement par les éléments $a_2, a_2^2...a_2^{m_2}$ donc :
$S_2 = \dfrac{a_1^{m_1+1} - 1}{a_1 - 1}(1 + a_2 + a_2^2 + .. + a_2^{m_2}) = \dfrac{a_1^{m_1+1} - 1}{a_1 - 1}\dfrac{a_2^{m_2+1} - 1}{a_2 - 1}$
etc... On obtient donc à la fin une seule ligne dont la somme vaut :
$S_p = \displaystyle\prod_{j=1}^{p} \frac{a_j^{m_j+1} - 1}{a_j - 1}$ On vérifie pour $n = 16632$, on tape :

```
ifactor(16632)
```

On obtient :

```
2^3*3^3*7*11
D1:=idivis(16632):;
```

On tape :

```
(2^4-1)*(3^4-1)*(7^2-1)*(11^2-1)/(2*6*10)
```

On obtient :

```
57600
```

On tape :

```
sum(D1)
```

On obtient :

```
57600
```

Application
Si a est un nombre premier on a :
$a^{p+1} - 1)/(a - 1) = 1 + a + .. + a^p > 1 + a \geq 1 + 2 = 3$
Si la somme des diviseurs est 24
On sait que $24 = 1 * 24 = 3 * 8 = 4 * 6$ Si $n = a^p$ la somme des diviseurs de n est $a^{p+1} - 1)/(a - 1) = 1 + a + ...a^p = 24$
Donc $24 - 1 = 23 = a(1 + a + ...a^{p-1}$.
a est un nombre premier qui divise 23 donc $a = 23$ Si $n = a^p * b^q$ la somme des diviseurs de n est :
$a^{p+1} - 1)(b^{q+1} - 1)/((a - 1)(b - 1)) = 3 * 8 = 4 * 6 = 24$ (on a aussi 24=2*12 mais puisque $a^{p+1} - 1)/(a - 1) = 1 + a + .. + a^p > 1 + a \geq 1 + 2 = 3$ on ne peut pas avoir : $a^{p+1} - 1)/(a - 1) = 2$)
On cherche :
$a^{p+1} - 1)/(a - 1) = 3 = 1 + 2$ et $b^{q+1} - 1)/(b - 1) = 8 = 1 + 7$
donc $a = 2$ et $b = 7$ donc $n = 14$

On cherche :
$a^{p+1}-1)/(a-1)=4=1+3$ et $b^{q+1}-1)/(b-1)=6=1+5$
donc $a=3$ et $b=5$ donc $n=15$
Si la somme des diviseurs de n est 24 c'est que $n=14$ ou $n=15$ ou $n=23$.
Si la somme des diviseurs est 28
On sait que $28=1*28=2*14=4*7$ Si $n=a^p$ la somme des diviseurs de n est $a^{p+1}-1)/(a-1)=28$ donc $28-1=27$ doit être divisible par a, donc la seule valeur possible pour a est $a=3$
si $a=3$ on a : 1+3=4 1+3+9=13 et 1+3+9+27=30 donc $a\neq 3$
donc $n\neq a^p$
Si $n=a^p*b^q$ la somme des diviseurs de n est :
$a^{p+1}-1)(b^{q+1}-1)/((a-1)(b-1))=28=4*7$ car $a^{p+1}-1)/(a-1)\leq 3$ donc $a^{p+1}-1)/(a-1)\neq 2$.
On cherche :
$a^{p+1}-1)/(a-1)=4=1+3$ et $b^{q+1}-1)/(b-1)=7=1+2+4$
on trouve $a=3$ et $p=1$, $b=2$ et $q=2$ donc $n=3^1*2^2=12$
On vérifie, on tape :
```
L:=idivis(12)
sum(L)
```
On obtient :
`28` On vérifie :
On tape :
```
L:=sum(idivis(k)) $ (k=1..28)
```
On obtient :
```
[1,3,4,7,6,12,8,15,13,18,12,28,14,24,24,31,18,39,20,
42,32,36,24,60,31,42,40,56]
```
Si la somme des diviseurs de n est 28 c'est que $n=12$.
Si la somme des diviseurs est 1170
On tape :
```
ifactor(1170)
```
On obtient :
```
2*3^2*5*13
```
On tape :
```
idivis(1170)
```
On obtient :
```
[1,2,3,5,6,9,10,13,15,18,26,30,39,45,65,78,90,117,130,195,234,390,585,
```
Si $n=a^p$ la somme des diviseurs de n est $a^{p+1}-1)/(a-1)=1170$ donc $1170-1=1169$ On tape :
```
ifactor(1170-1)
```
On obtient :
```
7*167
```
On ne peut pas avoir $a=167$ car $167^2>1170$. Peut-on avoir $a=7$? On tape :
```
sum(7^j,j=0..k)$(k=0..5)
```
On obtient :
```
[1,8,57,400,2801,19608]
```
Donc $n\neq a^p$.
Si $n=a^p*b^q$ la somme des diviseurs de n est :
$a^{p+1}-1)(b^{q+1}-1)/((a-1)(b-1))=2*3\hat{}2*5*13$.

Il y a donc plusieurs possibilités.
On prenant a ou b comme multiple possible de 13 on a en tout 2*3+2=12 possibilités.
1/ Si on écrit $1170 = 13 * 90$, on a :
$13 - 1 = 12 = 3 * 4$ est divisible par a donc on peut avoir $a = 2$ ou $a = 4$.
On a 1+2+4=7 et 1+2+4+8=15 donc $a \neq 2$
On a 1+3+9=13 donc $a = 3$
On a $90 - 1 = 89$ comme 89 est un nombre premier, on a $b = 89$.
Donc on peut avoir $n = 3^2 * 89 = 801$
On pose `L:=801`.
2/ Si on écrit $1170 = 26 * 45$, on a :
$26 - 1 = 25 = 5 * 5$ est divisible par a donc on peut avoir $a = 5$.
On a 1+5+25>26>1+5 donc $a \neq 5$ donc $1170 = 26 * 45$ ne donne pas de solution
3/ Si on écrit $1170 = 39 * 30$, on a :
$39 - 1 = 38 = 2 * 19$ est divisible par a donc on peut avoir $a = 2$ ou $a = 19$.
On doit avoir $1 + 2 + ... + 2^p = 2^{p+1} - 1 = 39$ donc $39 + 1 = 40 = 2^{p+1}$.
Puisque 40 est divisible par 5 ce n'est pas une puissance de 2 donc $a \neq 2$ On ne peut pas avoir $a = 19$ car $1 + 19 + 19^2 > 39 > 1 + 19$ donc $1170 = 39 * 30$ ne donne pas de solution
4/ Si on écrit $1170 = 65 * 18$, on a :
$65 - 1 = 64 = 2^6$ est divisible par a mais on peut avoir $a = 2$ car sinon $64 + 1$ serait une puissance de 2.
donc $1170 = 65 * 18$ ne donne pas de solution
5/ Si on écrit $1170 = 78 * 15$, on a :
$78 - 1 = 77 = 7 * 11$ est divisible par a mais :
on ne peut pas avoir $a = 7$ car 1+7+49+343>78>1+7+49.
on ne peut pas avoir $a = 11$ car 1+11+121>78>1+11.
donc $1170 = 15 * 78$ ne donne pas de solution
6/ Si on écrit $1170 = 117 * 10$, on a :
$10 - 1 = 9 = 3 * 3$ est divisible par a mais :
on ne peut pas avoir $a = 3$ car 1+3+9>10>1+3.
donc $1170 = 117 * 10$ ne donne pas de solution
7/ Si on écrit $1170 = 130 * 9$, on a :
$9 - 1 = 8 = 2^3$ est divisible par a mais :
on ne peut pas avoir $a = 2$ car 9+1=10 n'est pas une puissance de 2.
donc $1170 = 130 * 9$ ne donne pas de solution
8/ Si on écrit $1170 = 195 * 6$, on a :
$195 - 1 = 194 = 2 * 97$ est divisible par a mais :
on ne peut pas avoir $a = 2$ car 195+1=196 n'est pas une puissance de 2.
on ne peut pas avoir $a = 97$ car $1 + 97 + 97^2 > 195 > 1 + 97$.
donc $1170 = 195 * 6$ ne donne pas de solution
9/ Si on écrit $1170 = 234 * 5$, on a :
$5 - 1 = 4 = 2^2$ est divisible par a mais :
on ne peut pas avoir $a = 2$ car 5+1=6 n'est pas une puissance de 2.
donc $1170 = 234 * 5$ ne donne pas de solution
10/ Si on écrit $1170 = 390 * 3$, on a :
$390 - 1 = 389$ est divisible par a puisque 389 est premier on peut avoir $a = 389$ et $p = 1$.

$3-1=2$ donc $b=2$ et $q=1$ donc $1170=390*3$ donne comme solution $n=389*2=778$
On tape : `L:=L,778` i.e $L=801,778$
11/ Si on écrit $1170=2*585$, on a :
$2-1=1$ est divisible par a mais on ne peut pas avoir $a=1$.
donc $1170=585*2$ ne donne pas de solution.
Si $n=a^p*b^qc^r$ la somme des diviseurs de n est :
$a^{p+1}-1)(b^{q+1}-1)(c^{r+1}-1)/((a-1)(b-1)(c-1)=2*3\hat{}2*5*13$.
Un des nombres a,b, ou c et un multiple de 13.
1/ Si on écrit $1170=13*3*30$, on a :
On a :
13=1+3+9, 3=1+2 et 30=1+29 (29 est un nombre premier) donc $1170=13*3*30$ donne comme solution $n=3^2*2*29=522$
On tape : `L:=L,522` i.e $L=801,778,522$
2/ Si on écrit $1170=13*5*18$, on a :
On a : $5-1=4$ mais $a\neq 2$ car 1+2+4>5>1+2
donc $1170=13*5*18$ ne donne pas de solution.
3/ Si on écrit $1170=13*6*15$, on a :
On a :
13=1+3+9, 6=1+5 et 15=1+2+4+8 donc $1170=13*6*15$ donne comme solution $n=3^2*5*2^3=360$
On tape : `L:=L,360` i.e $L=801,778,522,360$
4/ Si on écrit $1170=13*9*10$, on a :
On a : $9-1=8$ mais $a\neq 2$ car 1+2+4+8>9>1+2+4
donc $1170=13*9*10$ ne donne pas de solution.
5/ On a vu précédemment que l'on ne peut pas avoir :
$a^{p+1}-1)/(a-1)=26$, $a^{p+1}-1)/(a-1)=39$, $a^{p+1}-1)/(a-1)=65$, $a^{p+1}-1)/(a-1)=78$ 6/ Si on écrit $1170=117*2*5$ ou $1170=195*2*3$ on ne peut pas avoir :
$a^{p+1}-1)/(a-1)=2$
Les solutions sont donc :
L :=(801,778,522,360)
Vérifions :
`D:=sum(idivis(k))$(k=2..1171):; D:=[0,D]`
On tape le programme `membres` pour connaitre les indices des nommbres égaux à a dans la liste L :

```
membres(a,L):={
  local j,s,M;
  s:=size(L)-1;
  M:=NULL;
  pour j de 0 jusque s faire
    si L[j]==a alors M:=M,j; fsi;
  fpour;
retourne [M];
}:;
```

`membres(1170,D)`
On obtient :

```
[360,522,778,801]
```

4.3 Énoncés sur l'identité de Bézout

4.3.1 L'énoncé 1

Quel est le plus petit nombre entier avec lequel il faut multiplier 49 pour obtenir un nombre se terminant par 999999999 (9 neufs) ?

Réponse niveau primaire
On peut faire une multiplication à trous :

$$49 * .... = ..999999999$$

On trouve :

$$49 * 693877551 = 33999999999$$

Réponse niveau collège
On a $9999999999 = 10^9 - 1$ et le résultat de la multiplication doit être de la forme $n * 10^9 + 10^9 - 1$ avec $0 \leq n < 49$ (ou de la forme $p * 10^9 - 1$) avec $0 < p \leq 49$.
On utilise le tableur en cherchant n pour que : $n * 10^9 + 10^9 - 1$ soit divisible par 49.
On utilisera les commandes `irem(a,b)` et `iquo(a,b)` qui renvoient respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de `a` par `b`.
Pour cela on met dans la première colonne les nombres de 0 à 48, puis dans la deuxième colonne les nombres $n*10^9+10^9-1$ pour n de 0 à 48. Dans la troisième colonne on calcule le reste de la division de la deuxième colonne par 49 et on trouve que pour $n = 33$ ce reste est nul. Il reste à calculer `iquo(33*10^9+10^9-1,49)` et on trouve :

$$693877551$$

Mais cette méthode est très couteuse !
On peut aller un peu plus vite (surtout si on veut faire les calculs à la main) en remarquant que $10 = 3 \bmod 7$ et que $100 = 2 \bmod 49$ donc :
$10^3 = -1 \bmod 7$
$10^6 = 1 \bmod 7$
$10^9 = -1 \bmod 7$
$10^8 = 2^4 = 16 \bmod 49$
$10^9 = 13 \bmod 49$
$13 * -7 = 7 \bmod 49$
On cherche a tel que $a * 10^9 = 49 * k + 1 = 7 * p + 1$.
donc $-a = 1 \bmod 7$ et $13 * a = 1 \bmod 49$
Si $a = 48$ on a $13 * a = -13 = 36 \bmod 49$
Si $a = 41$ on a $13 * a = 13 * -1 + 13 * -7 = -13 + 7 = -6 \bmod 49$
Si $a = 34$ on a $13 * a = 13 * -1 + 13 * -7 + 13 * -7 = 1 \bmod 49$
Donc $34 * 10^9 = 1 \bmod 49$
Il reste à calculer `iquo(34*10^9-1,49)` et on trouve :

$$693877551$$

Réponse niveau TS
On a : $999999999 + 1 = 10^9$.

On cherche p pour avoir : $49p = 10^9a - 1$ c'est à dire $1 = 10^9a - 49p$.
Avec `Xcas` on tape :
`bezout_entiers(49,10^9)`
On obtient :
`[306122449,-15,1]`
Donc :
$49 * 306122449 - 15 * 10^9 = 1$ et puisque $49 * 10^9 - 49 * 10^9 = 0$, on a :
$49 * (10^9 - 306122449) + (15 - 49) * 10^9 = -1$.
Puisque $10^9 - 306122449 = 693877551$ et $(49 - 15) = 34$, on a :

$$49 * 693877551 = 34 * 10^9 - 1 = 33999999999$$

Pour faire les calculs à la main on écrit :
$10^9 = 13 \bmod 49$
donc on écrit les 2 premières équations :

$$0 * 13 + 1 * 49 = 49$$

$$1 * 13 + 0 * 49 = 13$$

puisque $49 = 3*13+10$ on soustrait 3 fois l'équation 2 à l'équation 1 et on obtient l'équation 3 :

$$-3 * 13 + 1 * 49 = 10$$

puisque $13 = 1 * 10 + 3$ on soustrait l'équation 3 à l'équation 2 et on obtient l'équation 4 :

$$4 * 13 - 1 * 49 = 3$$

puisque $10 = 3 * 3 + 1$ on soustrait 3 fois l'équation 4 à l'équation 3 et on obtient l'idendité de Bézout :

$$-15 * 13 + 4 * 49 = 1$$

On a $-15 = 34 \bmod 49$ et $10^9 = 13 \bmod 49$ donc :
$34 * 10^9 - 1$ est divisible par 49.
Il reste à calculer `iquo(34*10^9-1,49)` et on trouve :

$$693877551$$

4.3.2 L'énoncé 2

Résoudre en nombres entiers :

$$13x + 5y = 1$$

$$5x + 13y = 6$$

Avec `Xcas` on tape :
`bezout_entiers(13,5)`
On obtient :
`[2,-5,1]`
Donc $2 * 13 - 5 * 5 = 1$.
et puisque $k * 13 * 5 - k * 13 * 5 = 0$, on a :
$13 * (2 + 5k) - (5 + 13k) * 5 = 1$.

$13x + 5y = 1$ a donc comme solutions $x = 2 + 5k, y = -5 - 13k$ avec k dans $\mathbb{Z}$.
En multipliant l'égalité $13 * (2 + 5k) - (5 + 13k) * 5 = 1$ par 6 on a :
$13 * (12 + 30k) - (30 + 78k) * 5 = 6$
$5x + 13y = 6$ a donc comme solutions $x = -30 - 78k, y = 12 + 30k$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

4.3.3 Exercice

On considère les triangles rectangles qui ont des côtés de longueur entière et dont le périmètre s'exprime avec le même nombre que l'aire.
Déterminer la longueur des côtés de ces triangles.
Une solution
Soient a et b les longueurs des côtés de l'angle droit du triangle rectangle.
D'après Pythagore l'hypoténuse a pour longueur $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
On cherche $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ pour avoir :
$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{ab}{2}$.
Si $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ vérifient cette équation on aura aussi $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{N}^*$.
On doit résoudre l'équation d'inconnues $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$:
$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{ab}{2}$.
Cette équation est équivalente à :
$\dfrac{ab}{2} - a - b = \sqrt{a^2 + b^2}$
qui est équivalente à :
$(ab - 2a - 2b)^2 = 4a^2 + 4b^2$ et $2a + 2b < ab$ i.e. $0 < 2a < b(a - 2)$ donc
$(ab - 2a - 2b)^2 = 4a^2 + 4b^2$ et $a > 2$ et $b > 2a/(a - 2))$.
$(ab - 2a - 2b)^2 = 4a^2 + 4b^2$ est équivalent à :
$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = ab(ab - 4a - 4b + 8) = 0$
On cherche donc à résoudre dans $\mathbb{N}^*$:
$ab - 4a - 4b + 8) = 0$ i.e. $b(a - 4) = 4(a - 2)$
on en déduit puisque $a > 2$ et $b > 0$ que $a > 4$ et que : $b = \dfrac{4(a-2)}{a-4}$.
Si $a > 4$ et $b = \dfrac{4(a-2)}{a-4}$ a-t-on $b - 2a/(a - 2) > 0$?
On tape : `factor(4*(a-2)/(a-4)-2*a/(a-2)`
On obtient : `2*(8-4*a+a^2)/((-4+a)*(-2+a))`
ce qui prouve que si $a > 4$ on a $b - 2a/(a - 2) > 0$.
Comment choisir $a > 4$ et $a \in \mathbb{N}$ pour que $\dfrac{4(a-2)}{a-4} \in \mathbb{N}^*$?
On a :
$b(a - 4) = 4(a - 2)$ donc
$b(a - 4)$ est pair et $a - 4$ divise $4(a - 2)$.

1. Si $a > 4$ est impair, $a - 4$ est impair donc $a - 4$ est premier avec 4 donc $a - 4$ divise $a - 2$.
   Si $a > 4$ est impair cela entraine qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
   $a = 2p + 5$ et $a - 4 = 2p + 1$ divise $a - 2 = 2p + 3$.
   Mais $2p + 1$ et $2p + 3$ sont premiers entre eux puisque :
   $(p + 1) * (2p + 3) - (p + 2) * (2p + 1) = 1$ donc
   $p = 0$ et $a = 5$.

On trouve alors :
$a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ et on a bien $5 + 12 + 13 = 5 * 12/2 = 30$

2. Si $a > 4$ est pair, cela entraine qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
$a = 2(p + 3)$, donc $a - 4 = 2p + 2$ et $a - 2 = 2p + 4$.
$b(2p + 2) = 4(2p + 4)$ donc $b(p + 1) = 4(p + 2)$ donc
puisque $p + 2$ et $p + 1$ sont premiers entre eux ($(p + 2) - (p + 1) = 1$), on en déduit que $(p + 1)$ divise 4 donc :
$p = 0$ ou $p = 1$ ou $p = 3$ et donc
$a = 6$, $b = 8$, $c = 10$ et on a bien $6 + 8 + 10 = 6 * 8/2 = 24$
$a = 8$, $b = 6$, $c = 10$ et on a bien $8 + 6 + 10 = 8 * 6/2 = 24$
$a = 12$, $b = 5$, $c = 13$ et on a bien $5 + 12 + 13 = 5 * 12/2 = 30$

On trouve donc 2 solutions ce sont les triangles ayant des côtés de longueur :
$6, 8, 10$ et $5, 12, 13$

Prolongements

Si on cherche les triangles rectangles de côtés a, b, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ vérifiant :
$a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{Q}$ et $a + b + c = ab/2$, la résolution est plus simple et la solution est :
pour $n \in \mathbb{N}$ et $n > 4$, on a :
$a = n$,
$b = \dfrac{4(n-2)}{n-4}$ et
$c = \sqrt{\dfrac{n^2(n-4)^2 + 16(n-2)^2}{(n-4)^2}}$
On tape :
```
factor(n^2*(n-4)^2+16*(n-2)^2)
```
On obtient :
```
(8-4*n+n^2)^2
```
Comme $8 - 4 * n + n^2 = (n - 2)^2 + 4 > 0$ et que $n > 4$ on en déduit que $c = \dfrac{8 - 4 * n + n^2}{(n-4)}$.
donc la longueurs des côtés des triangles rectangles de côtés vérifiant $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{Q}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $a + b + c = ab/2$ sont :
$a = n \geq 5$, $b = \dfrac{4(n-2)}{n-4}$ et $c = \dfrac{8 - 4 * n + n^2}{(n-4)}$.
Par exemple :
si $a = 10$, $b = \dfrac{4 * 8)}{6} = \dfrac{16)}{3}$ et $c = \dfrac{100 - 40 + 8}{6} = \dfrac{34)}{3}$.
On tape :
```
[n,(4n-8)/(n-4),(n^2-4n+8)/(n-4)]$(n=5..20)
```
On obtient :
```
[5,12,13],[6,8,10],[7,20/3,29/3],[8,6,10],[9,28/5,53/5],
[10,16/3,34/3],[11,36/7,85/7],[12,5,13],[13,44/9,125/9],
[14,24/5,74/5],[15,52/11,173/11],[16,14/3,50/3],
[17,60/13,229/13],[18,32/7,130/7],[19,68/15,293/15],
[20,9/2,41/2]
```

4.4 Énoncés sur des nombres de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

4.4.1 L'énoncé 1

Trouver les 2 derniers chiffres de 19969^{19969}.
`Solution`
Ici, on est sûr que le dernier chiffre est 9, puisque 19969 est un nombre impair.
Avec `Xcas`, on tape :
`powmod(19969,19969,100)`
On obtient : `29`
On peut aussi taper mais le calcul est inefficace :
`irem(19969^19969,100)`

4.4.2 L'énoncé 2

Trouver les 2 derniers chiffres de 19996^{19996}.
`Solution`
Ici, on est sûr que le dernier chiffre est 6.
Avec `Xcas`, on tape :
`powmod(19996,19996,100)`
On obtient : `96`
On peut aussi taper directement pour vérifier :
`irem(19996^19996,100)`

4.5 TP sur l'indicatrice d'Euler

4.5.1 L'énoncé

Bijection entre $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ et $\mathbb{N}$
On construit une bijection f entre les rationnels de [0,1] et $\mathbb{N}$, pour cela :
— on ordonne les rationnels de [0,1] de la façon suivante :

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, ...\frac{1}{n}\frac{2}{n}...\frac{n-1}{n}, ...$$

— on supprime les fractions non irréductibles et on obtient une suite L.
La fonction f attribue à un rationnel de [0,1] son rang dans la suite L, on a : $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\frac{1}{2}) = f(\frac{2}{4}) = 2,\ f(\frac{1}{3}) = 3...,\ f(\frac{3}{4}) = 6, ...,\ f(\frac{1}{5}) = 7....$

1. Déterminer le nombre d'éléments de L qui a comme dénominateur 23 (resp 24, 25...30), à l'aide de l'indicatrice d'Euler,
2. Déterminer $f(\frac{1}{7})$ puis $f(\frac{1}{30})$, $f(\frac{13}{30})$ et $f(\frac{29}{30})$,
3. Écrire un programme qui étant donné deux entiers a et b ($a < b$) renvoie la liste des entiers plus petit que a qui sont premiers avec b,
4. Écrire un programme qui définit la fonction f ayant pour variable une fraction r de [0,1],
5. Écrire un programme qui pour $n > 0$ trace les points de coordonnées $(\frac{a}{b}, f(\frac{a}{b}))$ avec $b \leq n$.
   Afficherles points de coordonnées $\frac{a}{b}, f(\frac{a}{b})$ avec $b <= 32$.

6. Amusez vous à tracer ces points avec une couleur qui varie selon la valeur a de a/b.....

4.5.2 Le corrigé avec `Xcas`

On utilise la fonction `euler` de `Xcas` qui est l'indicatrice d'Euler c'est à dire `euler(n)` renvoie le nombre d'entiers inférieurs à `n` qui sont premiers avec `n` (`euler(n)=card({p<n,gcd(n,p)=1})`).

1. Le nombre d'éléments de L qui a comme dénominateur 23 est le nombre d'entiers inférieur à 23 qui sont premiers avec 23 c'est donc `euler(23)`.
   On tape :

   `euler([23,24,25,26,27,28,29,30])`

   On obtient :

   `[22,8,20,12,18,12,28,8]`

   On a :
   $f(\frac{1}{5})$ est `euler(1)+euler(2)+...+euler(4)+1`
   On vérifie, on sait que $f(\frac{1}{5}) = 7$ et
   `sum(euler(n),n,1,4)+1` vaut bien 7.
   On a :
   $f(\frac{1}{7})$ est `euler(1)+euler(2)+...+euler(6)+1` donc on tape :

   `sum(euler(n),n,1,6)+1`

   On obtient $f(\frac{1}{7})$:

   `13`

   On tape :

   `sum(euler(n),n,1,29)+1`

   On obtient $f(\frac{1}{30})$:

   `271`

   Pour avoir $f(\frac{13}{30})$, il faut avoir le cardinal des entiers $p > 1$ qui sont premiers avec 30 et inférieurs ou égaux à 13. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13$ et `ifactor(30)=2*3*5`.
   Donc $f(\frac{13}{30}) = f(\frac{1}{30}) + 3 = 274$.
   Puisque $\frac{29}{30}$ est le plus grand élément de dénominateur 30, pour avoir $f(\frac{29}{30})$, on tape :

   `sum(euler(n),n,1,30)`

   On obtient la valeur de $f(\frac{29}{30})$:

   `278`

   On sait que `euler(30)=8` et les 8 entiers inférieurs ou égaux à 30 qui sont premiers avec 30 sont : `1,7,11,13,17,19,23,29`.

2. On peut aussi écrire un petit programme qui renvoie la liste des entiersplus petit que a et premier avec b :

   ```
   Lppapremb(a,b):={
   local L,k;
   L:=NULL;
   for (k:=1;k<=a;k:=k+1){
   if (gcd(k,b)==1) {
   L:=L,k;
   }
   }
   return [L];
   }:;
   ```

   On tape :

   `sum(euler(n),n,1,29)+size(Lppapremb(1,30))`

   On obtient `f(1/30)` :

   `271`

   On tape :

   `sum(euler(n),n,1,29)+size(Lppapremb(13,30))`

   On obtient `f(13/30)` :

   `274`

   On tape :

   `sum(euler(n),n,1,29)+size(Lppapremb(29,30))`

   On obtient `f(29/30)` :

   `278`

3. Pour avoir la valeur de $f(a/b)$ il suffit connaitre la longueur s de la liste des entiers plus petit que a et premier avec b .
   On utilise les fonction `numer` (resp `denom`) qui renvoie le numerateur (resp dénominateur) de la fracton simplifiée.
   On tape :

   ```
   f(r):={
   local s,k,a,b;
   a:=numer(r);
   b:=denom(r);
   s:=0;
   for (k:=1;k<=a;k:=k+1){
   if (gcd(k,b)==1) {s:=s+1;}
   }
   return sum(euler(n),n,1,b-1)+s;
   }:;
   ```

   On tape :

   `f(1,30)`

On obtient `f(1/30)` :

`271`

On vérifie en tapant :
`1+sum(euler(k),k=0..29)` et on obtient bien `271`
On tape :

`f(13,30)`

On obtient `f(13/30)` :

`274`

On tape :

`f(29,30)`

On obtient `f(29/30)` :

`278`

On vérifie en tapant :
`sum(euler(k),k=0..30)` et on obtient bien `278`
On tape :

`f(31,32)`

On obtient `f(31/32)` :

`324`

On tape :

`f(39,40)`

On obtient :

`490`

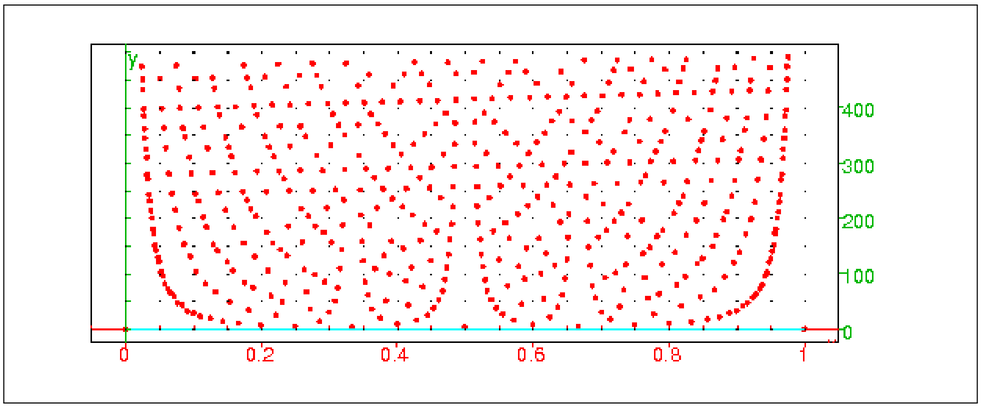
4. Pour tracer les points de coordonnées $\frac{a}{b}, f(\frac{a}{b})$, on ne se sert pas de la fonction f mais on calcule sa valeur au fur et à mesure et on la met dans la variable `valf` : à chaque étape `valf` augmente de `1`.

```
tracef(n):={
local L,a,b,valf;
L:=point(0),point(1);
valf:=1;
for (b:=2;b<=n;b:=b+1){
for (a:=1;a<b;a:=a+1){
  if (gcd(a,b)==1) {
    valf:=valf+1;
    L:=L,point(evalf(a/b)+i*valf);
  }
}
}
return affichage(L,rouge+point_point+
epaisseur_point_2);
}:;
```

On tape :

```
tracef(40)
```

On obtient :



Remarque
Si on tape :

```
tracer(n):={
  local L,a,b;
  L:=point(0),point(1);
  for (b:=2;b<n;b:=b+1){
    for (a:=1;a<b;a:=a+1){
      if (gcd(a,b)==1){L:=L,point(evalf(a/b)+i*f(a/b));}
    }
  }
  return affichage(L,rouge+point_point+
  epaisseur_point_2);
}:;
```

Le temps de réponse est beaucoup plus long car le programme calcule à chaque ètape `f(a/b)` sans tenir compte des valeurs de `f` calculées auparavant. Le temps mis pour faire `tracer(100)` est de 160.02s alors que celui de `tracef(100)` est de 3.52s.
On peut encore diminuer le temps de calcul en stockant par référence (avec `=<` au lieu de `:=`) les points dans la liste `L`. Pour cela il faut connaitre la longueur `s` de la liste `L` qui est `f((n-1)/n)`.
On tape :

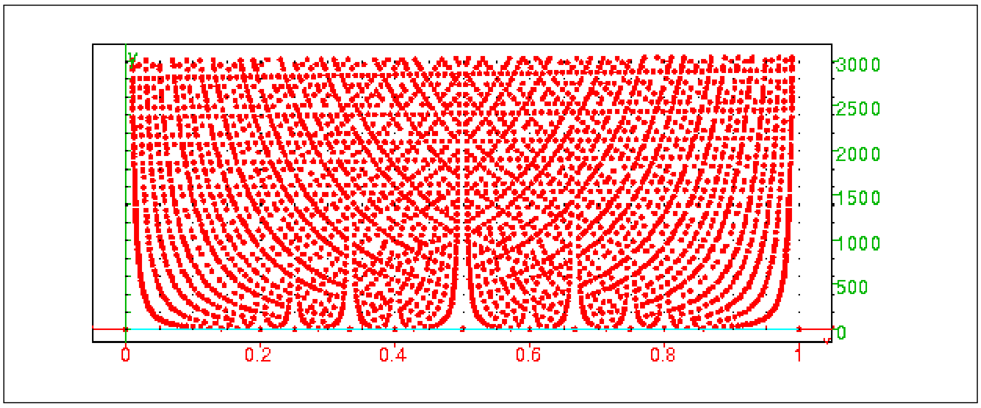
```
tracerf(n):={
  local L,a,b,valf,s,j;
  s:=f((n-1)/n);
  L:=makelist(0,1,s);
  L[0]=<point(0);
  L[1]=<point(1);
  valf:=1;
  j:=2;
  for (b:=2;b<=n;b:=b+1){
```

```
    for (a:=1;a<b;a:=a+1){
      if (gcd(a,b)==1) {
        valf:=valf+1;
        L[j]=<point(evalf(a/b)+i*valf);
        j:=j+1;
      }
    }
  }
  return affichage(L,rouge+point_point+
  epaisseur_point_2);
}:;
```

On tape :

```
tracerf(100)
```

On obtient en 0.89s :



5. On met un peu de couleur ....
   On tape :

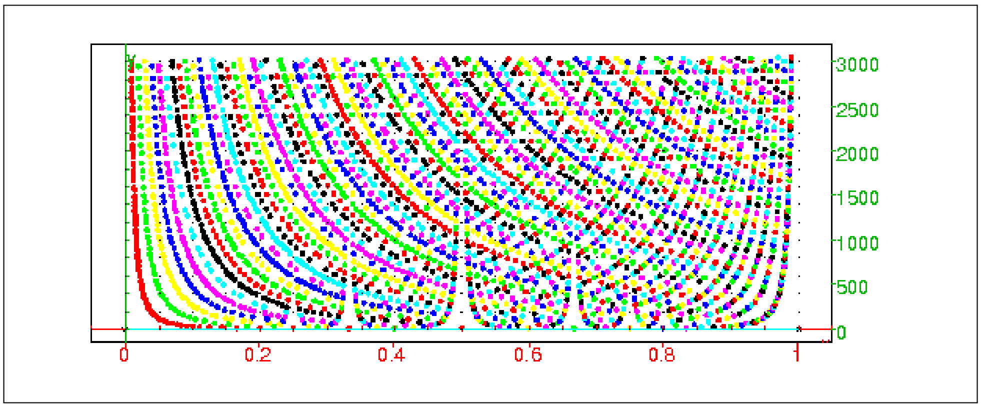
```
tracerfc(n):={
  local L,a,b,valf,s,j;
  s:=f((n-1)/n);
  L:=makelist(0,1,s);
  L[0]=<point(0);
  L[1]=<point(1);L:=point(0),point(1);
  valf:=1;j:=2
  for (b:=2;b<=n;b:=b+1){
    for (a:=1;a<b;a:=a+1){
      if (gcd(a,b)==1) {
        valf:=valf+1;
        L[j]=<point(evalf(a/b)+i*valf,affichage=
        irem(a,7)+point_point+epaisseur_point_2);
        j:=j+1;
      }
    }
  }
  return L;
```

```
};
```

On tape :

```
tracerfc(100)
```

On obtient en 0.84s :



On remarque que les points $(\frac{1}{n+1}, f(\frac{1}{n+1}))$ et les points $(\frac{n-1}{n}, f(\frac{n-1}{n}))$ semblent être sur des courbes symétriques par rapportà $x = 1/2$.
Cela s'explique puisque $f(\frac{n-1}{n}) + 1 = f(\frac{1}{n+1})$.

4.5.3 Prolongement du TP sur l'indicatrice d'Euler

Approximation d'un nuage de points

La fonction f est la bijection entre $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et $\mathbb{N}$ qui a èté définie dans le **TP** précédent.

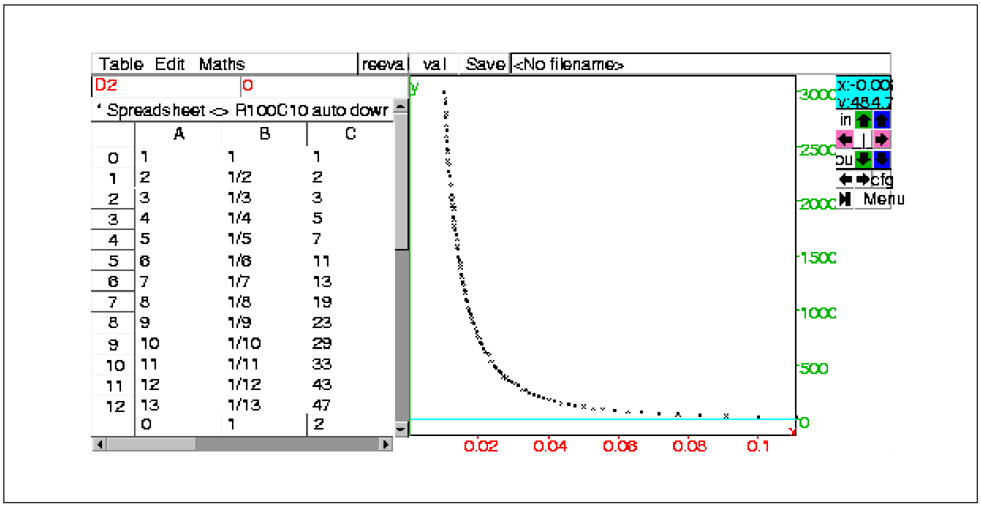
1. À l'aide du tableur tracer le nuage de points de coordonnèes : $\frac{1}{n}, f(\frac{1}{n})$ où f est la fonction définie précédement. On rappelle que l'on a :
$$f(\frac{1}{n}) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(k) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$
où Φ est la fonction d'Euler.
2. On se demande si ces points sont sur une courbe identifiable. Dans le livre d'Hardy and Wright d'introduction à la théorie des nombres, il est dit que $\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(k) \simeq \frac{3n^2}{\pi^2}$ pour n grand. Vérifier ce résultat en utilisant une régression convenable.
3. Faites une simulation pour vérifier que si on tire au hasard deux entiers et qu'avec ces 2 entiers on forme une fraction de]0 ;1], la probabilité d'obtenir une fraction irréductible est égale à $6/\pi^2$.
4. Faites une simulation pour vérifier que si on tire au hasard deux entiers la probabilité d'obtenir deux entiers premiers entre eux est égale à $6/\pi^2$.

4.5.4 Corrigé du prolongement du TP sur l'indicatrice d'Euler

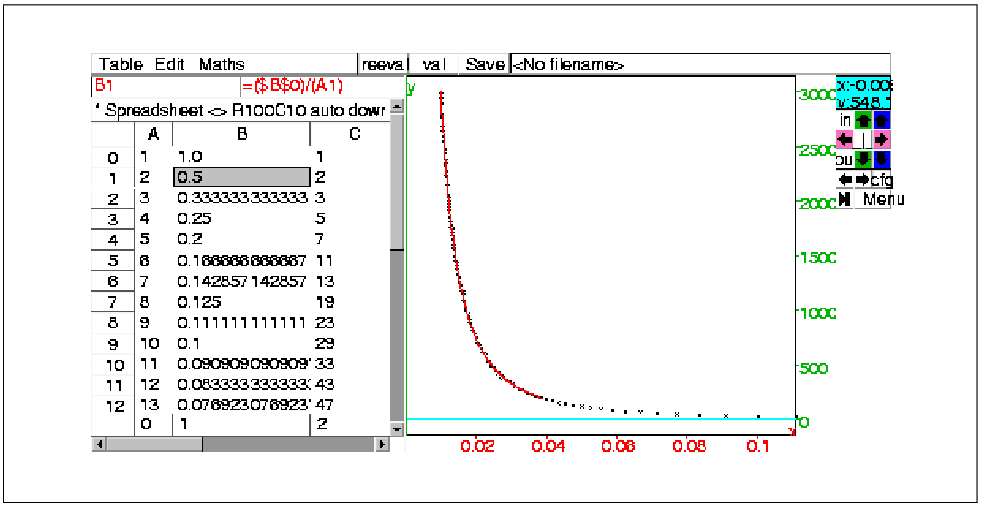
1. On ouvre le tableur avec par exemple 100 lignes.

   — dans la colonne `A`, on met la suite des nombres entiers $1, 2....,$
   — dans la colonne `B`, on met l'inverse de ces nombres.
   Pour cela on met dans `B0` : `1` et dans `B1` : `=$B$0/A1` ou plus simplement `=1/A1`.
   Puis on copie cette formule vers le bas.
   — dans la colonne `C`, on met dans `C0` : `1`, dans `C1` : `=euler(A0)+C0` et dans `C2` : `=euler(A1)+C1`. Puis on copie cette formule vers le bas.

   On sélectionne les 2 colonnes `B` et `C`, puis dans le menu `Maths->2-d stats` on choisit `nuage de points` la plage de cellule est alors : `B0:C99` et la cellule cible `D0` si on a coché `Graphe` et décoché `Paysage` dans la configuration du tableur.
   On obtient :



2. On modifie `B0` en `1.0` pour avoir des nombres approchés dans la colonne `B`. Puis on sélectionne les 2 colonnes `B` et `C`, puis dans le menu `Maths->Regressions` on choisit `Puissance` la plage de cellule est alors : `B40:C99` et la cellule cible `D1` (on a coché `Graphe` et décoché `Paysage` dans la configuration du tableur), puis on modifie `D1` en :
   `=power_regression_plot(matrix(50,2,(B50):(C99)),color=1)`
   et on obtient en rouge :



3. on met dans `D2 =(M:=matrix(60,2,(B40):(C99)))`.
   Puis on tape : `=power_regression(M)`
   On obtient : `-2.01348683765,0.283029041082`
   Ce qui veut dire que $y = 0.283029041082 * x^{-}2.01348683765$ approche la courbe $y = f(x)$, c'est à dire que $f(1/n) \simeq 0.283029041082{*}n^{2.01348683765}$.
   On tape : `evalf(3/pi^2)`
   On obtient : `0.303963550927`

4. On écrit tout d'abord le programme :

```
fractirred0(n,p):={
  local a,b,j,k;
  randseed;
  k:=0;
  pour j de 1 jusque p faire
  a:=rand(n)+1;
  b:=rand(n)+1;
  si gcd(a,b)==1 alors k:=k+1;fsi;
  fpour;
  retourne evalf(k/p),evalf(6/pi^2);
}:;
```

   On tape :
   `fractirred0(100000,1000000)`
   On obtient :
   `0.607658,0.607927101854`
   On tape :
   `fractirred0(1000000,1000000)`
   On obtient :
   `0.607544,0.607927101854`
   On tape :
   `fractirred0(2^31,10^6)`
   On obtient :
   `0.607876,0.607927101854`
   Mais ce programme n'est pas correct car le couple (a, b) peut prendre n^2 valeurs alors que les fractions $a/b \in]0; 1]$ avec $b \le n$ sont au nombre de

$n(n+1)/2$.
On tape alors :

```
fractirred1(n,p):={
  local a,b,j,k;
  randseed;
  k:=0;
  pour j de 1 jusque p faire
  b:=rand(n)+1;
  repeter a:=rand(n)+1;jusqua a<=b;
  si gcd(a,b)==1 alors k:=k+1;fsi;
  fpour;
  retourne evalf(k/p),evalf(6/pi^2);
}:;
```

On tape :
`fractirred1(10000,10000)`
On obtient :
`0.6065,0.607927101854`
Mais l'exécution rique d'être longue car si on a tiré pour b 0 ou 1, trouver un a plus petit risque de prendre du temps ! ! ! !
Pour faire un programme plus "rigoureux", on va numéroter les fractions sans enlever les fractions réductibles (par ex le rang de 2/2 est 3 et celui de 2/6 est 17) puis tirer au hasard un nombre dans $(1, 2, ...n(n+1)/2)$ et chercher la fraction ayant ce rang comme valeur.
On tape :

```
randfract(n):= {
  local r,a,p,q;
  a:=n*(n+1)/2;
  r:=rand(a)+1;
  q:=floor((-1+sqrt(8*r+1))/2);
  p:=r-q*(q+1)/2;
  retourne p,q;
}:;
fractirred(n,p):={
  local a,b,j,k;
  randseed;
  k:=0;
  pour j de 1 jusque p faire
  a,b:=randfract(n);
  si gcd(a,b)==1 alors k:=k+1;fsi;
  fpour;
  retourne evalf(k/p),evalf(6/pi^2);
}:;
```

On tape :
`fractirred(1000,10000)`
On obtient :
`0.6059,0.607927101854`
On tape :

`fractirred(60000,100000)`
On obtient :
`0.60509,0.607927101854`
Remarque
Calculons la probabilité d'avoir une fraction irréductible parmi toutes les fractions de]0 ;1] qui ont un dénominateur $d \leq n$.
Le nombre total de ces fractions est $n(n+1)/2$, en effet il y a :
une fraction de dénominateur 1,
deux fractions de dénominateur 2,..
n fractions de dénominateur n
donc en tout $n(n+1)/2$ fractions de]0 ;1] de dénominateur $d \leq n$,
Le nombre des fractions irréductibles parmi ces fractions est $\sum_{k=1}^{n} \texttt{euler}(k)$, en effet il y a :
`euler(1)=1` fraction irréductible de dénominateur 1,
`euler(2)=1` fraction irréductible de dénominateur 2,..
`euler(n)` fractions irréductibles de dénominateur n
donc en tout `euler(1)+euler(2)+..+euler(n)` fractions irréductibles de dénominateur $d \leq n$.
On tape :
`2*sum(euler(k),k=1..1000)/(1000^2+1000.)`
On obtient : `0.607776223776`
On tape :
`2*sum(euler(k),k=1..10000)/(10000^2+10000.)`
On obtient : `0.607888931107`
Si on suppose que n est grand et que l'on a montré que $\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(k) \simeq \frac{3n^2}{\pi^2}$, la probabilité d'avoir une fraction irréductible parmi toutes les fractions de [0 ;1] qui ont un dénominateur $d \leq n$ est :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{euler}(k) \simeq \frac{2*3*(n+1)^2}{\pi^2*n*(n+1)} = \frac{6*(n+1)}{n\pi^2}$.
Cette probabilité tend donc vers $\dfrac{6}{\pi^2}$ quand n tend vers l'infini.
Idée pour montrer que si on tire au hasard 2 nombres entiers, la probabilité d'obtenir deux entiers premiers entre eux est égale à $\dfrac{6}{\pi^2}$
Cette propriété résulte du fait que $\dfrac{\pi^2}{6}$ est la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ i.e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
En effet, soit p un nombre premier.
La probabilité pour qu'un entier pris au hasard soit divisible par p (i.e. soit un multiple de p) est égale à $\dfrac{1}{p}$ (la probabilité pour qu'un entier pris au hasard soit divisible par 2 est égale à $\dfrac{1}{2}$, la probabilité pour qu'un entier pris au hasard soit divisible par 3 est égale à $\dfrac{1}{3}$...)
La probabilité pour que deux entiers pris au hasard soient tous les deux divisibles par p est égale à $\dfrac{1}{p^2}$.

Donc la probabilité pour que le pgcd de deux entiers pris au hasard ne soit pas divisible par p est égale à $1 - \frac{1}{p^2}$.
Donc, si NP est l'ensemble des nombres premiers, la probabilité pour que le pgcd de deux entiers pris au hasard soit égal à 1 (i.e. divisible par aucun nombre premier) est égale à $\prod_{p \in NP} (1 - \frac{1}{p^2})$.
Il faut maintenant écrire autrement $\prod_{p \in NP} (1 - \frac{1}{p^2})$ ou plutôt son inverse $\prod_{p \in NP} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}$.
On sait que $\frac{1}{1 - t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ donc $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2n}}$.
Finallement $\prod_{p \in NP} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \prod_{p \in NP} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2n}}$
Comme les nombres entiers sont le produit de nombres premiers à une certaine puissance, on a :
$\prod_{p \in NP} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \prod_{p \in NP} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Ainsi

$$\prod_{p \in NP} (1 - \frac{1}{p^2}) = \frac{6}{\pi^2}$$

4.6 Le problème de Joseph Bertrand (1822-1900)

Soit un cercle de rayon R. On appelle corde type les cordes dont la longueur a vaut $a = R\sqrt{3}$. La longueur des cordes types est égale à la longueur des côtés des triangles équilatéraux inscrits dans ce cercle.
Le problème de Joseph Bertrand est :
quelle est la probabilité pour qu'une corde prise au hasard soit plus grande qu'une corde type ?
Écrire un programme qui simule le choix d'une corde prise au hasard dans un cercle de rayon 1 lorsque :

1. On prend 2 points au hasard sur le cercle pour déterminer une corde,
2. On prend 1 point au hasard sur le cercle et une direction au hasard ce qui déterminera une corde.
3. On prend 1 point défini au hasard par ses coordonnées cartésiennes dans le cercle. Ce point déterminera le milieu de la corde (et donc la corde),
4. On compare les cordes qui ont la même direction : pour cela, pour chaque direction d, on prend un réel r au hasard entre $-R$ et R et cela défini 1 point sur le rayon orthogonal à d. Ce point déterminera le milieu de la corde (et donc la corde).

Testez cees différents choix, puis expliquez les résultats obtenus.

Les programmes avec Xcas

Une corde type AB d'un cercle de rayon 1 a pour longueur $\sqrt{3}$ et son angle au centre vaut $2\pi/3$ i.e si a est l'argument de l'affixe de A et b est l'argument de l'affixe de B.

1. On prend 2 points A et B au hasard sur le cercle pour déterminer une corde. Ces 2 points seront déterminés par leur arguments a et b choisis au hasard entre $-\pi 0$ et π. Ces deux points définissent une corde de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ si
   $l = AB^2 = \text{abs}(\exp(i * a) - \exp(i * b))^2 = 2 - 2\cos(a - b) > 3$ ou si $2\pi/3 < |a - b| < 4\pi/3$. Cela donne les 2 programmes `simulber10` et `simulber11`. Le programme `simulber10` étant plus rapide puisqu'il nécessite qu'un seul test.
   On tape :

```
simulber10(n):={
  local j,a,b,l,s;
  s:=0;
  pour j de 1 jusque n faire
  a:=rand(-pi,pi);
  b:=rand(-pi,pi);
  l:=2-2*cos(a-b);
  si l>3 alors s:=s+1; fsi;
  fpour;
  retourne s,n,evalf(s/n);
}:;
simulber11(n):={
  local j,a,b,c,s;
  s:=0;
  pour j de 1 jusque n faire
  a:=rand(-pi,pi);
  b:=rand(-pi,pi);
  c:=abs(a-b);
  si c>2*pi/3 et c<4*pi/3 alors s:=s+1; fsi;
  fpour;
  retourne s,n,evalf(s/n);
}:;
```

   On tape : `simulber10(100000)`
   On obtient : `33315,100000,0.33315`
   On tape : `simulber11(100000)`
   On obtient : `33410,100000,0.3341`
   Dans ces 2 programmes, ce qui compte c'est la valeur de $|b - a|$ qui est un nombre entre 0 et 2π. Il y a donc une chance sur trois pour que ce nombre soit compris entre $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

2. On prend 1 point A au hasard sur le cercle et une direction d au hasard pour déterminer une corde. Le point A sera déterminé par son argument a choisi au hasard entre $-\pi$ et π et la direction D par son angle d avec l'axe des x que l'on choisit au hasard entre 0 et π. Ce point et la direction définissent une corde AB de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ si $(a + b)/2 = \pi/2 - d$ (c'est

à dire $b = \pi + 2d - a$).
On tape :

```
simulber2(n):={
  local j,a,b,d,l,s;
  s:=0;
  pour j de 1 jusque n faire
  a:=rand(-pi,pi);
  d:=rand(0,pi);
  b:=pi+2*d-a;
  l:=2-2*cos(a-b);
  si l>3 alors s:=s+1; fsi
  fpour
  retourne s,n,evalf(s/n);
}:;
```

On tape : `simulber2(100000)`
On obtient : `33264,100000,0.33264`
On a le même résultat qu'en 1, puisque c'est pratiquement le même programme.

3. On définit au hasard dans le cercle le milieu de la corde par ses coordonnées cartésiennes.

```
simulber3(n):={
  local j,a,b,c,l,s;
  s:=0;
  pour j de 1 jusque n faire
  repeter
  a:=rand(-1,1);
  b:=rand(-1,1);
  jusqua a^2+b^2<1;
  l:=4*(1-a^2-b^2);
  si l>3 alors s:=s+1; fsi;
  fpour;
  retourne s,n,evalf(s/n);
}:;
```

On peut remplacer `l:=4*(1-a^2-b^2);si l>3 alors s:=s+1; fsi;` par
`l:=a^2+b^2;si l<1/4 alors s:=s+1; fsi;`
On tape : `simulber3(100000)`
On obtient : `25039,100000,0.25039`
Le cercle de rayon 1/2 a comme surface $\pi/4$ et celui de rayon 1 a comme surface π. La probabilité de se trouver dans le cercle de rayon 1/2 est donc de 1/4.
Attention
Si on écrit :

```
simulber30(n):={
  local j,a,b,c,l,s;
  s:=0;
```

```
  pour j de 1 jusque n faire
  a:=alea(-1,1);
  c:=sqrt(1-a^2);
  b:=alea(-c,c);
  l:=4*(1-a^2-b^2);
  si l>3 alors s:=s+1; fsi;
  fpour;
  retourne s,n,evalf(s/n);
}:;
```

le programme n'est pas correct car dans ce programme a et b ne sont pas indépendants (voir la remarque du 14.14).
On tape : `simulber30(100000)`
On obtient : `20311,100000,0.20311` On fait le calcul de la probabilité avec ce programme.
La probabilité d'avoir : $a < x < a+da$ et $b < y < db$ est : $da*db/aire(S)$ avec $S = \{(x, y)a < x < a + da, 0 < y < \sqrt{1-a^2}\}$.
On obtient si $\cos(t_1) = a$ et $\cos(t_2) = a + da$: avec $dt = -da/\sqrt{1-a^2}$ $aire(S) = 2(t_1 - t_2) + \sin(2t_2) - \sin(2t_1) = 2dt(\cos(2t_1) - 1) = 4da\sqrt{1-a^2}$ donc $db = 1/(4\sqrt{1-a^2})$
On a :
$\int_0^1 \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)dx}} = 1$ donc la probbilité d'être dans le cercle de rayon 1/2 est :
$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}-x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)dx}}$ On tape :
`romberg(sqrt((1/4-x^2))/sqrt((1-x^2)),x=0..1/2)`
On obtient (avec 7 digits) :
`0.20315486`

4. On définit au hasard un nombre réel r entre $-R$ et R. la longueur l de la corde de direction d et dont la distance au centre est r est : $l = 2\sqrt{1-r^2}$ et l ne dépend pas de la direction. Donc pour une direction donnée la probabilité cherchée ne dépend pas de la direction.
On tape (dans le programme $R = 1$ et$l$ est le carré de la longueur de la corde) :

```
simulber4(n):={
  local j,r,l,s;
  s:=0;
  pour j de 1 jusque n faire
  r:=rand(-1,1);
  l:=4*(1-r^2);
  si l>3 alors s:=s+1; fsi
  fpour
  retourne s,n,evalf(s/n);
}:;
```

On tape :
`simulber4(100000)`
On obtient :
`49993,100000,0.49993`

En effet, on a $l = AB^2 = 4 * (1 - r^2)$ et donc les conditions $l > 3$ et $0 < r < 1/2$ sont équivalentes.
Donc pour une direction donnée la probabilité cherchée est 1/2 et elle ne dépend pas de la direction.œn en conclut que par rapport à la corde type, il y a autant de cordes longues que de cordes courtes.
Remarque
Lorsqu'on définit au hasard dans le cercle le milieu M de la corde par ses coordonnées polaires r, t (i.e. l'affixe de M est $m = r\exp(it)$). Pour cela on choisit un réel r au hasard entre $-R$ et R et un angle t réel au hasard entre 0 et π ce qui déterminera le point $r\exp(it)$.
On tape :

```
simulber40(n):={
  local j,r,t,m,l,s;
  s:=0;
  pour j de 1 jusque n faire
  r:=rand(-1,1);
  t:=rand(0,pi);
  m:=r*exp(i*t);
  l:=4*(1-r^2);
  si l>3 alors s:=s+1; fsi
  fpour
  retourne s,n,evalf(s/n);
}:;
```

On tape : `simulber40(100000)`
On obtient : `50068,100000,0.50068`
En effet, on voit que la valeur de t ne sert pas et que $l = AB^2$ ne dépend que de r. Les conditions $l > 3$ et $0 < r < 1/2$ sont équivalentes. Donc la probabilité cherchée est encre 1/2.
Question
Pourquoi selon que l'on choisit le milieu de la corde avec ses coordonnées cartésiennes ou avec ses coordonnées polaires la probabilité passe de 1/4 à 1/2 ?
Il faut comprendre que :

```
r:=rand(-1,1);
t:=rand(0,pi);
M:=point(r*exp(i*t));
```

ne définit pas des points équirépartis dans le cercle de centre 0 et de rayon 1. En reffet, il y a plus de points proches du centre que sur la périphérie (voir la remarque du 14.14).

4.7 Un exercice sur les congruences et les restes chinois

4.7.1 L'énoncé

Trouver un nombre entier n vérifiant $4 < n < N$ vérifiant :
n est divisible par 2

$n - 1$ est divisible par 3
$n - 2$ est divisible par 5
$n - 3$ est divisible par 7
$n - 4$ est divisible par 11

4.7.2 Solution avec `Xcas` et les restes chinois

On utilise la commande `ichinrem`.
On tape :
`ichinrem([0%2,1%3,2%5,3%7,4%11]))`
On obtient :
`-788 % 2310`
On veut que $0 < n < N$ donc :
$n = (2310 - 788) + 2310 * k = 1522 + 2310 * k$ avec $k \leq \text{iquo}((N - 1522), 2310)$
donc si $N = 10000$ on tape :
`iquo((10000-1522),2310)`
On obtient :
`3`
On tape :
`(1522+2310*k)$(k=0..3)`
On obtient :
`1522,3832,6142,8452`

4.7.3 Solution avec `Xcas` et l'identité de Bézout

On utilise la commande `iabcuv` qui étant donné trois entiers `a,b,c` renvoie une liste de deux entiers relatifs `[u,v]` vérifiant `a*u+b*v=c`.
Remarque

— Si deux entiers relatifs u, v vérifie $au + bv = c$ alors on a aussi :
$a(u + kb) + b(v - ka) = c$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
— `iabcuv` est une généralisation de l'identité de Bézout (commande `iegcd`).
On a en effet : `iegcd(a,b)` renvoie une liste de trois entiers `[u,v,d]` vérifiant `a*u+b*v=d=gcd(a,b)` (où `gcd(a,b)` est le pgcd de `a` et `b`).
Donc pour que `iabcuv` ait une solution il faut et il suffit que `c` soit un multiple du pgcd de `a` et `b`. Donc `iabcuv` a toujours une solution si `a` et `b` sont premiers entre eux.

On cherche un entier n qui est un multiple de 2 et aussi un multiple de 3 plus 1.
Donc on a : $n = 2p = 3q + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$.
c'est à dire $2p - 3q = 1$.
On tape :
`iabcuv(2,3,1)`
On obtient :
`[-1,1]`
Donc $n = 2 * (-1 + 3k) = -2 \% 6$.
De plus n est un multiple de 5 plus 2.
Donc on a : $n = 5r + 2 = -2 + 6k$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c'est à dire $6k - 5r = 4$.
On tape :

`iabcuv(6,5,4)`
On obtient :
`[-1,2]`
Donc $n = 6 * (-1 + 5k) - 2 = -8 \% 30$.
De plus n est un multiple de 7 plus 3.
Donc on a : $n = 7j + 3 = -8 + 30k$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c'est à dire $30k - 7j = 11$.
On tape :
`iabcuv(30,7,11)`
On obtient :
`[2,-7]`
Donc $n = 30 * (2 + 7k) - 8 = 52 \% 210$.
De plus n est un multiple de 11 plus 4.
Donc on a : $n = 11m + 4 = 52 + 210k$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c'est à dire $11m - 210k = 48$.
On tape :
`iabcuv(11,210,64)`
On obtient :
`[-72,4]`
Donc $n = 11 * (-72 + 210k) + 4 = -788 \% 2310$.
On tape :
`(-788+k*2310)$ (k=1..4)`
On obtient :
`1522,3832,6142,8452`

Chapitre 5

Matrices en terminale scientifique

5.1 Les matrices de rotation

Étant donné $t \in \mathbb{R}$ on considère la matrice : $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$
Calculer $A(t)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $A(t)^2 - 2\cos(t)A(t) + I$ où I est la matrice identité d'odre 2.
En déduire que $A(t)$ est inversible et que $A(t)^{-1} = A(-t)$.
Calculer $A(t)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
Montrer que dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la matrice $A(t)$ est la matrice de la rotation de centre O et d'angle t.
`Solution avec Xcas.`
On tape :
```
A(t):=[[cos(t),-sin(t)],[sin(t),cos(t)]]
tlin(A(t)*A(t))
```
On obtient :
```
[[cos(2*t),-sin(2*t)],[sin(2*t),cos(2*t)]]
```
On tape :
```
assume(n,integer)
An(t):=[[cos(n*t),-sin(n*t)],[sin(n*t),cos(n*t)]]
tlin(An(t)*A(t))
```
On obtient :
```
[[cos(n*t+t),-sin(n*t+t)],[sin(n*t+t),cos(n*t+t)]]
```
Donc on a montré par récurrence que :
$A(t)^n = A(nt)$.
On tape :
```
tlin(A(t)^2-2*cos(t)*A(t)+idn(2))
```
On obtient :
```
[[0,0],[0,0]]
```
On en déduit que : $A(2\cos(t) * I - A) = I$
On tape :
```
B(t):=normal(2*cos(t)*idn(2)-A(t))
B(t)
```
On obtient :
```
[[cos(t),sin(t)],[-sin(t),cos(t)]]
```
On tape :

```
B(t)-A(-t)
```
On obtient :
```
[[0,0],[0,0]]
```
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A(t)^{-1} = A(-t)$ et $A(t)^{-n} = A(-t)^n = A(-nt)$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $A(t)^n = A(nt)$.
Dans la rotation r de centre O et d'angle t :
le vecteur $\overrightarrow{i}$ se transforme en le vecteur : $r(\overrightarrow{i}) = \cos(t)\overrightarrow{i} + \sin(t)\overrightarrow{j}$
le vecteur $\overrightarrow{j}$ se transforme en le vecteur : $r(\overrightarrow{j}) = -\sin(t)\overrightarrow{i} + \cos(t)\overrightarrow{j}$
Donc :
$r(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}) = xr(\overrightarrow{i})+yr(\overrightarrow{j}) = (x\cos(t)-y\sin(t))\overrightarrow{i}+(x\sin(t)+y\cos(t))\overrightarrow{j}$
c'est à dire :

$$r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On tape :
```
coordonnees(rotation(0,t,x+i*y))
```
On obtient :
```
[cos(t)*x-sin(t)*y,cos(t)*y+x*sin(t)]
```

5.2 Les matrices magiques d'odre 3

5.2.1 Résultat préliminaire

Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
Si tran$(A))$ désigne la matrice transposée de A, montrer que :
$B = 1/2 * (A + \text{tran}(A))$ est une matrice symértrique et
$C = 1/2 * (A - \text{tran}(A))$ est une matrice antisymértrique.
En déduire que toute matrice se décompose de façon unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
On tape :
```
A:=[[a00,a01,a02],[a10,a11,a12],[a20,a21,a22]]
B:=1/2*(A+tran(A));C:=1/2*(A-tran(A))
normal(B-tran(B)),normal(C+tran(C))
```
On obtient :
```
[[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]],[[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]]
```
On tape :
```
normal(A-B-C)
```
On obtient :
```
[[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]]
```
Donc A est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Cette décomposition est unique, en effet :
Si $A = M + N$ avec tran(M)=M et tran(N)=$-N$ alors :
tran(A)=$M - N$ donc
$M = 1/2*(A+\text{tran}(A)) = B$ et $N = 1/2*(A-\text{tran}(A)) = C$ donc $A = B+C$
d'où l'unicité.

5.2.2 Les matrices magiques d'odre 3

Une matrice $A = (a_{j,k})$ d'ordre 3 est une matrice magique de somme s lorsque les 8 sommes :
$\sum_{j=0}^{2} a_{j,k} = s$ pour $k = 0, 1, 2$ (somme de chaque colonne)
$\sum_{k=0}^{2} a_{j,k} = s$ pour $j = 0, 1, 2$ (somme de chaque ligne)
$\sum_{j=0}^{2} a_{j,j} = a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1} = s$ (somme de chaque diagonale).
Déterminer les matrices magiques d'ordre 3 qui sont antisymétriques.
Déterminer les matrices magiques d'ordre 3 qui sont symétriques de somme $s = 0$.
Déterminer une matrice magique d'ordre 3, symétrique, de somme s et la plus simple possible.
Montrer que la différence de 2 matrices symétriques magiques de somme s est une matrices symétriques magiques de somme $s = 0$.
En déduire toutes les matrices magiques d'ordre 3, symétriques de somme s.
Trouver toutes les matrices magiques d'ordre 3 de somme $s = 3$.
Trouver toutes les matrices magiques d'ordre 3 de somme $s = 9$.
Solution avec `Xcas`
Les matrices magiques d'ordre 3 qui sont antisymétriques sont de somme $s = 0$ car la diagonale principale ne contient que des 0.
Soit A une matrice antisymétrique d'ordre 3 et magique de somme $s = 0$.
On tape :

```
A:=[[0,a,b],[-a,0,c],[-b,-c,0]]
linsolve([a+b=0,-a+c=0,b+c=0],[a,b,c])
```

On obtient :

```
[c,-c,c]
```

Donc les matrices magiques A d'ordre 3 qui sont antisymétriques sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -c \\ -c & 0 & c \\ c & -c & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On tape :

```
A:=c*[[0,1,-1],[-1,0,1],[1,-1,0]]
```

Soit S_0 une matrice symétrique d'ordre 3 et magique de somme $s = 0$.
On tape :

```
S0:=[[a,b,c],[b,d,e],[c,e,f]]
linsolve([a+b+c,a+d+f,b+d+e,c+e+f,2c+d],[a,b,c,d,e,f])
```

On obtient :

```
[-f,f,0,0,-f,f]
```

Donc les matrices magiques S_0 d'ordre 3 qui sont symétriques de somme $s = 0$ sont :

$$S_0 = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons une matrice S la plus simple possible qui soit symétrique d'ordre 3 et magique de somme s, par exemple :

```
S:=s/3*[[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]
```

Si B est une matrice symétrique d'ordre 3 et magique de somme s, alors $B - S$ est une matrice symétrique d'ordre 3 et magique de somme $s = 0$.
Donc les matrices magiques B d'ordre 3 qui sont symétriques de somme s sont de

la forme $B := S + S_0$.
On tape :
`B:=s/3*[[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]+f*[[-1,1,0],[1,0,-1],[0,-1,1]]`
Donc les matrices magiques M d'ordre 3 qui sont de somme $s = 3$ (resp $s = 12$) sont $M := A + S + S_0$ et elles dépendent de 2 paramètres c et f.
On tape pour $s = 3$ ($s/3 = 1$) :
`M:=c*[[0,1,-1],[-1,0,1],[1,-1,0]]+f*[[-1,1,0],[1,0,-1],[0,-1,1]]+[[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]`
On obtient :
`[[-f+1,c+f+1,-c+1],[-c+f+1,1,c-f+1],[c+1,-c-f+1,f+1]]`
Par exemple si $f = 1, c = 0$, on obtient :
`[[0,2,1],[2,1,0],[1,0,2]]`.
On tape pour $s = 12$ ($s/3 = 4$) :
`M:=c*[[0,1,-1],[-1,0,1],[1,-1,0]]+f*[[-1,1,0],[1,0,-1],[0,-1,1]]+4*[[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]`
On obtient :
`[[-f+4,c+f+4,-c+4],[-c+f+4,4,c-f+4],[c+4,-c-f+4,f+4]]`
Par exemple si $f = 1, c = 3$, on obtient :
`[[3,8,1],[2,4,6],[7,0,5]]`

Chapitre 6

Dénombrement

6.1 Opérations sur les ensembles finis

La reunion de n ensembles finis est un ensemble fini.
On a :
pour $n = 2$:
$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
pour $n = 3$
$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(C \cap B) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$$
Si les n ensembles finis A_k sont 2 à 2 disjoints on a :
$\text{Card}(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(A_k)$.
Le produit cartésien de n ensembles finis A_k est un ensemble fini.
On a :
$\text{Card}(A_1 \times A_2 ... \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \text{Card}(A_k)$.
Règles pour dénombrer
Quand on a plusieurs choix à réaliser , on fait :
- un produit quand on fait un choix et puis un autre etc..
- une somme quand on fait un choix ou bien un autre etc..

6.2 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Soient deux ensembles E dans F de cardinaux respectifs n et p.
Soit $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
Soit $u(n, p)$ le nombre d'applications de E dans F.
On a :
$u(1, p) = p$ car si $E = a$ et $F = b_1, b_2..b_p$ les applications de E dans F sont définies par : $f_j(a) = b_j)$ avec $1 \leq j \leq p$
On montre par récurrence que $u(n, p) = p \cdot u(n-1, p)$.
En effet :
si $E = a_1, a_2...a_n$ et $E_1 = a_2...a_n$, une application de E dans F est définie par une application de E_1 dans F et par $f(a_1) = b_j$ pour $1 \leq j \leq p$.
Donc $u(p, n) = p^n$

6.3 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini : les arrangements

Soient deux ensembles E dans F de cardinaux respectifs p et n avec $n \geq p$.
Soit $\mathcal{I}(E, F)$ l'ensemble des injections de E dans F.
Soit $v(n, p)$ le nombre injections de E dans F.
On a :
$v(n, 1) = n$ car si $E = a$ et $F = b_1, b_2..b_n$ les injections de E dans F sont définies par : $f_j(a) = b_j)$ avec $1 \leq j \leq n$
On montre par récurrence que $v(p, n) = (n - p + 1) * v(p, n - 1)$.
En effet :
si $E = a_1, a_2...a_p$ et $E_1 = a_2...a_p$, une injection de E dans F est définie par une injection de f de E_1 dans F et par $f(a_1) \in F \setminus f(E_1)$.
Comme $F \setminus f(E_1)$ a pour cardinal $n - (p - 1) = n - p + 1$, on a :
$v(n, p) = (n - p + 1)v(n, p - 1)$.
Donc $v(n, 1) = n, v(n, 2) = n(n - 1), ..., v(n, p) = n(n - 1)...(n - p + 1)$
En utilisant la notation factorielle on a donc : $v(n, p) = \dfrac{n!}{(n - p)!}$

Définition
$v(n, p)$ est le nombre d'arrangements sans répétition de p objets pris parmi n objets ($p \leq n$).
Avec `Xcas` $v(n, p)$ se note `perm(n,p)`.
On tape :
`perm(n,p)`
On obtient : `(n!)/((n-p)!)`
On tape :
`perm(6,3)`
On obtient : `120`

6.4 Nombre de bijections d'un ensemble fini dans un ensemble fini : la factorielle

Soient deux ensembles E dans F de même cardinaux n.
Le nombre de bijections de E dans F est égal au nombre d'injections de E dans F car E et F ont le même nombre déléments.
Le nombre de bijections de E dans F est donc $1 * 2 * .. * n = n!$ Avec `Xcas` $v(n, p)$ se note `perm(n,p)`.
On tape :
`6!`
On obtient : `720`
On tape :
`3!`
On obtient : `6`

6.5 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments : les combinaisons

6.5.1 La définition

Soit un ensemble E de cardinal n ($n \geq 1$) et soit un entier $p \leq n$.
Soit $w(n, p)$ le nombre de parties de E ayant p éléments.
Soit f une injection de $I = [1, p]$ dans E dans $f(I)$ est une partie de E qui a p éléments.
Soit F l'application qui a une injection f de $I = [1, p]$ dans E fait correspondre $f(M)$ i.e. $F(f) = f(M)$.
F est surjective mais n'est pas injective car si :
$F(f_1) = F(f_2)$ cela entraine $f_1(M) = f_2(M)$.
Soit f_1 une injection de $I = [1, p]$ dans E et $F = f_1(M)$. Donc I et F sont de cardinal p.
D'après le paragraphe précédent, le nombre d'injections f de $I = [1, m]$ dans E tel que $f(M) = F$ est $p!$ car ces injections sont des bijection de I dans F. Donc le nombre de parties de E ayant p éléments est égal au nombre d'injection de I dans E divisé par $p!$.
Donc :

$$C_n^p = w(n, p) = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

En mathématiques $w(n, p)$ se note C_n^p On remarquera que la formule est encore valable pour $n = p = 0$ puisque $C_0^0 = w(0, 0) = 1$ **Définition** $C_n^p = w(n, p)$ est le nombre de combinaisons sans répétition de p objets pris parmi n objets ($p \leq n$).
Avec `Xcas` C_n^p se note `comb(n,p)`.
On tape :
`simplify(comb(n,p))`
On obtient : `(n!)/((n-p)!*p!)`
On tape :
`comb(6,3)`
On obtient : `20`

6.5.2 Propriétés

1. $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$ pour $n \geq p \geq 1$
   On a :
   $pC_n^p = p\frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1-(p-1))!(p-1!}$
   Donc :
   $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$
2. $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
   Soit un ensemble E de cardinal n ($n \geq 1$) et soit $a \in E$.
   Parmi les sous-ensembles F de E ayant p éléments ($p \leq nn$), il y a ceux qui contienne a et ceux qui ne contienne pas a.
   Si $a \in F$ alors $G = F \setminus \{a\}$ a $p - 1$ éléments donc il y a C_{n-1}^{p-1} sous-ensembles F de E contenant a et ayant p éléments.
   Si $a \notin F$ alors F est un sous ensemble de $E \setminus \{a\}$ donc il y a C_{n-1}^p sous-ensembles F de E ne contenant pas a et ayant p éléments.

On a donc :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

3. La formule du binôme de Newton
   Montrons par récurrence que :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

   La formule est vraie pour $n = 0, 1, 2$ car :
   pour $n = 0$, on a $(x+y)^0 = 1 = C_0^0 x^0 y^0$
   pour $n = 1$, on a $(x+y)^1 = x + y = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0$
   pour $n = 2$, on a $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = C_2^0 x^0 y^2 + C_2^1 x^1 y^1 + C_2^2 x^2 y^0$
   Supposons la formule vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.
   $P := (x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y) * \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$
   En utilisant la distributivité on a :
   $P = x * \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} + y * \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} =$
   $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k}$
   Posons $j = k + 1$ dans la première somme et $j = k$ dans la deuxième somme, P devient :
   $P = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j+1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n+1-j}$
   Donc :
   $P = x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} C_n^{j+1} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} C_n^j x^j y^{n+1-j}$
   c'est à dire :
   $P = x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} (C_n^{j+1} + C_n^j) x^j y^{n+1-j}$
   Or on a :
   $C_n^{j+1} + C_n^j = C_{n+1}^{j+1}$,
   $x^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0$ et
   $y^{n+1} = C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1}$
   Donc la formule est vraie pour $n+1$:
   $P = \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j x^j y^{n+1-j}$

6.6 Cardinal de $P(E)$ lorsque le cardinal de E est n

On va donner plusieurs démonstrations prouvant que le cardinal de $P(E)$ est 2^n.

6.6.1 Démonstration par récurrence

Montrons par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition :
P_n : Le cardinal de $P(E)$ est 2^n lorsque le cardinal de E est n.
P_0 est vrai car si $E = \emptyset$ alors $P(E) = \{\emptyset\}$ donc le cardinalde $P(E)$ est $2^0 = 1$.
P_1 est vrai car si $E = \{a\}$ alors $P(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$ donc le cardinal de $P(E)$ est $2^1 = 2$
Soit E de cardinal $n+1$, soit $a \in E$ et soit $E_1 = E \setminus \{a\}$.
On a Card($P(E)$)=Card($P(E_1)$)+Card($P\{X \cup \{a\}; X \in P(E_1)\}$) car $E = E_1 \cup \{X \cup \{a\}; X \in P(E_1)\}$ et
$E_1 \cap \{X \cup \{a\}; X \in P(E_1)\} = \emptyset$.

Si P_n est vrai le cardinal de $P(E_1)$ est 2^n.
L'application de F de $P(E_1)$ dans $\{X \cup \{a\}; X \in P(E_1)\}$ définie par : $F(X) = X \cup \{a\}$ est bijective.
Elle est surjective par définition et
elle est injective car si $F(X) = F(Y)$ on a $\{X \cup \{a\} = \{Y \cup \{a\}$ et $\{X \cap \{a\} = \{Y \cap \{a\} = \emptyset$ donc si $x \in X$ alors
$x \in \{Y \cup \{a\}$ et $x \neq a$ donc $x \in Y$ de même
si $x \in Y$ alors $x \in X$ donc $X = Y$.
Donc le cardinal de $\{X \cup \{a\}; X \in P(E_1)\}$ est 2^n
Donc le cardinal de $P(E)$ est $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Donc le cardinal de $P(E)$ est 2^n lorsque le cardinal de E est n.

6.6.2 Démonstration à l'aide de la formule du binôme

On a vu que le cardinal de $\{X \in P(E)\text{Card}(X) = p\}$ est C_n^p.
On a :
$P(E) = \Cap_{p=0..n}\{X \in P(E)\text{Card}(X) = p\}$
Donc :
$\text{Card}(P(E)) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = (1+1)^n = 2^n$

6.6.3 Démonstration à l'aide des fonctions caractéristiques

Définition La fonction caractéristique d'une parte A de E est l'application :
ϕ_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par :
$\phi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et sinon $\phi_A(x) = 0$
Montrons que l'application Φ de $P(E)$ dans l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$ définie par :
$\Phi(A) = \phi_A$ est bijective.
Montrons que Φ est injective.
Supposons que $\Phi(A) = \Phi(B)$ i.e. pour tout $x \in E$ on a $\phi_A(x) = \phi_B(x)$.
si $x \in A$ on a donc $\phi_A(x) = 1 = \phi_B(x)$ donc $x \in B$ et de même si $x \in B$ on a donc $\phi_B(x) = 1 = \phi_A(x)$ donc $x \in A$ et de même donc si $\Phi(A) = \Phi(B)$ alors $A = B$ donc Φ est injective.
Montrons que Φ est surjective.
Soit f une application de E dans $\{0, 1\}$ et soit $C = \{x \in E; f(x) = 1\}$.
On a donc :
si $x \in C$ alors $f(x) = 1$ et
si $x \notin C$ alors $f(x) \neq 1$ i.e $f(x) = 0$ puisque f est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Donc $f = \phi_C = \Phi(C)$ ce qui prouve que Φ est surjective.
Φ est bijective donc le cardinal de $P(E)$ est égal au cardinal des applications de E dans $\{0, 1\}$.
On sait que si E de cardinal n, le cardinal des applications de E dans $\{0, 1\}$ est 2^n.
Donc le cardinal de $P(E)$ est 2^n.

6.7 Exercices

6.7.1 Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

Solution

On a :
$S_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$
Donc :
$S_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$
Avec `Xcas`, on tape :
```
sum(comb(n,k),k=0..n)
```
On obtient :
```
2^n
```

6.7.2 Calculer $A_1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$

Solution

$A_1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$
On a :
$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k$
Donc :
$A_1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$
Avec `Xcas`, on tape :
```
assume(n,integer);sum((-1)^k*comb(n,k),k=0..n)
```
On obtient :
```
0
```

6.7.3 Calculer $S_2 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$

Solution

$S_2 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$
On a :
$S_2 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1}$
$S_2 = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}$
On pose $j = k-1$ et on obtient :
$S_2 = n\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} = n2^{n-1}$
Autre méthode
En dérivant $f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k$, on a :
$f'(x) = n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}$
On a pour $x = 1$:
$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$
Donc :
$S_2 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$
Autre méthode
On remarque qu'en posant $j = n-k$ on a :
$S_2 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = \sum_{j=n}^{0}(n-j)C_n^{n-j} = \sum_{j=n}^{0}(n-j)C_n^j$
Donc :
$S_2 = nS_1 - S_2$ ce qui donne puisque $S_1 = 2^n$:
$S_2 = n2^{n-1}$

Avec `Xcas`, on tape :
`sum(k*comb(n,k),k=0..n)`
On obtient :
`n*2^(-1+n)`

6.7.4 Calculer $A_2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k C_n^k$

Solution
$A_2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k C_n^k$
On a :
$A_2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k C_n^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k C_n^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k n C_{n-1}^{k-1}$
$A_2 = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n-1}^{k-1}$
On pose $j = k-1$ et on obtient :
$A_2 = -n\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j C_{n-1}^{j} = -n(-1+1)^{n-1} = 0$
Donc :
$A_2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k C_n^k = 0$
Avec `Xcas`, on tape :
`assume(n,integer);sum((-1)^k*k*comb(n,k),k=0..n)`
On obtient :
`0`

6.7.5 Calculer $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$

Solution
$S_3 = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{C_n^p}{p+1}$
$\dfrac{C_n^p}{p+1} = \dfrac{n!}{(n-p)!(p+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-(p+1))!(p+1)!(n+1)}$
Donc :
$\dfrac{C_n^p}{p+1} = \dfrac{C_{n+1}^{p+1}}{n+1}$ donc
$S_3 = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{p+1}}{n+1} = \frac{\sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^{p+1} - 1}{n+1} = \frac{2^{n+1} - C_{n+1}^{p+1}}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$
Autre méthode
En intégrant $f(x) = (x+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p$ on a si F est la primitive de f qui s'annule en 0 :
$F(x) = \dfrac{(x+1)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{x^{p+1}}{p+1}$
On a pour $x = 1$:
$F(1) = 2^{n+1}/(n+1) - 1/(n+1) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p/(p+1) = S_3$
Donc :
$S_3 = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$
Avec `Xcas`, on tape :
`sum((n!)/((-(-n+k))!*(k+1)!),k=0..n)`
On obtient :
`2^(1+n)/(1+n)-1/(1+n)`

6.7.6 Calculer $A_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1}$

Solution

$A_3 = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p C_n^p}{p+1}$

$\dfrac{(-1)^p C_n^p}{p+1} = \dfrac{(-1)^p n!}{(n-p)!(p+1)!} = \dfrac{(-1)^p (n+1)!}{(n+1-(p+1))!(p+1)!(n+1)}$

Donc :

$\dfrac{(-1)^p C_n^p}{p+1} = -\dfrac{(-1)^{p+1} C_{n+1}^{p+1}}{n+1}$ donc

$A_3 = -\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{p+1} C_{n+1}^{p+1}}{n+1}$

On pose $k = p+1$ donc puisque :

$-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k C_{n+1}^k = -(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_{n+1}^k - 1) = -(0-1) = 1$

$A_3 = -\dfrac{\sum_{k=1}^{n+1}((-1)^k C_{n+1}^k)}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

Avec `Xcas`, on tape :

```
assume(n,integer);
```

On obtient :

```
sum((-1)^k*(n!)/(((n-k))!*(k+1)!),k=0..n)
```

On obtient :

```
1/(1+n)
```

6.7.7 Calculer $S_4 = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$

Solution

$S_4 = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$

Pour calculer S_4, va utiliser la formule du binôme et l'égalité :

$(1+x)^n(x+1)^n = (1+x)^{2n}$

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$

Cherchons le coefficient de x^n :

Dans $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$, le coefficient de x^n est C_{2n}^n.

Dans $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}$ pour avoir le coefficient de x^n il faut faire la somme des produits x^k par x^{n-k} donc :

$S_4 = C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$

Autre méthode

Considérons deux ensembles disjoints de cardinaux n.

Cherchons le cardinal des parties de $A \cup B$ qui ont pour cardinal n.

Puisque le cardinal $A \cup B$ est $2n$, le nombres de parties de $A \cup B$ de cardinal n est C_{2n}^n.

Ces parties peuvent être formées par k éléments de A et par $n-k$ éléments de B pour $k = 0..n$, il y en a donc :

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} k = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$

D'ou le résultat :

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

On vérifie avec `Xcas`, on tape :
`sum(comb(10,k)^2,k=0..10),comb(20,10)`
On obtient :
`184756,184756`
Avec `Xcas`, on tape :
`sum(comb(14,k)*comb(14,k),k=0..14),comb(28,14)`
On obtient :
`40116600,40116600`

6.7.8 Calculer $A_4 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$

Solution
$A_4 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$
On va considérer 2 cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$ pour $p \in \mathbb{N}$.
Si $n = 2p$ on se reportera au calcul de $A_6 = \sum_{k=0}^{2p}(-1)^k(C_{2p}^k)^2 = (-1)^p C_{2p}^p$
Si $n = 2p+1$, on a $(-1)^j C_{2p+1}^j = -(-1)^{2p+1-j} C_{2p+1}^{2p+1-j}$ donc :
$A_4 = \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k(C_{2p+1}^k)^2 =$
$A_4 = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k(C_{2p+1}^k)^2 + \sum_{k=p+1}^{2p+1}(-1)^k(C_{2p+1}^k)^2$
Posons $j = 2p+1-k$ dans la deuxième somme :
$\sum_{k=p+1}^{2p+1}(-1)^k(C_{2p+1}^k)^2 = \sum_{j=p}^{0}(-1)^{2p+1-j}(C_{2p+1}^{2p+1-j})^2 =$
$A_4 = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k(C_{2p+1}^k)^2 - \sum_{j=p}^{0}(-1)^j(C_{2p+1}^j)^2 = 0.$
Donc :
si $n = 2p+1$, $A_4 = \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k(C_{2p+1}^k)^2 = 0$ et
si $n = 2p$, $A_4 = \sum_{k=0}^{2p}(-1)^k(C_{2p}^k)^2 = (-1)^p C_{2p}^p$.

6.7.9 Calculer $B_4 = \sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2$

Solution
$B_4 = \sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2$
On a en posant $j = n-k$:
$B_4 = \sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2 = \sum_{j=n}^{0}(n-j)(C_n^{n-j})^2 = \sum_{j=n}^{0}(n-j)(C_n^j)^2$
Donc :
$B_4 = n\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 - B_4 = nS_4 - B_4$ ce qui donne :

$$B_4 = \sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2 = \frac{nC_{2n}^n}{2} = \frac{(2n)!}{2(n!)^2}$$

6.7.10 Calculer $D_4 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k(C_n^k)^2$

Solution
$D_4 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k(C_n^k)^2$
Pour calculer D_4, va utiliser la formule du binôme et l'égalité :
$(x^2-1)^{2n} = (x+1)^{2n}(x-1)^{2n} = (x+1)^{2n}(1-x)^{2n}$
On a :
$(x^2-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^{2k}(-1)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^{2k}(-1)^k$
Le coefficient de x^{2n} de cette somme est $(-1)^n C_{2n}^n = (-1)^n(2n)!/(n!)^2$
$(x+1)^{2n}(-1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (x)^{2n-k}(-1)^k$

Cherchons le coefficient de x^{2n} de ce produit :
$\sum_{k=0}^{2n}((-1)^k(C_{2n}^k)^2$
Donc :

$$D_4 = \sum_{k=0}^{2n}((-1)^k(C_{2n}^k)^2 = (-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Avec `Xcas`, on tape :
`sum((-1)^k*comb(20,k)^2,k=0..20),(-1)^(10)*comb(20,10)`
On obtient :
`184756,184756`

6.7.11 $S_5 = \sum_{k=0}^{n}(C_a^k C_b^{n-k})$ pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$

Solution
$S_5 = \sum_{k=0}^{n}(C_a^k C_b^{n-k})$ pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$
Considérons deux ensembles disjoints A et B de cardinaux respectifs a et b.
Cherchons le cardinal des parties de $A \cup B$ qui ont pour cardinal n ($n \leq a+b$).
Puisque le cardinal $A \cup B$ est $a+b$, le nombres de parties de $A \cup B$ de cardinal n est C_{a+b}^n.
Ces parties peuvent être formées par k éléments de A et par $n-k$ éléments de B pour $k = 0..n$: il y en a donc $\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k}$
D'ou le résultat :
$S_5 = \sum_{k=0}^{n}(C_a^k C_b^{n-k}) = C_{a+b}^n$
Autre méthode
Pour calculer S_5, va utiliser la formule du binôme et l'égalité :
$(1+x)^a(x+1)^b = (1+x)^{a+b}$
$\sum_{k=0}^{a} C_a^k x^k \sum_{j=0}^{b} C_b^j x^j = \sum_{k=0}^{a+b} C_{a+b}^k x^k$
Le coefficient de x^n du polynôme $\sum_{k=0}^{a+b} C_{a+b}^k x^k$ est C_{a+b}^n.
Cherchons le coefficient de x^n du polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{a} C_a^k x^k \sum_{j=0}^{b} C_b^j x^j$.
On a :
$P(x) = \sum_{k=0}^{a} \sum_{j=0}^{b} C_a^k C_b^j x^{k+j}$.
Pour cela posons $k+j=n$ i.e on a $k \leq n$ et $j = n-k$.
On a :
$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} x^n$
Donc le coefficient de x^n est :
$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k}$
On a donc :

$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$$

Avec `Xcas`, on tape :
`sum(comb(13,k)*comb(16,10-k),k=0..10),comb(29,10)`
On obtient :
`20030010,20030010`

6.7.12 Calculer $B_5 = \sum_{k=0}^{n} kC_a^k C_b^{n-k}$

Solution
$kC_a^k = aC_{a-1}^{k-1}$ donc
$B_5 = \sum_{k=0}^{n} kC_a^k C_b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC_a^k C_b^{n-k} a$
$B_5 = a\sum_{k=1}^{n} C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} = a\sum_{j=0}^{n-1} C_{a-1}^{j} C_b^{n-1-j}$
D'après le calcul de S_5 on a donc :

$$B_5 = aC_{a+b-1}^{n-1}$$

Avec `Xcas`, on tape :
`sum(k*comb(13,k)*comb(16,10-k),k=0..10),13*comb(28,9)`
On obtient :
`89789700,89789700`

6.7.13 Calculer $S_6 = \sum_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^2$

Solution
$S_6 = \sum_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^2$
On a :
$S_4 = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$
donc

$$S_6 = \sum_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^2 = C_{4n}^{2n}$$

Avec `Xcas`, on tape :
`sum(comb(26,k)^2,k=0..26),comb(52,26)`
On obtient :
`495918532948104,495918532948104`

6.7.14 Calculer $B_6 = \sum_{k=0}^{2n} k(C_{2n}^k)^2$

Solution
$B_6 = \sum_{k=0}^{2n} k(C_{2n}^k)^2)$
On a :
$B_4 = \sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2 = \frac{1}{2}nC_{2n}^n$ donc

$$B_6 = \sum_{k=0}^{2n} k(C_{2n}^k)^2 = nC_{4n}^{2n}$$

Avec `Xcas`, on tape :
`sum(k*comb(10,k)^2,k=0..10),5*comb(20,10)`
On obtient :
`923780,923780`

6.7.15 Calculer $A_6 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2$

Solution
$A_6 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2$
On a :

$P(x) = (x^2-1)^{2n} = (x-1)^{2n}(x+1)^{2n}$
Cherchons le coefficient de x^{2n}.
D'après la formule du binôme le coefficient de x^{2n} dans $(x^2-1)^{2n}$ est $(-1)^n C_{2n}^n$
D'après la formule du binôme on a :
$(x-1)^{2n}(x+1)^{2n} = (-x+1)^{2n}(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k(-1)^k \sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^j x^j = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^k C_{2n}^k C_{2n}^j x^{k+j}$
Si $k+j=2n$ alors $j=2n-k$ et $k=0..2n$ donc le coefficient de x^{2n} est :
$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k C_{2n}^k C_{2n}^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k (C_{2n}^k)^2$
Donc :

$$A_6 = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$$

Avec `Xcas`, on tape :
```
sum((-1)^k*comb(26,k)^2,k=0..26),(-1)^(13)*comb(26,13)
```
On obtient :
```
-10400600,-10400600
```

6.8 Les combinaisons avec répétition

6.8.1 La définition

Définition
Soit un ensemble E de cardinal n ($n \geq 1$) et soit un entier p.
Le nombre d'ensemble ayant p éléments de E, chaque élément pouvant être est appelé combinaison avec répétition de p éléments pris parmi n.

6.8.2 Une démonstration

Soit $c(n,p)$ le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments pris parmi n.
On va montrer que l'on a : $c(n,p) =$`comb(n+p-1,n-1)=comb(n+p-1,p)` à l'aide de l'exercice suivant.
Enoncé
Soient O et A 2 points tels que $OA = p$.
1/ On suppose $p \geq n$. De combien de manières peut-on placer entre O et A (O et A exclus) $n-1$ points d'abscisse entière ?
2/ **Application** Nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + ...x_n = p$:
a/ lorsque les x_i sont des entiers >0 et $p \geq n$.
b/ lorsque les x_i sont des entiers ≥ 0
3/ En déduire la valeur de $c(n,p)$
Solution
1/ Entre O et A (O et A exclus) il y a $p-1$ points.
Donc on peut placer $n-1$ points d'abscisse entière de `comb(p-1,n-1)` manières différentes.
2/ a/ Pour résoudre $x_1 + x_2 + ...x_n = p$ lorsque les x_i sont des entiers >0, on place $n-1$ points $M_1, M_2..M_{n-1}$ d'abscisse entière $m_1, m_2..m_{n-1}$ entre O et A et on pose :

$x_1 = m_1, x_2 = m_2 - m_1, ...x_{n-1} = m_{n-1}m_{n-2}, x_n = p - m_{n-1}$
On a alors $x_1 + x_2 + ...x_n = p$.
Réciproquement à chaque solution $x_1, x_2, ..., x_n$ de $x_1 + x_2 + ...x_n = p$ lorsque les x_i sont des entiers >0, il correspond $n - 1$ points d'abscisse entière entre O et A ce sont :
$M_1, M_2..M_{n-1}$ d'abscisse respective $x_1, x_1 + x_2, ..., \sum_{i=..n-1} x_i$.
Le nombre de solution est donc `comb(p-1,n-1)`.
2/ b/ Pour résoudre $x_1 + x_2 + ...x_n = p$ lorsque les x_i sont des entiers ≥ 0, on se raméne au cas précédent en posant :
$y_i = x_i + 1$ (si x_i est un entier ≥ 0, y_i est un entier >0).
À chaque solution de $x_1 + x_2 + ...x_n = p$ où les x_i sont des entiers ≥ 0 correspond une solution de $y_1 + y_2 + ...y_n = n + p$ où les y_i sont des entiers >0 et on a $n + p \geq n$.
Donc le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + ...x_n = p$ lorsque les x_i sont des entiers ≥ 0 est `comb(n+p-1,n-1)=comb(n+p-1,p)`.
3/ On note $c(n, p)$ le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments pris parmi n.
Soient $a_1, a_2, ...a_n$ les élements de E. Le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments pris parmi n est le nombre d'ensembles de p éléments $\{x_1, .., x_p$ avec $x_k \in E$ (les x_k pouvant être égaux).
À chaque solution de $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ avec $x_i \geq 0$ pour $i = 1..n$ il correspond une combinaison avec répétition de p éléments pris parmi ces n éléments a_i à savoir :
la combinaison qui correspond aux p éléments $x_1, .., x_p$ est :
x_1 fois a_1, x_2 fois a_2,...,x_n fois a_n (il y bien p éléments puisque $x_1, x_2, ...x_n = p$.
Réciproquement à chaque combinaison avec répétition de p éléments pris parmi $a_1, a_2, ...a_n$ il correspond une solution de $x_1, x_2, ...x_n = p$ avec $x_i \geq 0$ pour $i = 1..n$.
Donc $c(n, p)$ =`comb(n+p-1,n-1)=comb(n+p-1,p)`

6.8.3 Autre démonstration

Soient $a_1, a_2, ...a_n$ les n élements de E.
1/ On cherche combien de fois l'élément a_1 figure dans les $c(n, p)$ combinaisons avec répétition de p éléments pris parmi ces n élements a_i ($i = 1..n$).
Dans chaque combinaison il y a p éléments donc en tout il y a :
$p * c(n, p)$ éléments.
Les n éléments figurent le même nombre de fois donc :
l'élément a_1 figure $p * c(n, p)/n$ fois dans les $c(n, p)$ combinaisons
et de même pour tout $i = 1..n$,
l'élément a_i figure $p * c(n, p)/n$ fois dans les $c(n, p)$ combinaisons.
2/ Cherchons une relation entre $p * c(n, p)/n$ et $c(n, p - 1)$.
Parmi les combinaisons à répétition, il y en a :
$c(n - 1, p)$=`comb(n+p-2,p)` qui ne contiennent pas a_1.
Parmi les combinaisons à répétition, il y en a :
$c(n, p - 1)$=`comb(n+p-2,p-1)` qui contiennent a_1 au moins une fois (car on a `comb(n+p-2,p-1)+comb(n+p-2,p)=comb(n+p-1,p)`)
D'après 1/ l'élément a_1 figure $(p - 1) * c(n, p - 1)/n$ fois dans les $c(n, p - 1)$

combinaisons
Donc dans les $c(n,p)$ combinaisons il y a $c(n,p-1)$ combinaisons qui contiennent a_1 au moins une fois.
Cherchons le nombre de fois où apparait a_1 parmi les combinaisons qui contiennent a_1 au moins une fois. Ces combinaisons sont au nombre de $c(n,p-1)$. Si on enlève a_1 de ces combinaisons il reste une combinaison avec répétition de $p-1$ éléments pris parmi ces n élements a_i ($i=1..n$). On sait d'apr'es 1/ que a_1 figure $(p-1)*c(n,p-1))/n$ fois dans les $c(n,p-1)$ combinaisons. Donc l'élément a_1 figure $c(n,p-1)+(p-1)*c(n,p-1)/n$ fois dans les $c(n,p)$ combinaisons.
On a donc la relation :

$$\frac{p*c(n,p)}{n}=c(n,p-1)+\frac{(p-1)*c(n,p-1)}{n}=\frac{(n+p-1)}{n}c(n,p-1)$$

Donc puisque $c(n,1)=n$:

$$c(n,p)=\frac{(n+p-1)}{p}c(n,p-1)=...\frac{(n+p-1)..(n+1)}{p!}c(n,1)=$$

$$\frac{(n+p-1)..(n+1)n}{p!}=\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$$

donc on en déduit que :
$c(n,p)$ =`comb(n+p-1,p)= comb(n+p-1,n-1)`
Remarque
On a $c(n,0)+c(n,1)+...+c(n,p)=c(n+1,p)$
On tape :
`sum(comb(n+k-1,n-1),k=0..p)-comb(n+p,n)`
On obtient :
`0`
Par récurrence sur p on a :
$c(n,0)+c(n,1)=1+n=c(n+1,1)$
si $c(n,0)+c(n,1)+...+c(n,p)=c(n+1,p)$ alors
$c(n,0)+c(n,1)+...+c(n,p)+c(n,p+1)=c(n+1,p)+c(n,p+1)=$
`comb(n+p,p)+comb(n+p,p+1)=comb(n+p+1,p+1)`=$c(n+1,p+1)$
En effet, on a comme proriété de `comb` :
`comb(n,p)=comb(n-1,p)+comb(n-1,p-1)` pour tout n et $p\leq n$ donc
`comb(n+p,p)=comb(n+p-1,p)+comb(n+p-1,p-1)`

6.8.4 Autre démonstration

Soit $E=\{y_1,y_2,..y_n\}$ et soit $\{x_1,x_2,..x_n\}$ des entiers naturels vérifiant $x_1+x_2+..+x_n=p$.
$\{x_1,x_2,..x_n\}$ est une combinaison avec répétitions de p éléments de E à savoir on a choisi x_k éléments y_k pour tout $k=1..n$.
Pour déterminer une telle combinaison, on va cloisonner les tas de valeurs différentes. Soit $\{c_1,c_2,..c_{n-1}\}$ séparant les tas de $y_1,y_2,..y_n$, par exemple si on représente les cloisons par | et les éléments y_k par •, pour $p=5$ et $n=8$ la suite :
• • | | • | • | | | • |
se traduit par le choix $y_1,y_1||y_3|y_4|||y_7$.

Il faut prévoir $p+n-1$ emplacements, car il faut mettre p éléments et $n-1$ cloisons puisqu'il y a n tas à cloisonner. Le nombre de combinaisons avec répétitions de p objets pris parmi n est donc : `comb(p+n-1,n-1)=comb(n+p-1,p)`.

6.8.5 Exercice

Dans une patisserie il y 10 sortes de gateaux.
De combien de manières peut-on en choisir 6 :
a/ de sortes différentes,
b/ de même sorte ou de sortes différentes, c/ de même sorte ou de sortes différentes dans le cas ou il ne reste que 3 gateaux d'une certaine sorte. **Solution**
a/ Il y a `comb(10,6)=210` de choisir 6 gateaux de sortes différentes parmi 10 sortes.
b/ Il y a `comb(15,6)=5005` de choisir 6 gateaux de même sorte ou sortes différentes parmi 10 sortes car ici $n=10$ et $p=6$.
c/ si il ne reste que 3 gateaux de la sorte a_1, il y a `comb(14,6)=3003` manières de prendre 6 gateaux sans la sorte a_1 ($n=9, p=6$ et $n+p-1=14$ i.e 9 sortes et 6 gateaux)
`comb(13,5)=1287` manières de prendre 6 gateaux dont 1 gateau de la sorte a_1,($n=9, p=5$ et $n+p-1=13$)
`comb(12,4)=495` manières de prendre 6 gateaux dont 2 gateaux de la sorte a_1,($n=9, p=4$ et $n+p-1=12$)
`comb(11,3)=165` manières de prendre 6 gateaux dont 3 gateaux de la sorte a_1,($n=9, p=3$ et $n+p-1=11$)
Donc il y a 3003+1287+495+165=4950 manières de prendre 6 gateaux de même sorte ou de sortes différentes dans le cas où il ne reste que 3 gateaux d'une certaine sorte.
Vérifions :
On a `comb(10,2)=45` manières de prendre 6 gateaux dont 4 gateaux de la sorte a_1,($n=9, p=2$)
On a `comb(9,1)=9` manières de prendre 6 gateaux dont 5 gateaux de la sorte a_1,($n=9, p=1$)
On a `comb(9,0)=1` manières de prendre 6 gateaux dont 6 gateaux de la sorte a_1,($n=9, p=0$)
et on a bien : 4950 +55=5005.

6.9 Nombre de surjections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Exercice 1
Soient E un ensemble ayant $n+k$ éléments et F un ensemble ayant n éléments. On cherche le nombre de surjections de E dans F lorsque $k=1,2,3,4,5$.
Application numérique pour $n=5$ et $n=10$ **La solution**

1. $k=1$
   Si f est une surjection de E sur F si et seulement si un seul élément de F admet 2 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent. Il y a `comb(n+1,2)` choix possibles pour les 2 antécédents. Puis, si on

assimile ces 2 antécédents, on est ramené à une bijection d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de n éléments.
Il y a donc `n!*comb(n+1,2)` surjections de E sur F lorsque $k = 1$.

2. $k = 2$
Si f est une surjection de E sur F si et seulement si :
- un seul élément de F admet 3 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent
ou
- deux éléments de F admettent 2 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent.
Puis, si on assimile les éléments ayant même image, on est ramené à une bijection d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de n éléments.
Il y a donc `n!*comb(n+2,3)+n!*comb(n+2,2)*comb(n,2)/2!` surjections de E sur F lorsque $k = 2$.

3. $k = 3$
Si f est une surjection de E sur F si et seulement si :
- un seul élément de F admet 4 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent
ou
- deux éléments de F admettent l'un 3 antécédents et l'autre 2 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent.
ou
- trois éléments de F admettent 2 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent.
Puis, si on assimile les éléments ayant même image, on est ramené à une bijection d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de n éléments.
Il y a donc :
```
n!*(comb(n+3,4)+comb(n+3,3)*comb(n,2)+
comb(n+3,2)*comb(n+1,2)*comb(n-1,2)/3!)
```
surjections de E sur F lorsque $k = 3$.

4. $k = 4$
Si f est une surjection de E sur F si et seulement si :
- un seul élément de F admet 5 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent
ou
- deux éléments de F admettent l'un 4 antécédents et l'autre 2 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent.
ou
- deux éléments de F admettent chacun 3 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent.
ou
- trois éléments de F admettent l'un 3 antécédents et les deux autres 2 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent.
ou
- quatre éléments de F admettent 2 antécédents, les autres éléments de F admettant 1 seul antécédent.
Puis, si on assimile les éléments ayant même image, on est ramené à une

bijection d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de n éléments.
Il y a donc :
`n!*(comb(n+4,5)+comb(n+4,4)*comb(n,2)+comb(n+4,3)*`
`comb(n+1,3)/2!+comb(n+4,3)*comb(n+1,2)*comb(n-1,2)/2!+`
`comb(n+4,2)*comb(n+2,2)*comb(n,2)*comb(n-2,2)/4!)`
surjections de E sur F lorsque $k = 4$.

5. $k = 5$
De même on trouve :
`n!*((comb(n+5,6)+comb(n+5,5)*comb(n,2)+comb(n+5,4)*`
`comb(n+1,3)+comb(n+5,4)*comb(n+1,2)*comb(n-1,2)/2+`
`comb(n+5,3)*comb(n+2,3)*comb(n-1,2)/2+comb(n+5,3)*`
`comb(n+2,2)*comb(n,2)*comb(n-2,2)/6+comb(n+5,2)*`
`comb(n+3,2)*comb(n+1,2)*comb(n-1,2)*comb(n-3,2)/5!)`
surjections de E sur F lorsque $k = 5$.

Application numérique pour $n = 5$ et $n = 10$
Avec `Xcas` on trouve :
pour $n = 5$:
`1800,16800,126000,834120,5103000`
pour $n = 10$:
`199584000,6187104000,142702560000,2731586457600,45950224320000`

Exercice 2
Soient E un ensemble ayant p éléments et F un ensemble ayant q éléments. On cherche le nombre de surjections de E dans F.

1. Calculer $\sum_{A\subset E}(-1)^{Card(A)}$
2. Soient f une application de E dans F et B une partie de $F \setminus f(E)$.
On pose : $S(f) = \sum_{B\subset F\setminus f(E)}(-1)^{Card(B)}$
Montrer que :
$S(f) = 1$ si f est surjective et $S(f) = 0$ si f n'est pas surjective.
3. En déduire le nombre de surjections de E dans F

La solution

1. Si $p = 0$ alors $E = \emptyset$ donc $\sum_{A\subset E}(-1)^{Card(A)} = (-1)^0 = 1$
Si $p \neq 0$ alors il y a `comb(p,k)` sous-ensemble A de E qui ont k éléments A, donc
$\sum_{A\subset E}(-1)^{Card(A)} = \sum_{k=0}^{p} comb(p,k)(-1)^k = (1-1)^p = 0$ d'après la formule du binôme.
2. Si f est surjective $F \setminus f(E) = \emptyset$ donc $S(f) = 1$ d'après ce qui précéde.
Si f n'est pas surjective $F \setminus f(E) \neq \emptyset$ donc $S(f) = 0$ d'après ce qui précéde.

3. Soit $\mathbb{A}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
D'après ce qui précède le nombre de surjections de E dans F est :
$\sum_{f\in\mathbb{A}(E,F)} S(f) = \sum_{f\in\mathbb{A}(E,F)} \sum_{B\subset F\setminus f(E)}(-1)^{Card(B)}$
Puisque $B \subset F \setminus f(E)$ est équivalent à $B \cap f(E) = \emptyset$ donc est équivalent à $f(E) \subset F \setminus B$ donc le nombre de surjections de E dans F est :
$\sum_{B\subset F} \sum_{f\in\mathbb{A}(E,F\setminus B)}(-1)^{Card(B)}=$
$\sum_{B\subset F\ \&\&\ Card(B)=k}(q-k)^p(-1)^k = \sum_{k=0}^{q} comb(q,k)(q-k)^p(-1)^k$

En effet si $Card(B) = k$. Il y a $(q-k)^p$ applications des E dans $F \setminus B$ et il y a $comb(q,k)$ sous-ensemble de F qui contient k éléments.
Donc :

$$S(f) = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k comb(q,k)(q-k)^p$$

Exercice 3
1a/ Montrer que pour tout $j = 1..k$ on a :
`comb(p,j)*comb(p-j,k-j)=comb(p,k)*comb(k,j)`
1b/ En déduire que :

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j comb(p,j) * comb(p-j,k-j) = 0$$

2/ Soit $S(n,p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.
En raisonnant, pour une application f de E dans F, sur le cardinal de $f(E)$, établir :

$$p^n = S(n,p) + \sum_{k=1}^{p-1} comb(p,k) * S(n,p-k)$$

3/ En déduire que :

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k comb(p,k) * (p-k)^n$$

4/ En utilisant $\phi(f) = \{f^{-1}(\{y\}), y \in F\}$ de l'ensemble des surjections de E dans F dans l'ensemble des partitions de E ayant p parties, déterminer le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en p parties ($1 \leq p \leq n$), noté $Pi(n,p)$.

La solution 1a/ On développe les combinaisons ou on tape :
`normal(comb(p,j)*comb(p-j,k-j)-comb(p,k)*comb(k,j))`
On obtient :
`0`
1b/ On remplace les combinaisons à l'aide de $1a/$ et on écrit le développement de $(1-1)^k$ avec la formule du binôme et on obtient :
$0 = (1-1)^k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j comb(k,j)$ donc
$comb(p,k)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j comb(k,j) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j comb(p,k) comb(k,j) =$
$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j comb(p,j) * comb(p-j,k-j)$
2/ Il y a p^n applications de E dans F et si f est une application de E dans F on note k le cardinal de $f(E)$. Pour k fixé f est alors une surjection de E dans $f(E)$ et il a `S(n,k)` surjections
il y a `comb(p,1)*S(n,1)` applications de E dans F qui sont telles que $k = 1$
il y a `comb(p,2)*S(n,2)` applications qui sont telles que $k = 2$
.... il y a `comb(p,k)*S(n,k)` applications qui sont telles que $k = k$
... il y a `comb(p,p)*S(n,p)` applications qui sont telles que $k = p$
d'où la formule :
p^n`=sum( comb(p,k)*S(n,k),k=1..p)=`
`S(n,p)+sum(comb(p,k)*S(n,k),k=1..p-1)`

3/ On va faire une combinaison de lignes qui fera disparaitre les
`S(n,k)` pour k !=p en se servant de 1b/ :
`sum(`$(-1)^i$`comb(p,i)comb(p-i,k-i),i=0..k)=0`
Les coefficients de S(n,p-k) sont si la 1iere ligne est la ligne 0 :
ligne 0 : `comb(p,k),`
ligne 1 : `comb(p-1,k-1)`
ligne 2 : `comb(p-2,k-2)`
...
ligne i : `comb(p-i,k-i),`
....
ligne k : `1`
on multiplie donc
la ligne 0 par 1=$(-1)^0$*`comb(p,0)`
la ligne 1 par -1*`comb(p,1)`
la ligne 2 par $(-1)^2$*`comb(p,2)`
....
la ligne k par $(-1)^k$`comb(p,k)`
...
la ligne p-1 par $(-1)^{p-1}$`comb(p,p-1)`
Puis on somme toutes les lignes et on obtient :
`sum(`$(-1)^k$`comb(p,k)`$(p-k)^n$`,k=0..p-1)=S(n,p)`
4/ Chaque surjection de E dans F donne une partition de E ayant p parties. Mais une partition de E ayant p parties définit $p!$ surjections donc le nombre de partitions de E ayant p éléments est `S(n,p)/p!`
Vérifions
`S(n,2)`=$2^n - 2$ et il y a $2^{n-1} - 1$ partitions de E ayant p parties.

6.10 Exercices

1. Soit $E = \{1, 2, ..n\}$.
   Combien y-a-t-il d'applications p de E dans E qui vérifient $p \circ p = p$?
   Application numérique pour $n = 1..10$
   Si $p \circ p = p$, p est une projection de E dans E.
   On peut avoir : Card($p(E) = k$) pour $k = 1..n$.
   Soit p est une projection de E dans $p(E) = F \subset E$ avec Card($F = k$).
   Puisque $p \circ p = p$ alors si $b \in F$ montrons que l'on a $p(b) = b$
   Soit $b \in F = p(E)$ donc il existe $a \in E$ tel que $p(a) = b$ et donc $p(p(a)) = p(b) = p(a) = b$.
   Donc si $x \in F$ alors $p(x) = x$.
   Il reste donc à définir les images des $n - k$ élements de $E \setminus F$. Soient $x \in E \setminus F$ et $y \in F$ posons :
   $p(x) = y \in F$ on a alors $p(x) = y = p(y) = p(p(x)$.
   Donc une application quelconque p de $E \setminus F$ dans F vérifie $p \circ p = p$.
   Il y a k^{n-k} applications de $E \setminus F$ dans F et `comb(n,k)` façons de choisir F. Il y a donc :
   $\sum_{k=1}^{n} comb(n, k)k^{n-k}$ projections de E dans E.
   Application numérique

Avec `Xcas`, on tape :
`sum(comb(n,k)*k^(n-k),k=1..n)$(n=1..10)`
On obtient :
`1,3,10,41,196,1057,6322,41393,293608,2237921`

2. Soit $E = \{1, 2, ..n\}$.
On dit que l'application f de E dans E est un dérangement de E si :
f est une bijection et si pour tout $x \in E$ on a $f(x) \neq x$.
Trouver le nombre D_n de dérangements de E.
On pourra montrer que :
   (a) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}$ pour $n \leq 2$ si $D_0 = 1$
   (b) $D_n = n!u_n$ avec $u_n - u_{n-1} = -(u_{n-1} - u_{n-2})/n$
   (c) $D_n = n! \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$
   (d) $D_n \simeq n!/e$

Solution

   (a) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}$ pour $n \leq 2$ si $D_0 = 1$
   Si $n = 1$, on a $D_1 = 0$
   Si $n = 2$, on a $D_2 = 1$
   Soient $n > 2$ et f un dérangement de E vérifiant $f(n) = k_0$ donc $k_0 \in \{1, 2, ..n-1\}$.
   Considérons les 2 cas suivants :
   - $f(k_0) = n$ alors la restriction g de f à $G = E \setminus \{k_0, n\}$ est un dérangement de F.
   Le nombre D_n de dérangements de E dans ce cas est donc égale à :
   $(n-1)D_{n-2}$ puisque il a $n-1$ valeurs de k_0 possibles.
   - $f(k_0) \neq n$ alors la restriction h de f à $H = E \setminus \{n\} = G \cup \{k_0\}$ est une application de $H = E \setminus \{n\} = G \cup \{k_0\}$ dans $K = E \setminus \{k_0\} = G \cup \{n\}$ qui vérifie :
   $f(k_0) = h(k_0) \neq n$ et si $k \in H \setminus \{k_0\}$ alors $f(k) = h(k) \neq k$.
   h est donc une bijection de $G \cup \{k_0\}$ dans $G \cup \{n\}$.
   On peut faire correspondre à h, de manière biunivoque, le dérangement d bijection de $G \cup \{k_0\}$ dans $G \cup \{k_0\}$ défini par :
   si $h(k) = n$ alors $d(k) = k_0$ et sinon $d(k) = h(k)$.
   Le nombre D_n de dérangements de E dans ce cas est donc égale à :
   $(n-1)D_{n-1}$ puisque il a $n-1$ valeurs de k_0 possibles.
   Donc on a :
   $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}$ pour $n > 2$
   Puisque $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$ on peut poser $D_2 = 1 = D_0$.
   Donc on a :
   $D_0 = 1$, $D_1 = 0$ et
   $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}$ pour $n \leq 2$
   (b) $D_n = n!u_n$ avec $u_n - u_{n-1} = -(u_{n-1} - u_{n-2})/n$
   Posons $u_n = D_n/n!$.
   On donc :
   $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1/2$,
   $u_n - u_{n-1} = D_n/n! - D_{n-1}/(n-1)! = (D_n - nD_{n-1})/n! =$

$((n-1)D_{n-2} - D_{n-1})/n!$
$((n-1)D_{n-2} - D_{n-1}) = (n-1)(n-2)!!u_{n-2} - (n-1)!u_{n-1} =$
$-(n-1)!(u_{n-1} - u_{n-2})$
Donc $u_n - u_{n-1} = -(u_{n-1} - u_{n-2})/n.$

(c) $D_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$
On a montré que :
$u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et
$u_n - u_{n-1} = -(u_{n-1} - u_{n-2})/n = (u_{n-2} - u_{n-3})/(n(n-1)$
...
$u_n - u_{n-1} = (-1)^k(u_{n-k} - u_{n-k-1})/(n(n-1)...(n-k+1).$
...
$u_n - u_{n-1} = (-1)^{n-1}(u_1 - u_0)/(n(n-1)...2 =$
$(-1)^{n-1}(u_1 - u_0)/n! = (-1)^n/n!.$
Donc :
$u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$
Donc :
$D_n = n!u_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$

(d) $D_n \simeq n!/e$
On sait que :
$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k/k!$ donc $1/e = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k/k!$ et $1/e \simeq \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$
donc
$D_n \simeq \frac{n!}{e}$
Application numérique
On tape :
`(n!*sum((-1)^k/k!,k=0..n))$(n=0..10)`
On obtient :
`1,0,1,2,9,44,265,1854,14833,133496,1334961`
On tape :
`1334961./10!,1./e`
On obtient une valeur approchée de $1/e$ à 10^{-7} prés :
`0.367879464286,0.367879441171`

3. Soit E un ensemble ayant n éléments.
   (a) Quel est le nombre de couples (A, B) d'éléments de $P(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$?
   (b) Quel est le nombre de couples (A, B) d'éléments de $P(E)$ tels que $A \cup B = E$?
   (c) Quel est le nombre de triplets (A, B, C) d'éléments de $P(E)$ tels que $A \cup B \cup C = E$?
   (d) Calculer :
   $\sum_{(A,B)\in p(E^2} Card(A \cap B)$
   (e) Calculer :
   $\sum_{(A,B)\in p(E^2} Card(A \cup B)$
   (f) Vérifier que :
   $\sum_{(A,B)\in p(E^2} Card(A \cup B) = \sum_{(A,B)\in p(E^2}(Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B))$

Solution
Soit E un ensemble ayant n éléments.

(a) Un élément de E peut appartenir à 3 ensembles disjoints :
à A ou à B ou à $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
Donc il y a 3^n couples (A, B) d'éléments de $P(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
Autre raisonement
Si A a p éléments, si $A \cap B = \emptyset$ et si B a k éléments alors $0 \leq k \leq n-p$.
Il y a `comb(n,p)` choix pour A ayant p éléments.
Pour chaque choix de A ayant p éléments, on a :
$\sum_{k=0}^{n-p} \texttt{comb}(\texttt{n}-\texttt{k}, \texttt{k}) = 2^{n-p}$ choix de B.
Donc on a $\sum_{p=0}^{n} (\texttt{comb}(\texttt{n}, \texttt{p}) 2^{n-p}) = (1+2)^n = 3^n$

(b) On a :
$A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap B$ sont disjoints deux à deux et ont pour reunion $A \cup B$ Pour que $A \cup B = E$, on peut fabriquer A et B en mettant chaque élément de E soit :
dans $A \cap \overline{B}$ ou à $\overline{A} \cap B$ ou à $A \cap B$.
Il y a donc 3^n couples (A, B) d'éléments de $P(E)$ tels que $A \cup B = E$.
Autre raisonement
Si A a p éléments et si $A \cup B = E$ alors B a $n - p$ éléments.
Il y a donc `comb(n,p)` A possibles.
Si $A \cup B = E$ alors B est la reunion de $\overline{A}$ et d'une partie quelconque de A. A possède 2^p parties donc il y a :
`sum(comb(n,p)*2^p,p=0..n)=(2+1)^n=3^n` couples (A, B) d'éléments de $P(E)$ tels que $A \cup B = E$.

(c) Pour avoir le nombre de triplets (A, B, C) d'éléments de $P(E)$ tels que $A \cup B \cup C = E$, on remarque qu'il y a 7 ensembles 2 à 2 disjoints donc la reunion est E ce sont :
$A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$.
Il y a donc 7^n triplets (A, B, C) d'éléments de $P(E)$ tels que :
$A \cup B \cup C = E$.

(d) Calculons : $\sum_{(A,B) \in p(E^2)} Card(A \cap B)$
Si $A \cap B$ a k éléments, il y a `comb(n,k)` $A \cap B$ possibles et il y a 3^{n-k} possibilités pour chacun des $n - k$ éléments de E puisque :
$A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cap B$ sont disjoints deux à deux et ont pour reunion E.
Donc $\sum_{(A,B) \in p(E^2)} Card(A \cap B)$=
`sum(k*comb(n,k)*3^(n-k),k=1..n)=`
`sum(n*comb(n-1,k-1)*3^(n-k),k=1..n)=`
`sum(n*comb(n-1,k)*3^(n-k-1),k=0..n-1)=`
$n4^{n-1}$.
Donc $Card(A \cap B)$=$n4^{n-1}$.

(e) Calculons : $\sum_{(A,B) \in p(E^2)} Card(A \cup B)$
Si $A \cup B$ a k éléments, il y a `comb(n,k)` sous-ensemble F de E ayant k éléments et 3^k couples (A, B) d'éléments de $P(F)$ tels que $A \cup B = F$ (d'après la première question.
Donc, $\sum_{(A,B) \in p(E^2)} Card(A \cup B)$=

`sum(k*comb(n,k)*3^k,k=1..n)=`
`sum(n*comb(n-1,k-1)*3^k,k=1..n)=`
`3*sum(n*comb(n-1,k)*3^k,k=0..n-1)=`
$3n4^{n-1}$.
Donc $Card(A \cup B)$=$3n4^{n-1}$

(f) Vérifions :
Pour cela calculons : $\sum_{(A,B)\in p(E^2)} Card(A)$.
Soit A une partie de E ayant k éléments. il y a `comb(n,k)` parties A de E ayant k éléments et il y a 2^n parties B de E donc lorsque A a k éléments, il y `comb(n,k)*2^n` couples A, B d'éléments de $P(E)$.
Donc :
$\sum_{(A,B)\in p(E^2)} Card(A)$=`sum(k*comb(n,k)*2^n,k=1..n)=`
`2^n*sum(n*comb(n-1,k-1),k=1..n)=`
`n*2^n*sum(comb(n-1,k),k=0..n-1)=n*2^(2(n-1))=`
$n2^{2n-1}$
donc :
$\sum_{(A,B)\in p(E^2)}(Card(A) + Card(B)) = 2n2^{2n-1} = n4^n$.
On trouve bien que :
$\sum_{(A,B)\in p(E^2)} Card(A \cup B) = 3n4^{n-1} = n4^n - n4^{n-1} =$
$\sum_{(A,B)\in p(E^2)}(Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B))$

4. Soit n un entier non nul et soit $E = \{1, 2, ..n\}$.
Calculer le nombre de p-uplets strictement croissants $x_1, x_2...x_p$ lorsque $x_k \in E$?
Calculer le nombre de p-uplets croissants $x_1, x_2..x_p$ avec $x_k \in E$?
Solution
On peut choisir dans E, p éléments distincts qu'il suffira d'ordonner par ordre croissant.
Il y a donc :
`comb(n,p)` p-uplets croissants $x_1, x_2...x_p$ lorsque $x_k \in E = \{1, 2, ..n\}$
Considérons l'application f de E^p dans F^p qui a un p-uplet croissant $x_1, x_2...x_p$ de E^p fait correspondre le p-uplet strictement croissant $y_1, y_2..y_p$ de F^p lorsque $F = \{1, 2, ..n + p - 1\}$ définie par :
$y_k = f(x_k) = x_k + k - 1$.
Pour $k = 1..p - 1$, on a :
$x_k \leq x_{k+1}$ alors $y_k = x_k + k - 1 \leq x_{k+1} + k - 1 < x_{k+1} + k = y_{k+1}$ donc le p-uplet $y_1, y_2..y_p$ est strictement croissant et on a $y_1 = x_1$ et $y_p = x_p + p - 1 \leq n + p - 1$ donc pour $k = 1..p$ on a $y_k \in F$.
De plus f est bijective et on a $f^{-1}(y_k) = y_k + 1 - k$.
Donc il y a :
`comb(n+p-1,p)` p-uplets croissants $x_1, x_2...x_p$ lorsque $x_k \in \{1, 2, ..n\}$
On dit que `comb(n+p-1,p)` est le nombre de combinaisons avec répétition de p objets pris parmi n (cf 6.8).

5. On extrait 8 cartes d'un jeu de 32 cartes. Parmi ces 8 cartes, on cherche le nombre de cas vérifiant : il y a exactement 4 cartes de la même couleur (i.e. 4 piques ou 4 tréfles où 4 coeurs ou 4 carreaux).
Solution
Parmi ces 8 cartes il peut y avoir 4 piques ou 4 tréfles où 4 coeurs ou 4 car-

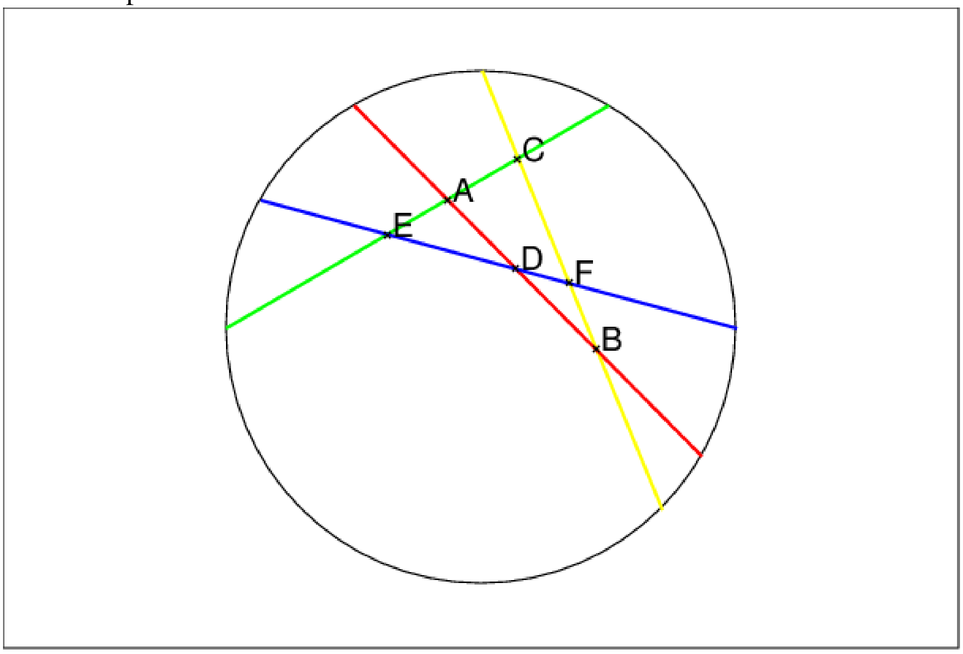
reaux, mais **attention** on peut avoir par exemple 4 piques et 4 tréfles ! Le nombre de cas contenant 4 piques (ou 4 coeurs ou 4 carreaux ou 4 trefles) est :
`comb(8,4)*comb(24,4)` car
`comb(8,4)` est le nombre de façons de choisir 4 piques parmi 8
`comb(24,4)` est le nombre de façons de choisir 4 cartes autres que des piques c'est à dire parmi 32-8=24
Le nombre de cas contenant 4 piques et 4 coeurs (ou 4 piques et 4 carreaux ou 4 piques et 4 trèfles ou 4 coeurs et 4 carreaux ou 4 coeurs et 4 trèfles ou 4 carreaux et 4 trèfles) est :
`comb(8,4)*comb(8,4)`
Ces `comb(4,2)=6` cas sont comptés 2 fois dans `4*comb(8,4)*comb(24,4)`.
Donc le nombre de cas contenant 4 piques (ou 4 coeurs ou 4 carreaux ou 4 trefles) est :
`4*comb(8,4)*comb(24,4)-6*comb(8,4)*comb(8,4)`
On tape :
`4*comb(8,4)*comb(24,4)-6*comb(8,4)*comb(8,4)`
On obtient :
`2945880`
Comment vérifier ?
Soit un paquet de cartes contenant les n plus hautes valeurs d'un jeu de 32 cartes : par exemple pour $n = 2$ on ne garde que les as et les rois et pour $n = 4$ on ne garde que les as,les rois les dames et les valets.
Supposons que l'on extrait $2p$ cartes d'un jeu de $8p$ cartes pour $p = 1..4$.
Parmi ces $2p$ cartes, on cherche le nombre de cas vérifiant : il y a exactement p cartes de la même couleur (i.e. p piques ou p tréfles où p coeurs ou p carreaux).
Avec le raisonnement précédent le résultat est :
`4*comb(2p,p)*comb(6p,p)-6*comb(2p,p)*comb(2p,p)`
On tape pour $p = 1$ (on extrait 2 cartes d'un jeu de 8 cartes) :
`p:=1;4*comb(2p,p)*comb(6p,p)-6*comb(2p,p)*comb(2p,p)`
On obtient :
`24`
Avec un raisonnement direct : il faut trouver le nombre de cas qui correspond à l'extraction de 2 cartes de couleurs différentes parmi 8 cartes.
Il y a `comb(4,2)=6` choix pour les 2 couleurs.
Pour chaque couleur, il y 2 cartes possibles donc la réponse est :
`comb(4,2)*2*2=6*4=24`

6. On extrait 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Parmi ces 13 cartes, on cherche le nombre de cas vérifiant : il y a exactement 2 rois et au moins 2 piques.
Solution
Le nombre de cas vérifiant il y a exactement 2 rois parmi ces 13 cartes est :
`comb(4,2)*comb(48,11)` car
`comb(4,2)` est le nombre de façons de choisir 2 rois parmi 4 et
`comb(48,11)` est le nombre de façons de choisir 13-2=11 cartes parmi les 52-4=48 cartes ne contenant pas les rois.
Le nombre de cas vérifiant il y a exactement 2 rois et pas de pique parmi ces 13 cartes est : `comb(3,2)*comb(36,11)=3*comb(36,11)` car

`comb(36,11)` est le nombre de façons de choisir 13-2=11 cartes parmi les 52-4-12=36 cartes ne contenant pas les rois ni les piques.
Le nombre de cas vérifiant il y a exactement 2 rois dont le roi de pique et pas d'autres piques (i.e. 1 pique en tout parmi ces 13 cartes) est :
`comb(3,1)*comb(36,11)` car
`comb(36,11)` est le nombre de façons de choisir 13-2=11 cartes parmi les 52-4-12=36 cartes ne contenant pas les rois ni les piques.
Le nombre de cas vérifiant il y a exactement 2 rois différents du roi de pique et 1 pique différent du roi de pique est :
`comb(3,2)*12*comb(36,10)=36*comb(36,10)` car
`comb(3,2)` est le nombre de façons de choisir 2 rois parmi 3,
`12` façons de choisir 1 pique différent du roi,
`comb(36,11)` est le nombre de façons de choisir 13-3=10 cartes parmi 52-4-12=36.
Donc le nombre de cas vérifiant : il y a exactement 2 rois et au moins 2 piques est :
```
comb(4,2)*comb(48,11)-3*comb(36,11)-3*comb(36,11)-
3*12*comb(36,10)
```
On tape :
```
comb(4,2)*comb(48,11)-6*comb(36,11))-36*comb(36,10)
```
On obtient :
```
122815643616
```
Comment vérifier ?
Soit un paquet de cartes contenant les n plus hautes valeurs d'un jeu de 52 cartes : par exemple pour $n = 2$ on ne garde que les as et les rois et pour $n = 4$ on ne garde que les as,les rois les dames et les valets.
Supposons que l'on extrait n cartes d'un jeu de $4n$ cartes pour $n = 2..13$.
Parmi ces n cartes, on cherche le nombre de cas vérifiant : il y a exactement 2 rois et au moins 2 piques.
Avec le raisonnement précédent le résultat est :
```
6*comb(4n-4,n-2)-6*comb(3n-3,n-2)-
3*(n-1)*comb(3n-3,n-3)
```
On tape pour $n = 2$ (on extrait 2 cartes d'un jeu de 8 cartes) :
```
n:=2;6*comb(4n-4,n-2)-6*comb(3n-3,n-2)-
3*(n-1)*comb(3n-3,n-3)
```
On obtient :
```
0
```
On tape pour $n = 3$ (on extrait 3 cartes d'un jeu de 12 cartes) :
```
n:=3;6*comb(4n-4,n-2)-6*comb(3n-3,n-2)-
3*(n-1)*comb(3n-3,n-3)
```
On obtient :
```
6
```
Avec un raisonnement direct pour $n = 2$: il faut trouver le nombre de cas qui correspond à l'extraction de 2 cartes parmi 8 cartes qui correspondent à 2 rois et à au moins 2 piques : ce qui est impossible donc la réponse est :
```
0
```
Avec un raisonnement direct pour $n = 3$: il faut trouver le nombre de cas qui correspond à l'extraction de 3 cartes parmi 8 cartes qui correspondent

à 2 rois et à au moins 2 piques.
Parmi les 2 rois il y a forcément le roi de pique et la troisième carte est l'as ou la dame de pique. Pour chaque couleur, il y a `comb(3,1)` choix pour le deuxième roi et `comb(2,1)` choix pour la troisième carte, donc la réponse est :
`comb(3,1)*comb(2,1)=3*2=6`

7. Quel est le nombre maximum de régions délimitées par 2 cordes d'un cercle ?
par 4 cordes ?
et par n cordes ?
Solution
Une corde divise le cercle en 2 régions.
Soient 2 cordes d'un cercle qui se coupent en un point A se trouvant à l'intérieur du cercle.
On définit ainsi 4 régions qui sont des secteurs circulaires de sommet A car la corde rajoutée divise chacune des 2 régions en 2 donc on obtient 2+2=4 régions.
On rajoute maintenant une troisième corde qui coupe les 2 premières en 2 points B et C se trouvant à l'intérieur du cercle et tels que A, B, C soient des points distincts.
On définit ainsi 7 régions qui sont des 3 secteurs circulaires de sommets A, B, C, 3 morceaux de secteurs circulaires delimités par AB, BC, CA et le triangle ABC. En effet la corde rajoutée traverse 3 régions qu'elle coupe en deux donc on obtient 4+3=7 régions.
On rajoute encore une quatrième corde qui coupe les 3 premières en 3 points D, E, F se trouvant à l'intérieur du cercle et tels que A, B, C, D, E, F soient des points distincts.



On définit ainsi 11 régions. En effet la corde rajoutée traverse 4 régions qu'elle coupe en deux donc on obtient 4+7=11 régions.
Soit $R(n)$ le nombre maximum de régions délimitées par n cordes d'un

cercle.
Cherchons une relation de récurrence entre $R(n)$ et $R(n+1)$.
Quand on a n cordes et que l'on rajoute une corde qui coupe ces n cordes en n points distincts situés l'intérieur du cercle : cette corde traverse donc $n+1$ régions puisque n points distincts se trouvant à l'intérieur d'un segment défini $n+1$ segments. Cette corde coupe donc $n+1$ régions en deux régions.
On a donc :
$R(n+1) = R(n) + n + 1$
et $R(1) = 2$
Donc :
$R(n) = 2 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n(n+1)/2 + 1 = (2 + n + n^2)/2($
On vérifie pour $n = 4$ on obtient : $R(4) = (2 + 4 + 16)/2 = 11$
Bien sûr ce résultat est théorique car par exemple, pour $n = 100$ il est difficile de tracer 100 cordes se coupant 2 à 2 en C_n^2 points distincts situés à l'intérieur du cercle.

8. On écrit la suite des nommbres de 1 à 60.
Combien a-t-on écrit de chiffres ? Soit N ce nombre.
Calculer n_k le nombre de chiffres égal à k pour $k = 0, 1..9$ On consitère le nombre formé par ces N chiffres :1234...585960.
On demande de barrer 100 chiffres de façon que le nombre écrit avec les chiffres restant soit le plus grand possible.
Solution
On a 9 nombres ayant 1 seul chiffre et 60-9=51 nombres ayant 2 chiffres donc on a écrit $N = 9 + 2 * 51 = 111$ chiffres.
Ou bien il y a 60 chiffres pour les unités et 60-9=51 chiffres pour les dizaines donc en tout 60+51=111 chiffres.
Parmi les chiffres écrits il y a : $n_0 = n_7 = n_8 = n_9 = 6$ car ils figurent en tant que chiffre pour les unités,
$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 10 + 6 = 16$ car ils figurent 10 fois en tant que chiffre des dizaines et 6 fois en tant que chiffre pour les unités,
$n_6 = 7$ car 6 figurent 1 fois en tant que chiffre des dizaines et 6 fois en tant que chiffre pour les unités.
On vérifie :
4*6+5*16+7=111
Parmi les chiffres écrits, il faut donc en garder 11.
On ne peut pas mettre les six 9 au début car après le dernier 9 il ne reste que 60 soit 2 chiffres ce qui fait un nombre de 8 chiffres.
On va donc mettre au début les cinq premiers 9.
Il reste alors à chosir 6 chiffres parmi les chiffres qui restent et qui sont :
505152535455565757585960.
On choisit de garder les chiffres 785960.
On obtient donc le nombre 99999785960.
On tape :
```
L:=k$(k=1..60):;
L[8],irem(L[18],10),irem(L[28],10),irem(L[38],10),irem(L[48],10),
irem(L[56],10),irem(L[57],10),L[58],L[59]
```
On obtient :

```
9,9,9,9,9,7,8,59,60
```
Le nombre restant est 99999785960.

6.11 Le triangle de Pascal

6.11.1 Un programme du triangle de Pascal

Voici un programme qui affiche les C_j^k pour $j = 0..1$, $k = 0..j$ et qui renvoie les C_n^k pour $k = 0..n$ c'est à dire la $n+1$-ième ligne du triangle de pascal ($n \geq 0$
Ce programme calcule pour chaque j la séquence L des C_j^k pour $k = 0..j$ en utilisant la relation $C_j^k = C_{j-1}^k + C_{j-1}^{k-1}$
qui se traduit par : `L[k]:=L[k]+L[k-1]`
à condition de faire varier k de $j-1$ jusque 1 avec un pas égal à -1, puis de rajouter la valeur de $C_j^j = 1$ en fin de séquence avant de calculer les valeurs de la ligne suivante.
On initialise L à (1,1) qui est la deuxième ligne du triangle de Pascal.

```
combin(n):={
  local L,j,k;
  print("L:1");
  si n==0 alors return 1 fsi;
  L:=1,1;
  print(L);
  pour j de 2 jusque n faire
    pour k de j-1 jusque 1 pas -1 faire
      L[k]:=L[k]+L[k-1];
    fpour;
    L:=L,1;
    print(L);
  fpour;
  return L;
}:;
```

On tape :
`combin(8)`
On obtient écrit en vert :
L :1
L :1,1
L :1,2,1
L :1,3,3,1
L :1,4,6,4,1
L :1,5,10,10,5,1
L :1,6,15,20,15,6,1
L :1,7,21,35,35,21,7,1
L :1,8,28,56,70,56,28,8,1
et comme réponse :
`1,8,28,56,70,56,28,8,1`

6.11.2 Un programme du triangle de Pascal modulo p

Voici un programme qui affiche les C_j^k modulo p pour $j = 0..1$, $k = 0..j$ et qui renvoie les C_n^k modulo p pour $k = 0..n$ c'est à dire la $n+1$-ième ligne modulo p du triangle de pascal ($n \geq 0$).
Ce programme calcule à chaque étape la séquence L des C_j^k modulo p pour $k = 0..j$ en utilisant la relation :
$C_j^k \bmod p = (C_{j-1}^k + C_{j-1}^{k-1}) \bmod p$
qui se traduit par :
`L[k]:=irem(L[k]+L[k-1],p)`
On utilise `irem` plutôt que `mod` pour pouvoir par la suite utiliser les valeurs `irem`(C_j^k, p) comme la couleur du point de coordonnées $k, n-j$

```
combinmod(n,p):={
  local L,j,k;
  print("L:1");
  si n==0 alors return 1 fsi;
  L:=1,1;
  print(L);
  pour j de 2 jusque n faire
    pour k de j-1 jusque 1 pas -1 faire
      L[k]:=irem(L[k]+L[k-1],p);
    fpour;
    L:=L,1;
    print(L);
  fpour;
  return L;
}:;
```

On tape :
`combinmod(8,2)`
On obtient écrit en vert :
L :1
L :1,1
L :1,0,1
L :1,1,1,1
L :1,0,0,0,1
L :1,1,0,0,1,1
L :1,0,1,0,1,0,1
L :1,1,1,1,1,1,1,1
L :1,0,0,0,0,0,0,0,1
et comme réponse :
`1,0,0,0,0,0,0,0,1`

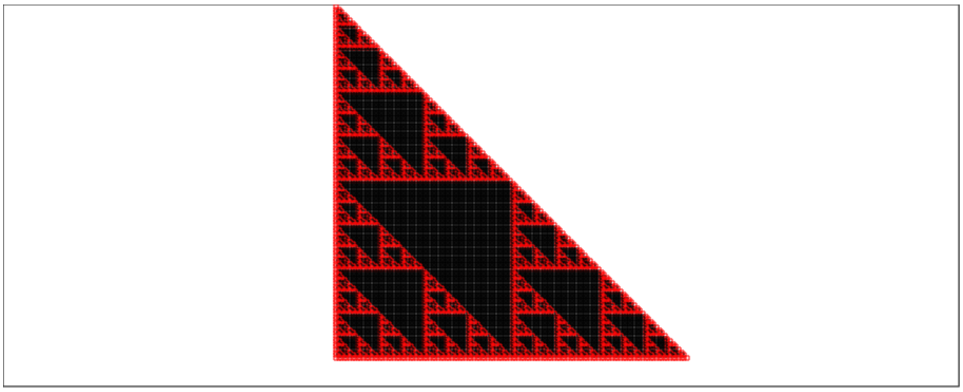
6.11.3 Un programme affichant les points (k, j) si $C_j^k = 0 \text{mod}, p)$

Voici un programme qui affiche les les points (k, j) si $C_j^k = 0 \text{mod}, p)$ pour $j = 0..1$, $k = 0..j$.

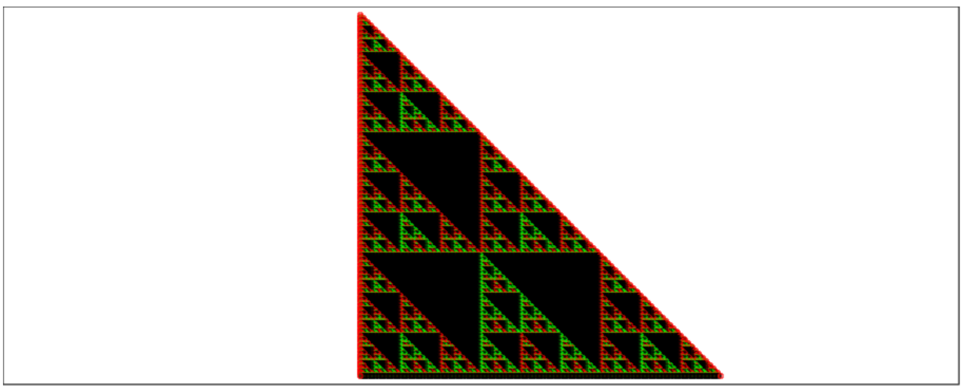
```
combinmodpt(n,p):={
```

```
  local L,P,j,k;
  P:=point(0,n,affichage=point_carre+1);
  L:=1,1;
  P:=P,point(0,n-1,affichage=point_carre+1);
  P:=P+point(1,n-1,affichage=point_carre+1);
  pour j de 2 jusque n faire
    pour k de j-1 jusque 1 pas -1 faire
      L[k]:=irem(L[k]+L[k-1],p);
      P:=P,point(k,n-j,affichage=point_carre+L[k]);
    fpour;
    L:=L,1;
    P:=P,point(0,n-j,affichage=point_carre+1);
    P:=P,point(j,n-j,affichage=point_carre+1);
  fpfpour;
return P;
}:;
```

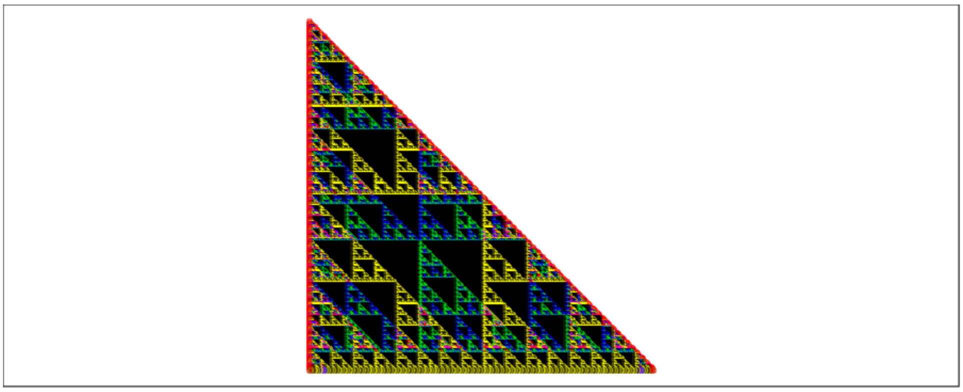
On tape :
`combinmodpt0(127,2)`
On obtient :



On tape :
`combinmodpt(242,3)`
On obtient :



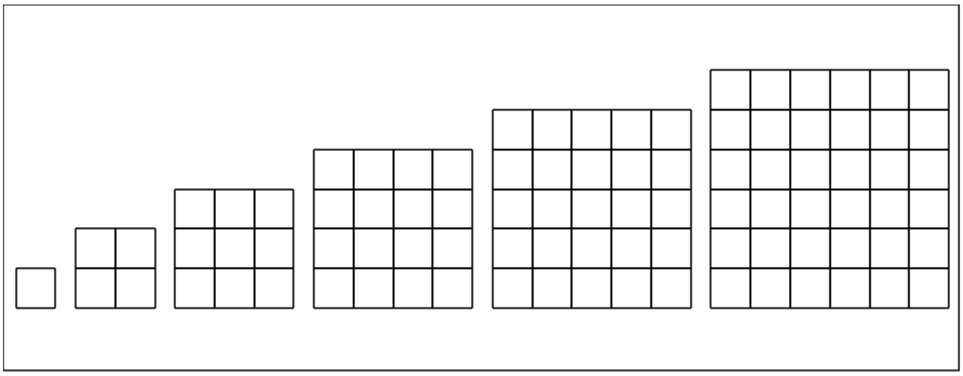
On tape :
`combinmodpt(254,6)`
On obtient :



6.12 Combien de carrés et de rectangles ?

Soit un carré $ABMN$ de côté de longueur n.
On forme des carrés de côté 1, en divisant chacun des côtés de $ABMN$ en n parties égales.

Voici les figures pour $n = 1..6$



1. Calculer en fonction de n le nombre de points d'intersection sur le dessin obtenu à partir de $ABMN$.
2. Écrire un programme (itératif ou récursif) de variables `a` et `n` qui trace un carré direct $ABMN$ (A d'affixe `a`, $AB = n$ et AB parallèle à l'axe Ox) et ses n^2 petits carrés de côté de longueur 1.
3. Calculer $R(n)$ le nombre total de rectangles obtenus dans la figure ainsi tracée (un carré étant un rectangle particulier).

Une solution

1. Sur chaque segment horizontal il y a $n+1$ points ($x = 0..n$) et il y a $n+1$ lignes horizontales ($y = 0..n$). Il y a donc $n+1)^2$ points sur le dessin obtenu à partir de $ABMN$.
2. Voici une version itérative :

```
nbcarre(a,n):={
  local  L,j,k;
  L:=NULL;
```

```
  pour j de 0 jusque n-1 faire
      pour k de 0 jusque n-1 faire
      L:=L,carre(a+k,a+k+1);
    fpour;
  a:=a+i;
fpour;
  return L;
}:;
```

Voici une version récursive :

```
nbcarrer(a,n,p):={
  local  L,j,k;
  L:=NULL;
  si p>=1 alors
  pour j de 0 jusque n faire L:=L,carre(a+j,a+j+1);
  fpour;
  L:=L,nbcarrer(a+i,n,p-1);
  fsi;
  return L;
}:;
```

3. Première méthode : on fait une récurrence
   On a :
   $R(1) = 1$
   $R(2) = 1 + 4 + 4 = 1 + 8 = 9$ (1 carré de côté 2, 4 carrés de côté 1, 4 rectangles de côtés 1 et 2.
   Quand on passe du carré $[0, n] \times [0, n]$ au carré $[0, n + 1] \times [0, n + 1]$, on ajoute $2n + 3$ points dans le quadrillage qui ont comme affixes :
   $(n+1)i, 1+(n+1)i, ..n+(n+1)i, (n+1), (n+1)+i, (n+1)+2i..n+i(n+1), n+1+i(n+1)$ $(n+1+n+2 = 2n+3)$.
   Pour chacun de ces points N_k, on définit un rectangle par N_k et son sommet opposé situé sur la diagonale de pente négative.
   On va donc compter le nombre de points opposés à N_k Il y a :
   $C^1_{(n+1)^2} = (n + 1)^2$ rectangles qui ont pour sommet $(n + 1)i$ ($(n + 1)^2$ est le nombre de points définis par le rectangle $[1, n + 1] \times [0, n]$)
   $C^1_{n(n+1)} = n(n+1)$ rectangles qui ont pour sommet $1+(n+1)i$ ($n(n+1)$ est le nombre de points définis par le rectangle $[2, n + 1] \times [0, n]$)
   $C^1_{(n-1)(n+1)} = (n-1)(n+1)$ rectangles qui ont pour sommet $2+(n+1)i$ ($(n - 1)(n + 1$ est le nombre de points définis par le carré ($(n + 1)$ est le nombre de points définis par le rectangle $[3, n + 1] \times [0, n]$)
   ....
   $C^1_{n+1} = (n + 1)$ rectangles qui ont pour sommet $n + (n + 1)i$ ($(n + 1)$ est le nombre de points définis sur le segment $[n + 1, n + 1 + i * n]$)

   Il y a :
   $C^1_{(n+1)n} = (n + 1)n$ rectangles qui ont pour sommet $n + 1$ ($n(n + 1)$ est le nombre de points définis par le rectangle $[0, n] \times [1, n]$).
   $C^1_{(n+1)(n-1)} = (n + 1)(n - 1)$ rectangles qui ont pour sommet $(n + 1 + i)$

$((n+1)(n-1)$ est le nombre de points définis par le rectangle $[0,n]\times[2,n])$.
$C^1_{(n+1)(n-2)} = (n+1)(n-2)$ rectangles qui ont pour sommet $(n+1+2*i)$
$((n+1)(n-2)$ est le nombre de points définis par le rectangle $[0,n]\times[3,n])$.
...
$C^1_{(n+1)}$ rectangles qui ont pour sommet $(n+1+(n-1)i$ $((n+1)$ est le nombre de points définis par le segment $[i(n-1), n+i(n-1)])$.
Donc quand on passe du carré $[0,n]\times[0,n]$ au carré $[0,n+1]\times[0,n+1]$, on obtient :
$(n+1)(\sum_{j=1}^{n+1} j + \sum_{j=1}^{n} j) = (n+1)^2(n+2+n)/2 = (n+1)^3$
car $\sum_{j=1}^{n+1} j = (n+2)(n+1)/2$ et $\sum_{j=1}^{n} j = (n)(n+1)/2$
On a donc $R(n+1) = R(n) + (n+1)^3$.
Donc puisque $R(1) = 1$ on a :

$$R(n) = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

6.12.1 Deuxième méthode

On cherche le nombre de rectangles dont le côté parallèle à Oy est de longueur p ($p = 1..n+1$).
Pour :

— $p = 1$
On a n lignes et pour chaque ligne on a
$1+2+..n = n(n+1)/2$ rectangles de dimension $1\times n, .., 1\times 1$ ce qui fait $n^2(n+1)/2$

— $p = 2$
On a $n-1$ lignes et pour chaque ligne on a
$1+2+..n = n(n+1)/2$ rectangles de dimension $2\times n, .., 2\times 1$ ce qui fait $(n-1)n(n+1)/2$

— $p = 3$
On a $n-2$ lignes et pour chaque ligne on a
$1+2+..n = n(n+1)/2$ rectangles de dimension $2\times n, .., 2\times 1$ ce qui fait $(n-2)n(n+1)/2$

— ...

— $p = n$
On a 1 ligne et pour cette ligne on a
$1+2+..n = n(n+1)/2$ rectangles de dimension $n\times n, .., n\times 1$ ce qui fait $n(n+1)/2$

Donc le nombre total de rectangles est :

$$R(n) = \frac{n(n+1)}{2}(n+(n-1)+...1) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$$

6.12.2 Troisième méthode : avec les combinaisons

On peut définir un carré ou un rectangle par 2 sommets opposés Si le carré est de côtés n, il comporte $(n+1)^2$ points.
On choisit 2 points.

Soit P_n le nombre de choix possibles.
Il y a $P_n = C^2_{(n+1)^2} = (n+1)^2(n^2+2n)/2 = n(n+1)^2(n+2)/2$ choix
Soit A_n le nombre de choix de couples situés sur la même verticale ou la même horizontale.
Il y a $n+1$ horizontales et $n+1$ verticales.
Sur chacune de ces droites il y a $n+1$ points il a donc $2n+2$ façons de choisir une droite puis C^2_{n+1} façons de choisir 2 points sur cette droite donc $A_n = (2n+2)C^2_{n+1} = n(n+1)^2$.
Il faut remarquer que le choix de 2 points non situés sur la même verticale ni sur la même horizontale peut définir le quadrilatère $ABCD$ avec le choix de A et C ou avec le choix de B et D donc le même quadrilatère peut être défini par 2 couples de points différents :
il y a donc $(P_n - A_n)/2$ carrés ou un rectangles.
On a :
$(P_n - A_n)/2 = n(n+1)^2(n+2)/4 - n(n+1)^2/2 = n(n+1)^2(n+2-2)/4 = (n+1)^2n^2/4$ Donc le nombre de carrés et de rectangles est :

$$R(n) = \frac{(n+1)^2n^2}{4}$$

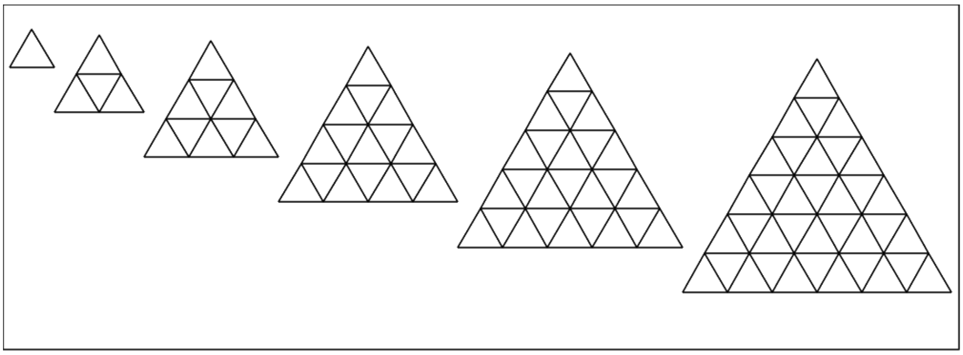
6.12.3 Quatrième méthode : comment ne pas y avoir pensé plus tôt !

Soit un rectangle ou un carré dont les cotés sont parallèles aux axes Ox et Oy. Il suffit de remarquer que les projections de ses sommets sur Ox et sur Oy définissent 2 points distincts sur Ox et 2 points distincts sur Oy.
Réciproquement 2 points distincts sur Ox et 2 points distincts sur Oy définissent un rectangle ou un carré dont les cotés sont parallèles aux axes Ox et Oy.
Dans le carré de côté de longueur n, la quadrillage définit $n+1$ points sur l'axe Ox et $n+1$ points sur l'axe Oy.
Pour définir un rectangle ou un carré dont les cotés sont sur le quadrillage il faut et il suffit de choisir 2 points parmi les $n+1$ points de l'axe Ox et de choisir 2 points parmi les $n+1$ points de l'axe Oy.
Donc le nombre de carrés et de rectangles est :

$$R(n) = (C^2_n)^2 = \frac{(n+1)^2n^2}{4}$$

6.13 Combien de triangles ?

Soit un triangle équilatèral ABM de côté de longueur n.
On forme des triangles équilatèraux de côté de longueur 1, en divisant chacun de ses côtés en n parties égales.
Voici les figures pour $n = 1..6$:



1. Soit $N(n)$ le nombre de triangles équilatèraux de côté de longueur 1. Calculer $N(n)$.
2. Écrire un programme itératif de variables a et n qui trace un triangle équilatèral direct ABM (A d'affixe a, $AB = n$ et AB parallèle à l'axe Ox) et ses $N(n)$ petits triangles de côté de longueur 1.
3. Écrire un programme récursif de variables a et n qui trace un triangle équilatèral direct ABM (A d'affixe a, $AB = n$ et AB parallèle à l'axe des x) et ses $N(n)$ petits triangles de côté de longueur 1.
4. Calculer $T(n)$ le nombre total de triangles obtenus dans la figure ainsi tracée.

Une solution

1. On a :
   $N(1) = 1$,
   $N(2) = 1 + 3 = 4$ $N(3) = N(2) + 5 = 9$ $N(4) = N(3) + 7 = 16$ On va faire un raisonnement par récurrence et montrer que $N(n) = n^2$.
   La formule est vraie pour $n = 1$.
   Si elle est vraie pour n i.e. $N(n) = n^2$ est-elle vraie pour $n + 1$? Pour passer de n à $n + 1$ il faut rajouter un trapèze $ABCD$ isocèle de bases $AB = n + 1$ et $CD = n$.
   Ce trapèze a $n + 1$ triangles de côté 1 et avec un côté porté par AB et n triangles de côté 1 et avec un côté porté par CD.
   Pour passer de n à $n+1$, on rajoute donc $2n+1$ triangles de côté de longueur 1. On a donc $N(n+1) = N(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ Donc la formule est vraie pour $n + 1$ Donc $N(n) = n^2$
2. On va faire un programme itératif nbtri de variables a (affixe de A) et n qui va consister à faire 2 boucles imbriquées.
   À chaque étape j on va tracer les triangles de côté 1 et de bases parallèle à AB : si j va de 0 à n-1 ces triangles sont au nombre de n-j. Pour les tracer on utilise on fait varier k de 0 à n-j-1, puis on cacule la nouvelle valeur de a qui est a+1/2+i*sqrt(3)/2.

```
nbtri(a,n):={
 local  L,j,k;
 L:=NULL;
 pour j de 0 jusque n-1 faire
   pour k de 0 jusque n-j-1 faire
      L:=L,triangle_equilateral(a+k,a+k+1);
```

```
    fpour;
  a:=a+1/2+i*sqrt(3)/2;
  fpour;
  return L;
}:;
```

3. On va faire un programme récursif `nbtrir` de variables `a` (affixe de A) et `n` qui va consister à dire que :
   `nbtrir(a,n)` c'est le dessin des n triangles côté de longueur 1 et de bases portée par AB suivi du dessin de `nbtrir(a+1/2+i*sqrt(3)/2,n-1)`.

```
nbtrir(a,n):={
local  L,j;
  L:=NULL;
  si n>=1 alors
  pour j de 0 jusque n-1 faire L:=L,triangle_equilateral(a+j,a+j
  fpour;
  L:=L,nbtrir(a+1/2+i*sqrt(3)/2,n-1);
  fsi;
  return L;
}:;
```

4. pour $n = 1$ on a 1 triangle,
   pour $n = 2$ on a 4+1=5 triangles (4 de côté 1 et 1 de côté 2),
   pour $n = 3$ on a 9+(1+2)+1=13 triangles (9 de côté 1, (1+2) de côté 2 et 1 de côté 3),
   pour $n = 4$ on a 16+(1+2+3)+(1+2)+1+((1))=27 triangles (on voit apparaitre un triangle de côté 2 qui pointe vers le bas).
   pour $n = 5$ on a 25+(1+2+3+4)+(1+2+3)+(1+2)+1+((1+2))=48 triangles,
   pour $n = 6$ on a 36+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4)+(1+2+3)+(1+2)+1+((1+2+3)+1)=78 triangles,
   pour $n = 7$ on a 49+(1+2+3+4+5+6)+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4)+(1+2+3)+(1+2)+1+((1+2+3+4)
   triangles,
   pour $n = 8$ on a 64+(1+2+3+4+5+6+7)+(1+2+3+4+5+6)+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4)+(1+2+3)+(1
   triangles,
   Soit A_n le nombre de triangles de côtés de longueur strictement plus grande que 1 qui ont la tête en bas.
   On a : $A_1 = A_2 = A_3 = 0$
   $A_4 = 1$
   $A_5 = 1 + 2 = 3$
   $A_6 = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$
   $A_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 1 + 2 = 13$
   $A_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 1 + 2 + 3 + 1 = 22$
   De façon générale si on note $S_k = \sum_{j=1}^{k} j = k(k+1)/2$, on a :

   — si $n = 2p$
     $A_n = S_{n-3} + S_{n-5} + ... + 1 = \sum_{k=1}^{p-1} S_{2k-1} =$
     $(\sum_{k=1}^{p-1} k^2 + \sum_{k=1}^{p-1} k)/2 = p(p-1)(4p-5)/6 = n(n-2)(2n-5)/24$

— si $n = 2p + 1$
$A_n = S_{n-3}+S_{n-5}+...+S_2 = S_{2p-2}+S_{2p-4}+...+S_2 = \sum_{k=1}^{p-1} S_{2k} = 2\sum_{k=1}^{p-1} k^2+\sum_{k=1}^{p-1} k = p(p-1)(4p+1)/6 = (n-1)(n-3)(2n-1)/24$

Soit B_n le nombre de triangles de côtés de longueur 1 et de côtés strictement plus grande que 1 qui ont la tête en haut.
On a :
n^2 triangles de côtés 1.
$1 + 2 + ..(n - 1)$ triangles de côtés 2.
$1 + 2 + ..(n - 2)$ triangles de côtés 3.
...
1 triangle de côtés n Donc :
$B_n = n^2 + S_{n-1} + S_{n-2} + .. + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2 + k)/2 =$
$B_n = n^2 + n(n - 1)(n + 1)/6.$
D'où le résultat :

— si $n = 2p$
Le nombre de triangle est :
$A_n + B_n = n(n - 2)(2n - 5)/24 + n^2 + n(n - 1)(n + 1)/6 = n * (2 + n) * (1 + 2 * n)/8$ On tape :
`factor(n*(n-2)*(2n-5)/24+n^2+n*(n-1)*(n+1)/6)`
On obtient :
`n*(2+n)*(1+2*n)/8`

— si $n = 2p + 1$
Le nombre de triangles est :
$A_n + B_n = (n - 1)(n - 3)(2n - 1)/24 + n^2 + n(n - 1)(n + 1)/6 = n * (2 + n) * (1 + 2 * n)/8 - 1/8$

On tape :
`normal((n-1)*(n-3)*(2n-1)/24+n^2+n*(n-1)*(n+1)/6)`
On obtient :
`-1/8+1/4*n+5/8*n^2+1/4*n^3`
On tape :
`-1/8+factor(1/4*n+5/8*n^2+1/4*n^3)`
On obtient :
`-1/8+n*(2+n)*(1+2*n)/8`
Donc :

$$T(2 * p) = \frac{2p(2p + 2)(4p + 1)}{8}$$

$$T(2 * p + 1) = \frac{(2p + 1)(2p + 3)(4p + 3) - 1}{8}$$

On vérifie, on tape :
`n:=3;-1/8+n*(2+n)*(1+2*n)/8`
On obtient : `(3,13)` On tape :
`n:=4;n*(2+n)*(1+2*n)/8`
On obtient : `(4,27)` On tape :
`n:=5;-1/8+n*(2+n)*(1+2*n)/8`
On obtient : `(5,48)` On tape :
`n:=6;n*(2+n)*(1+2*n)/8`

On obtient : `(6,78)` On tape :
`n:=7;-1/8+n*(2+n)*(1+2*n)/8`
On obtient : `(7,118)` On tape :
`n:=8;n*(2+n)*(1+2*n)/8`
On obtient : `(8,170)`

6.14 Exercice : nbre de carrés d'un quadrillage traversés par un segment

Soient 2 entiers m et n.
Un rectangle de côtés mesurant m et n unités est subdivisés en $m * n$ carrés de côtés mesurant 1 unité.
Quel est le nombre de carrés traversés par une diagonale du rectangle ? **Solution**
On peut faire des essais on tape par exemple :

```
m:=21;n:=7
papier_quadrille(1,pi/2,1,x=0..m,y=0..n)
A:=point(0)
C:=point(m,n) segment(A,C)
```

On compte le nombre de carrés traversés par la diagonale du rectangle On peut supposer $m \geq n$.
Puis on modifie les valeurs de m et n en :
`m:=22;n:=7`
On compte etc...
On remarque que si `d:=gcd(m,n)` et si $a = m/d$ et $b = n/d$ alors la diagonale du rectangle passe par les points :
(a, b),$(2a, 2b)$,...$(d * a, d * b) = (m, n)$.
On peut donc supposer dans un premier tempps que m et n sont premiers entre eux. Pour aller de A à C on doit traverser $m - 1$ lignes verticales et $n - 1$ lignes horizontales.
Chaque fois qu'on traverse une de ces lignes on passe d'un carré a un autre.
En partant de A on traverse un premier carré, puis on traverse une des lignes (verticales ou horizontales) on est donc dans un 2ième carré etc...
donc en tout on traverse : $1 + (m - 1) + (n-) = m + n - 1$ carrés.
Si m et n ne sont pas premier entre eux le nombres de carrés traversés sera donc multiplié par d.
Donc le résultat est $pgcd(m, n) * (m + n - 1)$ (formule que l'on peut vérifier sur les essais du début !)

6.15 Exercice de raisonnement

Une réception réunit 13 couples. En arrivant chacun serre la main à un certain nombre de personnes mais personne ne serre la main de son conjoint.
Pendant la récéption une dame demande à chacune des 25 personnes présentes le nombre de mains qu'elle a serrées et elle obtient des résultats tous différents.
Donnez la liste des résultats qu'elle a obtenu.
Combien de mains cette dame a-t-elle serrées et combien de mains le mari de cette dame a-t-il serrées ?

Prolongement Avec n couples.
Solution
Le nombre maximum de mains qur l'on peut serrées est 2*13-2=24 car chaque personne peut serrer la main au 12 couples ce qui fait 24.
Comme les 25 personnes donnent des résultats différents, la liste des résultats est donc [0,1,...24].

Regardons tout d'abord ce qui se passe avec 2 couples : (a_1, b_1) et (a_2, b_2).
Notons :
n_1, m_1, n_2, m_2 le nombre de mains serrées respectivement par a_1, b_1, a_2, b_2.
Si c'est a_2 qui interroge elle obtient comme résultat : (0,1,2).
Qui a serré la main à 2 personnes ?
Ce ne peut pas être b_2 car alors on aurait $n_1 \geq 1, m_1 \geq 1, n_2 =?, m_2 = 2$.
c'est donc a_1 ou b_1.
Si $n_1 = 2$ cela veut dire que $n_2 \geq 1$ et $m_2 \geq 1$.
Comme la réponse est (0,1,2) c'est que $m_2 = 1$ et donc que $m_1 = 0$
donc a_1 a serré les mains de a_2 et b_2, donc a_2 n'a serré la main que de a_1 et b_2 n'a serré la main que de a_1 donc $n_2 = m_2 = 1$.
Si $m_1 = 2$ cela veut dire que $n_2 \geq 1$ et $m_2 \geq 1$.
Comme la réponse est (0,1,2) c'est que $m_2 = 1$ et que $n_1 = 0$
donc b_1 a serré les mains de a_2 et b_2, donc $n_2 = m_2 = 1$.
La réponse :
La dame et le mari de cette dame ont serré le même nombre de mains à savoir la main d'une seule et même personne.

Regardons encore ce qui se passe avec 3 couples : (a_1, b_1) (a_2, b_2) et (a_3, b_3).
Notons $n_1, m_1, n_2, m_2, n_3, m_3$ le nombre de mains serrées respectivement par : $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$.
Supposons que c'est a_3 qui interroge elle obtient comme résultat : [0,1,2,3,4].
Qui a serré la main à 4 personnes ?
Ce ne peut pas être b_3 car alors on aurait :
$n_1 \geq 1, m_1 \geq 1, n_2 \geq 1, m_2 \geq 1, n_3 =?, m_3 = 4$.
c'est donc par exemple a_1 i.e. $n_1 = 4$ donc
$n_1 = 4, m_1 =?, n_2 \geq 1, m_2 \geq 1, n_3 \geq 1, m_3 \geq 1$.
Comme la réponse est (0,1,2,3,4) c'est que $m_1 = 0$.
Donc si $n_1 = 4$ alors $m_1 = 0$.
Qui a serré la main à 3 personnes ?
Ce ne peut pas être b_3 car alors on aurait :
$n_1 = 4, m_1 = 0, n_2 \geq 2, m_2 \geq 2, n_3 \geq 1, m_3 = 3$.
Comme la réponse est (0,1,2,3,4) c'est que $n_2 = 3$ ou $m_2 = 3$.
Si $n_2 = 3$ c'est qu'il serre la main à a_1, a_3, b_3 donc
$n_1 = 4, m_1 = 0, n_2 = 3, m_2 \geq 1, n_3 \geq 2, m_3 \geq 2$.
Comme la réponse est (0,1,2,3,4) c'est que $m_2 = 1$ et donc que $n_3 = m_3 = 2$
Si $m_2 = 3$ avec le même raisonnement on trouve :
$n_1 = 4, m_1 = 0, n_2 = 11, m_2 = 3, n_3 = 2, m_3 = 2$.
La réponse : la dame et le mari de cette dame ont serré le même nombre de mains à savoir à deux mêmes personnes.

Vous avez maintenant deviné la réponse au problème posé. Lorsque'il y a 13 couples la dame et le mari de la dame ont serré la main de 12 personnes.
Pour le montrer, on note x_j pour $j = 0..25$ les personnes présentes et on suppose

que x_{25} est la dame qui a posé la question.
On ordonne les personnes selon l'ordre décroissant du nombre de mains serrées : p_j le nombre de mains serrées par x_j et on a :
$p_0 = 24, p_1 = 23.....p_{24} = 0$.
x_0 n'est pas le mari de x_{25} car si c'etait le cas on aurait $p_j \geq 1$ pour $j = 0..24$
Donc si $p_0 = 24$ et $p_{24} = 0$ c'est que x_0, x_{24} est un couple.
et on est ramené à 12 couples où chaque personne a serré la main de x_0.
Posons $q_j = p_j - 1$ pour $j = 1..23$ et x_{25} a serré la main de x_0.
On est donc ramené au problème précédent avec 12 couples et une liste de résulat pour y_j égale à [0..22].
Avec le même raisonnement on montre que x_1, x_{23} est un couple et que x_{25} a serré la main de x_0, x_1.
x_2, x_{22} est un couple ...x_{11}, x_{13} est un couple et que x_{25} a serré la main de $x_0, x_1, ...x_{11}$.
Donc x_{12} est le mari de la dame qui a posé la question.
le mari de cette dame a donc serré 12 mains qui sont celles de $x_0, x_1..x_{11}$.
Cette dame a aussi serré 12 mains car elle a serré les mains de $x_0, x_1..x_{11}$.

Pour n couples on va faire un raisonnement pas récurrence en montrant Si une réception réunit n couples et en arrivant chacun serre la main à un certain nombre de personnes mais personne ne serre la main de son conjoint.
Si pendant la récéption une dame A demande à chacune des $n - 1$ personnes présentes le nombre de mains qu'elle a serrées et elle obtient des résultats tous différents c'est qu'elle a, ainsi que son mari, serré la main de $n - 1$ personnes
La proposition est vraie pour $n = 1$ 1 couple A, B. A et B ont serré chacun 0 main.
Si la proposition est vraie pour n, montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. Soit une réception réunissant $n + 1$ couples parmi lesquels le couple A, B.
A interroge $2n+1$ personnes et les résultats sont différents et sont donc :$[0, 1, 2...2n]$ car une personne du groupe ne serre pas la main de son conjoint ni se serre la main elle-même donc elle serre la main à au plus $2n$ personnes. Soit D la personne qui a serré $2n$ mains et soit C son conjoint : cela entraine que les $2n$ personnes autres que C ont serré la main de D donc C est le seul a pouvoir avoir serré 0 mains.
Faisons sortir le couple D, C. Il reste n couples, soit $2n$ personnes qui ont serré la main de D, donc sans le couple D, C le résultat obtenu par A serait $[1, 2..2n - 1] - [1, 1..1] = [0, 1..2n - 2]$.
D'après l'hypothèse de récurrence A et B ont serré chacun $n - 1$ mains. Donc, avec le couple D, C, A et B ont serré chacun n mains.

Chapitre 7

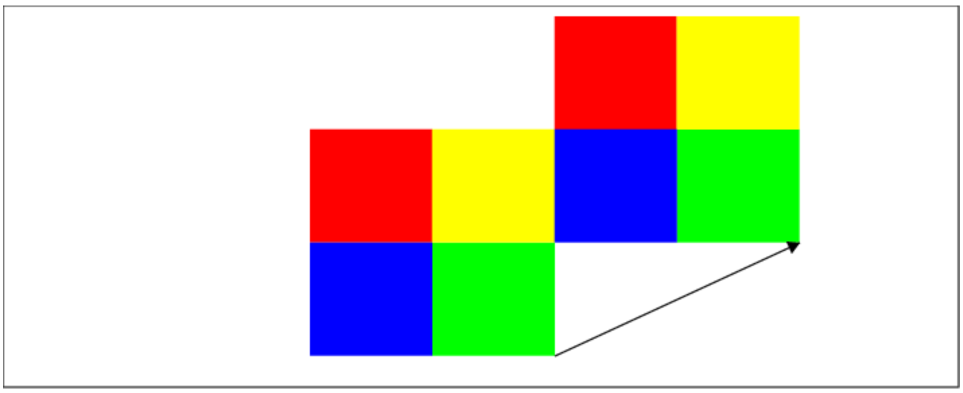
Géométrie plane seconde et terminale

7.1 Les transformations planes

7.1.1 La translation

Définition Une translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ est une transformation ponctuelle qui, à un point M fait correspondre un point M' tel que :
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$
Propriétés Soient 2 points A et B et leurs transformés A' et B' par la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$.
On a par hypothèse : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{V}$. On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
La transformée d'une droite est une droite de même direction.
Le transformé d'un cercle est un cercle de même rayon.
La translation conserve les angles.
Avec Xcas `translation(B-A,M)` (resp `translation(a+i*b,M)`) désigne le translaté de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (resp d'affixe $a + ib$).
Une visualisation On considère la translation de vecteur 2+i.
On veut visualiser l'image par cette translation des 4 carrés :

```
C1:=carre(i,1+i,affichage=1+rempli);
C2:=carre(1,2,affichage=2+rempli);
C3:=carre(i+1,2+i,affichage=3+rempli);
C4:=carre(0,1,affichage=4+rempli)
```



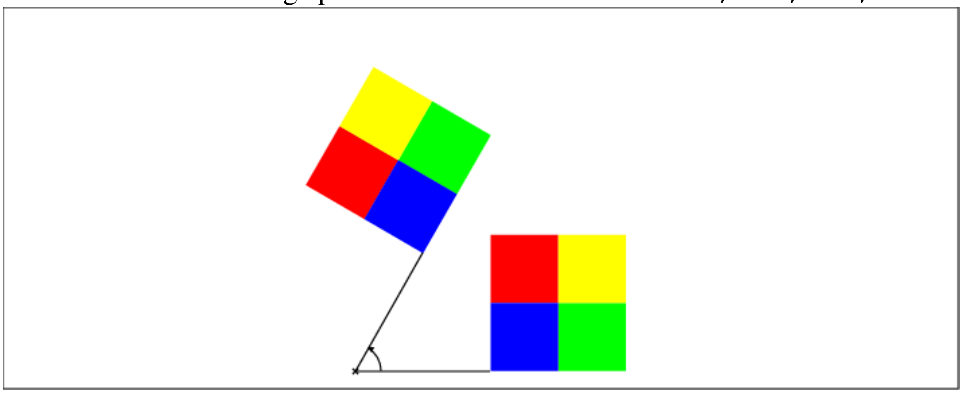
On tape :

```
C1:=carre(i,1+i,affichage=1+rempli);
translation(2+i,C1,affichage=1+rempli);
C2:=carre(1,2,affichage=2+rempli);
translation(2+i,C2,affichage=2+rempli);
C3:=carre(i+1,2+i,affichage=3+rempli);
translation(2+i,C3,affichage=3+rempli);
C4:=carre(0,1,affichage=4+rempli);
translation(2+i,C4,affichage=4+rempli);
translation(1+i,carre(0,1),affichage=4+rempli)
```

On obtient :

7.1.2 La rotation

Définition Une rotation de centre O et d'angle t est une transformation ponctuelle qui, à un point M fait correspondre un point M' tel que :
$OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} = t + 2n\pi$ $(n \in$
$Z)$
Propriétés Soient 2 points A et B et leurs transformés A' et B' par la rotation de centre O et d'angle t. On a :
$AB = A'B'$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} = t + 2n\pi$ La transformée d'une droite est une droite.
Le transformé d'un cercle est un cercle de même rayon.
La rotation conserve les angles.
Avec Xcas `rotation(O,t,M)` désigne le transformé de M dans la rotation de de centre, le point O, et d'angle t.
`rotation(a+i*b,t,M)` désigne le transformé de M dans la rotation de centre, le point d'affixe $a + ib$, et d'angle t.
Une visualisation On considère la rotation de centre $C = (-2, 0)$ et d'angle $\pi/3$.
On veut visualiser l'image par cette rotation des 4 carrés : `C1, C2, C3, C4`.

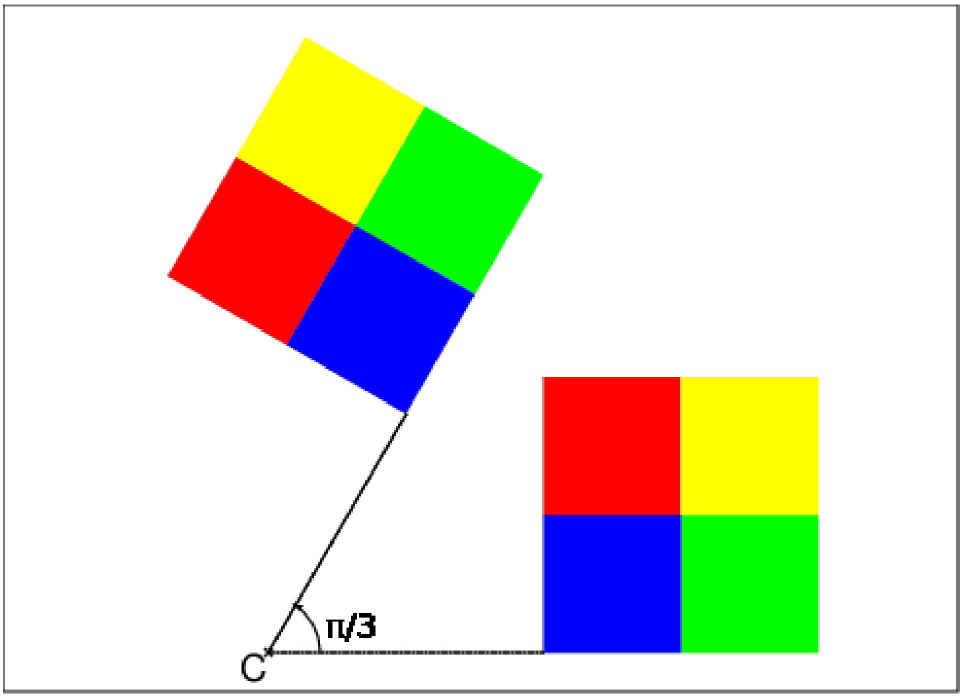


On tape :

```
C1:=carre(i,1+i,affichage=1+rempli):;C1;
rotation(-2,pi/3,C1,affichage=1+rempli);
C2:=carre(1,2,affichage=2+rempli):;C2;
```

```
rotation(-2,pi/3,C2,affichage=2+rempli);
C3:=carre(i+1,2+i,affichage=3+rempli):;C3;
rotation(-2,pi/3,C3,affichage=3+rempli);
C4:=carre(0,1,affichage=4+rempli);
rotation(-2,pi/3,C4,affichage=4+rempli):;C4;
C:=point(-2);
O1:=rotation(C,pi/3,point(0)):;
segment(C,point(0),affichage=ligne_tiret_point));
segment(C,O1,affichage=ligne_tiret_point));
angle(C,point(0),O1,"pi/3");
```

On obtient :

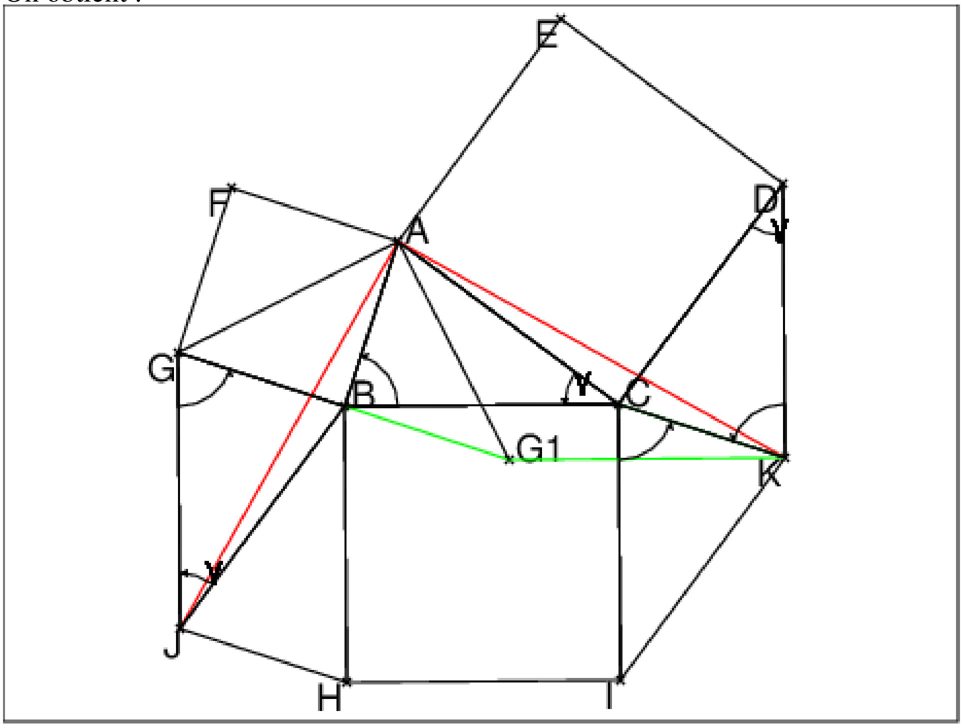


Un exercice
Sur les côtés d'un triangle ABC quelconque, on construit 3 carrés $ACDE$, $BAFG$ et $BHIC$ puis 2 parallélogramme $BGJH$ et $CIKD$.
Démontrer que le triangle AJK est rectangle isocèle.
Une solution
On fait la figure, on clique sur 3 points A, B, C puis on tape :

```
triangle(A,B,C);
carre(A,C,D,E);
carre(C,B,H,I);
carre(B,A,F,G);
parallelogramme(H,B,G,J);
parallelogramme(D,C,I,K);
segment(A,J,affichage=1);
segment(A,K,affichage=1);
G1:=symetrie(B,G);
segment(B,G1,affichage=2);
```

```
segment(K,G1,affichage=2);
segment(K,C);
angle(C,I,K,"");angle(B,C,A,"");
angle(G,J,B,"");angle(K,D,C,"");
angle(D,C,K,"gamma");
angle(C,A,B,"gamma");
segment(B,J);
angle(J,B,G,"gamma");
segment(A,G);segment(A,G1);
```

On obtient :

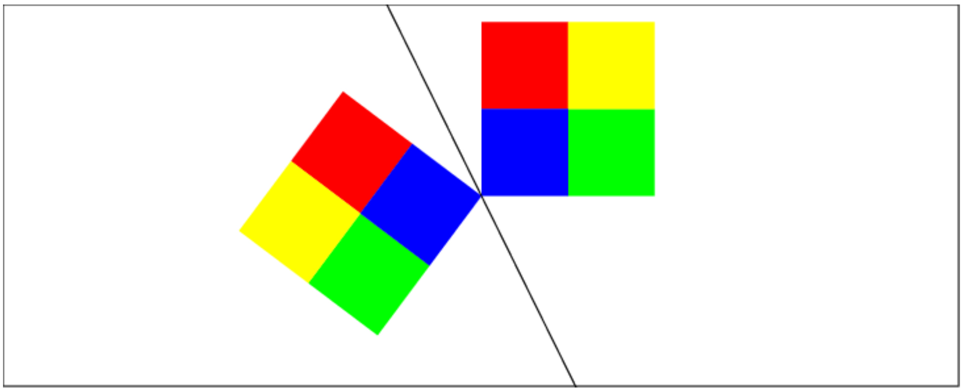


On remarque tout d'abord que les triangles BGJ, JHB, KCI et CKD sont égaux au triangle ABC. En effet pour BGJ, on a $BG = AB$, $GJ = BC$ et l'angle G est égale à B comme angle à côtés perpendiculaires. donc le triangle BGJ est égal à ABC.
De même CKD est égal à ABC l'angle D est égale à BC comme angle à côtés perpendiculaires.
De plus BGJ est aussi égal à JHB et CKD est aussi égal à KCI puisque $BGJH$ et $CIKD$ sont des parallélogrammes. Donc le triangle BGJ est égal au triangle KCI, donc CK est parallèle à BG. Si $G1$ est le symétrique de G par rapport à B on en déduit que le quadrilatère $BG1KC$ est un parallélogramme.
On va chercher le transformé de J par la rotation de centre A et d'angle $+\pi/2$ si ABC est direct et $-\pi/2$ sinon. Supposons le triangle ABC est direct.
La rotation de centre A et d'angle $+\pi/2$ transforme G en $G1$ et J en $J1$. Le segment $G1J1$ a pour longueur BC et est perpendiculaire à GJ donc parallèle à BC. $AGG1$ est un triangle rectanlgle isocèle qui admet AB comme bissectrice donc $G1$ est le symétrique de G par rapport à B.
Le quadrilatère $BG1J1C$ est donc le parallélogramme $BG1KC$ et $J1$ et K sont confondus. Le triangle AJK est donc rectangle isocèle.

7.1.3 La symétrie droite et la symétrie point

Définition La symétrie par rapport à une droite d est une transformation ponctuelle qui, à un point M fait correspondre un point M' tel que le segment MM' soit perpendiculaire à d en son milieu i.e.d est la médiatrice de MM'
La symétrie par rapport à un point O est une rotation de centre O et d'angle π (cf rotation pour les propriétés).
Propriétés de la symétrie droite La transformée d'une droite est une droite.
Le transformé d'un cercle est un cercle de même rayon.
La symétrie transforme un angle en son opposé.
Avec Xcas `symetrie(droite(A,B),M)` ou `symetrie(A,B,M)` désigne le transformé de M dans la symétrie par rapport à la droite AB.
`symetrie(O,M)` désigne le transformé de M dans la symétrie de centre O.
Une visualisation On considère la symétrie par rapport à la droite passant par `A:=point(0)` et `B:= point(-1/2+i)`.
On veut visualiser l'image par cette symétrie des 4 carrés : `C1, C2, C3, C4`.
On tape :

```
C1:=carre(i,1+i,affichage=1+rempli);
C2:=carre(1,2,affichage=2+rempli);
C3:=carre(i+1,2+i,affichage=3+rempli);
C4:=carre(0,1,affichage=4+rempli)
symetrie(droite(0,-1/2+i),C1,affichage=1+rempli);
symetrie(droite(0,-1/2+i),C2,affichage=2+rempli);
symetrie(droite(0,-1/2+i),C3,affichage=3+rempli);
symetrie(droite(0,-1/2+i),C4,affichage=4+rempli);
droite(0,-0.5+i)
```



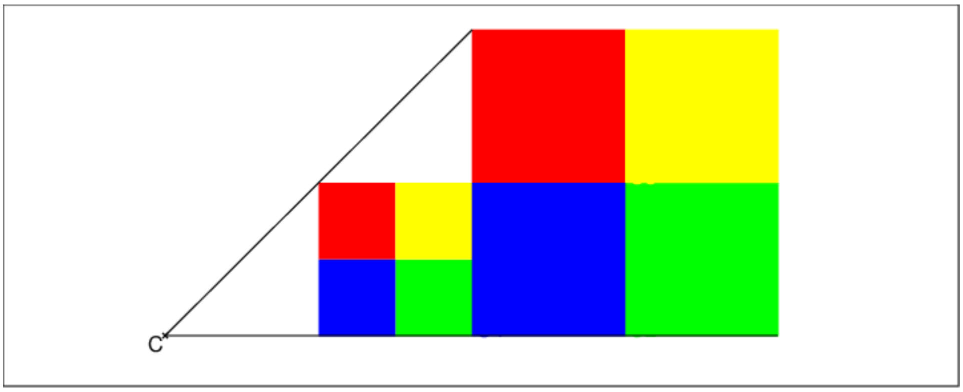
7.1.4 L'homothétie

Définition L'homothétie de centre O et de rapport k est une transformation ponctuelle qui, à un point M fait correspondre un point M' tel que :
$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$
Propriétés Soient 2 points A et B et leurs transformés A' et B' par l'homothétie de centre O et de rapport k. On a :
$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
La transformée d'une droite est une droite parallèle.

Le transformé d'un cercle de rayon R est un cercle de rayon kR.
L'homothétie conserve les angles.
Avec Xcas `homothetie(O,k,M)` désigne le transformé de M dans l'homothétie de centre O et de rapport k.
Une visualisation On considère la homothétie de centre $C = (-2, 0)$ et de rapport $1/2$.
On veut visualiser l'image par cette homothétie des 4 carrés : `C1, C2, C3, C4`.
On tape :

```
C1:=carre(i,1+i,affichage=1+rempli);
homothetie(-2,1/2,C1,affichage=1+rempli);
C2:=carre(1,2,affichage=2+rempli);
homothetie(-2,1/2,C2,affichage=2+rempli);
C3:=carre(i+1,2+i,affichage=3+rempli);
homothetie(-2,1/2,C3,affichage=3+rempli);
C4:=carre(0,1,affichage=4+rempli);
homothetie(-2,1/2,C4,affichage=4+rempli);
C:=point(-2)
```

On obtient :



7.1.5 La similitude

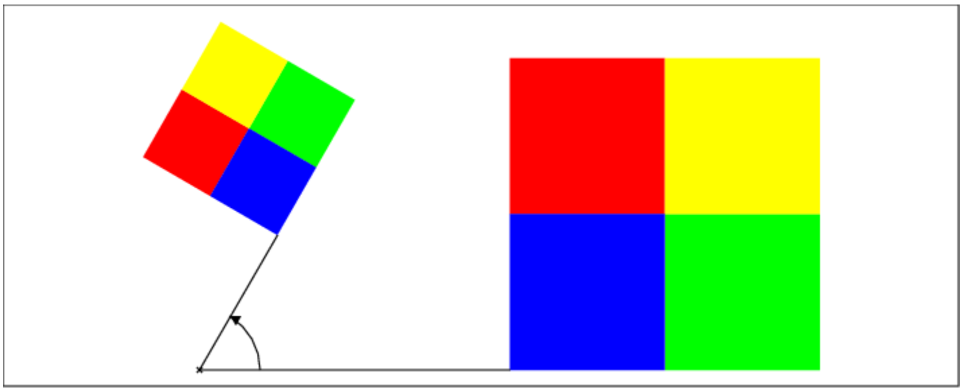
Définition La similitude de centre O, de rapport k et d'angle t est une transformation ponctuelle qui, à un point M fait correspondre un point M' tel que :
$OM' = k * OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = t$
Propriétés Soient 2 points A et B et leurs transformés A' et B' par la similitude de centre O de rapport k et d'angle t. On a :
$A'B' = kAB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = t$.
La transformée d'une droite est une droite.
Le transformé d'un cercle de rayon R est un cercle de rayon kR.
La similitude conserve les angles.

Avec Xcas `similitude(O,k,t,M)` désigne le transformé de M dans la similitude de centre O, de rapport k et d'angle t.
Une visualisation On considère la similitude de centre $C = (-2, 0)$ et de rapport $1/2$ et d'angle 2*pi/3.

On veut visualiser l'image par cette similitude des 4 carrés : `C1, C2, C3, C4`.
On tape :

```
C1:=carre(i,1+i,affichage=1+rempli);
similitude(-2,1/2,2*pi/3,C1,affichage=1+rempli);
C2:=carre(1,2,affichage=2+rempli);
similitude(-2,1/2,2*pi/3,C2,affichage=2+rempli);
C3:=carre(i+1,2+i,affichage=3+rempli);
similitude(-2,1/2,2*pi/3,C3,affichage=3+rempli);
C4:=carre(0,1,affichage=4+rempli);
similitude(-2,1/2,2*pi/3,C4,affichage=4+rempli);
C:=point(-2)
```

On obtient :



7.1.6 L'inversion

Définition Une inversion de centre C et de puissance k est une transformation ponctuelle qui, à un point M fait correspondre un point M' tel que :
$\overline{OM} * \overline{OM'} = k$
Propriétés Deux points quelconques et leurs inverses sont cocycliques ou sont alignés avec le centre d'inversion.
L'inverse d'une droite passant par le centre d'inversion est elle-même.
L'inverse d'une droite ne passant pas par le centre d'inversion est un cercle passant par le centre d'inversion dont le diamètre est perpendiculaire à la droite.
Avec Xcas `inversion(C,k,M)` désigne le point inverse de M dans l'inversion de centre C et de puissance k.
Une visualisation On considère l'inversion de centre 0 et de puissance 1.
On veut visualiser l'image par cette inversion des 3 carrés :
`carre(i,1+i,affichage=1+rempli),`
`carre(i+1,2+i,affichage=3+rempli),`
`carre(1,2,affichage=2+rempli)`
Pour pouvoir remplir une figure ayant comme contour des arcs de cercles on va écrire une procédure qui trace les arcs avec des polygones.
On tape :

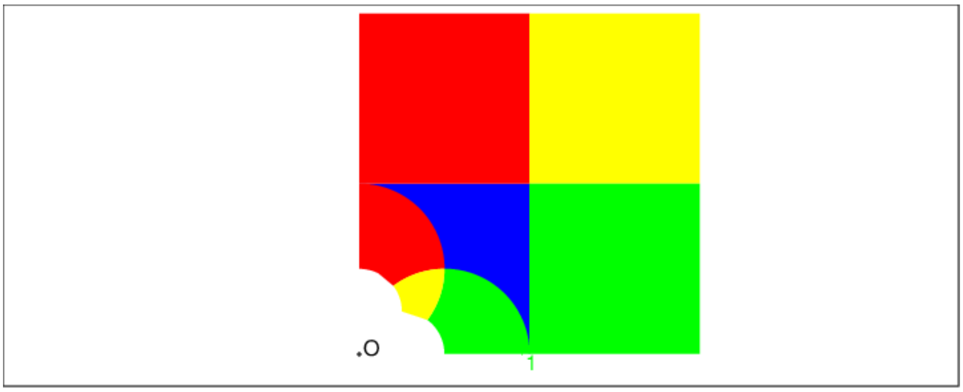
```
arcpoly(z0,r,a,b):={
return seq(z0+r*exp(i*t),t=a..b,0.05),z0+r*exp(i*b);
```

```
}:;
arccorde(z0,r,a,b,coul):={
local L;
L:=arcpoly(z0,r,a,b);
return polygone(L,affichage=coul+rempli)
}:;
arcpolyepais(z0,r,a,b,ep,coul):={
local L;
L:=z0+(r-ep)*exp(i*a),z0+r*exp(i*a),arcpoly(z0,r,a,b),
  z0+(r)*exp(i*b),z0+(r-ep)*exp(i*b),arcpoly(z0,r-ep,b,a);
return affichage(polygone(L),c+rempli);
}:;
```

Ainsi `arccorde` dessinera la surface comprise entre l'arc et la corde avec la couleur `coul` et `arcpolyepais` dessinera la surface comprise entre 2 arcs, l'un de rayon `r` et l'autre de rayon `r-ep` avec la couleur `coul`.
On tape :

```
triangle(1,1+i,i,affichage=4+rempli),
polygone(a1,a2,a3,affichage=1+rempli),
polygone(b1,b2,b3,affichage=2+rempli),
polygone(a2,b2,c1,c2,affichage=3+rempli),
carre(i,1+i,affichage=1+rempli),
carre(i+1,2+i,affichage=3+rempli),
carre(1,2,affichage=2+rempli),legende(0,"O")
```

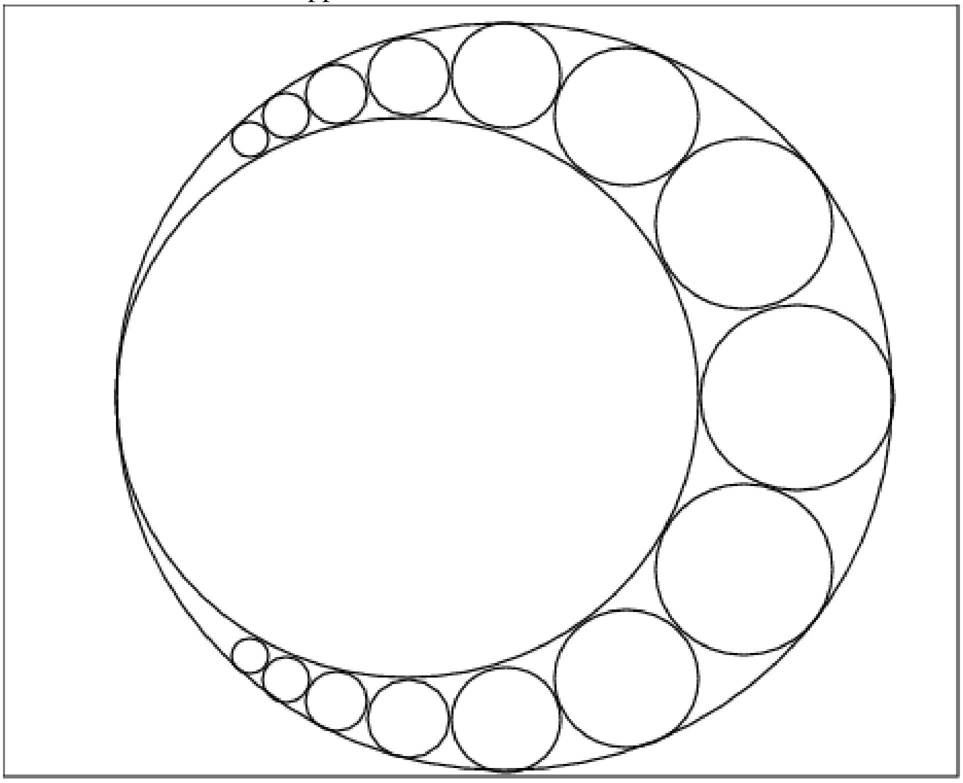
On obtient :



Les figures de même couleur sont inverses l'une de l'autre (en particulier les inverses des points de la figure bleue sont aussi dans la figure bleue qui est globalement invariante)

7.2 Le théorème de Pappus

Voici les cercles de Pappus :



Théorème :
Si Γ est le grand cercle de diamètre b, C le cercle "moyen" de diamètre a ($a < b$) est tangent intérieurement à Γ en A et les petits cercles$c_j, ..c_1, c_0, c_1..c_j$ sont tangents à Γ et à C et c_j est tangent à c_{j+1}.
Les cercles Γ, C et c_0 sont centrés sur la droite D. Le théorème de Pappus dit que si r_j et le rayon de c_j et si d_j est la distance du centre de c_j à D alors $d_1 = 2r_1$ et $d_j = 2 * j * r_j$ pour $j = 0..n$.
De plus les points de tangences des cercles c_j et c_{j+1} sont sur un cercle de diamètre $2\frac{ab}{a+b}$, tangent en A à Γ et C. **Construction des cercles de Pappus.**
On va utiliser une inversion qui transforme Γ et C en 2 droites parallèles d_1 et d_2. Cette inversion aura comme centre le point A commun à Γ et C. Les cercles c_k seront transformés en des cercles qui seront tangents à ces 2 droites : les transformés seront donc des cercles égaux. et les points de tangences de ces cercles sont sur la parallèle équidistante à d_1 et d_2.
Voici la fonction qui renvoie le transformé d'un cercle c, son centre et son rayon (lorsque ce transformé est un cercle) par l'inversion de centre A et de puissance k :

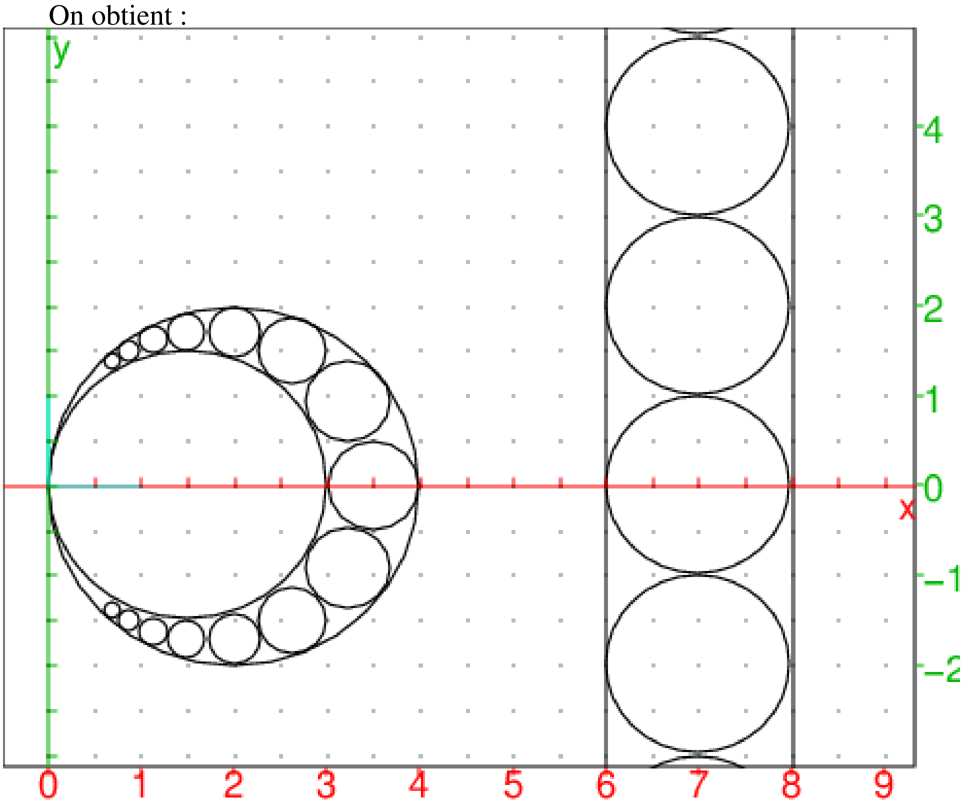
```
inversionc(A,k,c):={
  local p,O1,r1,O,r,B,B1;
  O:=centre(c);
  r:=rayon(c);
  si est_element(A,c) alors
    B:=symetrie(O,A);
    B1:=inversion(A,k,B);
```

```
  return perpendiculaire(B1,droite(O,A)); fsi;
  si A==O alors return cercle(O,k/r),O,k/r; fsi;
  p:=puissance(c,A);//p:=longueur2(A,O)-r^2
  r1:=k*r/p;
  O1:=inversion(A,k,projection(polaire(c,A),A));
  return cercle(O1,r1),O1,r1;
  }:;
```

on a $r_1 = k * r/(AO^2 - r^2)$ O_1 est l'inverse du point d'affixe $(r^2 + (xA - i * yA) * (xO + i * yO) - (xO^2 + yO^2))/(xA - xO + (-i) * (yA - yO))$ On tape :

```
k:=24;
Gamma:=cercle(point(2),2):;Gamma;
C:=cercle(point(3/2),3/2):;C;
d1:=inversionc(0,k,Gamma):;d1;
d2:=inversionc(0,k,C):;d2[0];
c0:=cercle(point(6),point(8));
c1:=cercle(7+2*i,1):;
C0:=inversionc(point(0),k,c0);;C0[0];
C1:=inversionc(point(0),k,c1):;C1[0];
L:=cercle(7+2*k*i,1)$(k=-7..7):;L;
L1:=inversionc(0,k,L[j])$(j=0..14):;L1[0];
```

On obtient :



Démonstration du théorème de Pappus avec `Xcas` On prend comme origine A le centre de l'inversion, et comme axe des x la droite des centres.

Γ est le cercle de diamètre `A point(b)` et C est le cercle de diamètre `A point(a)`.
Γ se transforme par l'inversion de centre A et de puissance k en la droite d'équation $x = k/b$
C se transforme par l'inversion de centre A et de puissance k en la droite d'équation $x = k/a$
Le cercle des points de tangence des cercles c_j est donc le transformé par l'inversion de centre A et de puissance k de la droite d'équation $x = (k/b + k/a)/2 = k(a + b)/(2ab)$ c'est donc le cercle de diamètre `A point(2a*b/(a+b))`.
Le cercle $c0$ est de diamètre AB et son transformé $C0$ dans l'inversion de centre A et de puissance k a pour centre `point(k/2*(1/a+1/b))` et comme rayon `r:=k/2*(1/a-1/b)`.
On considère donc le cercle C_j de rayon `r:=k/2*(1/a-1/b)` et de centre `oj:=point(k/2*(1/a+1/b)+i*2*j*r);` Soit c_j l'inverse de C_j dans l'inversion de centre A et de puissance k.
On cherche l'ordonnée du centre et du rayon de c_j.
On tape :

```
A:=point(0);
assume(a=[3,0,10,0.1]);
assume(b=[4,a,10,0.1]);;
cercle(A,point(a));
cercle(A,point(b));
supposons(k=[23.9,0,25,0.1]);
c0:=cercle(point(a),point(b));
C0:=inversionr(A,k,c0);
supposons(j=[1,0,7,1]);
r:=k/2*(1/a-1/b);
oj:=point(k/2*(1/a+1/b)+i*2*j*r);
Cj:=cercle(oj,r);
cj:=inversionr(A,k,Cj);
cj[0];
dj:=simplify(ordonnee(cj[1]));
rj:=simplify(ordonnee(cj[1])/cj[2]);
simplify(ordonnee(dj/rj);
```

On obtient pour dj :
`(-a^2*b*j+a*b^2*j)/(a^2*j^2-2*a*b*j^2+a*b+b^2*j^2)`
On obtient pour rj :
`(-a^2*b+a*b^2)/(2*a^2*j^2-4*a*b*j^2+2*a*b+2*b^2*j^2)`
On obtient pour dj/rj :
`(2*j`
Donc `Xcas` a démontré que $d_j = 2jr_j$.

7.3 Un problème de partage

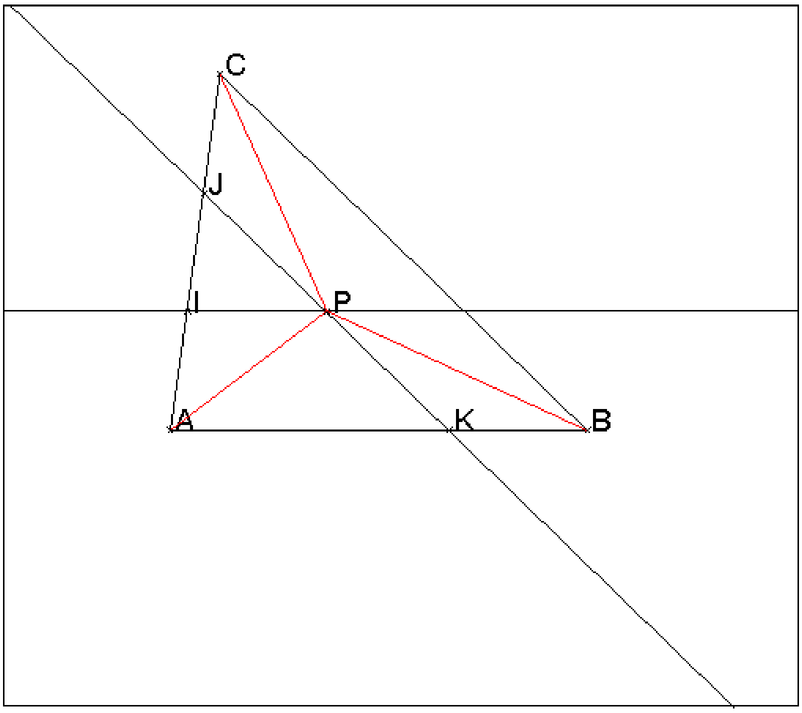
7.3.1 Le problème

Un père possède un terrain triangulaire. Il veut forer un puits à l'intérieur de son terrain, de façon qu'á sa mort chacun de ses 3 fils possède un morceau triangulaire de même surface ayant accès au puits.

Soit ABC le terrain initial et P l'emplacement du puits.
Chaque fils aura comme morceau ABP ou APC ou BCP et ces morceaux doivent avoir même aire qui est le tiers de l'aire de ABC.
Donc la hauteur de ABP doit être le tiers de la hauteur de ABC issue de C et la hauteur de BCP doit être le tiers de la hauteur de ABC issue de A.
Avec `Xcas` on clique sur 3 points et on tape dans un écran de géométrie :

```
triangle(A,B,C);
I:=A+(C-A)/3;
dc:=parallele(I,droite(B,A));
J:=A+2*(C-A)/3;
da:=parallele(J,droite(B,C));
P:=inter_unique(da,dc);
affichage ([segment(P,A),segment(P,B),segment(P,C)],rouge)
K:=B+(A-B)/3
```

On obtient :



On tape pour vérifier :
`aire(A,B,P),aire(B,C,P),aire(C,A,P)`

Propriétés du point `P`
`I` est le milieu de `AJ`, `IP` est parallèle à `AK` donc `P` est le milieu de `KJ`. `AP` est une médiane de `AKJ`, `KJ` est parallèle à `BC` donc `AP` est une médiane de `ABC`.

On montrerait de même que BP et CP sont des médianes de ABC.
P est donc le centre de gravité du triangle ABC ou encore l'isobarycentre des 3 points A,B,C.
On tape pour vérifier :
```
affichage(isobarycentre(A,B,C),point_width_2)
```

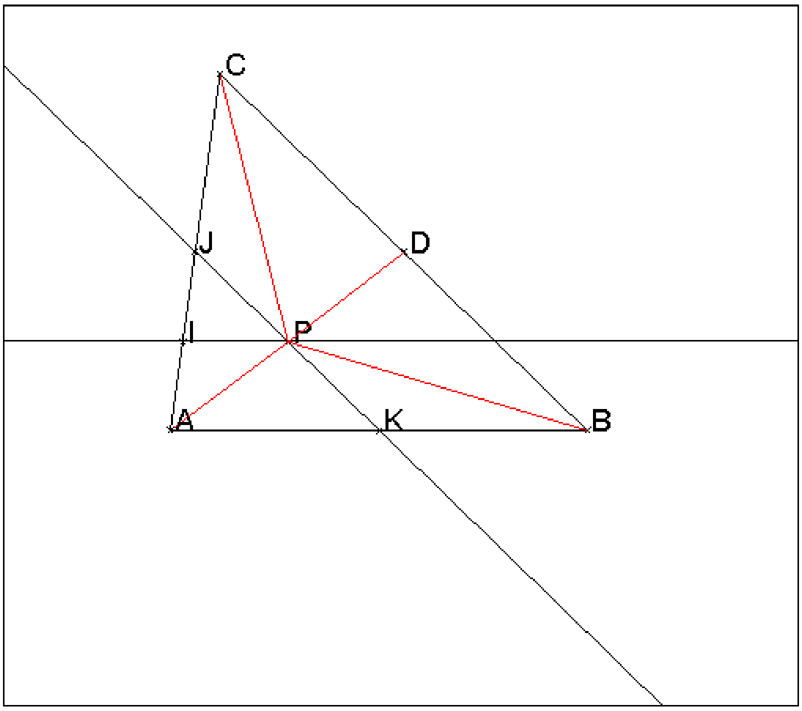
7.3.2 Généralisation du problème

Un père possède un terrain triangulaire et a n fils ($n = 3, 4, 5...$).
Il veut forer un puits à l'intérieur de son terrain, de façon qu'á sa mort, chacun de ses n fils possède un morceau triangulaire de même surface ayant accès au puits. Déterminer le nombre de solutions possibles.

Pour $n = 4$, on cherche 2 points P et D avec D par exemple sur BC (il y a donc 3 solutions selon que l'on choisit D sur BC ou sur AC ou sur AB) pour que chaque fils ait comme morceau ABP ou APC ou BDP ou DCP et que ces morceaux soient de même aire à savoir le quart de l'aire de ABC.
Avec Xcas on clique sur 3 points et on tape dans un ècran de géométrie :

```
triangle(A,B,C);
I:=A+(C-A)/4;
dc:=parallele(I,droite(B,A));
J:=A+(C-A)/2;
da:=parallele(J,droite(B,C));
P:=inter_unique(da,dc);
D:=milieu(B,C);
affichage ([segment(P,A),segment(P,B),segment(P,C),
             segment(P,D)],rouge);
K:=B+(A-B)/2;
```

On obtient :



On tape pour vérifier :
`aire(A,B,P),aire(B,D,P),aire(C,A,P),aire(D,C,P)`

Propriétés du point `P`
`I` est le milieu de `AJ`, `IP` est parallèle à `AK` donc `P` est le milieu de `KJ`. `AP` est une médiane de `AKJ`, `KJ` est parallèle à `BC` donc `AP` est la médiane `AD` de `ABC`.
De plus `P` est le milieu de `AD` puisque `J` est le milieu de `AC`, `JP` est parallèle à `DC` .
`P` est donc le barycentre des 3 points `[A,2],[B,1],[C,1]`.
On tape pour vérifier :
`affichage(barycentre([A,2],[B,1],[C,1]),point_width_2).`
Les 2 autres solutions, pour l'emplacement du puits, sont obtenues avec :

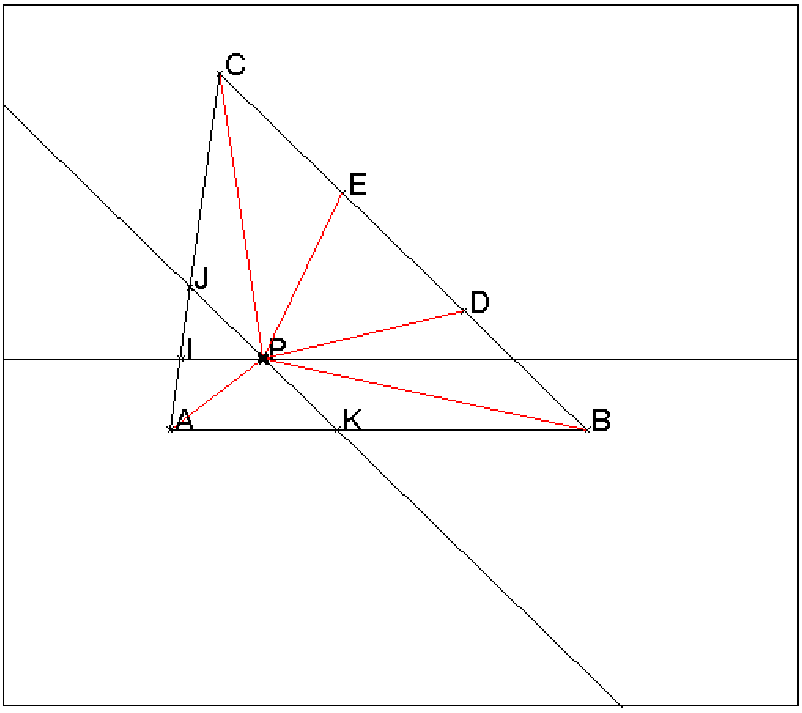
```
affichage(barycentre([A,1],[B,2],[C,1]),point_width_2)
affichage(barycentre([A,1],[B,1],[C,2]),point_width_2)
```

Pour $n = 5$, on cherche 3 points `P, D` et `E` avec `D et E` sur un même côté par exemple sur `BC` ou `D` et `E` sur des côtés différents par exemple `D` sur `BC` et `E` par exemple sur `AC` (il y a donc en tout 6 solutions : 3 solutions selon que l'on choisit `D` et `E` sur `BC` ou sur `AC` ou sur `AB` et 3 solutions selon que l'on choisit `D` et `E` pas sur `BC` ou pas sur `AC` ou pas sur `AB`) pour que chaque fils ait comme morceau un triangle de sommets pris parmi `A,B,C,D,E,P` et que ces morceaux soient de même aire à savoir le cinquième de l'aire de ABC.
Avec `Xcas` on clique sur 3 points et on tape dans un ècran de géométrie :

```
triangle(A,B,C);
```

```
I:=A+(C-A)/5
dc:=parallele(I,droite(B,A));
J:=A+2*(C-A)/5;
da:=parallele(J,droite(B,C));
P:=inter_unique(da,dc);
D:=B+(C-B)/3;
E:=B+2*(C-B)/3;
affichage ([segment(P,A),segment(P,B),segment(P,C),
            segment(P,D),segment(P,E)],rouge)
K:=B+3*(A-B)/5;
affichage(barycentre([A,3],[B,1],[C,1]),point_width_2);
```

On obtient :



On tape pour vérifier :

```
aire(A,B,P),aire(B,D,P),aire(C,A,P),aire(D,E,P),aire(E,C,P)
```

Propriétés du point `P`

`I` est le milieu de `AJ`, `IP` est parallèle à `AK` donc `P` est le milieu de `KJ`. `AP` est une médiane de `AKJ`, `KJ` est parallèle à `BC` donc `AP` est la médiane de `ABC`.
De plus `P` est situé au 2/5 de cette médiane de `AD` puisque `J` est situé au 2/5 de `AC`, `JP` est parallèle à `DC`.
Donc l'aire de `PBC` vaut les 3/5 de l'aire de `ABC` `P` est donc le barycentre des 3 points `[A,3],[B,1],[C,1]`.
On tape pour vérifier :

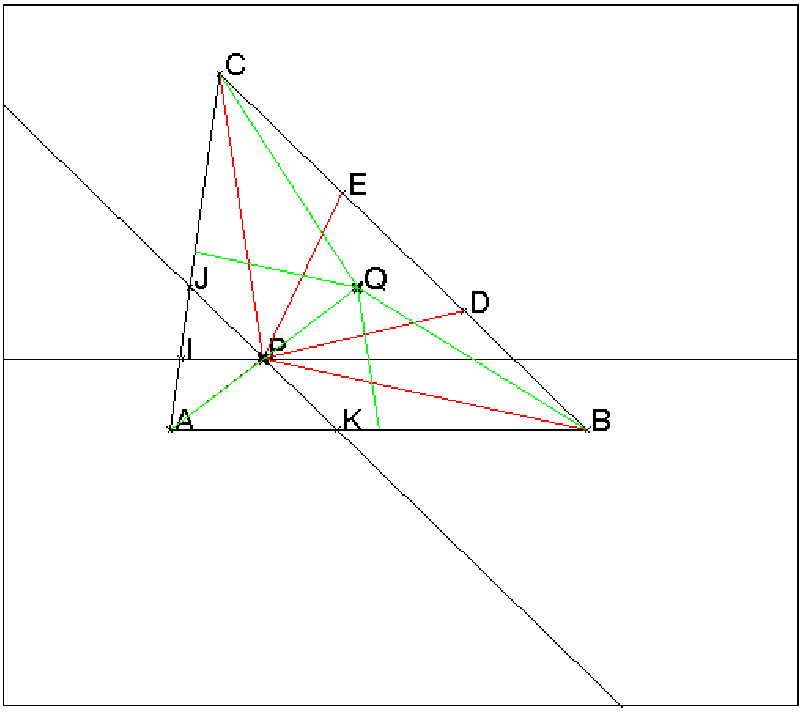
`affichage(barycentre([A,2],[B,1],[C,1]),point_width_2).`
On voit le partage en rouge sur la figure lorsque le puits est en `P`.
Les 2 autres solutions, pour l'emplacement du puits lorsque l'on choisit `D` et `E` sur le même côté, sont obtenues avec :

```
affichage(barycentre([A,1],[B,2],[C,1]),point_width_2)
affichage(barycentre([A,1],[B,1],[C,2]),point_width_2)
```

Les 3 autres solutions, pour l'emplacement du puits lorsque l'on choisit `D` et `E` sur des côtés, sont obtenues avec :

```
affichage(barycentre([A,2],[B,2],[C,1]),point_width_2)
affichage(barycentre([A,2],[B,1],[C,2]),point_width_2)
Q:=affichage(barycentre([A,1],[B,2],[C,2]),point_width_2)
```

On voit le partage en vert sur la figure lorsque le puits est en `Q` :



On généralise aisément.
On montre par récurrence que le nombre de solutions pour n ($n > 3$) est : $(n-2)(n-1)/2$.
En effet on cherche le nombre de triplets d'entiers non nuls de somme n i.e. on cherche le nombre de triplets $(a,b,c) \in \mathbb{N}^{*3}$ vérifiant $a+b+c=n$. pour $n=3$ ce nombre est 1=$(n-2)(n-1)/2$ car (1+1+1=3)
Hypothèse de recurrence : pour n ce nombre est $(n-2)(n-1)/2$,
pour $n+1$, on cherche le nombre de triplets d'entiers non nuls de somme $n+1$:
si $a+b+c=n+1$, c'est que $a+b<n+1$ car $c \neq 0$
Donc le problème revient à chercher le nombre de couples (a,b) d'entiers non nuls de somme strictement inférieure à $n+1$. Par hypothèse de recurrence, le nombre de couples (a,b) d'entiers non nuls de somme strictement inférieure à n

est $(n-2)(n-1)/2$. Il reste donc à comptabiliser les couples (a,b) d'entiers non nuls de somme n : il y en $n-1$ puisque a peut prendre $n-1$ valeurs. Donc le nombre de triplets d'entiers non nuls de somme $n+1$ est :
$(n-2)(n-1)/2+n-1 = (n-1)(n-2+2)/2 = (n-1)n/2$. On a ainsi montrer par récurrence que le nombre de solutions pour le partage en n triangles de même aire est $(n-2)(n-1)/2$.
Il est interessant de voir alors la disposition des différents puits les uns par rapport aux autres : il forme un reseau triangulaire de côté $n-2$ et on retrouve alors le nombre de puits avec la formule :
$1+2+...+(n-2) = (n-2)(n-1)/2$.

7.4 Le sigle CE

Il existe une différence subtile entre le sigle CE "Comformité Européenne" indiquant que le produit répond à des normes de sécurité et qu'il peut circuler librement en Europe et le sigle CE signifiant "China Export".
Seul l'espace entre le C et le E et différent : dans le sigle chinois le C et le E sont plus proches.
Alors soyez vigilant !

7.4.1 Le sigle "Comformité Européenne"

On tape :

```
cercle(-5,5);
cercle(-5,4);
cercle(4,5);
cercle(4,4);
c1:=cercle(-5,5,pi/2,3*pi/2,affichage=rempli);
c2:=cercle(-5,4,pi/2,3*pi/2,affichage=rempli+ 7);
c3:=cercle(4,5,pi/2,3*pi/2,affichage=rempli);
c4:=cercle(4,4,pi/2,3*pi/2,affichage=rempli+ 7);
rectangle(i/2,-i/2,4,affichage=rempli);
papier_quadrille(1,pi/2,x=-11..10,y=-6..6);
```

On obtient :

7.4.2 Le sigle "China Export"

On tape :

```
cercle(1,5);
cercle(1,4);
c1:=cercle(-5,5,pi/2,3*pi/2,affichage=rempli);
c2:=cercle(-5,4,pi/2,3*pi/2,affichage=rempli+ 7);
c5:=cercle(1,5,pi/2,3*pi/2,affichage=rempli);
c6:=cercle(1,4,pi/2,3*pi/2,affichage=rempli+ 7);
rectangle(-3+i/2,-3-i/2,4,affichage=rempli);
papier_quadrille(1,pi/2,x=-11..10,y=-6..6);
cercle(-5,5);
cercle(-5,4);
```

On obtient :

7.5 Le cercle inscrit

7.5.1 Le problème

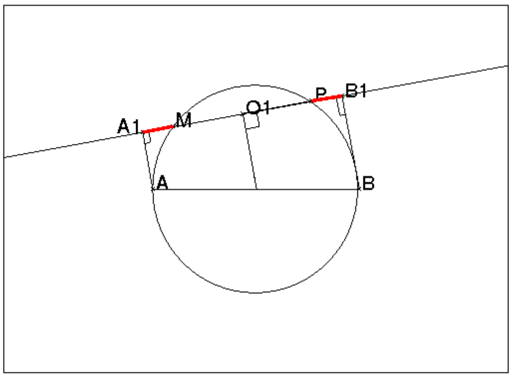
Soient ABC un triangle et M un point qui se déplace sur le segment BC. Soit I (resp J) le centre du cercle inscrit au triangle ABM (resp ACM). Montrer que le cercle de diamètre IJ passe par un point fixe lorsque le point M se déplace sur le segment BC.

7.5.2 Les lemmes

Lemme1

Soient c est un cercle de diamètre AB et une corde MP avec M et P situé d'un même côté de AB. Soient $A1$ et $B1$ les projections respectives de A et B sur MP.
Alors

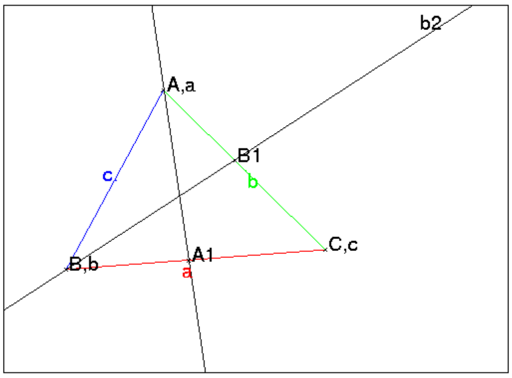
$$\overrightarrow{A1M} = \overrightarrow{PB1}$$



En effet le centre de c est le milieu de AB et donc il se projette sur le milieu de MP. Comme le milieu de AB se projette sur le milieu $O1$ de $A1B1$, on a $A1B1$ et MP ont même milieu.
Donc :
$$\overrightarrow{A1M} = \overrightarrow{A1O1} + \overrightarrow{O1M} = \overrightarrow{O1B1} + \overrightarrow{PO1} = \overrightarrow{PB1}$$

Lemme2

Soient ABC un triangle et K le centre de son cercle inscrit.
Alors K est le barycentre des points $[A, a]$, $[B, b]$, $[C, c]$ où a, b, c sont les longueurs des côtés BC, AC, AB.



Si la bissectrice intérieure de l'angle A coupe BC en $A1$ on a : $A1B/A1C = c/b$ donc $b * A1B = c * A1C$ ou encore puisque $A1$ se trouve sur le segment BC :

$$b * \overrightarrow{A1B} + c * \overrightarrow{A1C} = 0$$

donc $A1$ est le barycentre de $[B, b]$, $[C, c]$.

Si la bissectrice intérieure de l'angle B coupe AC en $B1$ on a : $B1A/B1C = c/a$ donc $a * B1A = c * B1C$ ou encore puisque $B1$ se trouve sur le segment AC :

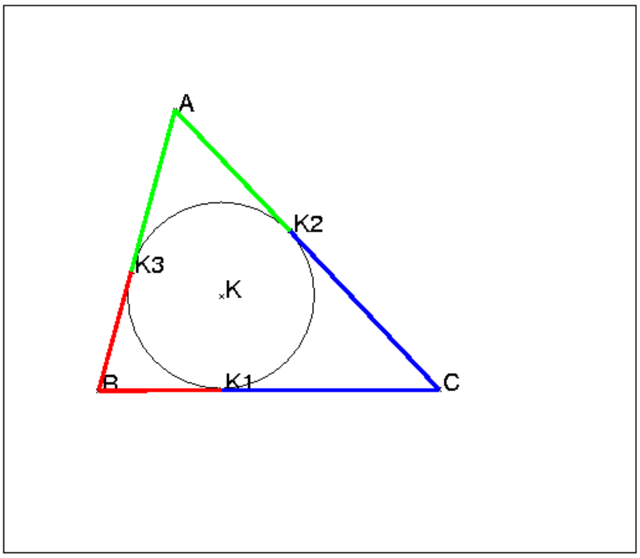
$$a * \overrightarrow{B1A} + c * \overrightarrow{B1C} = 0$$

donc $B1$ est le barycentre de $[A, a], [C, c]$.
Donc le barycentre des points $[A, a], [B, b], [C, c]$ est l'intersection de $AA1$ et de $BB1$ c'est à dire l'intersection des bissectrices K qui est le centre du cercle inscrit.

Lemme3

Soient un triangle ABC et $K1$ un point de la droite BC.
Alors $K1$ est la projection sur BC du centre du cercle inscrit à ABC si et seulement si :

$$K1B - K1C = AB - AC$$



Soit K le centre du cercle inscrit à ABC.
Soient $K1,\ K2$ et $K3$ les projections respectives de K sur $BC,\ AC$ et AB. Puisque les côtés AB, AC, BC sont des tangentes au cercle inscrit et que $K1, K2, K3$ sont les points de contact de ces tangentes, on a :

$$BK1 = BK3,\ CK1 = CK2,\ AK2 = AK3$$

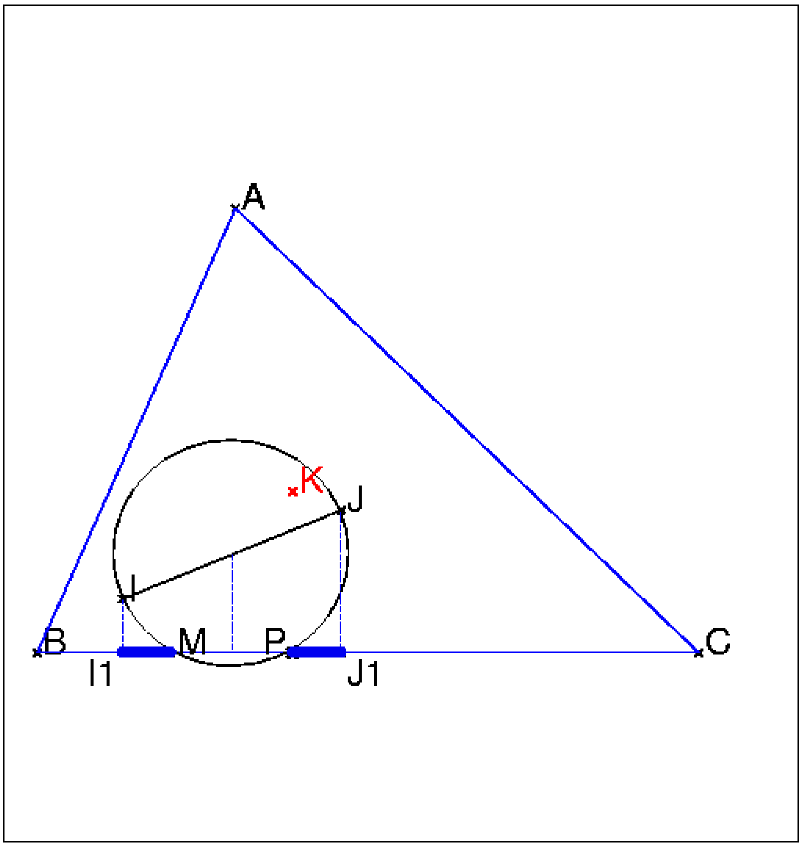
et $K1,\ K2$ et $K3$ se trouvent respectivement sur les segments sur $BC,\ AC$ et AB.
Donc :

$$AB - AC = AK3 + K3B - (AK2 + K2C) = K1B - K1C$$

Soit $K1$ tel que $K1B - K1C = AB - AC$.
Le point $K1$ se trouve sur le segment BC en effet si $K1$ était à l'exterieur de BC on aurait $|K1B - K1C| = |BC| > |AB - AC|$ d'apres l'inégalité triangulaire ce qui condredit l'hypothèse $K1B - K1C = AB - AC$. L'égalité $K1B - K1C = AB - AC$ définit un seul point $K1$ du segment BC, ce point est donc la projection du centre du cercle inscrit à ABC

7.5.3 La solution géométrique

Pour la solution géométrique, on va se servir des lemmes 1 et 3. La bissectrice de l'angle BMA et la bissectrice de l'angle CMA sont perpendiculaire donc M est sur le cercle de diamétre IJ. Ce cercle coupe le segment BC en M et P. Montrons que P est fixe. Soient $I1$ et $J1$ les projections de I et J sur BC.



D'après le **lemme3** on a :
$I1B - I1M = AB - AM$ et
$J1M - J1C = AM - AC$ donc

$$I1B - I1M + J1M - J1C = AB - AM + AM - AC = AB - AC$$

Puisque $I1$ et $J1$ sont entre B et C, et que M et P sont entre $I1$ et $J1$, on a M et P sont entre B et C.
D'après le **lemme1** on a :
$\overrightarrow{I1M} = \overrightarrow{PJ1}$ et $\overrightarrow{I1P} = \overrightarrow{MJ1}$ donc

$$I1B - I1M + J1M - J1C = I1B - PJ1 + I1P - J1C$$

M et P sont entre B et C donc $I1B + I1P = PB$ et $PJ1 + J1C = PC$ d'où :

$$PB - PC = AB - AC$$

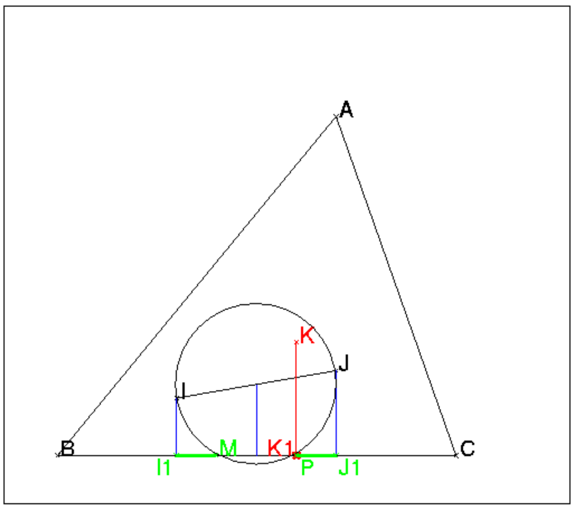
Le point P est fixe et P est la projection du centre K du cercle inscrit à ABC.

7.5.4 La solution avec `Xcas`

Le choix des paramètres est important ! Sans perte de généralité, on peut prendre l'origine du repère en B, et C sur l'axe des x d'abscisse a. Le point M est donc sur l'axe des x d'abscisse $m < a$.
Si on choisit comme paramètres les coordonnèes de A, `Xcas` n'arrive pas à faire les calculs (cf la remarque ci-après). Mais si on choisit comme paramètres les longueurs b et c des côtés AC et AB les calculs sont simples même si on ne définit pas les centres des cercles inscrits comme des barycentres : on peut indifférement mettre pour définir I :
`I:=barycentre([A,m],[B,l1],[M,c]);` (cf **lemme2**) ou
`I:=normal(centre(inscrit(A,B,M)));` (idem pour définir J et K) On tape :

```
B:=point(0);
supposons(a=[1,0,2,0.1]);
C:=point(a);
supposons(b=[0.9,0,2,0.1]);
supposons(c=[1.1,0,2,0.1]);
A:=inter(cercle(B,c),cercle(C,b))[1];
triangle(A,B,C);
supposons(m=[0.4,0,a,0.1]);
M:=point(m);
b1:=longueur(A,M);
I:=barycentre([A,m],[B,b1],[M,c]);
J:=barycentre([A,a-m],[C,b1],[M,b]);
K:=barycentre([A,a],[B,b],[C,c],affichage=1);
I1:=projection(droite(y=0),I,affichage=quadrant3);
J1:=projection(droite(y=0),J,affichage=quadrant4);
K1:=projection(droite(y=0),K,affichage=quadrant2+
                                          epaisseur_point_2);
```

On obtient :



On tape :

```
simplify(2*longueur(B,K1)-a))
```

On obtient :

```
-b+c
```

cela prouve le **lemme3** puisque $CK1 = a - BK1$ on a :

$$BK1 - CK1 = 2 * BK1 - a = c - b = AB - AC$$

On tape en se servant du **lemme1** pour définir P :

```
P:=I1+vecteur(M,J1):;
simplify(affixe(P))
```

On obtient :

```
(a-b+c)/2
```

Donc P est fixe.
On tape :

```
simplify(affixe(K1))
```

On obtient :

```
(a-b+c)/2
```

Donc P et $K1$ sont confondus.

Remarque On peut aussi faire faire le calcul à `Xcas` avec au départ plus de paramètres que nécessaire et donner ensuite les relations entre ces paramètres seulement à la fin des calculs.
On choisit comme paramètres :
$a1$ l'abscisse de A,
a l'abscisse de C,
m l'abscisse de M,
$b1$ la longueur de AM,
b la longueur de AC,
c la longueur de AB.
$\cos(B)$ le cosinus de l'angle B qu triangle ABC Ces paramètres vérifient :
$a1 = c * \cos(B)$
$b1^2 = m^2 + c^2 - 2m * c * cos(B)$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2a * c * \cos(B)$
Si on note $i1$ l'affixe de $I1$, $j1$ l'affixe de $J1$ et $p1$ l'affixe de $P1$, on a, avec les notations précédentes, $PB - PC = 2 * PB - a$.
On tape :

```
i1:=affixe(barycentre([point(a1),m],[point(0),b1],[point(m),c]));
j1:=affixe(barycentre([point(a1),a-m],[point(m),b],[point(a),b1]));
p1:=simplify(i1+j1-m);
res:=simplify(2*p1-1);
res:=simplify(subst(subst(res,[a1=c*cos(B),b1^2=m^2+c^2-2*m*c*cos(B)]
         cos(B)=(-b^2+c^2+a^2)/(2*c*a)));
```

On obtient alors facilement pour $PB - PC = 2 * PB - a$=`res` :
`-b+c`
Donc $PB - PC = c - b = AB - AC$.

7.6 Un problème de surface minimum

Ce problème a ète donné aux olympiades académiques de 2005.

7.6.1 Le problème

Soit une feuille de papier rectangulaire $ABCD$ de côtés $AB = 4$ unités et $BC = 6$ unités. Soient R un point du segment AB et, T un point du segment CB. R et T sont tels que si on plie la feuille selon le segment RT le point B se trouve sur le segment AD. On appelle S le point du segment AD qui coincide avec B lors du pliage.
On pose $AR = a$ et $BT = b$.

- Trouver les valeurs minimales et maximales de a,
- Trouver une relation entre a et b,
- Trouver la valeur de a pour laquelle l'aire de BRT est minimale.

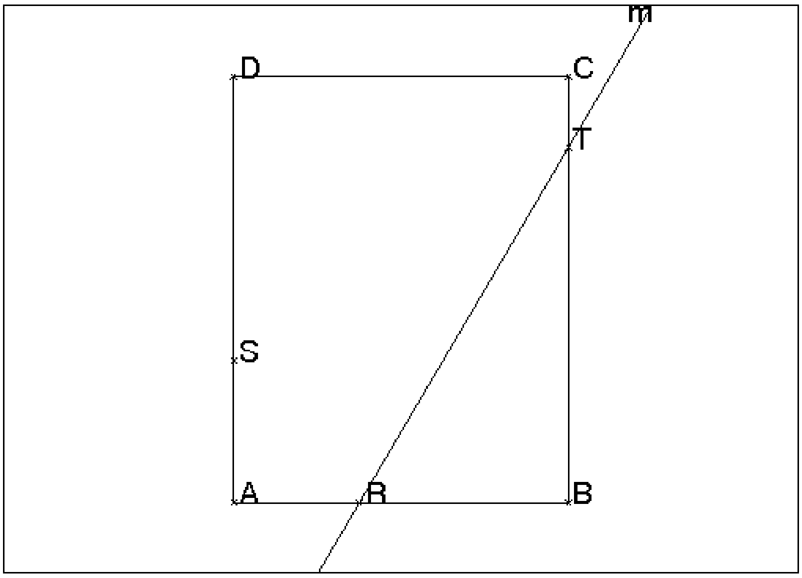
7.6.2 La figure

On peut faire la figure à l'aide d'une feuille de papier que l'on plie de façon à amener le coin B de la feuille sur AD ou bien, on utilise `Xcas` mais alors :

- on peut définir tout d'abord S, puis définir la pliure comme la médiatrice m de BS, puis on trouve les points R et T comme intersection de m avec les segments AB et BC.
  Grâce à `s:=element(0..6);S:=point(s*i);` on peut faire bouger le point S sur AD.
  On tape (voir `minis.xws`) :

```
A:=point(0);
B:=point(4);
C:=point(4+6*i);
D:=point(6*i);
quadrilatere(A,B,C,D);
assume(s=[2,0,6]);
S:=point(s*i);
m:=mediatrice(B,S);
R:=inter_unique(m,droite(A,B));
T:=inter_unique(m,droite(C,B));
equation(m);
r:=coordonnees(R);
t:=normal(coordonnees(T));
AT:=aire(triangle(R,B,T));
```

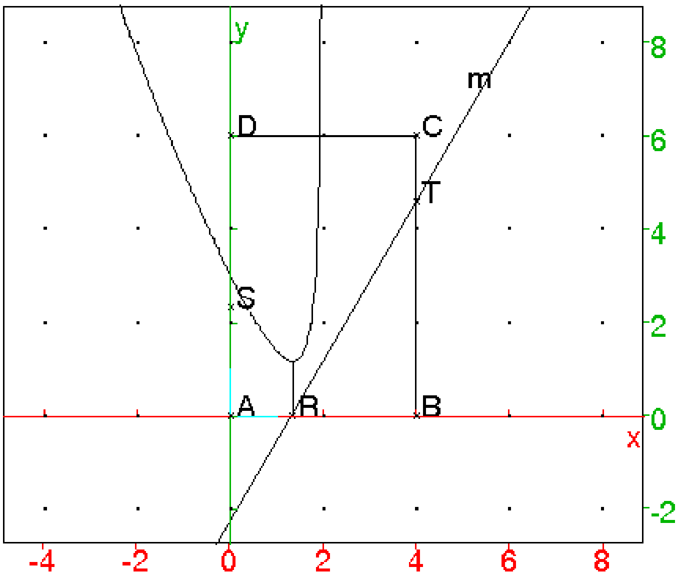
  On obtient :



— on peut définir tout d'abord R d'abscisse a, puis définir le point S comme intersection du cercle de centre R et de rayon $4 - a$ avec le segment AD, puis la pliure comme la médiatrice m de BS,
On tape (voir `minia.xws`) :

```
A:=point(0);
B:=point(4);
C:=point(4+6*i);
D:=point(6*i);
quadrilatere(A,B,C,D);
assume(a=[1,0,4]);
R:=point(a);
S:=inter(cercle(R,4-a),segment(A,D))[0];
m:=mediatrice(B,S);
T:=inter_unique(m,droite(C,B));
equation(m);
coordonnees(S);
normal(coordonnees(T));
AT:=aire(triangle(R,B,T));
plotfunc(AT-5,a);
segment(R,a+i*(AT-5));
```

Dans les 2 cas, on obtient, après réglage de la fenêtre graphique, la figure :



7.6.3 Les calculs avec `Xcas`

On obtient :

— dans le premier cas :
`equation(m)` et on obtient `Y=(4/s*X+(s^2-16)/(2*s))`
`coordonnees(R)` et on obtient `[-1/8*s^2+2,0]`
`normal(coordonnees(T))` et on obtient `[4,(s^2+16)/(2*s)]`
`AT:=aire(triangle(R,B,T))` et on obtient `(s^2+16)/2/s*(1/8*s^2+2)/2`
mais toutes les réponses sont fonction de `s` qui a été choisi comme paramètre.
Si on veut avoir la relation liant b et a on tape :
`factor(resultant(a-r[0],numer(b-t[1]),s))`
on obtient :
`32*(2*a^2+a*b^2-16*a-2*b^2+32)` donc `2*a^2+a*b^2-16*a-2*b^2+32=0`

— dans le deuxième cas :
pour `equation(m)`, on obtient `y=((-(sqrt(-2*a+4)))/(a-2)*x+a*sqrt(-2*a+4)/(a-2))`
pour `coordonnees(S)`, on obtient `[0,sqrt((-a+4)^2-a^2)]`
pour `normal(coordonnees(T))`, on obtient `[4,(a-4)*sqrt(-2*a+4)/(a-2)]`
pour `AT:=aire(triangle(R,B,T))`, on obtient `(a-4)*sqrt(-2*a+4)/(a-2)*(4-a)/2`
donc `b=(a-4)*sqrt(-2*a+4)/(a-2)` ou encore :
si $a \neq 2$ on a :
`factor(b^2*(a-2)^2-(a-4)^2*(4-2*a))=0 (a-2)*(b^2*a-2*b^2+2*a^2-16*a+32)=`
donc `2*a^2+a*b^2-16*a-2*b^2+32=0`

7.6.4 La démonstration

Les valeurs minimales et maximales de a

En faisant bouger `s` ou `a`, on voit que `R` va se déplacer du point `A` au point `R1` d'abscisse `a1` qui correspond à `S` en `S1` et `T` en `C`, c'est à dire lorsque `m` passe par `C`.
On a alors :
$S = 0 + i * s$ avec $0 \leq s \leq 6$ et $SC = 6$ donc S est sur le cercle de centre `C` et de rayon 6 qui a pour équation : $(X - 4)^2 + (Y - 6)^2 = 36$
si $X = 0$ on a $(Y - 6)^2 = 36 - 16 = 20$ donc $s = 6 - \sqrt{20} = 6 - 2\sqrt{5}$
On a :
$S1R1 = 4 - a1$, $AR1 = a1$ et $AS1 = 6 - 2\sqrt{5}$
comme le triangle $AS1R1$ est rectangle en A on a :
$(4 - a1)^2 = a1^2 + (6 - 2\sqrt{5})^2 = a1^2 + -24 * \sqrt{5} + 56$
donc
$-8 * a1 = -24 * \sqrt{5} + 40$
donc $a1 = 3 * \sqrt{5} - 5$.
Autre solution :
Le triangle $DS1C$ est rectangle donc $DS1^2 = 36 - 16 = 20 = (6 - s1)^2$ soit $DS1 = 2\sqrt{5}$
Les triangles rectangles $AR1S1$ et $DS1C$ sont semblables donc :
$AR1/DS1 = a1/(2\sqrt{5}) = R1S1/S1C = (4 - a1)/6$ soit
$a1(6 + 2\sqrt{5}) = 8\sqrt{5}$ donc
$a1 = 8\sqrt{5} * (6 - 2\sqrt{5})/16 = 3\sqrt{5} - 5$
Donc $0 \leq a \leq 3\sqrt{5} - 5 \simeq 1.7082039325$.

Relation entre a et b

Soit E la projection de T sur AD.
Le triangle ARS est rectangle en A donc $AS^2 = SR^2 - AR^2$ soit :
$s^2 = (4 - a)^2 - a^2 = 8 * (2 - a)$ Les triangles rectangles ARS et EST sont semblables donc :
$RS/ST = (4 - a)/b = AS/ET = s/4$ soit
$s = 4(4 - a)/b$, soit $s^2 = 16 * (4 - a)^2/b^2 = 8 * (2 - a)$ donc :
$(2 - a) * b^2 - 2 * (4 - a)^2 = 0$
Si on développe :
`expand((2-a)*b^2-2*(4-a)^2)`, on trouve `-b^2*a+2*b^2-2*a^2+16*a-32`

Valeur de a pour que l'aire de BRT soit minimale

On veut avoir $(4 - a) * b$ minimum. On pose $u = (4 - a) * b$ on a donc :
$b = u/(4 - a)$ donc $= 0$ soit
$(2 - a) * u^2 = 2 * (4 - a)^4$ c'est à dire :
$u^2 = 2 * (4 - a)^4/(2 - a)$
On cherche les variations de u et on tape :
`factor(diff(2*(4-a)^4/(2-a),a))`
On obtient :

`(-2*(3*a-4)*(a-4)^3)/((a-2)^2) u*u'` est positif pour `a>4/3` et est negatif pour `a<4/3`.
Donc lorsque `a=4/3`, `u` est minimum.
On tape :
`subst(2*(4-a)^4/(2-a),a=4/3)`
On obtient :
`4096/27` Donc la surface minimum vaut :
`normal(sqrt(4096/27))=(192*sqrt(3))/27`
la valeur de `b` est :
`normal((192*sqrt(3))/27/(4-4/3))=8*sqrt(3)/3` a valeur de `s` est :
`normal(sqrt(8*(2-4/3)))=(4*sqrt(3))/3`
Dans ce cas le triangle BTR est un demi triangle équilatéral puisque :
`b=8*sqrt(3)/3` et `4-a=8/3`.
L'angle `T` du triangle isocèle BTS vaut donc $pi/3$: ce triangle est donc équilatéral.

7.7 La boite de biscuits

7.7.1 L'énoncé 1

On veut emballer 40 biscuits d'epaisseur 0.5 cm et ayant la forme d'un quart de cercle de rayon 5 cm dans une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Les biscuits sont dans 2 sachets fraicheur de 20 biscuits et ayant chacun 10 cm de haut.

— On décide de mettre les 2 sachets bout à bout. Quelle sont les dimensions de la boite et calculer sa surface.
— On décide de mettre les 2 sachets de façon qu'ils soient tangents. Quelle sont les dimensions de la boite et calculer sa surface.
— Quelle est la boite la plus économique ?

7.7.2 Solution de l'énoncé 1

La réponse :
— La boite a comme dimension : $20 \times 5 \times 5$. Sa surface est donc : 2*5*5+20*4*5=450 cm^2.
— On ouvre un écran de géométrie (`Alt+g`) et on tape : `cercle(point(0),5,0,pi/2,affichage=1-`
cela dessine le premier biscuit. La position du deuxième biscuit aura pour centre `point(a,5)` et il faut trouver `a` pour que les 2 cercles soient tangents.
On tape :

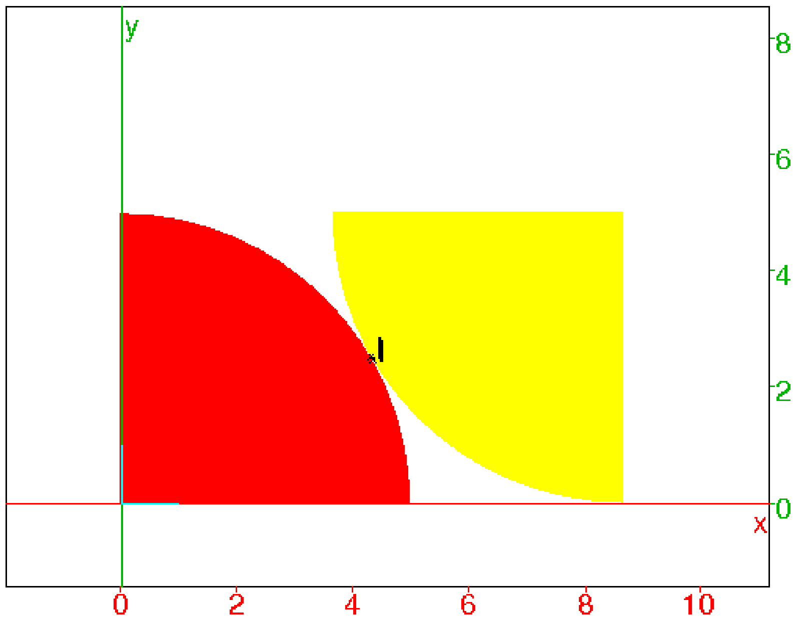
```
 cercle(point(0),5,0,pi/2,affichage=1+rempli);
supposons(a=[8.66,5,10,0.01]);
 cercle(point(a,5),5,pi,3*pi/2,affichage=3+rempli);
I:=inter(cercle(point(a,5),5,pi,3*pi/2),
cercle(point(0),5,0,pi/2))
```

et on fait bouger le curseur `a`. On trouve que `a` est proche de 8.66 car il n'y a qu'un point d'intersection.
Pour faire un calcul exact à la main, il suffit de savoir que le point de tangence des deux biscuits se trouve au milieu du segment qui joint les centres

qui est ici le `segment(0,point(a+5*i))`. Lorsque les 2 cercles sont tangents ce segment a pour longueur 10 cm. Donc on a d'après le théorème de Pythagore :
$a^2 = 10^2 - 5^2 = 75$ donc $a = 5\sqrt{3} \simeq 8.66025403784$.
La boite a comme dimension : $10 \times 5 \times 5\sqrt{3}$. Sa surface est donc : $2*5*5\sqrt{3}+10*2*(5+5\sqrt{3}) = 100+150\sqrt{3} = 359.807621135\ cm^2$

— La deuxième boite de suface 359.807621135 cm^2 est la plus économique.

On a :



7.7.3 L'énoncé 2

On veut emballer 40 biscuits d'epaisseur 0.5 cm et ayant la forme d'un quart de cercle de rayon 5 cm dans une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Les biscuits sont dans 5 sachets fraicheur de 8 biscuits et ayant chacun 4 cm de haut.
On décide de mettre un sachet dans chaque coin de la boite et 1 sachet au milieu, de façon qu'ils soient tangents aux 4 autres. Quelle est la dimension de la boite de surface minimum ?

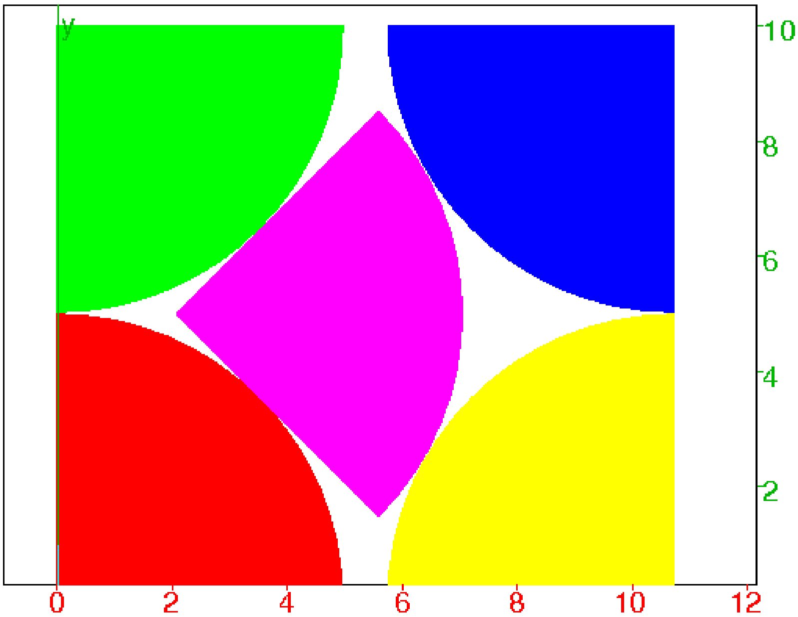
7.7.4 Solution de l'énoncé 2

La réponse :
On ouvre un écran de géométrie (`Alt+g`). Le premier biscuit sera `cercle(point(0),5,0,pi/2,a`
On choisit un paramètre `a` et on positionne le deuxième biscuit dans le coin `D:=point(0,10+2*a)`
Le cinquième biscuit (celui que l'on met au milieu de la boite) aura pour centre I qui sera le point d'intersection de la tangente au biscuit 1 d'équation $y = -x+5*\sqrt{2}$ avec $y = 5+a$.
Le troisième biscuit doit être tangents au cinquième biscuit, son centre J est donc

sur l'axe des x et sur le cercle de centre I et de rayon 10. IL faut bien sûr imposer que `abscisse(J)>=10` Il faut trouver `a` pour que la surface de la boite soient minimum.
On tape :

```
cercle(point(0),5,0,pi/2,affichage=1+rempli);
supposons(a=[1.66,0,5,0.01]);
cercle(point(0,10+2*a),5,3*pi/2,2*pi,affichage=2+rempli);
I:=inter_unique(droite(y=5+a),droite(y=-x+5*sqrt(2)));
cercle(I,5,-pi/4,pi/4,affichage=5+rempli);
J:=inter(droite(y=0),cercle(I,10))[0]:;
cercle(J,5,pi/2,pi,affichage=3+rempli);
cercle(translation((10+2*a)*i,J),4,pi,3*pi/2,affichage=5+rempli);
xj:=normal(abscisse(J))
evalf(xj*(10+2*a)*2+2*4*(xj+10+2*a)
```

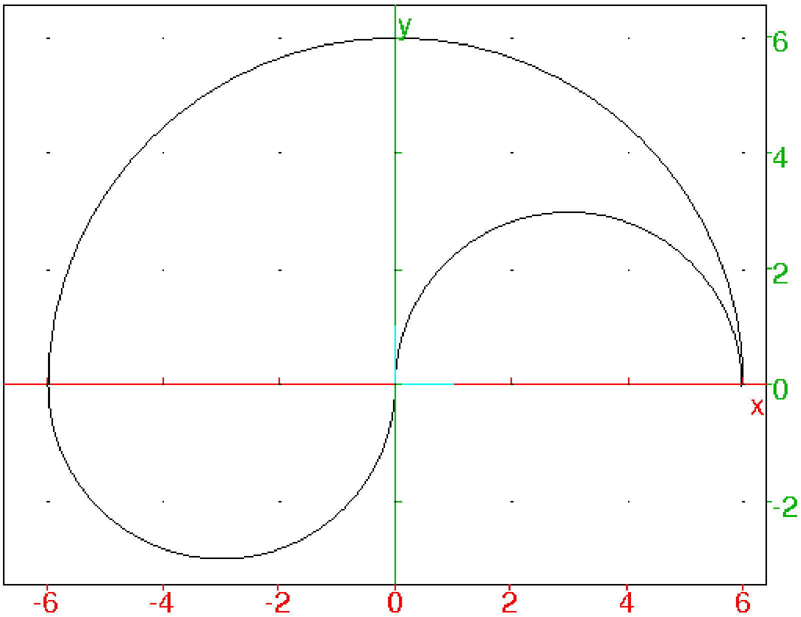
et on fait bouger le curseur `a`. On trouve que `a` varie entre 0 et 0.453289254261.
En effet : `xj:=normal(abscisse(J))` renvoie :
`-a+5*sqrt(2)-5+sqrt(-a^2-10*a+75)` et
`evalf(solve(-a^2-10*a+75-(15+a-5*sqrt(2))^2=0,a))`
renvoie `[-13.3822214424,0.453289254261]`
la surface de la boite est donc :
`xj*(10+2*a)*2+8*(xj+10+2*a)`
qui varie de `380.477011792` à `385.361761927` lorsque `a` varie de `0` à `0.45`
Donc on prend `a=0` et alors `xj` vaut `5*sqrt(2)-5+5sqrt(3)` ou encore `10.7313218497`
La boite est donc de dimensions $4*5*(5\sqrt{2}-5+5\sqrt{3})$ et sa surface vaut `20*(5*sqrt(2)-5+5*sqrt(3))+8*(5*sqrt(2)-5+5*sqrt(3)+80)`
c'està dire :
`28*(5*sqrt(2)-5+5*sqrt(3))+80` ou encore `380.477011792`
On obtient :



7.8 Une construction géométrique : inscrire un carré dans une "goutte"

7.8.1 L'énoncé

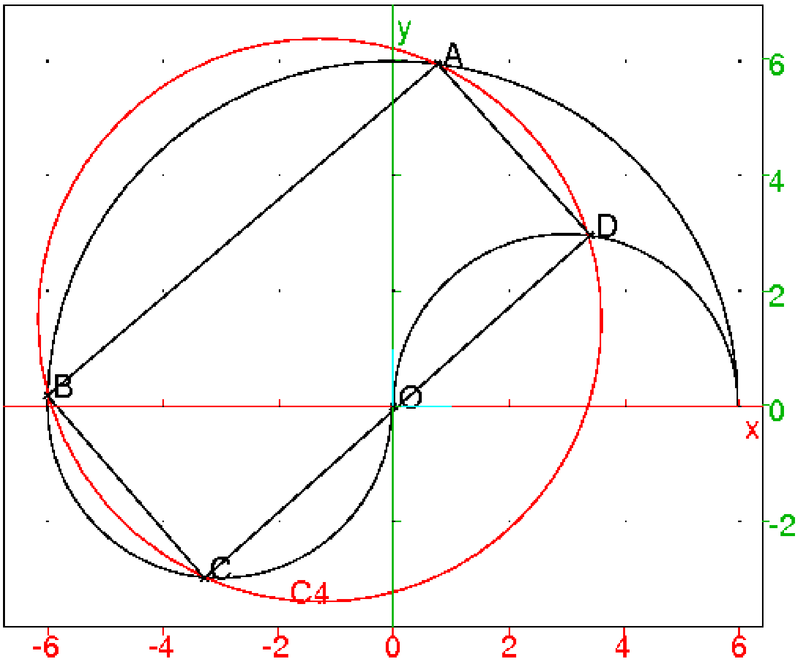
Une goutte d'eau representée ci-dessous est constituée par 2 demi-cercles $C2$ et $C3$ de centre $O2$ et $O3$ et rayon r et d'un demi-cercle $C1$ de centre O et de rayon $2r$.



On cherche à placer 4 A, B, C, D points surle contour de cette goutte pour que $ABCD$ soit un carré.
Pour chercher, on fait la figure suivante et on tape dans un écran de géométrie :

```
C1:=cercle(0,6,0,pi):;C1;
C2:=cercle(3,3,0,pi):;C2;
C3:=cercle(-3,3,pi,2*pi):;C3;
a:=element(0 .. pi,1.947787474,0.031415927);
A:=element(C1,a);
c:=element(pi .. (2*pi),4.618141269,0.031415927)
C:=element(C3,c);
C4:=cercle(A,C,affichage=rouge);
B:=inter(C4,C1)[0];
D:=inter(C4,C2)[1];
polygone(A,B,C,D);
O:=point(0);
```

On fait bouger les curseurs a et c pour essayer d'avoir un rectangle et on obtient :



Il semble que le segment CD passe par O.

7.8.2 Des lemmes sur les rectangles et leur cercle circonscrit

Les lemmes qui suivent vont montrer que si un rectangle direct $ABCD$ a ses sommets sur le pourtour de la goutte un de ses sommets est le point d'intersection A de $C1$ et $C3$ et son côté CD passe par 0.

Lemme 1
Si 3 sommets d'un rectangle sont sur un demi-cercle Γ de centre O, alors le quatrième sommet se trouve sur le demi-cercle γ symétrique de Γ par rapport à O. Dans le cas de la goutte cela veut dire que si un rectangle a ses sommets sur le pourtour de la goutte, il ne peut pas y avoir 3 sommets sur le même demi cercle.

Lemme 2
Si 2 sommets M et P d'un rectangle sont sur un demi-cercle Γ de centre O, alors ces sommets sont consécutifs car sinon le centre de Γ serait le milieu de MP et le rectangle aura ses 4 sommets sur le cercle de diamètre MP (cercle qui contient Γ). Dans le cas de la goutte cela veut dire que si un rectangle a deux sommets sur un même demi-cercle (faisant partie du pourtour de la goutte) alors ces 2 sommets sont consécutifs.

Lemme 3
Soient $c1$, $c2$ et $c3$ les cercles complétant $C1$, $C2$ et $C3$ Montrons qu'il n'y a pas

de rectangle ayant tous ses sommets sur $C2 \cup C3$. En effet, si par exemple A et B sont sur $C3$ et si C et D sont sur $C2$: l'angle A est droit donc le symétrique $B1$ de B par rapport à $O3$ se trouve sur AD et sur $c3$ et l'angle B est droit donc le symétrique $A1$ de A par rapport à $O3$ se trouve sur BC et sur $c3$: les deux droites AD et BC sont donc symétriques par rapport à $O3$.
De même l'angle C est droit donc le symétrique $D1$ de D par rapport à $O2$ e trouve sur BC et sur $c2$ etc...Donc les deux droites AD et BC sont donc symétriques par rapport à $O2$.
Donc AD et BC sont paralléles à $O2O3$ c'est à dire que AB et AC sont confondus et le rectangle se réduit à une droite.

Lemme 4
Supposons qu'il y ait 2 sommets A et B sur le demi-cercle $C2$. Les côtés AD et BC sont symétriques par rapport à $O2$ et ces côtés coupent $C1$ et $C3$ en des points qui sont de part et d'autre de AB. Donc A et B ne sont pas consécutifs.

Lemme 5
Supposons qu'il y ait 2 sommets A et B sur le demi-cercle $C3$. Les côtés AD et BC sont symétriques par rapport à $O3$.
Supposons que D soit sur $C1$ et que AD coupe $c1$ en $D1$. L'angle D est droit donc DC passe par $D2$ symétrique de $D1$ par rapport à O et donc $D2$ est sur $C1$.
BC coupe le cercle $c3$ en $A3$ symétrique de A par rapport à $O3$ et coupe le cercle $C2$ en $A2$ et en C. L'angle C est droit donc DC passe par $A3$ symétrique de $A2$ par rapport à $O2$ et donc $A3$ est sur $c2$.
Donc si DC passe par $D2$ situé sur $C1$, il ne peut pas couper $c2$ que si $D2$ et $A3$ sont confondus et sont sur la droitre $OO2$ c'est à dire si A se trouve en P intersection de $C1$ et $C3$.
Même raisonnement si C est sur $C1$ et D sur $C2$.

Lemme 6
Il y a 2 sommets sur le demi-cercle C Soient da et db les perpendiculaires à AB en A et B. Considérons $A1$ et $B1$ les symétriques de A et B par rapport à O. Puisque $AA1$ et $BB1$ sont des diamètres du cercle de centre O et de rayon $2r$, da passe par $B1$ et db passe par $A1$. $AB1$ et $A1B$ sont des segments symétriques par rapport à O et les demi-cercles de rayon r sont aussi symétriques par rapport à O. Donc $AB1$ et $A1B$ coupent les demi-cercles de rayon r en deux points D et C symétriques par rapport à O. Donc DC passe par O.

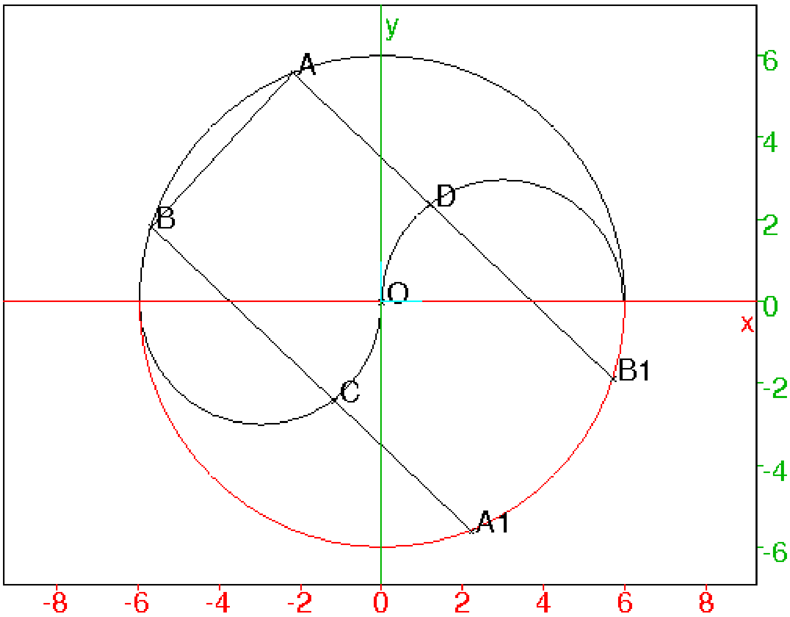
7.8.3 Construction du carré

Si A et B sont sur le demi-cercle de centre O et de rayon $2r$ alors le segment CD passe par O si les angles A et B de $ABCD$ sont droits, On tape :

```
C1:=cercle(0,6,0,pi):;C1;
C2:=cercle(3,3,0,pi):;C2;
C3:=cercle(-3,3,pi,2*pi):;C3;
O:=point(0);
a:=element(0 .. pi,1.947787474,0.031415927);
A:=element(C1,a);
b:=element(0 .. pi,2.82743343,0.031415927;)
```

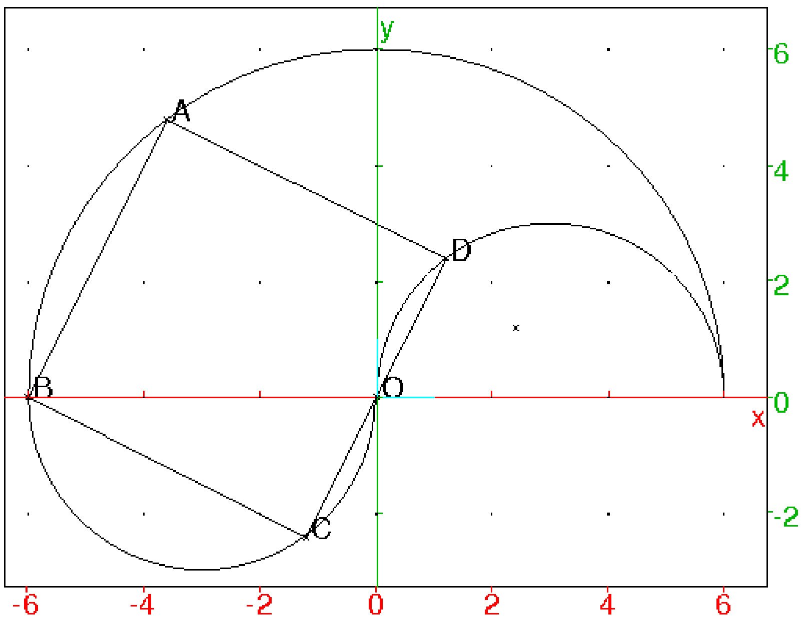
```
B:=element(C1,b);
C5:=cercle(0,6,pi,2*pi):;affichage(C5,1);
A1:=symetrie(O,A);
B1:=symetrie(O,B);
s1:=segment(A,B1):;s1;
s2:=segment(A1,B):;s2;
D:=inter(C2,s1)[1];
C:=inter(C3,s2)[1];
segment(A,B);
```

On obtient :



Pour avoir un carré il suffira de choisir $OA = 2r$ et $OD = AD/2$ donc $OD^2 + AD^2 = 5 * OD^2 = 4 * r^2$ c'est à dire :
$OD = 2r\sqrt{5}/5$.
Dans la figure on a choisit $r = 3$ donc $OD = 6/5 * sqrt5$ OD est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côté 6/5 et 12/5. Si le point `D1:=point(12/5,6/5):;D1`, on a $OD = OD1$.
On tape dans un écran de géométrie :

```
C1:=cercle(0,6,0,pi):;C1;
C2:=cercle(3,3,0,pi):;C2;
C3:=cercle(-3,3,pi,2*pi):;C3;
O:=point(0);
D1:=point(12/5,6/5):;D1;
D:=inter(C2,cercle(O,longueur(O,D1)))[0];
C:=symetrie(O,D);
carre(C,D,A,B);
```



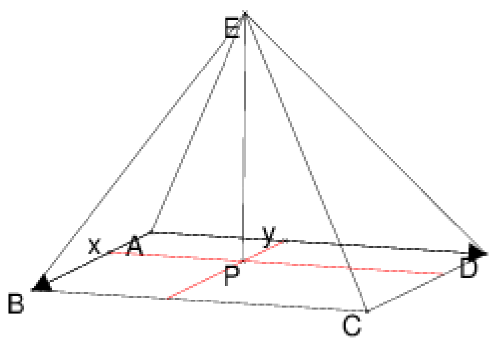
On obtient :
On remarque que :
le point B est sur l'axe des x car l'angle C est droit,
le point D a pour coordonnées $6/5, 12/5$.

Chapitre 8

Géométrie dans l'espace seconde et terminale

8.0.4 Exercice 1

Soit $ABCDE$ une pyramide de sommet E et de base rectangulaire $ABCD$.
On sait que $AE = 21$, $BE = 36$ et $CE = 18$.
Calculer DE
Trouver une formule générale reliant AE, BE, CE, DE.



Soient P la projection de E sur le plan $ABCD$ et x et y les coordonnées de P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
On a :
$AP^2 = x^2 + y^2$
$BP^2 = (AB - x)^2 + y^2$
$CP^2 = (AB - x)^2 + (AD - y)^2$
$DP^2 = x^2 + (AD - y)^2$

Donc :
$AE^2 = AP^2 + PE^2 = x^2 + y^2 + PE^2$ $BE^2 = (AB - x)^2 + y^2 + PE^2$
$CE^2 = (AB - x)^2 + (AD - y)^2 + PE^2$
$DE^2 = x^2 + (AD - y)^2 + PE^2$
On en déduit que :
$AE^2 - BE^2 + CE^2 = x^2 + (AD - y)^2 + PE^2 = DE^2$
D'où la formule :

$$AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$$

Application numérique Si $AE = 21$, $BE = 36$ et $CE = 18$, on a :
$DE = 21^2 + 18^2 - 36^2$
On tape :
```
sqrt(21^2+18^2-36^2)
```
On obtient :
```
27
```

8.0.5 Exercice 2

Chapitre 9

Le "baccalauréat" suisse de 1896

Il s'agit des épreuves que Einstein passe en 1896 à l'age de 17 ans et demi en Suisse, ce qui est l'équivalent de notre baccalauréat.
À l'époque tous les calculs étaient lons et fastidieux car faits à l'aide de table

9.1 Épreuve de géométrie de 4h

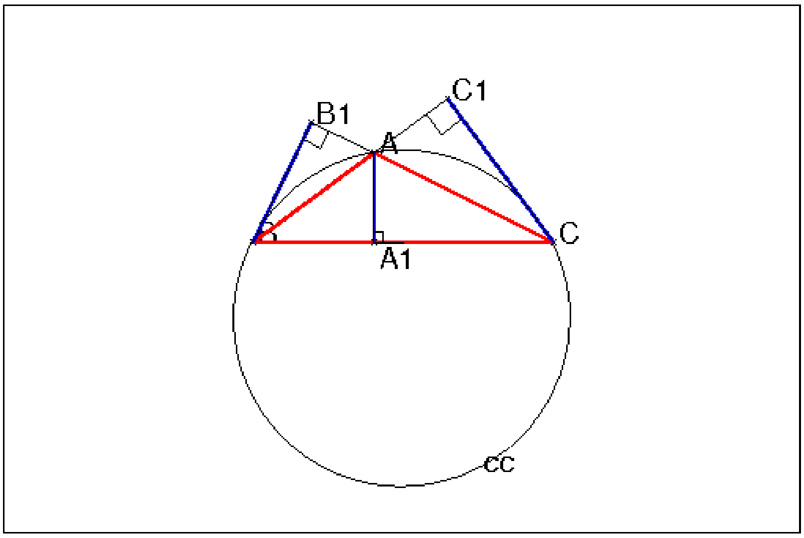
9.1.1 Exercice 1

L'énoncé

Un triangle inscrit dans un cercle de rayon $R = 10$ a ses hauteurs proportionnelles à 2, 3 et 4.
Calculer les angles et un côté.

La solution avec `Xcas`

Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$h_A = 2k$, $h_B = 3k$, $h_C = 4k$,
On a :
$\sin(A) = \dfrac{h_B}{c} = \dfrac{h_C}{b} = \dfrac{3k}{c} = \dfrac{4k}{b}$
$\sin(B) = \dfrac{h_A}{c} = \dfrac{h_C}{a} = \dfrac{2k}{c} = \dfrac{4k}{a}$
$\sin(C) = \dfrac{h_B}{a} = \dfrac{h_A}{b} = \dfrac{3k}{a} = \dfrac{2k}{b}$
Donc :
$a = 2c$ et $b = \frac{4c}{3}$ et
$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos(A)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$
On fait une figure :



Donc on a :

— $4c\frac{4c}{3}\cos(C) = c^2(4 + \frac{16}{9} - 1 = c^2\frac{43}{9}$soit :
  $\cos(C) = \frac{43}{16 * 3} = \frac{43}{48}$ et $\sin(C) = \frac{\sqrt{455}}{48}$
  On tape :
  `C:=acos(43/48.)`
  On obtient :
  `0.460493425059`

— $4c^2\cos(B) = 4c^2 + c^2 - \frac{16c^2}{9} = c^2\frac{29}{9}$ soit :
  $\cos(B) = \frac{29}{36}$ et $\sin(B) = \frac{\sqrt{455}}{36}$
  On tape :
  `B:=acos(29/36.)`
  On obtient :
  `0.634183840824`

— $2c\frac{4c}{3}\cos(A) = +c^2 + \frac{16c^2}{9} - 4c^2 = c^2\frac{-11}{9}$soit :
  $\cos(A) = \frac{-11}{24}$ et $\sin(A) = \frac{\sqrt{455}}{24}$
  On tape :
  `A:=acos(-11/24.)`
  On obtient :
  `2.04691538771`

On sait que :
$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R = 20$ et
Donc on a :

— $c = 20\sin(C) = \dfrac{5\sqrt{455}}{12}$
On tape :
`c:=5*sqrt(455)/12.)`
On obtient :
`8.88780375321`

— $b = \dfrac{4c}{3} = \dfrac{5\sqrt{455}}{9}$
On tape :
`b:=4c/3`
On obtient :
`11.8504050043`

— $a = 2c = \dfrac{5\sqrt{455}}{6}$
On tape :
`a:=2*c)`
On obtient :
`17.7756075064`

On construit le triangle ABC et on tape :

```
B:=point(0);
C:=point(5*sqrt(455)/6);
A:=point(5*sqrt(455)/12*(29/36+i*sqrt(455)/36));
triangle(A,B,C);
cc:=circonscrit(A,B,C);
```

0n tape :
`normal(rayon(cc));`
On obtient : `10`
0n tape :
`A1:=projection(droite(B,C),A);`
`normal(longueur(A,A1));`
On obtient : `2275/432`
Donc le coefficient de proportionnalité k pour les hauteurs vaut :
$\dfrac{2275}{864}$

Une autre solution avec `Xcas`

Si S est l'aire du triangle ABC on a :
$2S = ah_A = bh_B = ch_c$
Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$h_A = 2k$, $h_B = 3k$, $h_C = 4k$ donc,
$2a = 3b = 4c$ c'està dire $a = 2c$ et $b = 4/3c$
Le triangle ABC est donc semblable au triangle de côtés :
$a = 6, b = 4, c = 3$
On sait que le rayon R du cercle circonscrit est égal à :

$R=\dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ avec $2p=a+b+c$.
Avec `Xcas`, on calcul le rayon du cercle circonscrit au triangle $a=6, b=4, c=3$, on tape :

```
a:=6
b:=4
c:=3
p:=(a+b+c)/2
R:=a*b*c/4/sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c))
```

On obtient :

```
(72*sqrt(455))/455
```

On veut avoir que le rayon du cercle circonscrit soit ègale à 10 donc le triangle cherché est proportionnel au triangle de côtés $a=6, b=4, c=3$ avec comme coefficient de proportionnalité :
$k=\frac{10\sqrt{455}}{72}=\frac{5\sqrt{455}}{36}$.
Les côtés du triangle cherché sont donc :
$BC=\dfrac{5\sqrt{455}}{6},\ \ AC=\dfrac{5\sqrt{455}}{9},\ \ AB=\dfrac{5\sqrt{455}}{12}$
Les angles de ABC sont les mêmes que les angles du triangle de côtés $a=6, b=4, c=3$ donc on a :
$2bc\cos(A)=b^2+c^2-a^2$
$2ac\cos(B)=a^2+c^2-b^2$
$2ab\cos(C)=a^2+b^2-c^2$
Avec `Xcas`, on tape :

```
A:=evalf(acos((b^2+c^2-a^2)/(2*b*c)))
```

On obtient :

```
2.04691538771
```

On tape :

```
B:=evalf(acos((a^2+c^2-b^2)/(2*a*c)))
```

On obtient :

```
0.634183840824
```

On tape :

```
C:=evalf(acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b)))
```

On obtient :

```
0.460493425059
```

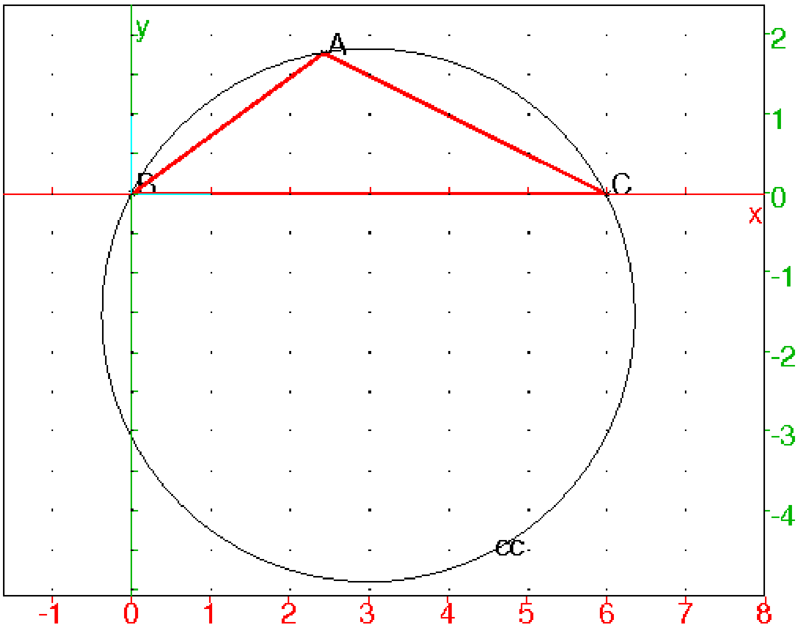
La solution de `Xcas`

`Xcas` fait de la géométrie analytique.
On dessine le triangle direct ABC de côtés $a=6, b=4, c=3$ en mettant B à l'origine du repère et C sur l'axe des x.
On tape :

```
B:=point(0);
C:=point(6);
A:=inter(cercle(0,3),cercle(5,4))[1];
triangle(A,B,C,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
tA:=angle(A,B,C);
tB:=angle(B,C,A);
```

```
tC:=angle(C,A,B);
cc:=circonscrit(A,B,C);
R:=rayon(cc);
```

On obtient :



Avec :
pour `tA : atan(((sqrt(455))/2)/(-11/2))+(2*pi)/2`
pour `tB :atan(((sqrt(455))/2)/(29/2))`
pour `tC : -(atan(((sqrt(455))/2)/(43/2)))`
pour `evalf(tA) : 2.04691538771`
pour `evalf(tB) : 0.634183840824`
pour `evalf(tC) : 0.460493425059`
pour `R : (72*sqrt(455))/455`

9.1.2 Exercice 2

L'énoncé

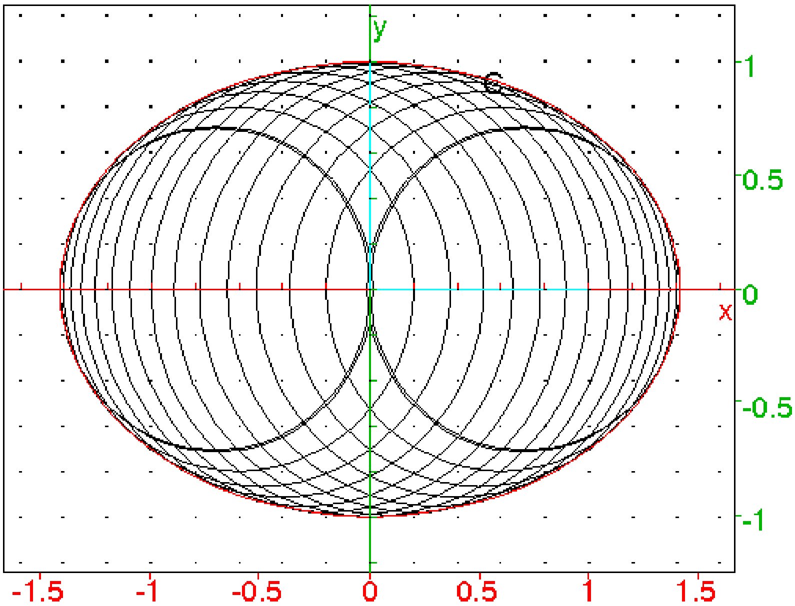
On donne un cercle de rayon r dont le centre se trouve à l'origine O d'un repère orthonormal.
On considère les cordes de ce cercle perpendiculaires à l'axe des x.
Les cercles ayant ces cordes comme diamètres sont tangents à l'ellipse de demi-axes $r\sqrt{2}$ et r, aussi longtemps que la distance d de leur centre à O ne dépasse pas une certaine valeur maximale.
Démontrer cette proposition et déterminer la valeur maximale de d.

La solution avec `Xcas`

On considère la corde du cercle centre O et de rayon r qui a pour abscisse $-r \leq a \leq r$ et qui est perpendiculaire à l'axe des x.
Le cercle de diamètre cette corde a donc pour rayon $\sqrt{r^2 - a^2}$ et pour équation :
$(x - a)^2 + y^2 = r^2 - a^2$ ou encore :
$x^2 + y^2 - 2ax + 2a^2 - r^2 = 0$
Avec `Xcas`, on suppose que $r = 1$ et on tape :

```
ellipse(-1,1,sqrt(2),affichage
=1)supposons(a=[0.5,-1/sqrt(2),1/sqrt(2),0.1]);
C:=cerle(a,sqrt(1-a^2));
```

Puis, on fait bouger a en gardant la trace de `C` (menu `M->Trace objet->C`).
On obtient :



Nous allons montrer que l'enveloppe de ces cercles est une ellipse de centre O et de demi-axes $r\sqrt{2}$ et r (c'est ce que l'on voit sur la figure ci-dessus).
Le point $M = (x, y)$ de contact du cercle et de son enveloppe vérifie les équations :
$x^2 + y^2 - 2ax + 2a^2 - r^2 = 0$ et
$-2x + 4a = 0$ (obtenu en dérivant par rapport à a)
donc $M = (2a, \sqrt{r^2 - 2 * a^2})$ ou $M = (2a, -\sqrt{r^2 - 2 * a^2})$.
Il faut donc que $r^2 - 2 * a^2 \geq 0$ soit $a \leq \frac{r\sqrt{2}}{2}$.
Puisque $a = x/2$ M est sur la courbe d'équation :
$x^2 + y^2 - 2(x/2)x + 2(x/2)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - x^2 + x^2/2 - r^2 = x^2 + 2y^2 - 2r^2 0.$
Donc M se déplace donc sur l'ellipse d'équation :
$x^2 + 2y^2 = 2r^2$.
Cette ellipse a pour centre O et pour demi-axes $r\sqrt{2}$ et r.

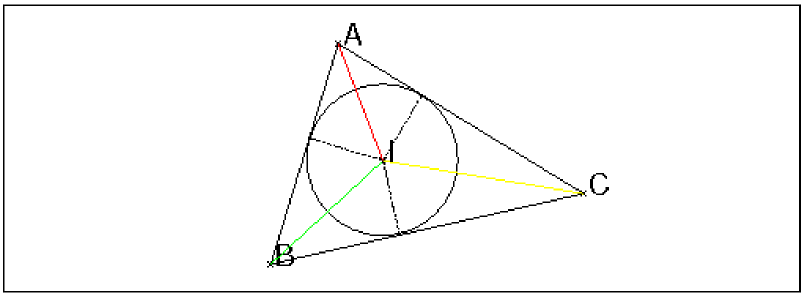
9.2 Épreuve d'algébre de 2h

9.2.1 L'énoncé

Dans un triangle on connait les distance $l,\ m,\ n$ du centre du cercle inscrit aux sommets.
Déterminer le rayon r du cercle inscrit lorsque $l = 1,\ m = 1/2,\ n = 1/3$

La solution avec Xcas

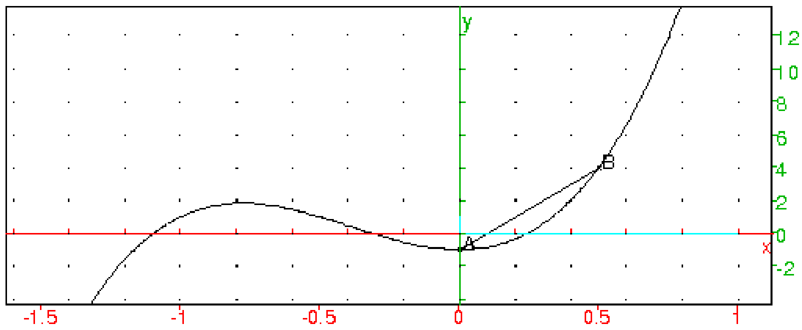
Soient le triangle ABC et I le centre de son cercle inscrit.
On pose $IA = l$, $IB = m$ et $IC = n$.



On a :
$\sin(\dfrac{A}{2}) = \dfrac{r}{l} = r, \quad \sin(\dfrac{B}{2}) = \dfrac{r}{m} = 2r, \quad \sin(\dfrac{C}{2}) = \dfrac{r}{n} = 3r$
On sait que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ donc
$\sin(\dfrac{C}{2}) = \sin(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A+B}{2}) = \cos(\dfrac{A+B}{2})$.
On sait que :
$\widehat{A}/2 < \pi/2$ donc $\cos(A/2) = \sqrt{1-r^2}$
$\widehat{B}/2 < \pi/2$ donc $\cos(B/2) = \sqrt{1-4r^2}$
Donc :
$\sin(C/2) = \sqrt{1-r^2}\sqrt{1-4r^2} - 2r^2 = 3r$ r vérifie donc l'équation :
$\sqrt{(1-r^2)(1-4r^2)} = 3r + 2r^2$ c'est à dire
$(3r+2r^2)^2 - (1-r^2)(1-4r^2) = 0$
On tape :
`normal((3r+2r^2)^2)-(1-r^2)*(1-4r^2)`
On obtient : `12*r^3+14*r^2-1`
On tape :
`fsolve( 12*r^3+14*r^2-1,r)`
On obtient :
`[0.243126179572,-0.312313414531,-1.09747943171]`
r est positif donc $r = 0.243126179572$.

Si on veut faire le calcul en utilisant la méthode de Newton.
On tape :
```
g1:=function_diff(g)
g1(x)
```
On obtient comme dérivé de $g(x)$:
`36*x^2+28*x`

Donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$
On tape :
```
g(x):=12x^3+14x^2-1
plotfunc(g(x),x=-1.5..1)
```
On obtient :



On a :
- la fonction g est croissante et continue sur $\mathbb{R}^+$,
- $g(0) = -1$,
- $g(1/2) = 4$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires g a un seul zéro r sur $\mathbb{R}^+$ qui est compris entre 0 et 1/2.
La valeur de r est proche de $1/5 = 0.2$ (c'est l'intersection du segment AB ($A = (0, -1)$, $B = 1/2, 4$) avec l'axe des x) On peut chercher la solution r de $12x^3 + 14x^2 - 1 = 0$ pour $x > 0$ avec la méthode de Newton.
On tape :
```
h(x):=x-g(x)/g1(x)
b:=h(0.2)
```
On obtient :
```
0.248863636364
```
On tape :
```
b:=h(b)
```
On obtient :
```
0.243208102696
```
On tape :
```
b:=h(b)
```
On obtient :
```
0.243126196656
```
On tape :
```
b:=h(b)
```
On obtient :
```
0.243126179572
```
Donc la méthode de Newton donne après 4 itérations :
$r = 0.243126179572$
Remarque
Einstein résout l'équation : $12x^3+14x^2-1 = 0$ on posant $X = A/x$ et en utilisant les formules de Cardan pour résoudre : $X^3 - 14X - 12 = 0$.

Chapitre 10

Le baccalauréat 2005

10.1 Exercice 1

10.1.1 L'énoncé sur les suites

Partie A : question de cours

Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite.

Partie B

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration ou un contre-exemple pour la réponse indiquée.
1/ Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
2/ Si (u_n) est minorée par 2 alors (v_n) est minorée par -1.
3/ Si (u_n) est décroissante alors (v_n) est croissante.
4/ Si (u_n) est divergente alors (v_n) est converge vers 0.

10.1.2 Les essais avec `Xcas`

On tape :
`v(n):=-2/u(n)`
1/ On tape :
`u(n):=(n+1)/n`
`limit(u(n),n=+infinity)` et on obtient `1`
`limit(v(n),n=+infinity)` et on obtient `-2`
`u(n):=n+1/n`
`limit(u(n),n=+infinity)` et on obtient `+infinity`
`limit(v(n),n=+infinity)` et on obtient `0`
`u(n):=1/n`
`limit(u(n),n=+infinity)` et on obtient `0`
`limit(v(n),n=+infinity)` et on obtient `-infinity`
2/ On tape :
`u(n):=2+1/n`

`normal(v(n)+1)` et on obtient `1/(2*n+1)`
La proposition semble vraie.
3/ On tape :
`u(n):=1/n`
`normal(u(n+1)-u(n))` et on obtient `1/(-n^2-n)`
`normal(v(n+1)-v(n))` et on obtient `-2`
4/ On tape :
`u(n):=(-1)^n`
`limit(u(n),n=+infinity)`
On obtient "`Error: Bad Argument Value`"
On tape :
`limit(v(n),n=+infinity)`
On obtient "`Error: Bad Argument Value`"

10.1.3 La correction sans `Xcas`

1/ est faux, on prend $\mathtt{u(n)} := \frac{\mathtt{1}}{\mathtt{n}}$
2/ est vrai car si :
$\mathtt{u(n)} \geq \mathtt{2}$ alors $\frac{\mathtt{1}}{\mathtt{u(n)}} \leq \frac{\mathtt{1}}{\mathtt{2}}$ car $\mathtt{u(n)} \geq \mathtt{0}$
donc $\mathtt{v(n)} = \frac{\mathtt{-2}}{\mathtt{u(n)}} \geq \frac{\mathtt{-2}}{\mathtt{2}} = \mathtt{-1}$ 3/ est faux, on prend $\mathtt{u(n)} := \frac{\mathtt{1}}{\mathtt{n}}$
4/ est faux, on prend $\mathtt{u(n)} := (\mathtt{-1})^{\mathtt{n}}$

10.2 Exercice 2

10.2.1 L'énoncé

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[OA]$, un point M variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.
On note k, l, m, n, p les affixes respectives des points K, L, M, N, M, P.
1/ Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathcal{C}$, on a $|m - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.
2/ Établir les relations suivantes :
$l = im$ et $p = -im + 1 + i$.
On admettra que l'on a également :
$n = (1 - i)m + i$ et $k = (1 + i)m$
3/ a) Démontrer que le milieu Ω du segment $[PL]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathcal{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4/ a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5/ Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

10.2.2 La figure avec `Xcas`

```
O:=point(0);
A:=point(1);
C:=cercle(0,A);
M:=element(C);
carre(M,A,P,N);
carre(0,M,K,L);
R:=milieu(L,P);
longueur(K,N);
est_rectangle(R,N,K);
est_isocele(R,N,K);
NN:=N;
lieu(NN,M,affichage=1);
```

Attention
On est obligé de renommer le point `N` en `NN` (`NN:=N;`) car il faut que le point dont on cherche le lieu soit défini par une affectation pour que la fonction `lieu` de `Xcas` fonctionne.

10.2.3 La correction sans `Xcas`

1/ Soit a l'affixe de A : on a donc $a = 1$.
Soit B le milieu de $[OA]$: B a donc pour affixe $b = \frac{1}{2}$.
M est donc sur le cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$ donc :
$MB = \frac{1}{2}$ donc $|m - b| = \frac{1}{2}$ ou encore $|m - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.
2/ Le point L se déduit de M dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $l = im$.
Le point P se déduit de M dans la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc $p-a = -i(m - a)$, ou encore $p - 1 = -i(m - 1)$ donc
$p = -im + i + 1$.
On a également :
Le point N se déduit de A dans la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $n-m = i(a - m)$ ou encore $n = ia + m - im = (1 - i)m + i$.
Le point K se déduit de 0 dans la rotation de centre M et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc $k-m = -i(-m)$ ou encore $k = (1 + i)m$.
3/ a) Soit ω l'affixe de Ω. On a :
$\omega = (p + l)/2 = (-im + i + 1 + im)/2 = (1 + i)/2$ Le point Ω est donc indépendant de la position de M sur le cercle $\mathcal{C}$.
b) $\omega - b = \omega - 1/2 = i/2$ donc $|\omega - b| = 1/2$ ce qui prouve que Ω est sur le cercle $\mathcal{C}$
4/ a) $NK = |k-n| = |(1+i)m-(1-i)m-i| = |2im-i| = |2i(m-1/2)| = 2 * 1/2 = 1$ puisque $|2i| = 2$ et que $|m - 1/2| = 1/2$.
b) On a :
Le vecteur ΩN a pour affixe :
$n-\omega = (1-i)m+i-i/2-1/2 = (1-i)m+i/2-1/2 = (1-i)(m-1/2)$
Le vecteur ΩK a pour affixe :
$k-\omega = (1+i)m-i/2-1/2 = (1+i)m-i/2-1/2 = (1+i)(m-1/2)$
Puisque $(1 - i)i = 1 + i$ on en déduit que le vecteur ΩK se déduit du vecteur ΩN par rotation d'angle $\pi/2$ et donc que le point K se déduit de N par rotation de

centre Ω et d'angle $\pi/2$.
Le triangle ΩNK est donc isocèle rectangle.
5/ On a $\Omega N = |n - \omega| = |(1-i)(m-1/2)| = \sqrt{2}/2$ puisque $|1-i| = \sqrt{2}$ et que $|m-1/2| = 1/2$.
Donc N est sur le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}/2$.

10.3 Exercice 3

10.3.1 L'énoncé

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 billes rouges et 3 billes vertes dans une boite cubique et 3 billes rouges et 4 billes vertes dans une boite cylindrique.
1/ Dans un premier jeu, il choisit simultanément 3 billes au hasard dans la boite cubique et regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombres de billes rouges choisies.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X
2/ Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des 2 boites, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boite choisie.
On considère les événements suivants :
$C1$: l'enfant choisi la boite cubique,
$C2$: l'enfant choisi la boite cylindrique,
R : l'enfant prend une bille rouge,
V : l'enfant prend une bille verte.
a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
b) Calculer la probabilité de l'événement R.
c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probanilité qu'elle provienne de la boite cubique ?
3/ L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0.99$.

10.3.2 La simulation avec `Xcas`

1/ On suppose que les billes rouges sont numérotées de 0 à 9 et que les vertes sont numérotées de 10 à 12.
On simule un choix de la question 1/ avec `choix1()`, la loi de X en faisant "beaucoup de tirages" avec `loiX(n)` où n représente un grand nombre de tirages et l'espérance de X avec `EX(n)` où n représente aussi un grand nombre de tirages.
On peut écrire pour simuler le choix sans remise de 3 billes parmi 13 (on numérote les billes de 0 à 12 et on recommence si on trouve une bille déjà tirée) :

```
choix11():={
local b1,b2,b3;
```

```
b1:=rand(13);
b2:=rand(13);
while (b1==b2) {b2:=rand(13);}
b3:=rand(13);
while (b1==b3 || b2==b3)  {b3:=rand(13);}
return sort([b1,b2,b3]);
};
```

ou encore si on supprime les numéros tirés au fur et à mesure :

```
choix12():={
local b,j,B,R,n;
B:=makelist(id,0,12);
R:=[];
n:=13;
for (j:=0;j<3;j++) {
b:=rand(n);
R:=append(R,B[b])
B:=suppress(B,b);
n:=n-1;
}
return sort(R);
}
```

ou encore si on ne veut pas mettre un numéro aux billes :

```
choix13():={
local b,j,B,R,n;
//B:=concat(makelist(x->"R",0,9),makelist(x->"V",0,2));
B:=makelist(x->ifte(x<10,"R","V"),0,12);
R:=[];
n:=13;
for (j:=0;j<3;j++) {
b:=rand(n);
R:=append(R,B[b])
B:=suppress(B,b);
n:=n-1;
}
return R;
}
```

On tape :
`choix11()` ou `choix12()`
On obtient par exemple :
`[5,8,11]`
On tape :
`choix13()`
On obtient par exemple :
`[R,R,V]`
ce qui correspond à 2 billes rouges (numéros 5 et 8) et 1 bille verte (numéro 11).
Puis on définit la loi de `X` en utilisant `choix11()` ou `choix12()` :

```
loiX(n):={
local ch,lX,j;
lX:=makelist(0,0,3);
for (j:=0;j<n;j++) {
ch:=count_inf(10,choix11());
lX[ch]:=lX[ch]+1;};
return lX/n;
};

EX(n):=sum(loiX(n)[k]*k,k,0,3);
```

On tape :
`loiX(1000)`
On obtient par exemple :
`[1/500,107/1000,23/50,431/1000]=[0.002,0.107,0.460,0.431]`
On tape :
`EX(1000)`
On obtient par exemple :
`288/125=2.304`
Ou définit la loi de `X` en utilisant `choix13()` :

```
loi13X(n):={
local ch,lX,j;
lX:=makelist(0,0,3);
for (j:=0;j<n;j++) {
ch:=count_eq("R",choix13());
lX[ch]:=lX[ch]+1;};
return lX/n;
};

E13X(n):=sum(loi13X(n)[k]*k,k,0,3);
```

On tape :
`loi13X(1000)`
On obtient par exemple :
`[7/1000,99/1000,489/1000,81/200]=[0.007,0.099,0.489,0.405]`
On tape :
`E13X(1000)`
On obtient par exemple :
`2369/1000=2.369`
2/ On suppose que la boite cubique a comme numéro 1 et que la boite cylindrique a comme numéro 2.
On suppose que dans la boite cubique, les billes rouges sont numérotées de 0 à 9 et que les vertes sont numérotées de 10 à 12 et que dans la boite cylindrique, les billes rouges sont numérotées de 0 à 2 et que les vertes sont numérotées de 3 à 6.
On simule un choix de la question 2/ avec `choix2()`.
On simule les résultats obtenus lorsque l'on effectue n fois le deuxième jeu avec `choix3(n)`.
On simule la probabilité d'obtenir une bille rouge avec le deuxième jeu avec `probR(n)`

en prenant une grande valeur de n.
Attention
Lorsque l'"on veut exploiter les résultats obtenus par `choix2()` ou par `choix3(n)` il faut préserver le résultat obtenu dans une variable car les valeurs obtenues par ces fonctions ne sont pas toujours les mêmes ! ! !
Par exemple :
`L:=choix3(1000)` ; ou `choix:=choix2()`
car `L[0]+L[2]!=choix3(1000)[0]+choix3(1000)[1]` ou
`choix[0]+choix[1]!=choix2()[0]+choix3()[1]`

```
choix2():={
local c,b,nr1,nr2,nv1,nv2;
c:=rand(2)+1;
nr1:=0;
nr2:=0;
nv1:=0;
nv2:=0;
if (c==1){
 b:=rand(13);
 if (b<10) {
  nr1:=nr1+1;
  } else {
  nv1:=nv1+1;
  }
} else {
b:=rand(7);
 if (b<3) {
  nr2:=nr2+1;
  } else {
  nv2:=nv2+1;
  }
}
return [nr1,nv1,nr2,nv2];
};

choix3(n):={
local rep,k;
rep:=[0,0,0,0];
for (k:=0;k<n;k++) {
rep:=choix2()+rep;
};
return rep;
};

probR(n):={
local L;
L:=choix3(n);
```

```
return (L[0]+L[2])/n;
};

probC1siR(n):={
local nrc1,nr,choix,k;
nrc1:=0;
nr:=0
for (k:=0;k<n;k++) {
choix:=choix2();
if (choix[0]+choix[2]==1) {nr:=nr+1;
if (choix[0]==1) nrc1:=nrc1+1;
}
}
return [nr,nrc1/nr];
};
```

On tape :
`choix2()`
On obtient par exemple :
`[0,1,0,0]`
ce qui veut dire que l'enfant a choisi d'abord la boite cubique, puis une bille verte dans cette boite.
On tape :
`choix3(1000)`
On obtient par exemple :
`[368,109,218,305]`
ce qui veut dire que l'enfant a choisi d'abord 368+109=477 fois la boite cubique, en prenant ensuite 368 fois une bille rouge et 109 fois une bille verte dans cette boite et 218+305=523 fois la boite cylindrique, en prenant ensuite 218 fois une bille rouge et 305 fois une bille verte dans cette boite.
On tape :
`probR(1000)`
On obtient par exemple :
`609/1000=0.609`
ce qui veut dire que sur 1000 tirages, l'enfant a obtenu 609 fois une bille rouge.
On tape :
`probC1siR(1000)`
On obtient par exemple :
`[593,366/593]` $\simeq$ `[593.0,0.6172`
ce qui veut dire que sur 1000 tirages, la bille rouge a été obtebue 593 fois et en provenant 366 fois de la boite cubique.
On tape :
`probC1siR(1000)`
On obtient par exemple :
`[624,131/208]` $\simeq$ `[[624.0,0.6298]`
ce qui veut dire que sur 1000 tirages, la bille rouge a été obtebue 624 fois et en provenant 393 fois de la boite cubique.
3/ Pour simuler p_n, on effectue m fois n tirages avec m grand.

```
pn(n,m):={
local L,rep,k;
rep:=0;
for (k:=0;k<m;k++) {
L:=choix3(n);
if ((L[0]+L[2])>0) {
rep:=rep+1;}
}
return rep/m;
}
```

On tape si l'enfant fait 5 tirages de suite au deuxième jeu :
`pn(5,1000)`
On obtient par exemple :
`987/1000`
On tape si l'enfant fait 6 tirages de suite au deuxième jeu :
`pn(6,1000)`
On obtient par exemple :
`997/1000`

10.3.3 La correction avec l'aide de `Xcas`

1/ a) Si parmi les 3 billes choisies, on a obtenu k billes rouges et $3-k$ billes vertes, on a :
`P(X=k)=p(k)=comb(10,k)*comb(3,3-k)/comb(13,3)`
On tape :
`p(k):=comb(10,k)*comb(3,3-k)/comb(13,3)`
`p(0)` et on obtient `1/286` $\simeq$ `0.0035`
`p(1)` et on obtient `15/143`$\simeq$ `0.1049`
`p(2)` et on obtient `135/286`$\simeq$ `0.4720`
`p(3)` et on obtient `60/143`$\simeq$ `0.4196`
On a bien :
`p(0)+p(1)+p(2)+3*p(3)=(1+30+135+120)/286=1`
b) `E(X)=p(1)+2*p(2)+3*p(3)`
On tape :
`p(1)+2*p(2)+3*p(3)` et on obtient `30/13=2.307...`
2/ a) On fait un arbre pondéré :

$P(C1) = \frac{1}{2}$: $P_{C1}(R) = \frac{10}{13} \longrightarrow P(C1 \cap R) = \frac{5}{13}$

$P_{C1}(V) = \frac{3}{13} \longrightarrow P(C1 \cap V) = \frac{3}{26}$

$P(C2) = \frac{1}{2}$: $P_{C2}(R) = \frac{3}{7} \longrightarrow P(C2 \cap R) = \frac{3}{14}$

$P_{C2}(V) = \frac{4}{7} \longrightarrow P(C2 \cap V) = \frac{2}{7}$

b) On a :
$P(R) = P(C1 \cap R) + P(C2 \cap R) = \frac{5}{13} + \frac{3}{14} = \frac{109}{182} \simeq 0.5989$
c) On veut calculer $P_R(C1)$.
On a : $P_R(C1) = P(C1 \cap R)/P(R) = \frac{5}{13}/\frac{109}{182} = \frac{70}{109} \simeq 0.6422$
3/ Si q_n est la probabilité de n'avoir pris aucune bille rouge au cours de ses n choix, on a $p_n = 1 - q_n$.
On a :
$q_n = P(V)^n = (1 - P(R))^n = (\frac{73}{182})^n$
donc ;
$p_n = 1 - (\frac{73}{182})^n$
b) On cherche les valeurs de n pour avoir $p_n \geq 0.99$ ou encore pour avoir :

$$1 - p_n = q_n = (\frac{73}{182})^n \leq 0.01$$

On a :
$(\frac{73}{182})^n \leq 0.01$ est équvalent à :
$n \geq \ln(0.01)/(\ln(73) - \ln(182)) \simeq 5.04097648645$
Donc la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0.99$ est $n = 6$.

10.4 Exercice 4

10.4.1 L'énoncé

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.
a) Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{\frac{-x}{4}}}$
b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Étudier les vatiations de la fonction f.

Partie B

1/ On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle $(E_1) : y' = \dfrac{y}{4}$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est à dire $g(0) = 1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2/ En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E2) : \begin{cases} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} \text{ pour tout réel } t \geq 0, \\ u(0) & = & 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E3) : \begin{cases} h'(t) & = & \dfrac{-h(t)}{4} + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout réel } t \geq 0, \\ h(0) & = & 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-y}{4} + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

10.4.2 La correction avec l'aide de `Xcas`

Partie A

1/ a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car $2 + e^{\frac{x}{4}} \neq 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
On a pour tout x dans $\mathbb{R}$, $e^{\frac{x}{4}} = 1/e^{\frac{-x}{4}}$ donc :
$f(x) = \dfrac{3 * e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}} = \dfrac{3}{e^{\frac{-x}{4}} * (2 + e^{\frac{x}{4}})} = \dfrac{3}{2e^{\frac{-x}{4}} + 1}$.
Ou encore on tape :
```
simplify(3*e^(x/4)/(2+e^(x/4))-3/(1+2*e^(-x/4)))
```
On obtient :
```
0
```
b) On tape :
```
limit(3/(1+2*e^(-x/4)),x=+infinity)
```
On obtient :
```
3
```
En effet quand x tend vers $+\infty$, $\exp(-x/4)$ tend vers 0, donc $f(x) = \frac{3}{2e^{\frac{-x}{4}}+1}$ tend vers 3.
On tape :
```
limit(3/(1+2*e^(-x/4)),x=-infinity)
```
On obtient :
```
0
```
En effet quand x tend vers $-\infty$, $\exp(-x/4)$ tend vers $+\infty$, donc $f(x) = \frac{3}{2e^{\frac{-x}{4}}+1}$ tend vers 0.

c) On tape :
```
f(x):=3/(1+2*e^(-x/4))
simplify(diff(f(x)))
```
On obtient :

```
(3*exp(-(x/4)))/(8*(exp(-(x/4)))^2+8*exp(-(x/4))+2)
```
On tape :
```
factor(ans())
```
On obtient :
```
(3*exp(-(x/4)))/(2*(2*exp(-(x/4))+1)^2)
```
La dérivée étant toujours positive la fonction f est donc croissante de 0 à 3.

Partie B

1/ a) La solution générale de l'équation différentielle $(E_1) y' = \frac{y}{4}$ est :
$y(t) = C * \exp(t/4)$ où C est une constante arbitraire.
On tape :
```
desolve(y'=y/4,y)
```
On obtient :
```
c_0/exp(-x/4)
```
On tape :
```
desolve(diff(y(t),t)=y(t)/4,t,y)
```
On obtient :
```
c_0/exp(-t/4)
```
b) g est la solution de (E_1) qui vérifie $g(0) = 1$ donc on a $g(t) = C * \exp(t/4)$ et $g(0) = 1$ donc $C = g(0) = 1$. La taille de la population au temps t est donc : $g(t) = \exp(t/4)$.
On tape :
```
desolve([y'=y/4,y(0)=1],y)
```
On obtient :
```
1/exp(-x/4)
```
On tape :
```
desolve([diff(y(t),t)=y(t)/4,y(0)=1],t,y)
```
On obtient :
```
1/exp(-t/4)
```
c) On veut savoir quand $g(t) \geq 300$.
On résout :
$\exp(t/4) \geq 300$ qui est équivalent à $t \geq 4 * ln(300) \simeq 22.8$
La population dépassera 300 rongeurs au bout de 23 années.
On tape :
```
solve(exp(t/4)>=300,t)
```
On obtient :
```
[t>=(4*log(300))]
```
On tape :
```
solve(exp(t/4)>=300.0,t)
```
On obtient :
```
[t>=22.8151298986]
```

2/ a) On a, pour tout réel t positif :
$h(t) = 1/u(t)$ donc $h'(t) = -u'(t)/u(t)^2$ (puisque $u(t) \neq 0$)
u satisfait à E_2 si et seulement si
$u'(t)/u(t)^2 = 1/(4 * u(t)) - 1/12$ et $u(0) = 1$ (puisque $u(t) \neq 0$)
ce qui est équivalent à

$h'(t) = -u'(t)/u(t)^2 = -1/4 * h(t) + 1/12$ et $h(0) = 1$ (puisque $u(t) \neq 0$)

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-y}{4} + \dfrac{1}{12}$ sont obtenus en ajoutant aux solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-y}{4}$ une solution particulière de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-y}{4} + \dfrac{1}{12}$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-y}{4}$ sont $y(t) = K\exp(-t/4)$ où K est une constante arbitraire.
Une solution particulière de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-y}{4} + \dfrac{1}{12}$ est $y(t) = 1/3$
Les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-y}{4} + \dfrac{1}{12}$ sont donc :
$y(t) = K\exp(-t/4) + 1/3$.
On en déduit, puisque h vérifie (E_3), que :
$h(t) = K\exp(-t/4) + 1/3$ et $h(0) = 1$ donc on a $K = 2/3$ et
$h(t) = 2/3 * \exp(-t/4) + 1/3 = (1 + 2\exp(-t/4))/3$ et donc
$u(t) = 3/(2 + \exp(-t/4)) = f(t)$
On a donc, pour tout réel t positif :
$u(t) = f(t)$
Avec `Xcas`, on tape :
```
desolve(y'=-y/4+1/12,y)
```
On obtient :
```
(exp(x/4)/(12/4)+c_0)/(exp(x/4))
```
On tape :
```
desolve([diff(y(t),t)=-y(t)/4+1/12,y(0)=1],t,y)
```
On obtient :
```
((exp(t/4)*4)/12+2/3)/(exp(t/4))
```
On tape :
```
normal(inv(((exp(t/4)*4)/12+2/3)/(exp(t/4))))
```
On obtient :
```
(3*exp(t/4))/(exp(t/4)+2)
```
c) Lorsque t tend vers $+\infty$, la taille de la population augmente et tend vers 300 rongeurs puisque f tend vers 3 lorsque t tend vers $+\infty$.

Chapitre 11

Le Bac Mathématiques 2010

11.1 EXERCICE 1 : (6 points)

Commun à tous les candidats

11.1.1 L'énoncé

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

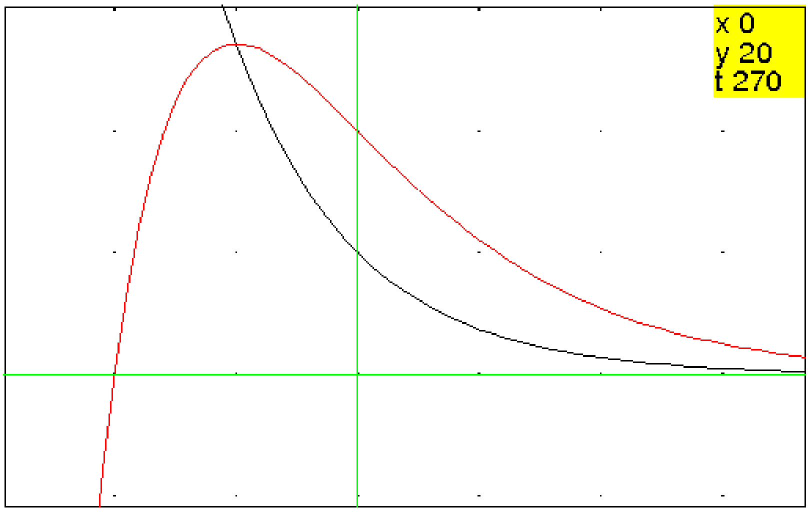
1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E)
2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

. **Partie B :**

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x_k = 1 - k$.
2. On note M_k le point de la courbe C_k d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.
3. Sur le graphique ci-dessous (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe d'équation $y = e^{-x}$;
   - la courbe C_k d'équation $y = (x + k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.



   a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).
   b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx$.
   Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

11.1.2 Le corrigé avec `Xcas`

Partie A

1. On tape :
   `u(x):=x*exp(-x)`
   `normal(diff(u(x))+u(x))`
   On obtient :
   `exp(-x)` Donc $u'(x)+u(x) = \exp(-x)$ ce qui veut dire que $u(x)$ est une solution de l'équation différentielle (E) $(y'+y = e^{-x})$.
2. On tape :
   `desolve(y'+y)`
   On obtient :
   `c_0*exp(-x)` Donc (E') $(y'+y = 0)$ a comme solution $y(x) = c_0\dfrac{1}{\exp(x)}$.
3. On tape :
   `normal(diff(v(x)-u(x))+v(x)-u(x))`
   On obtient :
   `diff(v(x),x)-exp(-x)+v(x)`
   Donc $v'(x)-u'(x)+v(x)-u(x)+0$ est équivalent à $v'(x)+v(x) = \exp(-x)$.
   Cela veut dire :
   $u++v$ est solution de (E') est équivalent à v est solution de (E)
4. On tape :
   `desolve(y'+y=exp(-x))`

On obtient :
`c_0*exp(-x)+x*exp(-x)`
c'est à dire la somme de $u(x)$ et de la solution générale de $y' + y = 0$.
Donc (E) a comme solution $y(x) = u(x) + c_0\dfrac{1}{\exp(x)}$.

5. On tape :
`desolve([y'+y=exp(-x),y(0)=2],y)`
On obtient :
`[2*exp(-x)+x*exp(-x)]`
ou bien
On tape :
`solve(c_0*exp(0)=2,c_0)`
On obtient :
`[2]`
Donc l'unique solution g de (E) ($y' + y = e^{-x}$) telle que $g(0) = 2$ est la fonction $g(x) = \dfrac{(x+2)}{\exp(x)} = (x+2)e^{-x}$.

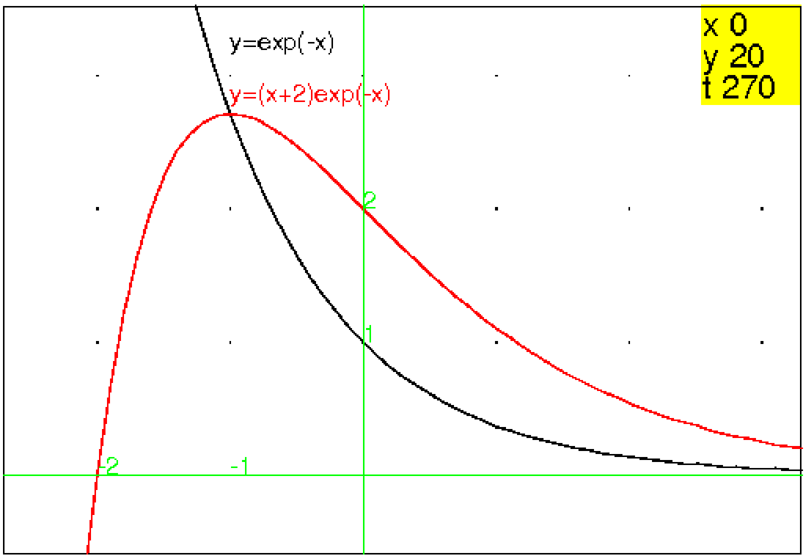
Partie B

1. On tape :
`f(x,k):=(x+k)*exp(-x)`
`factor(diff(f(x,k),x))`
On obtient :
`(-x-k+1)*exp(-x)`
Donc f a un maximum en $x = 1 - k$ car $-x + 1 - k > 0$ si $x < 1 - k$.

2. On tape :
`normal(f(1-k,k)`
On obtient :
`exp(k-1)`
Donc M_k est sur C_k et sur Γ car ses coordonnées vérifient :
$y_k = \exp(-x_k)$

3. $a)$ Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).
   $b)$ En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

   On reconnait facilement la courbe $y = e^{-x}$ car la fonction e^{-x} est décroissante et n'admet pas de maximum. De plus pour cette courbe passe par le point (0,1) donc on en déduit l'unité sur l'axe des y. La courbe $y = (x + k)e^{-x}$ coupe l'axe des y au point $(0, k)$ et l'axe des x au point $(-k, 0)$. Or sur le dessin cette courbe passe par le point (0,2). Donc on en déduit que $k = 2$. On trouve ainsi les unités sur l'axe des x : on place $x = -k = -2$ et on vérifie que pour $x = 1 - k = -1$ la courbe $y = (x + k)e^{-x}$ admet un maximum qui se trouve sur la courbe $y = e^{-x}$.



4. On tape :
`int(f(x,2),x=0..2)`
On obtient :
`-5*exp(-2)+3`
ou bien, on tape :
`ibpu(f(x,2),x+2,x,0,2)`
On obtient :
`[-4*exp(-2)+2,exp(-x)]`
on tape :
`normal(ibpu([-4*exp(-2)+2,exp(-x)],0,x,0,2))`
On obtient :
`-5*exp(-2)+3`

11.2 EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

11.2.1 L'énoncé

1. Restitution organisée de connaissances.
Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

   Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

   Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors, pour tout entier naturel n, $v_n > u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.
   $a)$ $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;
   $b)$ $u_n = \ln(n+1)$ et $v = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;
   $c)$ $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par :
   $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln(a + \dfrac{1}{n})$
   . Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

11.2.2 Le corrigé avec `Xcas`

1. $a)$ $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$
   On a :
   $u_{n+1} - u_n = 1 - 10^{-n-1} - 1 + 10^{-n} = 10^{-n}(1 - 1/10) > 0$
   Donc u_n est croissante.
   $v_{n+1} - v_n = 10^{-n-1} - 10^{-n} = 10^{-n}(1/10 - 1) < 0$
   Donc v_n est décroissante.
   $v_n - u_n = 1 + 10^{-n} - 1 + 10^{-n} = 2 * 10^{-n}$ Donc $v_n - u_n$ converge vers 0.
   Les deux suites u_n et v_n sont donc adjacentes.
   On tape :
   ```
   u(n):=1-1/10^n
   normal(u(n+1)-u(n))
   ```
   On obtient :
   ```
   (10^(n+1)-10^n)/(10^(n+1)*10^n)
   ```
   On tape :
   ```
   v(n):=1+1/10^n
   normal(v(n+1)-v(n))
   ```
   On obtient :
   ```
   (-10^(n+1)+10^n)/(10^(n+1)*10^n)
   ```
   On tape :
   ```
   normal(v(n)-u(n))
   ```
   On obtient :
   ```
   2/(10^n)
   ```
   $b)$ $u_n = \ln(n+1)$ et $v = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$
   Dans cet exercice `Xcas` ne sert pas à grand chose si ce n'est a voir que v_n est croissante pour $n \geq 2$ car la fonction $\ln(x+1) + \frac{1}{x}$ est croissante pour $x \geq 1/2(1 + \sqrt{(}5))$.
   On tape :

`normal(diff(ln(x+1)+1/x))`
On obtient :
`(x^2-x-1)/(x^3+x^2)`
On tape :
`solve(x^2-x-1)`
On obtient :
`[1/2*(1-sqrt(5)),1/2*(1+sqrt(5))]`
Sinon on a :
u_n est croissante car la fonction $\ln(x+1)$ est croissante.
u_n et v_n sont divergentes car elles tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$:
Donc v_n n'est donc pas décroissante car sinon elle serait décroissante et minorée par 0 donc convergente.
Donc les suites u_n et v_n ne sont pas adjacentes.

$c)$ $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$
u_n est croissante et converge vers 1.
$v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1 mais v_n n'est pas monotone.
Donc u_n et v_v ne sont pas adjacentes.

2. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln(a + \dfrac{1}{n})$ pour $a \geq 0$
On a :
u_n est croissante et converge vers 1
v_n est décroissante et converge vers $\ln(a)$
$u_n - v_n = 1 - \frac{1}{n} - \ln(a + \frac{1}{n})$ converge vers $1 - \ln(a)$.
Pour que u_n et v_n soient adjacentes il faut et il suffit que $u_n - v_n = 1 - \frac{1}{n} - \ln(a + \frac{1}{n})$ converge vers 0 donc il faut et il suffit que $\ln(a) = 1$ ou $a = e$.

11.3 EXERCICE 3 : (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point sila réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

11.3.1 L'énoncé

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :
   • $\dfrac{21}{40}$ • $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{1}{3}$ • $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{3}$
2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité

d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :

• $\dfrac{3^3 \times 7^2}{10^5}$ • $C_5^2 \times (\dfrac{3}{10})^2 \times (\dfrac{7}{10})^3$ • $C_5^2 \times (\dfrac{3}{10})^3 \times (\dfrac{7}{10})^2$

3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1. Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

   • $\dfrac{7}{60}$ • $\dfrac{14}{23}$ • $\dfrac{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}}$

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1 \leq X \leq 3]$ est égale à :

   • $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$ • $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$ • $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

11.3.2 Le corrigé avec `Xcas`

1. On tape :
   ```
   comb(7,2)*3/comb(10,3)
   ```
   On obtient :
   ```
   21/40
   ```

2. On tape :
   ```
   comb(5,2)*(3/10)^3*(7/10)^2
   ```
   On obtient :
   ```
   1323/10000
   ```

3. On tape :
   ```
   7/10*1/6/(7/10*1/6+3/10*1/4)
   ```
   On obtient :
   ```
   14/23
   ```

4. On tape :
   ```
   assume(a>0);
   normal(a*int(exp(-a*x),x,1,3))
   ```
   On obtient :
   ```
   -exp(-3*a)+exp(-a)
   ```

11.4 EXERCICE 4 : (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

11.4.1 L'énoncé

Dans tout l'exercice, $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm). On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z} + 2$.
   $a)$ Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.
   $b)$ En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
   $c)$ Déterminer l'image par la transformation T du cercle (c) de centre O et de rayon 1.
2. (c') désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.
   $a)$ Construire le point A' appartenant au cercle (c') tel que :
   $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'} = \dfrac{\pi}{3}$ $[modulo\ 2\pi]$.
   $b)$ À tout point M du cercle (c) d'affixe z, on associe le point M' du cercle (c') d'affixe z' tel que : $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'} = \dfrac{\pi}{3}$ $[modulo\ 2\pi]$.
   Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z'-2}{z}$.
   En déduire que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.
   $c)$ Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* À tout point M du plan, on associe le point I milieu du segment $[MM']$.
   Quel est le lieu géométrique du point I lorsque M décrit le cercle (c) ?

11.4.2 Le corrigé avec `Xcas`

1. $T(z) = -\overline{z} + 2$
   $a)$ $T(A) = T(1)$ et $T(\Omega) = T(1 + i\sqrt{3})$
   On tape (il faut cocher `Variables_complexes` dans la configuration du CAS) :
   ```
   T(z):=-conj(z)+2
   T(1)
   ```
   On obtient :
   ```
   1
   ```
   On tape :
   ```
   normal(T(1+i*sqrt(3)))
   ```
   On obtient :
   ```
   (i)*sqrt(3)+1
   ```

$b)$ Éléments caractéristiques de T. T a deux points fixes A et Ω. T est donc la symétrie droite par rapport à la droite $A\Omega$ c'est à dire par rapport à la droite $x = 1$. On tape :
```
d:=droite(x=1):;
equation(T(d))
```
On obtient :
```
x=1
```
$c)$ $T(c)$ où (c) est le cercle de centre O et de rayon 1.
On tape :
```
c:=cercle(0,1):;
equation(T(c))
```
On obtient :
```
(x-2)^2+y^2=1
```
En effet la symétrie conserve les distance. Donc c se transforme en un cercle de même rayon ayant pour centre le transformé de O par T. Le centre O de c est transformé an le point O' de coordonnées (2,0). Donc $T(c)$ est le cercle c' de centre O' et de rayon 1.

2. $a)$ A' est l'intersection du cercle c' avec le cercle de centre d'affixe 3 et de rayon 1 se trouvant dans le demi-plan $y > 0$.
Le point A a pour affixe 1 et le point A' a pour affixe $2+\exp(i\pi/3)$ On tape :
```
A1:=point(2+exp(i*pi/3))
affixe(A1)
```
On obtient :
```
5/2+((i)*sqrt(3))/2
```
Ou on tape dans un niveau de géométrie :
```
c1:=cercle(2,1);
d1:=droite(2,3+i*sqrt(3));
A1:=inter(c1,d1)[0]
affixe(A1)
```
On obtient :
```
((i)*sqrt(3)+5)/2
```

$b)$ Si le point M a pour affixe : $z = \exp(it)$, alors le point M' a pour affixe $z' = 2 + \exp(i(t + \frac{\pi}{3}))$.
Donc $\frac{z'-2}{z} = \exp(i\frac{\pi}{3}) = (1 + i * \sqrt{3})/2$ $\frac{z'-2}{z}$ a donc pour module 1 et comme argument $\frac{\pi}{3}$.
On tape :
```
z:=exp(i*t)
z1:=2+exp(i*t+i*pi/3)
normal((z1-2)/z)
```
On obtient :
```
((i)*sqrt(3)+1)/2
```
$c)$ r est le produit d'une rotation d'angle $frac\pi 3$ et d'une translation : c'est donc une rotation d'angle $frac\pi 3$ et de centre le point fixe On tape :
```
csolve(z=exp(i*pi/3)*z+2,z)
```
On obtient :

```
[4/((-i)*sqrt(3)+1)]
```

3. On tape :
   ```
   normal((z1+z)/2)
   ```
   On obtient :
   ```
   ((i)*sqrt(3)+3)/4*exp((i)*t)+1
   ```
   Donc le milieu I de MM' se trouve sur le cercle de centre d'affixe 1 et de rayon le module de $i\sqrt{3}+3)/4$ On tape :
   ```
   abs((i*sqrt(3)+3)/4)
   ```
   On obtient :
   ```
   2*sqrt(3)/4
   ```

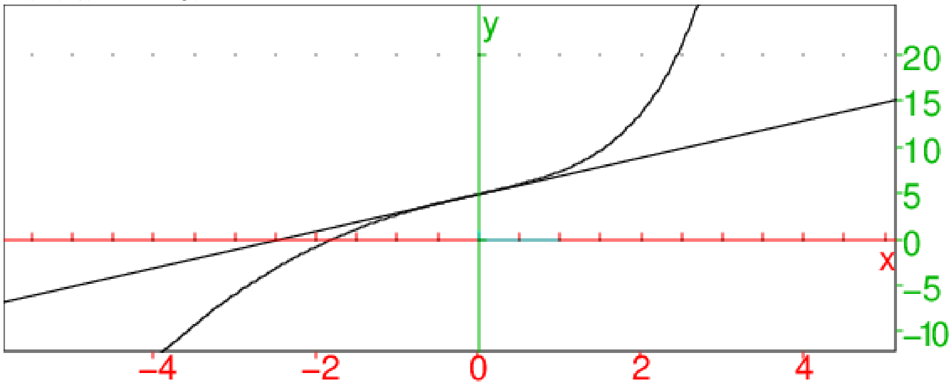
Chapitre 12

Exercices pour le bac

12.1 Étude de la fonction $f(x) = 2e^x - x^2 + 3$

Soit $f(x) = 2e^x - x^2 + 3$. Faire le tableau de variation de f puis tracer le graphe Gf de f.
Donner l'équation de la tangente à Gf au point de coordonnées $(0, f(0))$
Monter que $f(x) = 0$ a une solution unique α et que $\alpha \in]-2, -1[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 0.1 près.
Solution
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = 2(e^x - x)$
Signe de $h(x) = e^x - x$
on a $h'(x) = e^x - 1$ donc
$h'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et
$h'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$
donc $f'(x) = h(x) > h(0) = 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$.
On vient de montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Étude des limites en ∞.
Quand x tend vers $-\infty$, $2e^x$ tend vers 0 et $-x^2 + 3$ tend vers $-\infty$ donc $f(x)$ tend vers $-\infty$.
Quand x tend vers $+\infty$, $2e^x$ tend vers $+\infty$ et $-x^2 + 3$ tend vers $-\infty$ on a donc une forme indéterminée. On lève l'indétermination en mettant x^2 en facteur, on obtient :
$f(x) = x^2(2e^x/x^2 - 1 + 3/x^2)$
Quand x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$, $2e^x/x^2$ tend vers $+\infty$ et $-1 + 3/x^2$ tend vers -1, donc $(2e^x/x^2 - 1 + 3/x^2)$ tend vers $+\infty$ donc $f(x)$ tend vers $+\infty$.
Équation de la tangente au point de coordonnées $(0, f(0))$.
$f(0) = 5$ et $f'(0) = 2$ donc la tangente au point de coordonnées $(0, 5)$ est :
$y = 2 * x + 5$.
Pour montrer que $f(x) = 0$ a une solution unique α, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires :
f est continue et croissante de $\mathbb{R}$ et varie entre $-\infty$ et $+\infty$ donc $f(x) = 0$ a une solution unique.
On a :
$f(-2) = 2/e^2 - 1 = (2 - e^2)/e^2 < 0$ car $e > 2$ donc $e^2 > 4$ et

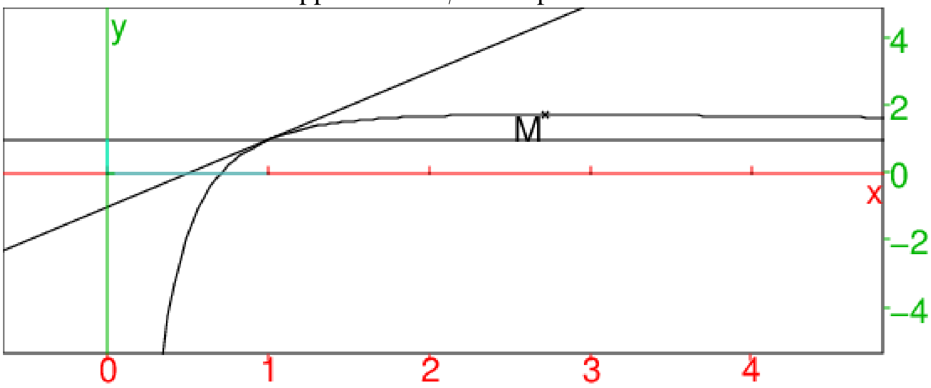
$f(-1) = 2/e + 2 > 0$ donc $\alpha \in]-2,-1[$ $f(-2) \simeq -0.729329433527$ et $f(-1)) \simeq 2.73575888234$ α est donc proche de -2 :
$f(-1.9) \simeq -0.310862761555$ et $f(-1.8) \simeq 0.0905977764432$
Donc $\alpha \simeq -1.8$.



12.2 Étude de la fonction $g(x) = 1 + 2\ln(x)/x$

Soit $g(x) = 1 + 2\dfrac{\ln(x)}{x}$ Faire le tableau de variation de g puis tracer le graphe Gg de g.
Donner l'équation de la tangente à Gg au point de coordonnées $(1, g(1))$
Monter que $g(x) = 0$ a une solution unique β et que $\beta \in]0.5, 1[$.
Déterminer une valeur approchée de β à 0.1 près.
Solution
g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :
$g'(x) = 2\dfrac{(\ln(x))' * x - \ln(x)}{x^2} = 2\dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$
Signe de $1 - \ln(x)$:
Pour $x \in]0, e[$ on a $\ln(x) < 1$ donc $g'(x) > 0$.
Pour $x = e$ on a $g'(e) = 0$ et $g(e) = 1 + 2/e$.
Pour $x \in]e, +\infty[$ on a $\ln(x) > 1$ donc $g'(x) < 0$.
Donc g est croissante sur $]0, e[$, décroissante sur $]e, +\infty[$ et a un maximum au point $e, 1 + 2/e$.
Étude des limites en 0 et $+\infty$.
Quand x tend vers 0^+, $\ln(x)/x$ tend vers $-\infty$ donc $g(x)$ tend vers $-\infty$.
Quand x tend vers $+\infty$, $\ln(x)/x$ tend vers 0 donc $g(x)$ tend vers 1.
Le graphe Gg a donc 2 asymptotes qui sont :
l'axe des y lorsque x tend vers 0^+ et la droite $y = 1$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Équation de la tangente à Gg au point de coordonnées $(1, g(1))$:
$g(1) = 1$ et $g'(1) = 2$ donc la tangente au point de coordonnées $(1, 1)$ est :
$y = 2 * (x - 1) + 1 = 2x - 1$.
Pour montrer que $g(x) = 0$ a une solution unique β , on utilise le théorème des valeurs intermédiaires :
g est continue et croissante sur $]0, e]$ et varie entre $-\infty$ et $1 + 2/e > 0$ donc $g(x) = 0$ a une solution unique sur $]0, e]$.
g est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$ et $g(x) > 1$ donc g ne s'annule pas sur $[2, +\infty[$.
On a monter que $g(x) = 0$ a une solution unique β.

On a :
$g(1) = 1$ et$g(1/2) = 1 - 4\ln(2) \simeq -1.77258872224$ et
Donc $\beta \in]1/2, 1[$.
Déterminer une valeur approchée de β à 0.1 près.
On a $g(0.75) \simeq 0.232847806795$ et $g(0.65) \simeq -0.325485895669$.
Donc 0.7 est une valeur approchée de β à 0.1 près.



Chapitre 13

Exercices sur les limites de fonctions

13.1 limite de $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$

On tape :
`limite((x-sqrt(x^2+1))/(x^2-sqrt(x^2+1)),x,inf)`
On obtient :
`0`
En effet :
$\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-\sqrt{1+1/x^2}}{x(1-\sqrt{1+1/x^2})}$
On a :
`series(sqrt(1+1/x^2),x,inf,2)` renvoie :
`1+(1/x)^2/2+(1/x)^3*order_size(1/x)`
Donc :
$\frac{1-\sqrt{1+1/x^2}}{x(1-\sqrt{1+1/x^2})} = \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$

13.2 limite de $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$

On tape :
`limite(sqrt(x+sqrt(x+sqrt(x+sqrt(x))))-sqrt(x),x,inf)`
On obtient :
`1/2`

Chapitre 14

Exercices d'Analyse niveau licence 1 et 2

14.1 Le théorème de Villarceau

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère dans le plan $x = 0$, le cercle C de centre $I = (0, a, 0)$ et de rayon r $(0 < r < a)$.

1. Donnez l'équation paramétrique du tore T engendré par la rotation de C autour de Oz. En déduire l'équation implicite de T.
2. Soit P le plan passant par Ox et tangent à C en un point A de cote postive. Déterminer l'intersection de P et T. **Le théorème de Villarceau** dit que cette intersection est constituée de 2 cercles symétriques par rapport à OA.

La solution

1. Un point N du cercle C tel que angle($Oy, \overrightarrow{OM}$)=t a pour coordonnées : $0, r\cos(t) + a, r\sin(t)$.
   Soit θ l'angle de rotation autour de Oz, N se transforme en M dans cette rotation. La matrice R de cette rotation est :

   $$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Donc les coordonnées de M sont $R * [0, r\cos(t) + a, r\sin(t)]$:
   $-\sin(\theta)(r\cos(t) + a), \cos(\theta)(r\cos(t) + a), r\sin(t)$.
   L'équation paramétrique du tore T est donc :
   $x = -\sin(\theta)(r\cos(t) + a), y = \cos(\theta)(r\cos(t) + a), z = r\sin(t)$ pour $t \in [0; 2\pi[$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.
   On peut aussi avoir l'équation implicite de T. On a :
   $x^2 + y^2 = (r\cos(t) + a)^2$ donc $r\cos(t) = \sqrt{x^2 + y^2} - a$ $x^2 + y^2 + z^2 = (r\cos(t) + a)^2 + r^2\sin(t)^2 = r^2 + a^2 + 2a * r\cos(t) =$ Donc l'équation implicite de T est :
   $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - a^2 + 2a\sqrt{x^2 + y^2}$ comme $a^2 - r^2 > 0$ on a $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + a^2 > 0$ et $2a\sqrt{x^2 + y^2} > 0$ cela s'écrit aussi : $(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + a^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$

2. Le plus simple est de faire un changement de repère $OXYZ$ en prenant :
   $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{Ox}$
   $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA}$
   Si l'angle $(\overrightarrow{Oy} = \overrightarrow{OY} = \alpha\ \overrightarrow{OZ}$ est dans le plan Oyz et l'angle $(\overrightarrow{Oz} = \overrightarrow{OZ} = \alpha$.
   On a : $\sin(\alpha) = IA/OI = r/a$ et $\cos(\alpha) = OA/OI = \sqrt{a^- r^2}/a$.
   La matrice B de changement de base est :

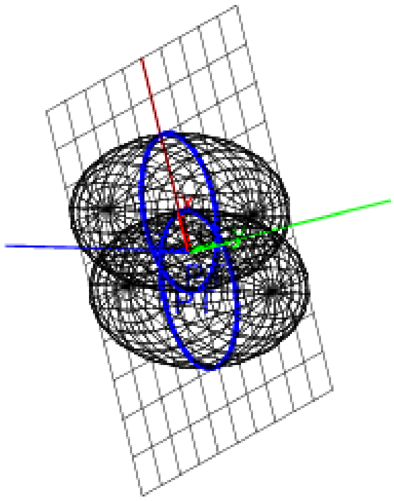
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

   et on a $[x, y, z] = B * [X, Y, Z]$
   On tape :
   `B:=[[1,0,0],[0,cos(alpha),-sin(alpha)],[0,sin(alpha),cos(alpha)]`
   `B*[X,Y,Z]`
   On obtient les valeurs de $[x, y, z]$:
   `[X,Y*cos(alpha)-Z*sin(alpha),Y*sin(alpha)+Z*cos(alpha)]`
   Le plan P a donc pour équation $Z = 0$. Dans le repère OXY on a $Z = 0$ donc :
   $X = x$, $y = Y\cos(\alpha) = Y\sqrt{a^- r^2}/a$, $z = Y\sin(\alpha) = Y * r/a$
   On utilise l'équation implicite de T pour avoir l'intersection de T et de de P dans le repère OXY :
   $(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + a^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$ s'écrit :
   $(X^2 + Y^2\cos(\alpha)^2 + Y^2 * \sin(\alpha)^2 - r^2 + a^2)^2 =$
   $4a^2(X^2 + Y^2\cos(\alpha)^2) = 4a^2X^2 + 4Y^2(a^- r^2)$
   On simplifie :
   $(X^2 + Y^2 - r^2 + a^2)^2 - 4a^2X^2 - 4Y^2(a^2 - r^2) = 0$ On tape :
   `factor((X^2+Y^2-r^2+a^2)^2-4a^2*X^2-4Y^2*(a^2-r^2))`
   On obtient :
   `(X^2-2*X*r+Y^2+r^2-a^2)*(X^2+2*X*r+Y^2+r^2-a^2)`
   Donc l'intersection de T et de P est constituée de 2 cercles d'équation dans le repère OXY :
   $X^2 - 2 * X * r + Y^2 + r^2 - a^2 = 0$ et $X^2 + 2 * X * r + Y^2 + r^2 - a^2 = 0$
   Ces équations s'écrivent aussi :
   $(X - r)^2 + Y^2 = a^2$ et $(X + r)^2 + Y^2 = a^2$
   Soient dans le repère $Oxyz$ les points :
   $A_1 = (r-a, 0, 0)$, $B_1 = (r+a, 0, 0$, $C_1 = -r-a, 0, 0$, $D_1 = (-r+a, 0, 0$
   Donc l'intersection de T et de P est constituée dans le plan P de 2 cercles qui passent par A et de diamètre respectif A_1B_1 et C_1D_1 : ils sont donc symétriques par rapport à OA.

Avec `Xcas`, pour $a = 2$ et $r = 1$, on tape :

```
T:=plotparam([-sin(u)*(cos(v)+2),cos(u)*(cos(v)+2),sin(v)],[u,v]):;
P:=plan(y-z*sqrt(3)=0);
PT:=inter(P,T,affichage=4+epaisseur_ligne_3);
```

On obtient :



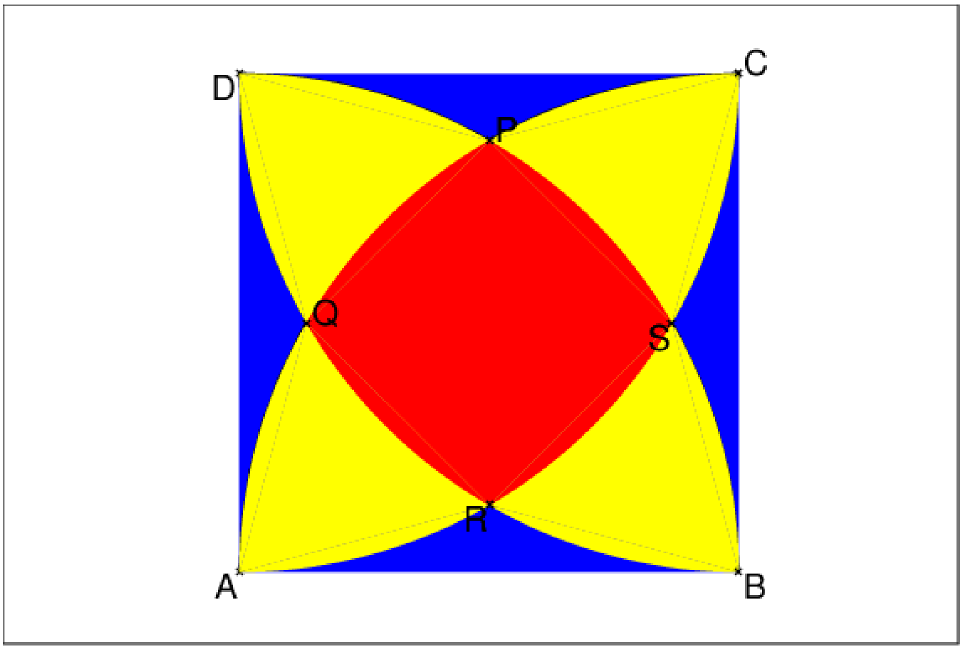
Avec Xcas, avec a et r comme paramètre, on tape :

```
supposons(a=[3.4,0,5,0.1]);
supposons(r=[1,0,a,0.1]);
T:=plotparam([-sin(u)*(r*cos(v)+a),cos(u)*(r*cos(v)+a),r*sin(v)],[u,v],ustep=
P:=plan(r*y-z*sqrt(a^2-r^2)=0);
PT:=inter(T,P,affichage=1+epaisseur_ligne_3)
plotimplicit((x-1)^2+y^2+z^2-4,x,y,z));
plotimplicit((x+1)^2+y^2+z^2-4,x,y,z));
```

14.2 Calculs d'aire et de de volume

14.2.1 Exercice niveau 2nde

Soit un carré $ABCD$ de côté 1 et 4 arcs de cercles de rayon 1 et de centres A, B, C, D (cf figure ci-dessous)



Pour faire la figure on a tapé :

```
A:=point(0);
B:=point(1);
square(A,B,C,D,display=4+filled);
circle(A,1,0,pi/2);
circle(B,1,pi/2,pi);
circle(C,1,pi,3*pi/2);
circle(D,1,-pi/2,0);
P:=single_inter(circle(A,1,0,pi/2),circle(B,1,pi/2,pi));
Q:=single_inter(circle(B,1,pi/2,pi),circle(C,1,pi,3*pi/2));
square(P,Q,R,S,display=1+filled);
plotparam(exp(i*t),t=0..pi/6,display=3+filled);
plotparam(exp(i*t)+1+i,t=-4*pi/6..-pi/2,display=3+filled);
polygon(R,B,S,display=3+filled);
plotparam(exp(i*t)+1,t=pi/2..4*pi/6,display=3+filled);
plotparam(exp(i*t)+1,t=5*pi/6..pi,display=3+filled);
plotparam(exp(i*t)+i,t=-pi/6..0,display=3+filled);
plotparam(exp(i*t)+i,t=-pi/2..-pi/3,display=3+filled);
polygon(R,A,Q,display=3+filled);
polygon(D,Q,P,display=3+filled);
polygon(P,C,S,display=3+filled);
plotparam(exp(i*t)+i+1,t=pi..7*pi/6,display=3+filled);
plotparam(exp(i*t),t=pi/3..pi/2,display=3+filled);
plotparam(exp(i*t),t=pi/6..pi/3,display=1+filled);
plotparam(1+i+exp(i*t),t=7*pi/6..4*pi/3,display=1+filled);
plotparam(i+exp(i*t),t=-pi/3..-pi/6,display=1+filled);
plotparam(1+exp(i*t),t=2*pi/3..5*pi/6,display=1+filled);
P:=P;Q:=Q;R:=R;S:=S;B:=display(B,quadrant1);
```

Calculer l'aire de la surface rouge, de la surface jaune et de la surface bleu.
Solution
Les triangles ABP, BCQ, CDR et DAS sont équilatéraux.
Donc on a :
$\widehat{PAD} = \widehat{BAN} = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$ L'arc de cercle BD de centre A est donc partagé en 3 parties égales et
SP est donc le côté d'un dodécagone convexe régulier.
L'arc de cercle CA de centre B est donc partagé en 3 parties égales et
PQ est donc le côté d'un dodécagone convexe régulier.
Donc SP est parallèle à BD et PQ est parallèle à AC
De même :
QR est parallèle à BD.
SR est parallèle à AC.
Donc $PQRS$ est un carré.
Calculons l'aire rouge.
On a :
aire du carré $PQRS$:
$PS^2 = AP^+AS^2 - 2 * AP * AScos(\pi/6) = 2 - 2 * \sqrt{3}/2 = 2 - \sqrt{3}$.
aire du secteur SAP : $\pi/12$
aire du triangle SAP : $AP * AS * sin(\pi/6)/2 = 1/4$
aire du segment de cercle limité par la corde PS :
$\pi/12 - 1/4$
Aire rouge=$2 - \sqrt{3} + 4(\pi/12 - 1/4) = 1 - \sqrt{3} + \pi/3 \simeq 0.315146743628$
aire du segment de cercle limité par la corde AC :
$\pi/4 - 1/2$
Aire jaune = $4(\pi/4 - 1/2 - (1 - \sqrt{3} + \pi/3)/2) = \pi - 2 - 2 + 2\sqrt{3} - 2 * \pi/3$
Aire jaune =$\pi/3 + 2\sqrt{3} - 4 \simeq 0.511299166334$
Vérifions :
2*aire rouge+aire jaune=4*(aire du segment de cercle de corde AC)
$2 - 2\sqrt{3} + 2\pi/3 + \pi/3 + 2\sqrt{3} - 4 = \pi - 2$
Aire bleu=$1 - (1 - \sqrt{3} + \pi/3 + \pi/3 + 2\sqrt{3} - 4$
Aire bleu=$-\sqrt{3} - 2\pi/3 + 4 \simeq 0.173554090038$

14.2.2 Aire d'une couronne circulaire

Calculer l'aire d'une couronne circulaire de rayons r, R avec $r < R$.
Soient (Γ) le cercle de rayon R et (γ) celui de rayon r.
La réponse est simple et ne dépend que de la longueur $2l$ des cordes de (Γ) tangentes à (γ) et on a :

$$S_c = \pi(R^2 - r^2) = \pi l^2$$

14.2.3 Aire d'une calotte sphérique

Calculer l'aire d'une calotte sphérique découpée par un plan P située à une distance d du centre O d'une sphère de rayon R.

On choisit comme l'origine du repère en O et l'axe des z perpendiculaire au plan P et on pose :
$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ donc

$z'_x = \frac{-x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$
$z'_y = \frac{-y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$
et $d\sigma = \sqrt{1+{z'}_x^2+{z'}_y^2}dx\ dy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ avec $(x,y) \in D$ D étant la projection de la calotte sur $0x, Oy$ i.e disque d'équation $x^2+y^2 \leq R^2-d^2$ Donc :
$S = \int\int_D d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{R^2-d^2} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} rdr$
$S = 2\pi R(\sqrt{R^2-0} - \sqrt{R^2-(R^2-d^2)} = 2\pi R(R-d)$
Donc :

$$S = 2\pi R(R-d)$$

14.2.4 Aire latérale d'un tonneau qui est une sphére sans ses 2 calottes sphériques

D'après ce qui précéde , on a :
Aire d'une sphère : $4\pi R^2$
Aire des 2 calottes : $4\pi R(R-d)$
L'aire latérale du tonneau est donc :

$$4\pi Rd$$

14.2.5 Volume d'une calotte sphérique

Calculer le volume d'une calotte sphérique découpée par un plan P située à une distance d du centre O d'une sphère de rayon R.

On choisit comme l'origine du repère en O et l'axe des z perpendiculaire au plan P et on pose :
$x = r\cos(t)$ donc $dx = -r\sin(t)dt + \cos(t)dr$
$y = r\sin(t)$ donc $dy = r\cos(t)dt + \sin(t)dr$
$z = z$ donc $dz = dz$
donc $dV == rdr.dt.dz$
Donc

$$Vol_c = \int_0^{2\pi} dt. \int_d^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} rdrdz$$

On tape :
`int(1,t,0,2pi)*int(int(r,r,0,sqrt(R^2-z^2)),z,d,R)`
On obtient :
`2*pi*(-1/2*R^2*d-(-1)/6*d^3+1/3*R^3)`
Donc :
$V_c = 2\pi(-\frac{1}{2}R^2d + \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{3}R^3)$
$V_c = \frac{\pi}{3}(2R^3 - 3R^2d + d^3)$
On tape : `factor(2R^3-3R^2*d+d^3)`
On obtient : `(R-d)^2*(2*R+d)`
Donc

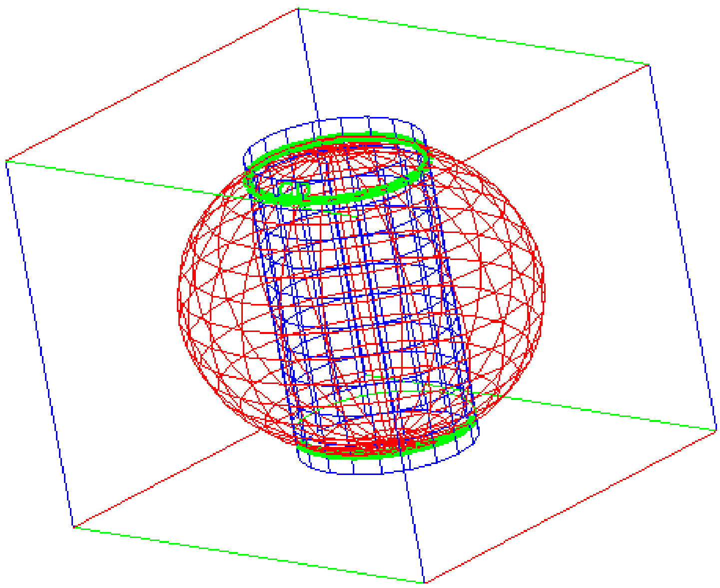
$$V_c = \frac{\pi}{3}(R-d)^2 * (2R+d)$$

14.2.6 Volume d'un tonneau qui est une sphére sans ses 2 calottes sphériques

D'après ce qui précéde , on a :
Volume d'une sphère : $4\pi R^3/3$
Volume des 2 calottes : $\frac{2\pi}{3}(2R^3 - 3R^2d + d^3)$
Le volume du tonneau est donc :
$frac2\pi 3d(3R^2 - d^2)$

14.2.7 Un calcul du volume d'une sphère percée

On fait un trou cylindrique dans une sphère de centre O et de rayon R, l'axe du cylindre passe par O et le cylindre a comme hauteur $2 * d$.
Calculer le volume de cette sphère percée.



1ière méthode
On suppose que l'on sait qu'une une sphère de rayon R a pour volume :

$$V_s = \frac{4}{3}\pi R^3$$

et que le volume d'une calotte sphérique située à une distance d du centre O d'une sphère de rayon R est :

$$V_c = 2\pi(-\frac{1}{2}R^2d + \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{3}R^3)$$

Calculons le volume du trou qui est composé :
— d'un cylindre de hauteur $2d$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$,

— de deux calottes sphériques situées à une distance d de O.

Donc d'après le calcul précédent :

$$V_t = 2\pi r^2 d + 4\pi(-\frac{1}{2}R^2 d + \frac{1}{6}d^3 + \frac{1}{3}R^3)$$

On tape :

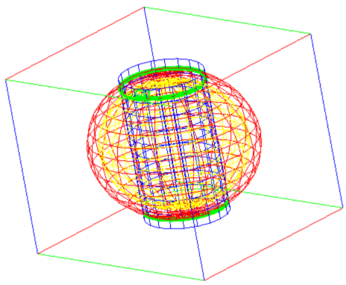
```
Vs:=4*pi*R^3/3
Vt:=2*pi*r^2*d+2*2*pi*(-1/2*R^2*d-(-1)/6*d^3+1/3*R^3)
simplify(subst(simplify(Vs-Vt),r^2,R^2-d^2))
```

On obtient :

```
(4*d^3*pi)/3
```

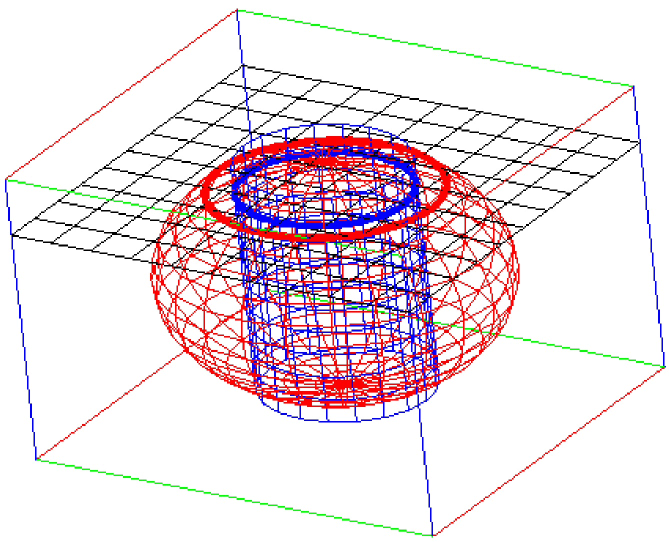
Donc la sphère trouée (en rouge) a le même volume qu'une sphère de rayon d (en jaune) où $2d$ est la hauteur du cylindre (en bleu) :

$$V_s - V_t = \frac{4}{3}\pi d^3$$



2ième méthode

On calcul le volume restant en coupant par des plans parallèles à Oxy.



Un plan de cote z coupe le volume restant selon une couronne de rayons r et R_z avec $R_z = \sqrt{R^2 - z^2}$ et $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
La surface de cette couronne est donc : $S_c = \pi(R_z^2 - r^2) = \pi(R^2 - z^2 - (R^2 - d^2) = \pi(d^2 - z^2)$ On a donc :
$V_s - V_t = \int_{-d}^{d} \pi(d^2 - z^2)dz$
On tape :
`simplify(int(pi*(d^2-z^2),z,-d,d))`
On obtient : `4/3*d^3*pi`
Donc :

$$V_s - V_t = \frac{4}{3}\pi d^3$$

14.2.8 Les théorèmes de Guldin

Le premier théorème de Guldin

Soit AB un arc du plan Ox, Oy de longueur L et supposons que Ox ne coupe pas l'arc AB.
Le centre de gravité $G = x_G, y_G)$ de AB a pour coordonnées :
$x_G = \int_{AB} xds/L$
$y_G = \int_{AB} yds/L$
avec si $x(t), y(t)$ décrit AB on a $ds^2 = dx^2 + dy^2$ et $L = \int_{AB} ds$
Théorème
En tournant autour de Ox l'arc AB engendre une surface de révolution dont l'aire est :

$$S = 2\pi * y_G * L$$

Le second théorème de Guldin

Soit P une surface du plan Ox, Oy d'aire S et supposons que Ox ne coupe pas la surface P.
Le centre de gravité $G = x_G, y_G)$ de P a pour coordonnées :
$x_G = \frac{1}{S} \int \int_P x\ dxdy$
$y_G = \frac{1}{S} \int \int_P y\ dxdy$
avec $S = \int \int_P dxdy$
Théorème
En tournant autour de Ox la surface D engendre un solide de révolution dont le volume est :

$$V = 2\pi * y_G * S$$

Applications

Les applications sont de 2 sortes :
- cela peut permettre de déterminer le centre de gravité G si l'aire S (ou le volume V) est connu par exemple trouver le centre de gravité d'un demi-disque,
- cela peut permettre de déterminer l'aire S (ou le volume V) si le centre de gravité G est connu par exemple trouver la surface et le volume d'un tore.

Surface et volume d'un tore :
Soit un tore T d'axe Δ et de rayons $r_1 = a - r$ et $r_2 = a + r$ avec $a > r$ (le cercle générateur a comme rayon r et la distance de son centre à Δ vaut a).
Donc T est engendré en faisant tourner autour de Ox par le cercle :
$x = r\sin(t), y = a + r\cos(t)$ avec $a > r$ et $t \in [0, 2\pi]$.
L'ordonnée du centre de gravite du cercle est donc $y_G = a$
Par le calçul on bien
$y_G = \frac{1/l}{\int_0}^{2\pi}(a + r\cos(t)) * rdt = 2 * \pi * a * r/(2\pi r) = a$.
Donc l'aire d'un tore de rayons $r_1 = a - r$ $r_2 = a + r$ (avec $a > r$) est :
$S = (2\pi a) * (2\pi r) = 4\pi^2 * a * r)$
comme $a = (r_1 + r_2)/2$ et $r = (r_2 - r_1)/2$ on a :

$$S = \pi^2(r_2^2 - r_1^2)$$

Le disque D a pour équation :
$x = r\sin(t), y = a + r\cos(t)$ avec $a > (r_2 - r_1)/2$, $0 < r < ((r_2 - r_1)/2$ et $t \in [0, 2\pi]$.

En tournant autour de Ox, le disque D engendre un tore de rayons $r_1 = a - r$ et $r_2 = a + r$.
Le centre de gravité du disque D est le centre de D donc :
$y_G = a$ et l'aire de D est $S = \pi * r^2$,
donc le volume du tore est :

$$V = 2\pi y_G \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2 = \pi^2(r_2^2 - r_1^2)(r_2 - r_1)/4$$

14.2.9 La formule des 3 niveaux

Soit un solide de volume :
$V = \int_a^b S(z)dz$
où $S(z)$ est la surface de la section par le plan de cote z.
Si $S(z)$ est un polynôme en z de degré au plus 3 alors :

$$V = \frac{(b-a)}{6}(S(a) + 4S(\frac{a+b}{2}) + S(b))$$

En effet :
si $S(z) = z^n$ on a :
$I_n = \int_a^b S(z)dz = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$
pour $n = 0$ on a $S(z) = 1$ donc on a $I_0 = b - a = \frac{(b-a)}{6}(1 + 4 * 1 + 1) = \frac{(b-a)}{6}(S(a) + 4S(\frac{a+b}{2}) + S(b))$
pour $n = 1$ on a $S(z) = z$ donc on a $I_1 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{(b-a)}{6}(a + 4\frac{a+b}{2}) + b)) = \frac{(b-a)}{6}(S(a) + 4S(\frac{a+b}{2}) + S(b))$
pour $n = 2$ on a $S(z) = z^2$ donc on a $I_2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{(b-a)}{6}(a^+4\frac{a^2+2ab+b^2}{4}) + b^2) = \frac{(b-a)}{6}(S(a) + 4S(\frac{a+b}{2}) + S(b))$
pour $n = 3$ on a $S(z) = z^3$ donc on a $I_3 = \frac{1}{4}(b^4 - a^4) = \frac{1}{4}(b-a)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = \frac{(b-a)}{6}(a^3 + 4S(\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8}) + b^3) = \frac{(b-a)}{6}(S(a) + 4S(\frac{a+b}{2}) + S(b))$
Cette formule est en fait la formule de Simpson pour le calcul de l'aire sous une

courbe, formule qui est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Remarque 1
Dans le commerce les flacons ont souvent la taille fine : c'est pour les avoir bien en main mais aussi pour donner aussi l'illusion d'un grand volume, puisque la section médiane compte 4 fois ! ! !
Remarque 2
On peut avoir facilement le volume du tonneau (sphère sans ses 2 calottes car $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$:
$V = \frac{2d}{6}(\pi(R^2 - d^2) + 4\pi R^2 + \pi(R^2 - d^2)) = \frac{\pi}{3}d(6R^2 - 2d^2)$
On retrouve bien ;

$$V = \frac{2\pi}{3}d(3R^2 - d^2)$$

14.3 La moyenne arithmétique, géométrique et harmonique

14.3.1 La définition

Soient a_1, $a_2 ... a_n$, n réels positifs ($n \geq 2$) et on pose :
$u = \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$
$v = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$
$\dfrac{n}{w} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_1}$
u est la moyenne arithmétique des nombres a_1, $a_2 ... a_n$.
v est la moyenne géométrique des nombres a_1, $a_2 ... a_n$.
w est la moyenne harmonique des nombres a_1, $a_2 ... a_n$.

14.3.2 L'énoncé

Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\ln(x) \leq x - 1$
Montrer que : $v \leq u$ (on utilisera l'inégalité précédente pour $x = \dfrac{a_k}{u}$ et pour $k = 1..n$).
En déduire que $w \leq v$
Dans quel cas a-t-on $v = u$?
Dans quel cas a-t-on $v = w$?
Applications

— En prenant $a_1 = 1$ et $a_2 = x$ en déduire que :
$\dfrac{2x}{x+1} \leq \sqrt{x} \leq \dfrac{1+x}{2}$
On prend comme valeur approchée de $\sqrt{x}$, la moyenne arithmétique des nombres $\dfrac{2x}{x+1}$ et $\dfrac{1+x}{2}$. Évaluer la précision de cette approximation lorsque $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$ lorsque l'on sait que $1.414 < \sqrt{2}. < 1.415$

— Montrer que pour tout n on a $\sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{1+n}{2}$.
Montrer que $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$ et en déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1+\ln(n) \text{ et } \frac{n}{1+\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$$

14.3.3 La solution

Montrons que : $v \leq u$ pour cela montrons que : $\ln(\frac{v}{u}) \leq 0$.
On a :
$\ln(\frac{v}{u}) = \frac{1}{n}\ln(a_1a_2...a_n)/u) = \frac{1}{n}(\ln(\frac{a_1}{u}) + \ln(\frac{a_2}{u}) + ... + \ln(\frac{a_n}{u}))$
Puisque $\ln(x) \leq x-1$ pour tout $x > 0$, on a :
$\ln(\frac{a_1}{u}) \leq \frac{a_1}{u} - 1,\ \ \ln(\frac{a_2}{u}) \leq \frac{a_2}{u} - 1, ...,\ \ln(\frac{a_n}{u}) \leq \frac{a_n}{u} - 1$
Donc
$\frac{1}{n}\ln(\frac{a_1a_2...a_n}{u}) \leq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)}{nu} - 1 = 0$
Donc $v \leq u$
Montrons que : $w \leq v$
D'après ce qui précéde en appliquant l'inégalité à $b_k = \frac{1}{a_k}$ on a :
$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} = \frac{1}{v} \leq \frac{1}{n}(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_1}) = \frac{1}{w}$
donc puisque $v > 0$ et $w > 0$ on en déduit que :
$w \leq v$.
Quand a-t-on $u = v$?
Si $x > 0$ et $x \neq 1$, on a $\ln(x) < x - 1$ et
$\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$ donc
$\ln(\frac{v}{u}) = 0$ si et seulement si $\frac{a_1}{u} = 1$, ..., $\frac{a_n}{u} = 1$ c'est à dire si $a_1 = a_2.... = a_n$.
Quand a-t-on $w = v$?
Comme on a appliqué l'inégalité à $b_k = \frac{1}{a_k}$ on a :
$w = v$ si et seulement si $b_1 = b_2 = ... = b_n$ c'est à dire si $a_1 = a_2... = a_n$.

Applications

— En prenant $a_1 = 1$ et $a_2 = x$ on a :
$u = \frac{1+x}{2}$, $v = \sqrt{x}$ et $\frac{2}{w} = 1 + \frac{1}{x}$ donc $w = \frac{2x}{x+1}$ et
$\frac{2x}{x+1} \leq \sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$
On approche $\sqrt{x}$ par $\frac{x}{x+1} + \frac{1+x}{4} = \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)}$.
On cherche à évaluer $h(x) = \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)} - \sqrt{x}$ pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.
Avec `Xcas`, on tape :
```
h(x):=(x^2+6x+1)/(4x+4)-sqrt(x)
g:=function_diff(h)
N:=numer(g(x))
```
On obtient :
```
x^2*sqrt(x)-2*x^2+2*x*sqrt(x)-4*x+5*sqrt(x)-2
```
On tape :
```
Nt:=subst(numer(g(x)),x=t^2)
```
On obtient :
```
t^4*t-2*t^4+2*t^2*t-4*t^2+5*t-2
```

On tape :
`factor(Nt)`
On obtient :
`(t-1)^3*(t^2+t+2)`
h a donc un minimum pout $x = 1$.
On tape :
`h(1)`
On obtient :
`0`
On tape :
```
f(x):=(x^2+6x+1)/(4x+4)
f(2.),f(2.)-1.414
```
On obtient :
`1.41666666667,0.00266666666664`
On tape :
`f(0.5),f(0.5)-1.414/2`
On obtient :
`0.708333333333,0.00133333333332`
Donc pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ on a :
$0 \leq h(x) < 0.0027$ La précision est donc de $2.7e - 3$.
On fait le calcul pour $x = 1.2$:
On tape :
`f(1.2),sqrt(1.2)`
On obtient :
`1.09545454545,1.09544511501`

— Montrer que pour tout n on a :
$\sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{1+n}{2}$.
On pose $a_1 = 1, a_2 = 2...a_n = n$.
On a : $1 + 2 + ...n = \dfrac{n(1+n)}{2}$ donc $u = \frac{1+n}{2}$ et $v = \sqrt[n]{n!}$ donc :
$\sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{1+n}{2}$
Montrons que :
$1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$
La fonction $x - 1 - \ln(x)$ a pour dérivée $\dfrac{x-1}{x}$. Elle admet donc un minimum pour $x = 1$ qui vaut 0 donc $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$
On a donc pour tout $t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$.
On pose $x = \dfrac{1}{t}$ donc $-\ln(x) \leq \dfrac{1}{x} - 1$ c'est à dire $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x)$ pour tout $x > 0$
Montrons par récurrence que :
$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$
Pour $n = 1$ on a $1 \leq 1$
$n = 2$ on a $\dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} \leq \ln(2)$ donc $1 + \dfrac{1}{2} \leq 1 + \ln(2)$
$n = 3$ on a $\dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{2}{3} \leq \ln(\dfrac{3}{2})$ donc $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \leq 1 + \ln(2)\ln(\dfrac{3}{2}) =$

$1+\ln(3)$

Si $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+\ln(n)$ est vraie pour n alors puisque

$\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} \leq \ln(\frac{n+1}{n})$ on a

$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \leq 1+\ln(n)+\ln(\frac{n+1}{n}) = 1+\ln(n+1)$

Donc l'inégalité $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+\ln(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que : $\frac{n}{1+\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$

Pour $a_k = \frac{1}{k}$, on a $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) \leq \frac{1+\ln(n)}{n}$ donc

$\frac{n}{1+\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$

14.4 La moyenne arithmético-harmonique

14.4.1 La définition et l'énoncé

Soient a et b deux réels strictement positifs (dire pourquoi on peut supposé dans la suite $a > b$), on définit les 2 suites u et w par :

$$u_0 = a, w_0 = b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}, w_{n+1} = \frac{2u_n w_n}{u_n + w_n} \tag{14.1}$$

- Montrer que $w_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- Montrer que ces 2 suites sont adjacentes et qu'elles convergent vers $l = \sqrt{ab}$
- Montrer que $|u_n - l| < \frac{(u_{n-1}-l)^2}{2l}$
- Déterminer le premier n tel que $|u_n - w_n| < 10^{-10}$ lorsque $a = 2$ et $b = 1$
- Calculer $\sqrt{2}$ avec une précision de 10^{-10}.

14.4.2 La solution

- On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
  $u_n > 0, w_n > 0$ et $u_{n+1}w_{n+1} = u_n w_n = ...u_0 w_0$

- Montrons que $w_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
  $u_{n+1} - w_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} - \frac{2u_n w_n}{u_n + w_n}$
  Avec `Xcas`, on tape :
  `factor((a+b)/2-2a*b/(a+b))`
  On obtient : `((a-b)^2)/(2*(a+b))`
  Donc tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - w_{n+1} = \frac{(u_n - w_n)^2}{2(u_n + w_n)} \geq 0$ donc pour tout $n \geq 1$ $u_1 \geq w_1$ et si on échange les valeurs de u_0 et de w_0 on obtient les mêmes valeurs pour u_1 et w_1 et c'est pourquoi on peut supposer dans la

suite $u_0 = a > w_0 = b$

— Montrons que u est décroissante :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(w_n - u_n)}{2} \leq 0$ puisque $w_n \leq u_n$

— Montrons que w est croissante :
$w_n = \dfrac{w_0 u_0}{u_n}$ puisque u est positive et décroissante et que $w_0 u_0 > 0$ on en déduit que w est croissante.

— Montrons que u et w sont adjacentes.
On a donc :
$w_0 \leq w_1 \leq ...w_n \leq w_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq ...u_1$
u est décroissante et minorée donc est convergente.
w est croissante et majorée donc est convergente.
Les suites u et v sont donc convergentes et puisque $u_{n+1} = \dfrac{u_n + w_n}{2}$ par passage à la limite on en déduit qu'elles convergent vers la même limite notée l.
Ou bien, on remarque que :
$u_{n+1} - w_{n+1} < u_{n+1} - w_n = \dfrac{u_n + w_n}{2} - w_n = \dfrac{u_n - w_n}{2}$
Donc $0 < u_n - w_n < \dfrac{u_0 - w_0}{2^n}$
On a donc montré que u et w sont adjacentes : elles convergent donc vers la même limite l qui vérifie $0 < b \leq l \leq a$ et $l^2 = u_0 w_0$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n w_n = u_0 w_0$.
donc $l = \sqrt{u_0 w_0}$

— $w_{n-1} = \dfrac{l^2}{u_{n-1}}$ donc
$u_n - l = \dfrac{u_{n-1} + w_{n-1} - 2l}{2} = \dfrac{u_{n-1}^2 + l^2 - 2l u_{n-1}}{2u_{n-1}} = \dfrac{(u_{n-1} - l)^2}{2u_{n-1}}$
Pour $b = 1$ et $a = 2$ on a $u_1 = 3/2 = 1.5$ donc $0 < u_1 - l \leq 0.1$ On a
$0 < u_2 - l \leq 10^{-2}/(2l)$
$0 < u_3 - l \leq 10^{-4}/(2^3 l^3)$
$0 < u_4 - l \leq 10^{-8}/(2^7 l^7)$
On sait que $l^2 = 2$ donc $2^7 * l^7 = 2^{10} l > 10^3$ donc
$0 < u_4 - l \leq 10^{-10}$.
On ouvre un niveau tableur dans `Xcas` (`Alt+t`). On met : dans `B0` 2.
dans `B1` =(A0+B0)/2
Lorsque `B1` est en surbrillance, on ouvre le menu `Edit->Remplir->Copier vers le bas` du tableur pour copier la formule contenue dans `B1`
On met : dans `A0` 1.
dans `A1` =A0*B0/(2*B1)
Lorsque `A1` est en surbrillance, on ouvre le menu `Edit->Remplir->Copier vers le bas` du tableur pour copier la formule contenue dans `A1`
On met : dans `C0` =B0-C0
Lorsque `C0` est en surbrillance, on ouvre le menu `Edit->Remplir->Copier vers le bas` du tableur pour copier la formule contenue dans `C0`

On obtient à la ligne 4 :
`A4=1.41421356237,B4=1.41421356237,C4=3.29691829393e-12`
On trouve à la ligne 4, avec 21 chiffres après la virgule :
`A4=1.414213562371500186978,B4=1.414213562374689910627,`
`C4=0.318972364864969666202e-11`
et à partir de ligne 5 les colonnes `A` et `B` valent : `[[1.414213562373095048803]]`
On tape : avec 21 chiffres après la virgule `sqrt(2.)`
On obtient : `1.414213562373095048801`

— **Remarque** La suite u peut être définie par :
$u_0 = a$
$u_n = \dfrac{u_{n-1} + w_{n-1}}{2} = \dfrac{u_{n-1}^2 + ab}{2u_{n-1}} = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} - \dfrac{ab}{u_{n-1}})$
Écrit sous cette forme on réconnait la suite d'itérés de la méthode de Newton pour calculer $\sqrt{ab}$

14.5 La moyenne arithmético-géométrique

14.5.1 La définition et l'énoncé

Soient a et b deux réels strictement positifs (dire pourquoi on peut supposé dans la suite $a > b$), on définit les 2 suites u et v par :

$$u_0 = a, v_0 = b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \tag{14.2}$$

— Faire la constuction géométrique qui donne u_1, v_1 à partir de $u_0 = 2, v_0 = 1$.

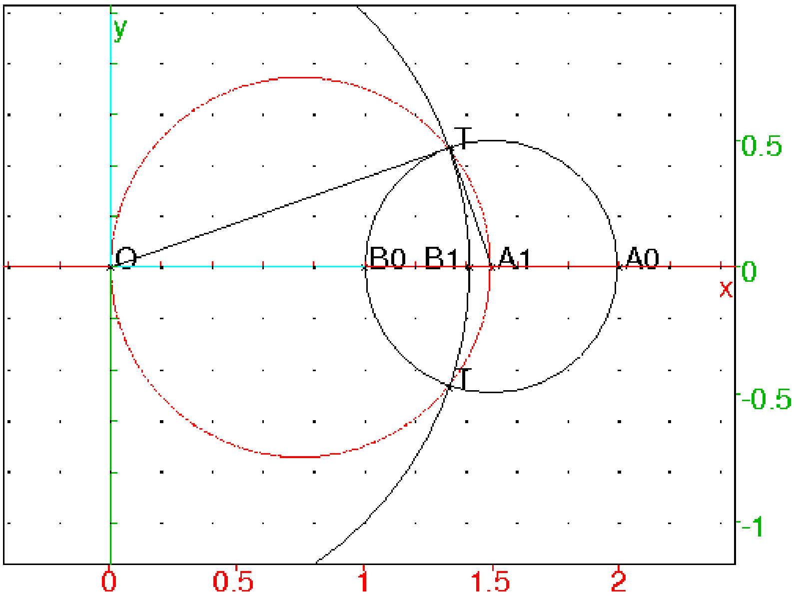
— Montrer que ces 2 suites sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune notée $M(a, b)$ est par définition la moyenne arithmético-géométrique de a et b

— Déterminer le premier n tel que $abs(u_n - v_n) < 10^{-20}$ lorsque $a = 2$ et $b = 1$

— Calculer M(2,1) avec une précision de 10^{-20}.

14.5.2 La solution

— On obtient :



lorsqu'on tape :

```
O:=point(0);
A0:=point(2);
B0:=point(1);
A1:=milieu(A0,B0);
C:=cercle(A0,B0):;C
c:=cercle(point(0),A1):;affichage(c,1+ligne_tiret);
T:=inter(c,C);
k:=cercle(O,T[1]-O):;k;
B1:=inter_unique(segment(A0,B0),k,affichage=quadrant2);
```

On a : $OT^2 = OB_1^2 = OB_0 \times OA_0 = ab$

— $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} = \dfrac{(\sqrt{u}_n - \sqrt{v}_n)^2}{2} \geq 0$
donc pour tout entier $n > 0$, $u_n \geq v_n$

— $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$ La suite u est donc décroissante

— $v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n \geq \sqrt{v_n v_n} - v_n = 0$ La suite v est donc croissante

Les suites u et v sont donc convergentes et puisque $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ par passage à la limite on en déduit qu'elles convergent vers la même limite notée $M(a, b)$.
Ou bien, on remarque que :
$u_{n+1} - v_{n+1} < u_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$
) Donc $0 < u_n - v_n < \frac{u_0 - v_0}{2^n}$
On remarque que :
$\sqrt{ab} \leq M(a, b) = M(b, a) \leq \frac{a+b}{2}$ et
pour tout $k > 0$ on a $M(k * a, k * b) = k * M(a, b)$
On peut donc supposer $b = 1$ et $a > 1$.

On a aussi pour tout entier $n > 0$:
$\sqrt{ab} \leq v_n \leq u_n \leq \frac{a+b}{2}$ $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 = \frac{(u_n-v_n)^2}{4}$ donc
$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n-v_n)^2}{4(u_{n+1}+v_{n+1})} \leq K(u_n - v_n)^2$ avec $K = \frac{1}{8\sqrt{ab}}$.
On a :
$K < 9 * 10^-2$ $u_1 = 1.5$, $v_1 = \sqrt{2}$ donc $0 < u_1 - v_1 < 9 * 10^-2$
$u_2 - v_2 < (9 * 10^-2)^3 < 8 * 10^-4$
$u_3 - v_3 < (9 * 10^-2)^7 < 5 * 10^-8$
$u_4 - v_4 < (9 * 10^-2)^{2^4-1} < 3 * 10^-16$
$u_5 - v_5 < (9 * 10^-2)^{2^5-1} < 4 * 10^-33$
On fait les calculs soit avec un tableur, soit avec un programme.

— On ouvre un tableur pour calculer M(2,1) et on trouve que : $u_5 = v_5 =$ 1.4567910310469068691864 31 Avec `Digits:=34` on a :
$v_5 = 1.456791031046906869186432383265081$4 et
$u_5 = 1.456791031046906869186432383265082$4
— On ouvre un éditeur de programme et on tape :
```
aritgeo(a,b,eps):={
local n,u,v,u0;
u:=a;
v:=b;
n:=0;
tantque u-v>eps faire
u0:=u;
u:=(u+v)/2;
v:=sqrt(u0*v)
n:=n+1;
ftantque;
print(n);
return u;
}:;
```

On tape :
`aritgeo(2,1.,1e-20)`
On obtient :
`1.4567910310469068691864 31,5`
On peut tracer la fonction `aritgeo(x,1.,1e-2)[0]`, pour cela on tape (on commente `print(n)` dans `aritgeo`) :

```
plotaritgeo(n):={
local j,L;
L:=point(0);
pour j de 0 jusque n faire
L:=L,point(j+i*aritgeo(j,1.,1e-2));
fpour;
retourne L;}:;
```

14.5.3 Relation entre $M(a, b)$ et les intégrales elliptiques

Il se trouve que la convergence est très rapide. Le calcul de cette limite en fonction de a et b n'est pas trivial au premier abord. Il est relié aux intégrales elliptiques, plus précisément on peut construire une intégrale dépendant de deux paramètres a et b et qui est invariante par la transformation $F(x,y)=\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}$:

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

On a en effet

$$I(F(a,b))=I(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2+u^2)(ab+u^2)}}$$

On pose alors

$$u=\frac{1}{2}(t-\frac{ab}{t}),\quad t>0$$

où $t\to u$ est une bijection croissante de $t\in]0,+\infty[$ vers $u\in]-\infty,+\infty[$, donc

$$\begin{aligned}I(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}) &= \int_0^{+\infty}\frac{dt/2(1+ab/t^2)}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2+1/4(t-ab/t)^2)(ab+1/4(t-ab/t)^2)}}\\ &= 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}=I(a,b)\end{aligned}$$

Lorsqu'on est à la limite $l=M(a,b)$, le calcul de $I(l,l)$ est explicite

$$I(l,l)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(l^2+t^2)}=\frac{\pi}{l}$$

donc

$$I(a,b)=\frac{\pi}{M(a,b)}$$

On peut transformer $I(a,b)$ en posant $t=bu$

$$I(a,b)=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{(a^2+b^2u^2)(1+u^2)}}=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{(1+(b/a)^2u^2)(1+u^2)}}$$

Puis en posant $u=\tan(x)$ $(du=(1+u^2)dx)$

$$I(a,b)=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\tan(x)^2}{1+(b/a)^2\tan(x)^2}}\,dx$$

et enfin en posant $\tan^2(x)=\frac{\sin(x)^2}{1-\sin(x)^2}$

$$I(a,b)=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{1-(1-\frac{b^2}{a^2})\sin(x)^2}}\,dx$$

Si on définit pour $m<1$

$$K(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-m\sin(x)^2}}$$

alors on peut calculer K en fonction de I, en posant $m = 1 - b^2/a^2$ soit $b^2/a^2 = 1 - m$

$$K(m) = \frac{a}{2} I(a, a\sqrt{1-m}) = \frac{a}{2} \frac{\pi}{M(a, a\sqrt{1-m})} = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-m})}$$

Donc pour x et y positifs

$$K((\frac{x-y}{x+y})^2) = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-(\frac{x-y}{x+y})^2})} = \frac{\pi}{2M(1, \frac{2}{x+y}\sqrt{xy})} = \frac{\pi}{2\frac{2}{x+y}M(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy})} = \frac{\pi}{4} \frac{x+y}{M(x,y)}$$

et finalement

$$M(x,y) = \frac{\pi}{4} \frac{x+y}{K\left((\frac{x-y}{x+y})^2\right)}$$

et si $k^2 = 1 - m$ avec $k \in]0, 1]$

$$KK(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - m\sin(x)^2}} = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-m})} \tag{14.3}$$

14.5.4 Application : calcul efficace du logarithme.

On peut utiliser la moyenne arithmético-géométrique pour calculer le logarithme efficacement, pour cela on cherche le développement asymptotique de $K(m)$ lorsque m tend vers 1. Plus précisément, on montre que pour $k < 1/2$:

$$|K - \ln\left(\frac{4}{k}\right)| \leq k^2 \left(\frac{\ln \pi}{3/4 + \sqrt{3}/2} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^3}{96} + \frac{9}{20} - (\frac{1}{3/4 + \sqrt{3}/2} + \frac{1}{6}) \ln(k) \right) \tag{14.4}$$

que l'on peut réécrire

$$|\frac{\pi}{2M(1,k)} - \ln\left(\frac{4}{k}\right)| \leq k^2(3.8 - 0.8\ln(k)) \tag{14.5}$$

La formule (14.5) permet de calculer le logarithme d'un réel positif avec (presque) n bits lorsque $k \leq 2^{-n/2}$ (ce à quoi on peut toujours se ramener en calculant le logarithme d'une puissance 2^m-ième de x ou le logarithme de $2^m x$, en calculant au préalable $\ln(2)$). Par exemple, prenons $k = 2^{-27}$, on tape avec comme configuration 24 digits : `M(1,2^-27)=M1:=aritgeo(1,2^-27.,1e-20)`
on trouve pour `M1` (en 8 itérations puisque `n=8`) : `0.781441403763309267216838 7e-1`
On a, avec une erreur inférieure à $19 \times 2^{-54} = 1.1 \times 10^{-15}$

$$M(1, 2^-27) = M_1 = \frac{\pi}{2\ln(2^{29})} = \frac{\pi}{58\ln(2)},$$

On peut donc déduire une valeur approchée de π de celle de $\ln(2)$. Par exemple si on prend comme valeur de π :
`3.141592653589793238462642` On obtient comme approximation de $\ln(2)$, $\frac{\pi}{58M_1}$:
On tape `evalf(pi)/(58*M1)`
On obtient `0.693147180559945318558036 4`
alors que `Xcas` donne comme valeur de $\ln(2)$,

```
0.693147180559945309417232
```

On remarque que l'erreur est inférieure à 1.1×10^{-15}.

Si on veut calculer les deux simultanément, comme les relations entre $\ln$ et π seront des équations homogènes, on est obligé d'introduire une autre relation. Par exemple pour calculer une valeur approchée de π on calcule la différence $\ln(2^{29}+1)-\ln(2^{29})$ dont on connait le développement au premier ordre, et on applique la formule de la moyenne arithmético-géométrique. Il faut faire attention à la perte de précision lorsqu'on fait la différence des deux logarithmes qui sont très proches, ainsi on va perdre une trentaine de bits, il faut grosso modo calculer les moyennes arithmético-géométrique avec 2 fois plus de chiffres significatifs.

L'intérêt de cet algorithme apparait lorsqu'on veut calculer le logarithme avec beaucoup de précision, en raison de la convergence quadratique de la moyenne arithmético-géométrique (qui est nettement meilleure que la convergence linéaire pour les développements en série, ou logarithmiquement meilleure pour l'exponentielle), par contre elle n'est pas performante si on ne veut qu'une dizaine de chiffres significatifs. On peut alors calculer les autres fonctions transcendantes usuelles, telle l'exponentielle, à partir du logarithme, ou les fonctions trigonométriques inverses (en utilisant des complexes) et directes.

On trouvera dans Brent-Zimmermann quelques considérations permettant d'améliorer les constantes dans les temps de calcul par rapport à cette méthode (cela nécessite d'introduire des fonctions spéciales θ) et d'autres formules pour calculer π.

14.6 L'intégrale d'une fraction rationnelle

1. Calculer :
$$I = \int \frac{t^2\ dt}{1-t^4}$$
2. En déduire :
$$J = \int \frac{\sin(x)^2\ dx}{\cos(2x)}$$

Avec `Xcas` les réponses sont immédiates.
On tape :
```
integrate(t^2/(1-t^4),t)
```
On obtient :
```
1/-2*atan(t)+1/4*log(abs(t+1))+1/-4*log(abs(t-1))
```
On tape :
```
I:=integrate(sin(x)^2/(cos(2*x)),x)
```
On obtient :
```
(x/(-2*2)+(log(abs((tan(x/2))^2-2*tan(x/2)-1)))/8+
(log(abs((tan(x/2))^2+2*tan(x/2)-1)))/-8)*2
```
On tape :
```
lncollect(I-x/2))
```
On obtient :
```
-(1/4*log(abs((tan(x/2))^2+2*tan(x/2)-1)))
```
Mais comment détailler ?

— Pour la question 1/, on décompose la fraction ratonnelle :
$\dfrac{t^2\ dt}{1-t^4}$ en posant $T=t^2$:
On tape :
`partfrac(T/(1-T^2))`
On obtient :
`1/(-2*(T+1))+1/(-2*(T-1))`
soit :
`1/-2*(t^2+1))+1/(-2*(t^2-1))`
On tape :
`partfrac(1/(-2*(t^2-1)))`
On obtient :
`1/(4*(t+1))+1/(-4*(t-1))`
donc :
`t^2/(1-t^4)=1/(t^2)+1/(4*(t+1))+1/(-4*(t-1))`
On intègre chaque morceau pour obtenir (`K` étant une constante arbitraire) :
`-1/2*atan(t)+1/4*ln(abs((t+1)/(t-1)))+K`
On a donc :
`I:=-1/2*atan(t)+1/4*ln(abs((t+1)/(t-1)))+K`

— Pour la question 2/, on transforme $(\sin(x)^2/\cos(2*x))$.
On tape :
`texpand(sin(x)^2/cos(2*x))`
On obtient :
`(sin(x))^2)/(2*cos(x)^2-1)`
On tape :
`trigtan((sin(x))^2)/(2*cos(x)^2-1))`
On obtient :
`(-((tan(x))^2))/((tan(x))^2-1)`
On tape :
```
subst(quote(integrate((-((tan(x))^2))/
((tan(x))^2-1),x)),x=atan(t))
```
On obtient :
`integrate((-(t^2))/((t^2-1)*(1+t^2)),t)`
c'est à dire l'intégale calculer en 1/.
On a donc :
```
-x/2+1/4*ln(abs((tan(x)+1)/(1-tan(x))))+K
J:=subst(I,t=tan(x))
```

14.7 Décomposition d'une fraction rationnelle et idendité de Bézout

Pour intégrer une fraction rationnelle on nous apprend qu'il faut décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. Pourtant un logiciel de calcul formel procéde autrement quand le dénominateur a des racines multiples : il utilise l'identité de Bézout.
On peut utiliser l'idendité de Bézout pour les polynômes (calculé avec `Xcas`) pour trouver la décomposition d'une fraction rationnelle.

Exemple 1
Donner le détail des calculs avec l'idendité de Bézout pour trouver la décomposition de :

$$\frac{1}{(x^2-1)^2(x+2)}$$

On tape :
`egcd((x-1)^2*(x+2),(x+1)^2)`
On obtient :
`[1,2-x,4]`
Donc $(x-1)^2(x+2)+(2-x)(x+1)^2=4$
En divisant cette égalité par $4(x^2-1)^2(x+2)$ on obtient :
$\dfrac{1}{4(x+1)^2}+\dfrac{2-x}{4(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{1}{(x^2-1)^2(x+2)}$
Donc :
$\dfrac{1}{(x^2-1)^2(x+2)}=\dfrac{1}{4(x+1)^2}+\dfrac{1+1-x}{4(x-1)^2(x+2)}$
$\dfrac{1}{(x^2-1)^2(x+2)}=\dfrac{1}{4(x+1)^2}+\dfrac{1}{4(x-1)^2(x+2)}-\dfrac{1}{4(x-1)(x+2)}$
On pose :
$A=\dfrac{1}{4(x+1)^2}$
$B=-\dfrac{1}{4(x-1)(x+2)}$
$C=\dfrac{1}{4(x-1)^2(x+2)}$
$\dfrac{1}{(x^2-1)^2(x+2)}=A+B+C$
On tape :
`egcd((x-1),x+2)`
On obtient :
`[1,-1,-3]`
Donc $(x-1)-(x+2)=-3$, en divisant cette égalité par $12(x-1)(x+2)$ on a :
$B=-\dfrac{1}{4(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{12*(x+2)}-\dfrac{1}{12*(x-1)}$
On tape :
`egcd((x-1)^2,x+2)`
On obtient :
`[1,4-x,9]`
Donc : $C=\dfrac{1}{4*(x+2)*(x-1)^2}=\dfrac{1}{36*(x+2)}+\dfrac{3+1-x}{36*(x-1)^2}=$
$\dfrac{1}{36*(x+2)}-\dfrac{1}{36*(x-1)}+\dfrac{3}{36*(x-1)^2}$
Ce qui donne (1/12+1/36=1/9) :

$$\frac{1}{(x^2-1)^2(x+2)}=\frac{1}{9(x+2)}-\frac{1}{9(x-1)}+\frac{1}{12(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}$$

On vérifie en tapant :
`partfrac(1/((x^2-1)^2*(x+2)))`
On obtient :
`1/((-1+x)^2*12)-1/((-1+x)*9)+1/((1+x)^2*4)+1/((2+x)*9)`

Exemple 2
Décomposer la fraction rationnelle :

$$\frac{x^5}{x^5-1}$$

Solution
On a :
$\frac{x^5}{x^5-1} = 1 + \frac{1}{x^5-1}$
On tape :
`partfrac(1/(x^5-1))`
On obtient :
`1/((-1+x)*5)+(-4-3*x-2*x^2-x^3)/((1+x+x^2+x^3+x^4)*5)`
On tape :
`exp(i*2*pi/5)`
On obtient :
`(sqrt(5)-1)/4+i*(sqrt(2*sqrt(5)+10))/4`
On tape :
`exp(i*4*pi/5)`
On obtient :
`(-(sqrt(5)+1))/4+i*(sqrt(-2*sqrt(5)+10))/4`
On tape :
```
a:=(sqrt(5)-1)/4;
c:=-(sqrt(5)+1)/4;
P(x):=(x^2-2a*x+1
```
On obtient :
`2+x-x*sqrt(5)+2*x^2)/2`
On tape :
`Q(x):=(x^2-2c*x+1)`
On obtient :
`2+x+x*sqrt(5)+2*x^2)/2`
Ou bien
On cherche p et q pour avoir :
$(1+px+x^2)*(1+qx+x^2) = 1+x+x^2+x^3+x^4$
On tape :
`symb2poly((1+p*x+x^2)*(1+q*x+x^2))`
On obtient :
`poly1[1,p+q,2+p*q,p+q,1]`
On tape pour avoir $[1, p+q, 2+p*q, p+q, 1] = [1, 1, 1, 1, 1]$:
`simplify(solve([p+q=1,p*q=-1],[p,q]))`
On obtient :
`[[(1+sqrt(5))/2,(1-(sqrt(5)))/2],[(1-(sqrt(5)))/2,(1+sqrt(5))/2]]`
On tape pour définir $P(x)$ et $Q(x)$:
```
P(x):=(x^2+(1-sqrt(5))/2*x+1
Q(x):=(x^2+(1+sqrt(5))/2*x+1
```
On décompose $\frac{-4-3*x-2*x^2-x^3}{(1+x+x^2+x^3+x^4)*5}$ **sans utiliser Bézout**
On a donc :

$\dfrac{-4-3*x-2*x^2-x^3}{5(1+x+x^2+x^3+x^4)} = \dfrac{A*x+B}{P(x)} + \dfrac{C*x+D}{Q(x)}$
Si $x = 0$ alors $-4 = B + D$
En multipliant par x puis en faisant tendre vers l'infini on a :
$-1 + A + C$
On tape :
`(A*x+B)/P(x)+((-A-1/5)*x+(-B-4/5))/Q(x)-`
`(-4-3*x-2*x^2-x^3)/((1+x+x^2+x^3+x^4)*5)`
On obtient :
`(4*x*sqrt(5)-5*x^2+x^2*sqrt(5)+10*B*x*sqrt(5)+10*A*x^2*sqrt(5))/`
`(10+10*x+10*x^2+10*x^3+10*x^4)`
On tape :
`N(x):=4*x*sqrt(5)-5*x^2+x^2*sqrt(5)+10*B*x*sqrt(5)+`
`10*A*x^2*sqrt(5)`
`subst(diff(N(x)),x=0)`
On obtient :
`4*sqrt(5)+10*B*sqrt(5)`
On tape :
`B:=-2/5`
`N(B)`
On obtient :
`(-20+4*sqrt(5)+40*A*sqrt(5))/25`
On tape :
`solve(-20+4*sqrt(5)+40*A*sqrt(5)=0,A)`
On obtient :
`[(-1+sqrt(5))/10]`
On tape :
`A:=(-1+sqrt(5))/10`
`C:=-A-1/5` donc `C:=(-1-sqrt(5))/10`
`D:=-B-4/5` donc `D:=-2/5`

$$\frac{-4-3*x-2*x^2-x^3}{(1+x+x^2+x^3+x^4)*5} = \frac{Ax+B}{P(x)} + \frac{Cx+D}{Q(x)} =$$

$$\frac{-4+(-1+\sqrt{5})*x}{5*(2+(-(\sqrt{5})+1)*x+2*x^2)} + \frac{-4+(-1-(\sqrt{5}))*x}{5*(2+(\sqrt{5}+1)*x+2*x^2)}$$

On décompose $\dfrac{-4-3*x-2*x^2-x^3}{(1+x+x^2+x^3+x^4)*5}$ en utilisant Bézout

On pose :
$A(x) = (-4-3*x-2*x^2-x^3)/5$ et on a :
$P(x)*Q(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4$
On tape (rappel) :
`P(x):=2+x-x*sqrt(5)+2*x^2)/2`
`Q(x):=2+x+x*sqrt(5)+2*x^2)/2`
`A(x):=(-4-3*x-2*x^2-x^3)/5`
`(u,v):=abcuv(P(x),Q(x),1)`
On obtient :
`[1/2*1/(sqrt(5))*(1+sqrt(5)+2*x),1/2*1/(sqrt(5))*(-1+sqrt(5)-2*x)]`
On tape :

`(q1,r1):=quorem((-4-3*x-2*x^2-x^3)/5*v,P(x))`
On obtient :
`[(2*sqrt(5)+2*x*sqrt(5)+x^2*sqrt(5))/25,(-4-x+x*sqrt(5))/10]`
On tape :
`(q2,r2):=quorem((-4-3*x-2*x^2-x^3)/5*u,Q(x))`
On obtient :
`[(-2*sqrt(5)-2*x*sqrt(5)-x^2*sqrt(5))/25,(-4-x-x*sqrt(5))/10]`
On tape :
`simplify(q1+q2)`
On obtient :
`0`
On tape :
`simplify(r1/P(x))`
On obtient :
`(-4-x+x*sqrt(5))/(10+5*x-5*x*sqrt(5)+10*x^2)`
On tape :
`simplify(r2/Q(x))`
On obtient :
`(-4-x-x*sqrt(5))/(10+5*x+5*x*sqrt(5)+10*x^2)`
Puisque :
$u*P(x)+v*Q(x)=1$ on a :
$\dfrac{A(x)*1}{P(x)Q(x)}=\dfrac{A(x)(u*P(x)+v*Q(x))}{P(x)Q(x)}$
$\dfrac{A(x)*1}{P(x)Q(x)}=\dfrac{vA(x)}{P(x)}+\dfrac{uA(x)}{Q(x)}$
$\dfrac{A(x)*1}{P(x)Q(x)}=q1+q2+\dfrac{r1}{P(x)}+\dfrac{r2}{Q(x)}$
Donc :
$\dfrac{-4-3*x-2*x^2-x^3}{5(1+x+x^2+x^3+x^4)}=\dfrac{-4-x+x\sqrt{5}}{10+5x-5x\sqrt{5}+10x^2}+\dfrac{-4-x-x\sqrt{5}}{10+5x+5x\sqrt{5}+10x^2}$
D'où le résultat :

$$\frac{x^5}{x^5-1}=1+\frac{1}{5(-1+x)}+\frac{-4-x+x\sqrt{5}}{10+5x-5x\sqrt{5}+10x^2}+\frac{-4-x-x\sqrt{5}}{10+5x+5x\sqrt{5}+10x^2}$$

Application
Calculer $I=\displaystyle\int\frac{x^5}{x^5-1}$.
On a $I=I_1+I_2/5+I_3/5$ avec :
$I_1=\displaystyle\int(1+\frac{1}{5(x-1)})dx=x+\frac{\ln(|x-1|)}{5}+cste$
En posant $k=\sqrt{5}-1$ (on a $k^2<16$) :
$I_2=\displaystyle\int\frac{-4-x+x\sqrt{5}}{2+x-x\sqrt{5}+2x^2}dx=\int\frac{-4+kx}{2-xk+2x^2}dx$
On a :
$-4+kx=k(4x-k)/4+k^2/4-4=k(4x-k)/4+(k^2-16)/4$,
$2-xk+2x^2=2(x-k/4)^2)+2-k^2/8=2((x-k/4)^2+(16-k^2)/16)$ et
$\displaystyle\int\frac{1}{t^2+\alpha^2}dt=\frac{1}{\alpha}$ atan $(\dfrac{t}{\alpha})$ avec $\alpha=\dfrac{\sqrt{16-k^2}}{4}$ et $t=x-k/4$.

$I_2 = \int \frac{-4+kx}{2-xk+2x^2}dx = \int \frac{k(4x-k)}{4(2-xk+2x^2)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{k^2-16}{(x-k/4)^2+(16-k^2)/16}dx$
$I_2 = \frac{k}{4}\ln(|2-xk+2x^2|) - \frac{\sqrt{16-k^2}}{2}\ \mathrm{atan}\,(\frac{4x-k}{\sqrt{16-k^2}})$ avec $k=\sqrt{5}-1$
En posant $l=-\sqrt{5}-1$ (on a aussi $l^2<16$) :
$I_3 = \frac{l}{4}\ln(|2-xl+2x^2|) - \frac{\sqrt{16-l^2}}{2}\ \mathrm{atan}\,(\frac{4x-l}{\sqrt{16-l^2}})$ avec $l=-\sqrt{5}-1$
Donc avec $k=\sqrt{5}-1$ et $l=-\sqrt{5}-1$, on a :

$$I = x + \frac{\ln(|x-1|)}{5} + \frac{k}{4}\ln(|2-xk+2x^2|) - \frac{\sqrt{16-k^2}}{2}\ \mathrm{atan}\,(\frac{4x-k}{\sqrt{16-k^2}}) +$$
$$\frac{l}{4}\ln(|2-xl+2x^2|) - \frac{\sqrt{16-l^2}}{2}\ \mathrm{atan}\,(\frac{4x-l}{\sqrt{16-l^2}})$$

Directement, on tape (en mode réel) :
```
int(x^5/(x^5-1))
```
On obtient :
```
x+sqrt(5)*ln(x^2+(1-(sqrt(5)))*x/2+1)/20-
sqrt(2)*sqrt(5+sqrt(5))*atan((x-(sqrt(5)-1)/4)/
((sqrt(2*sqrt(5)+10))/4))/10+ln(abs(-1+x))/5-
sqrt(5)*ln(x^2+(1+sqrt(5))*x/2+1)/20-
sqrt(2)*sqrt(5-(sqrt(5)))*atan((x+(sqrt(5)+1)/4)/
((sqrt(-2*sqrt(5)+10))/4))/10-ln(1+x+x^2+x^3+x^4)/20
```

14.8 Intégrale d'une fraction rationnelle et idendité de Bézout

Pour intégrer une fraction rationnelle on nous apprend qu'il faut décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. Pourtant un logiciel de calcul formel procéde autrement quand le dénominateur a des racines multiples : il utilise l'identité de Bézout.

14.8.1 Exemples

Exemple 1
Intégrer

$$\frac{x^6+2}{(x^3+1)^2}$$

On cherche d'abord la partie entière qui est ici 1.
On tape :
```
normal((x^6+2)/(x^3+1)^2-1)
```
On obtient :
```
(-2*x^3+1)/(x^6+2*x^3+1)
```
On va calculer la primitive de N/P^2 avec $N=-2*x^3+1$ et $P=x^3+1$.
On cherche U et V vérifiant $UP+VP'=N$ puis on calcule :
$\int \frac{N}{P^2} = \int \frac{U}{P} + \int V\frac{P'}{P^2}$ en intégrant le 2ième terme par une intégration par

parties.
On a donc :
$\displaystyle\int \frac{N}{P^2} = -\frac{V}{P} + \int \frac{U+V'}{P}$
On tape :
`abcuv(x^3+1,3x^2,-2*x^3+1)`
On obtient :
`[1,-x]`
Ici $U+V'=0$ donc $\displaystyle\int \frac{N}{P^2} = \frac{x}{x^3+1}$
Donc :
$\displaystyle\int \frac{x^6+2}{(x^3+1)^2}dx = x + \frac{x}{x^3+1}$
Si on fait la décomposition de la fraction rationnelle, on doit intégrer :
$1 + \dfrac{1}{3(x+1)^2} + \dfrac{-x+1}{x^2-x+1)^2} + \dfrac{1}{-3(x^2-x+1)}$

Exemple 2
Calculer

$$\int \frac{-x^2+1}{(x^4+1)^2}dx$$

On va calculer la primitive de N/P^2 avec $N=-x^2+1$ et $P=x^4+1$.
On cherche U et V vérifiant $UP+VP'=N$ puis on calcule :
$\displaystyle\int \frac{N}{P^2} = \int \frac{U}{P} + \int V\frac{P'}{P^2}$ en intégrant le 2ième terme par une intégration par parties.
On a donc :
$\displaystyle\int \frac{N}{P^2} = -\frac{V}{P} + \int \frac{U+V'}{P}$
On tape :
`abcuv(x^4+1,4x^3,-x^2+1)`
On obtient :
`[-x^2+1,(x^3-x)/4]`
Donc :
$\displaystyle\int \frac{-x^2+1}{(x^4+1)^2}dx = \frac{-x^3+x}{x^4+1} + \int \frac{-x^2+1+3x^2/4-1/4}{x^4+1}dx = \frac{-x^3+x}{x^4+1} + \int \frac{-x^2+3}{4x^4+4}dx.$
Il reste à intégrer $\displaystyle\int \frac{-x^2+3}{x^4+1}$ en décomposant cette fraction rationnelle.
On a :
$\dfrac{-x^2+3}{x^4+4} = \dfrac{2x\sqrt{2}+3}{2x^2+2*x\sqrt{2}+2} + \dfrac{-2x\sqrt{2}+3}{2x^2-2x\sqrt{2}+2}$
et on a :
$\displaystyle\int \frac{2x\sqrt{2}+3}{2x^2+2x\sqrt{2}+2}dx = \int \frac{2x\sqrt{2}+2}{2x^2+2x\sqrt{2}+2}dx + \int \frac{1}{(x\sqrt{2}+1)^2+1}dx$
$\displaystyle\int \frac{2x\sqrt{2}+3}{2x^2+2x\sqrt{2}+2}dx = \sqrt{2}*\ln(x^2+\sqrt{2}*x+1)/2 + \operatorname{atan}(x\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}$ et en changeant x en $-x$:
$\displaystyle\int \frac{-2x\sqrt{2}+3}{2x^2-2x\sqrt{2}+2}dx = \sqrt{2}*\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)/2 + \operatorname{atan}(-x\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}$

Finallement on a obtenu :

$$\int \frac{-x^2+1}{(x^4+1)^2}dx = \frac{-x^3+x}{x^4+1} + 1/4(\frac{2x\sqrt{2}+3}{2x^2+2*x\sqrt{2}+2} + \frac{-2x\sqrt{2}+3}{2x^2-2x\sqrt{2}+2} +$$

$$\sqrt{2}*\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)/2 + \text{ atan}(-x\sqrt{2}+1)/\sqrt{2})$$

On vérifie et on tape :

```
int((1-x^2)/(1+x^4)^2)
```

On obient :

```
((-(sqrt(2)))*ln(x^2+(-(sqrt(2)))*x+1))/8+
(sqrt(2)*atan(sqrt(2)*x-1))/8+
(sqrt(2)*ln(x^2+sqrt(2)*x+1))/8+
(sqrt(2)*atan(sqrt(2)*x+1))/8+(-x^3+x)/(4*(x^4+1))
```

14.8.2 Exercices

1. Calculer une primitive de :

$$\frac{x^3}{x^2-4}$$

   Sans `Xcas`
   On a pour $x \neq -2$ et $x \neq 2$:

$$\frac{x^3}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)+4x}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$$

   Donc :

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln(|x^2-4|)$$

   Avec `Xcas`
   On tape :
   `partfrac(x^3/(x^2-4))`
   On obtient :
   `x+2/(-2+x)+2/(2+x)`
   On tape :
   `int(x+2/(-2+x)+2/(2+x))`
   On obtient :
   `x^2/2+2*ln(abs(2+x))+2*ln(abs(-2+x))`
   Ou on tape directement :
   `int(x^3/(x^2-4))`
   On obtient :
   `x^2/2+2*ln(abs(-4+x^2))`

2. Calculer une primitive de :

$$\frac{x^3+2}{(x+1)^2}$$

   Sans `Xcas`
   On a pour $x \neq -1$:

$$\frac{x^3+2}{(x+1)^2} = x-2+\frac{3x+4}{(x+1)^2} = x-2+\frac{3}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Donc :

$$\int \frac{x^3+2}{(x+1)^2}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln(|x+1|) - \frac{1}{x+1}$$

Avec `Xcas`
On tape :
`partfrac((x^3+2)/(x+1)^2)`
On obtient :
`x-2+1/(x+1)^2+3/(x+1)`
On tape :
`int(x-2+1/(x+1)^2+3/(x+1))`
On obtient :
`-1/(1+x)-2*x+x^2/2+3*ln(abs(1+x))`
Ou on tape directement :
`int((x^3+2)/(x+1)^2)`
On obtient :
`-1/(1+x)-2*x+x^2/2+3*ln(abs(1+x))`

3. Calculer une primitive de :

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2}$$

Sans `Xcas`
On a pour $x \neq 0$ et $x \neq 2$:

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2)} + \frac{c}{x}$$

On trouve : $c = 1/4$, $a = 3/2$ et si on fait tendre x vers $+\infty$ $b + c = 0$ ce qui donne :

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{3}{2(x-2)^2} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{4x}$$

donc :

$$\int \frac{x+1}{x(x-2)^2}dx = \frac{-3}{2(x-2)} - \frac{1}{4}\ln(|x-2|) + \frac{1}{4}\ln(|x|)$$

Avec `Xcas`
On tape :
`partfrac((x+1)/(x*(x-2)^2))`
On obtient :
`1/(x*4)+3/((x-2)^2*2)-1/((x-2)*4)`
On tape :
`int(1/(x*4)+3/((x-2)^2*2)-1/((x-2)*4))`
On obtient :
`-3/((-2+x)*2)+ln(abs(x))/4-ln(abs(-2+x))/4`
Ou on tape directement :
`int((x+1)/(x*(x-2)^2))`
On obtient :
`-6/(4*x-8)+ln(abs(x))/4-ln(abs(x-2))/4`

4. Calculer une primitive de :

$$\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x(1+x)}$$

Sans `Xcas`
On a pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$:

$$\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x(1+x)} = \frac{(x-1)(x^3+3)}{2x} = \frac{x^4-x^3+3x-3)}{2x}$$

Donc :

$$\int \frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x(1+x)} dx = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} - \frac{3}{2}\ln(|x|)$$

Avec `Xcas`
On tape :
`partfrac((x^2-1)*(x^3+3)/(2x*(1+x)))`
On obtient :
`(24-8*x^2+8*x^3)/16-3/(x*2)` On tape :
`int((24-8*x^2+8*x^3)/16-3/(x*2))`
On obtient :
`-3*ln(abs(x))/2+(24*x-8*x^3/3+2*x^4)/16`
Ou on tape directement :
`int((x^2-1)*(x^3+3)/(2x*(1+x)))`
On obtient :
`(-3*ln(abs(x))+3*x-x^3/3+x^4/4)/2`

5. Calculer une primitive de :

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^3}$$

Sans `Xcas`
On a pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$:

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^3} = \frac{(x-1)^4+x(4-6x+4x^2)}{x(x-1)^3} =$$

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{4-6x+4x^2}{(x-1)^3} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{4(x-1)^2+2(x-1)+2}{(x-1)^3} =$$

Donc :

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^3} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

Donc :

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3} dx = x - \ln(|x|) + 4\ln(|x-1|) - \frac{2}{(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2}$$

Avec `Xcas`
On tape :
`partfrac((x^4+1)/(x*(x-1)^3))`

On obtient :
`1-1/x+2/(-1+x)^3+2/(-1+x)^2+4/(-1+x)`
On tape :
`int(1-1/x+2/(-1+x)^3+2/(-1+x)^2+4/(-1+x))`
On obtient :
`-2/(-1+x)-ln(abs(x))+4*ln(abs(-1+x))-2/((-1+x)^2*2)+x`
Ou on tape directement :
`int((x^4+1)/(x*(x-1)^3))`
On obtient :
`-ln(abs(x))+4*ln(abs(-1+x))+(1-2*x)/(1-2*x+x^2)+x`

14.9 Intégrale et série

14.9.1 La série de terme général $\frac{1}{j^2}$

1. On considère la suite $u_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$ pour $n > 0$.
   Montrer que u_n converge en comparant u_n à l'intégrale $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} dt$.

2. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction f définie par :
   $f(x) = x^a * \ln(x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$
   est continue sur $[0; +\infty[$
   Calculer $\int_0^1 f(t)dt$

3. Montrer que la fonction g_n définie par :
   $g_n(x) = \dfrac{x^{2n+1} * \ln(x)}{x^2 - 1}$ si $x > 0$ et $x \neq 1$
   peut se prolonger par continuité sur $[0; +\infty[$

4. On pose $I_n = \int_0^1 g_n(t)dt$.
   Calculer $I_{n+1} - I_n$

5. Montrer que I_n est convergente et déterminer sa limite.
   En déduire la valeur de I_0 en fonction de la limite de u_n.

Correction

1. Pour pour $j > 2$ et pour $t \in [j-1; j[$ on a $1/j^2 \leq 1/t^2$ donc :
   $u_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} < 1 + \int_1^n \frac{1}{t^2} dt$
   donc $u_n < 1 - \frac{1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n}$
   La suite u_n est croissante et majorée donc elle est convergente de limite l et on a $l \leq 2$.

2. On tape :
   `assume(a>0);`

`limit(x^a*log(x),x=0)`
On obtient :
`0`
On tape :
`ibpu(x^a*log(x),log(x))`
On obtient :
`[(x^(a+1)*log(x))/(a+1),(-(x^(a+1)))/(a*x+x)]`
On obtient :
`-1/(a+1)^2`

3. On tape :
`g(n,x):=(x^(2*n+1)*log(x))/(x^2-1)`
`limit(g(n,x),x=1)`
On obtient :
`1/2`
On tape :
`limit(g(n,x),x=0)`
On obtient :
`0`
On tape :
`lncollect(normal(g(n+1,x)-g(n,x)))`
On obtient :
`((x^(2*n+3)-x^(2*n+1))*log(x))/(x^2-1)`
On tape :
`int(x^(2*n+1)*log(x),x,0,1)`
On obtient :
`-1/(2*n+2)^2`
On a pour $0 \leq x \leq 1$:
$0 \leq g_n(x) < x^{2*n}/2$ car $x * \log(x)/(x^2-1) < 1/2$
Donc :
$I_{n+1} - I_n = -1/4 * 1/(n+1)^2$
donc :
$I_n = -1/4 * u_n + I_0$
On a donc $I_0 = l/4$

14.9.2 les séries de terme général $\frac{(-1)^j}{2j+1}$ et $\frac{(-1)^{j-1}}{j}$

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx$

1. Montrer que la suite I_n est convergente et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$.
3. Montrer que $I_n \simeq \frac{1}{2n}$.
4. Calculer la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^j}{2j+1}$
5. Calculer la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^{j-1}}{j}$

Correction

1. Si $x \in [0, \pi/4]$, on a $0 \leq \tan(x) \leq 4x/\pi$ On a $0 \leq \tan(x)$ car $x \in [0, \pi/4]$
   On étudie la fonction $g(x) = 4x/\pi - \tan(x)$ ou
   on fait un graphe et on tape :
   `plot([tan(x),4x/pi],affichage=[1,2])`
   Donc :
   $I_n \leq (4/\pi)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$ On tape :
   `assume(n>=0),(4/pi)^n*int(x^n,x=0..pi/4)`
   On obtient après simplification :
   `n,pi/(4+4*n)`
   Quand n tend vers $+\infty$, $\pi/(4 + 4 * n)$ tend vers 0, donc I_n converge vers 0.

2. On tape :
   `int(tan(x)^n*(1+tan(x)^2),x,0,pi/4)`
   On obtient :
   `1/(1+n)`
   $I_n + I_{n+2}$ est simple à calculer avec le changement de variable :
   $t = \tan(x)$ et $dt = (1 + \tan(x)^2)dx$
3. Sur $]0, \pi/4[$ on a $\tan(x) < 1$ donc on a :
   $I_{n+2} < I_n < I_{n-2}$,
   $nI_{n+2} < nI_n < nI_{n-2}$ et
   $n(I_{n+2} + I_n) < 2nI_n < n(I_{n-2} + I_n)$
   On sait que $I_{n-2} + I_n = 1/(n - 1)$ et $I_n + I_{n+2} = 1/(n + 1)$
   Donc on a :
   $n/(n + 1) < 2nI_n < (n - 2)/(n - 1)$
   Quand n tend vers l'infini $n/(n + 1)$ et $(n - 2)/(n - 1)$ tendent vers 1, donc :
   quand n tend vers l'infini $2nI_n$ tend vers 1 puisque ce qui signifie que :
   $$I_n \simeq \frac{1}{2n}$$
4. Calcul de I_0,
   On a :
   $I_0 = \pi/4$ Calcul de I_1, On tape (ou on pose $t = \cos(x)$ et $dt = -\sin(x)dx$) :
   `int(tan(x),x,0,pi/4)`
   On obtient :
   `ln(2)/2`
   Calcul de I_2 On tape (ou on a $\tan(x)^2 = 1 + \tan(x)^2 - 1$ et on pose $t = \tan(x)$ et $dt = 1 + \tan(x)^2 dx$) :
   `int(tan(x)^2,x,0,pi/4)`
   On obtient bien $I_2 = 1 - I_0$:
   `(4-pi)/4`
   On a $I_n = 1/(n - 1) - I_{n-2}$ donc
   (a) si n est pair i.e. $n = 2p$, on a :
   $I_{2p} = 1/(2p - 1) - I_{2p-2}$ donc :
   $I_0 = \pi/4 = 1 - I_2 = 1 - 1/3 + I_4 = 1 - 1/3 + 1/5 - I_6 = ...$
   On a donc :

$I_0 = \pi/4 = \sum_{k=1}^{+p}(-1)^{k+1}/(2k-1) - I_{2p}$
Comme I_{2p} tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ on en déduit que :
$I_0 = \pi/4 = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}/(2k-1)$
ou encore en posant $j = k-1$:
$I_0 = \pi/4 = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^{j}/(2j+1)$ On vérifie et on tape :
`sum((-1)^(k)/(2k+1),k=0..inf)`
On obtient :
`pi/4`

(b) si n est impair i.e. $n = 2p+1$, on a :
$I_{2p+1} = 1/(2p) - I_{2p-1}$ donc
$I_1 = \ln(2)/2 = 1/2 - I_3 = 1/2 - 1/4 + I_5 = 1/2 - 1/4 + 1/6 - I_7 = ...$
On a donc :
$I_1 = \ln(2)/2 = \sum_{k=1}^{+p}(-1)^{k+1}/(2k) - I_{2p+1}$
Comme I_{2p+1} tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ on en déduit que :
$I_1 = \ln(2)/2 = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}/(2k)$
ou encore :
$2I_1 = \ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}/k$
On vérifie et on tape :
`sum((-1)^(k+1)/(k),k=0..inf)`
On obtient :
`ln(2)`

14.10 Intégrales et changement de variables

14.10.1 Exemples

On veut calculer :

$$I1 = \int_0^3 |\cos(x-1) - \sin(x)|dx$$

$$I2 = \int_0^3 |\sin(x) - \cos(x) - 1|d$$

Calcul de $I1$
On cherche le signe de $\cos(x-1) - \sin(x)$.
On tape :
`assume(x>0 and x<pi);solve(cos(x-1)-sin(x)>0,x)`
On obtient :
`x,[((x>0) and (x<((pi+2)/4)))]`
Donc :
$I1 = \int_0^{(\pi+2)/4}\cos(x-1) - \sin(x)dx + \int_{(\pi+2)/4}^{3}\sin(x) - \cos(x-1)dx$
$I1 = -\cos(3) + \cos((\pi+2)/4) - \sin(2) + \sin((\pi-2)/4) +$
$\cos((\pi+2)/4) + \sin(1) + \sin((\pi-2)/4) - 1$
Donc :
$I1 = -\cos(3) + 2\cos((\pi+2)/4) - \sin(2) + 2\sin((\pi-2)/4) + \sin(1) - 1$
On vérifie avec `Xcas`, on tape :
`int(abs(sin(x)-cos(x-1)),x,0,3)`

On obtient :
`-cos(3)+2*cos((pi+2)/4)+sin(1)-sin(2)+2*sin((pi-2)/4)-1`
Calcul de $I2$
On sait que :
$\sin(x) - \cos(x) * \sqrt{2}/2 = \sin(x - \pi/4)$
Donc :
$I2 = 2/\sqrt(2) \int_0^3 |\sin(x - \pi/4) - \sqrt{2}/2|dx$
On pose $t = x - \pi/4$ et on obtient :
$I2 = 2/\sqrt(2) \int_{-\pi/4}^{3-\pi/4} |\sin(t) - \sqrt{2}/2|dt$
On cherche le signe de $\sin(t) - \sqrt{2}/2 = \sin(t) - \sin(\pi/4)$
Sur $[-\pi/4, \pi/4]$ on a $\sin(t) - \sin(\pi/4) \leq 0$
Sur $[\pi/4, 3 - \pi/4]$ on a $\sin(t) - \sin(\pi/4) \geq 0$ (car $3 * \pi/4 > 3 - \pi/4 > \pi/2$).
Donc :
$I2 = \sqrt(2) \int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\sqrt{2}/2 - \sin(t))dt + \sqrt(2) \int_{\pi/4}^{3-\pi/4}(\sin(t) - \sqrt{2}/2)dt$
$I2 = \pi/2 - 2/\sqrt(2) \cos(3 - \pi/4) + 1 - (3 - \pi/2)$
Donc :
$I2 = \pi - 2/\sqrt(2) \cos(3 - \pi/4) - 2 = \pi - \cos(3) - \sin(3) - 2$
On vérifie avec `Xcas`, on tape :
`int(abs(sin(x)-cos(x)-1),x,0,3)`
On obtient :
`-cos(3)-sin(3)+pi-2`

14.10.2 Exercices

1. Calculer :
$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^5}dx$$
Sans `Xcas`
On a pour $x \neq n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$) :
$$\frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^5} = \frac{\cos(x)(1 - \sin(x)^2)}{\sin(x)^5} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)^5} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)^3}$$
Donc en posant $u = \sin(x)$:
$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^5}dx = [\frac{-1}{4\sin(x)^4} + \frac{1}{2\sin(x)^2}]_{x=\pi/4}^{x=3\pi/4} = 0$$
Ou bien en posant $t = \pi - x$, on a pour $x \neq n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$) :
$$\frac{\cos(\pi - t)^3}{\sin(\pi - t)^5} = \frac{-\cos(t)^3}{\sin(t)^5}$$
donc le graphe de la fonction
$$f(x) = \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^5}$$
définie sie $]0, \pi[$ admet une symétrie par rapport au point de coordonnées $\pi/2, 0 = f(\pi/2)$ donc pour tout $a \in]0, pi/2[$ on a :
$$\int_{a}^{\pi-a} \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^5}dx = 0$$

Avec `Xcas`
On tape :
`int(cos(x)^3/sin(x)^5,x,pi/4,3*pi/4)`
On obtient :
`0`
On tape :
```
assume(a>0 and a<pi/2)
int(cos(x)^3/sin(x)^5,x,a,pi-a)
```
On obtient :
`0`

2. Calculer :
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)}dx$$
Sans `Xcas`
On a :
$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)} = \frac{\cos(x)}{1+2\cos(x)\sin(x)}$$
On pose $t = \tan(x/2)$ donc $dx = 2dt/(1+t^2)$ et on a :
$$\frac{\cos(x)}{1+2\cos(x)\sin(x)}dx = 2\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2+4t(1-t^2)}dt =$$
$$2\frac{1-t^2}{t^4-4t^3+2t^2+4t+1}dt$$
Donc :
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)}dx = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{t^4-4t^3+2t^2+4t+1}dt$$
On tape :
`partfrac((1-t^2)/(t^4-4t^3+2t^2+4t+1))`
On obtient :
```
(-1-(sqrt(2)))/((-(sqrt(2))-1+t)^2*4)-
(sqrt(2))/((-(sqrt(2))-1+t)*8)+
(-1+sqrt(2))/((sqrt(2)-1+t)^2*4)+
(sqrt(2))/((sqrt(2)-1+t)*8)
```
...... c'est bien compliqué ! ! ! !
On cherche une autre façon de faire :
Posons :
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(\cos(x)+\sin(x))^2}dx$$
En faisant le changement de variables $t = \pi/2 - x$ on a :
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{(\cos(x)+\sin(x))^2}dx$$
Donc :
$$I + I = 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}dx$$

On fait maintenant le changement de variables $t = \tan(x/2)$ on a :
$dt = (1 + t^2)dx/2$.
donc :

$$2I = \int_0^1 \frac{2}{1 - t^2 + 2t)}dt = \int_0^1 \frac{-2}{(t-1)^2 - 2)}dt$$

Soit en posant $u = t - 1$:

$$I = \int_{-1}^0 \frac{-1}{u^2 - 2}du = \int_{-1}^0 \frac{-1}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{u - \sqrt{2}} + \frac{1}{u + \sqrt{2}})du$$

$$I = [\frac{-1}{2\sqrt{2}} \ln(\frac{|u + \sqrt{2}|}{|u - \sqrt{2}|})]_{-1}^0$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}) = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(3 + 2\sqrt{2})$$

Avec `Xcas`
On tape :
`int(cos(x)/(1+sin(2x)),x,0,pi/2)`
On obtient :
`1/2*ln((1+sqrt(2))/(-1+sqrt(2)))/(sqrt(2))`
et après simplification :
`sqrt(2)*ln(3+2*sqrt(2))/4`
On tape :
`2*int((1-t^2)/(t^4-4t^3+2t^2+4t+1),t,0,1)`
On obtient :
`sqrt(2)*ln(3+2*sqrt(2))/4`
On tape :
`subst('integration(1/(cos(x)+sin(x)),x)',x=2*atan(t))`
On obtient :
`integration(-2/(-1-2*t+t^2),t)`

3. Calculer :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1}dx$$

Sans `Xcas`

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1}dx = \int_0^{\pi/4} \tan(x - \pi/4)dx$$

Donc puisque $\tan(x-\pi/4)dx = -(\cos(x-\pi/4)'dx)/\cos(x-\pi/4)$ on a :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1}dx = [-\ln(\cos(x - \pi/4)]_0^{\pi/4} = -\ln(2)/2$$

Avec `Xcas`
On tape :
`int((tan(x)-1)/(tan(x)+1),x,0,pi/4)`
On obtient :
`-ln(2)/2`

4. Calculer :
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos(x)^4+\sin(x)^4}dx$$
Sans `Xcas`
Soit
$$f(x)=\frac{1}{\cos(x)^4+\sin(x)^4}$$
On a :
$\sin(x+\pi/2)=\cos(x)$ et $\cos(x+\pi/2)=-\sin(x)$
Donc $f(x+pi/2)=f(x)$
$\sin(x-\pi/2)=-\cos(x)$ et $\cos(x+\pi/2)=\sin(x)$
Donc $f(x-\pi/2)=f(x)$ i.e. le graphe de f est symétrique par rapport à la droite $x=\pi/4$.
Donc :
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos(x)^4+\sin(x)^4}dx = 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)^4+\sin(x)^4}dx$$
On a :
$\cos(x)^4+\sin(x)^4=(\cos(x)^2+\sin(x)^2)^2-2\sin(x)^2\cos(x)^2=$
$1-\sin(2x)^2/2$
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos(x)^4+\sin(x)^4}dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}+\sin(2x)}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin(2x)}$$
On pose $t=\tan(x)$ $dt=(1+t^2)dx$ et $\sin(2x)=2t/(1+t^2)$
On a donc :
$$2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}+\sin(2x)}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin(2x)}dx =$$
$$2\sqrt{2}\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)+2t}dt)+2\sqrt{2}\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)-2t}dt)=$$
$$2\int_0^{1} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt)+2\int_0^{1} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt)=$$
$$2int_0^1\frac{1}{t+\sqrt{2}/2)^2+1/2}+2int_0^1\frac{1}{t-\sqrt{2}/2)^2+1/2}=$$
$$[2\sqrt{2}\,\text{atan}\,((t+\sqrt{2}/2)\sqrt{2})+2\sqrt{2}\,\text{atan}\,((t-\sqrt{2}/2)\sqrt{2})]_{t=0}^{t=1}=$$
$$[2\sqrt{2}\,\text{atan}\,(\sqrt{2}t+1)+2\sqrt{2}\,\text{atan}\,(\sqrt{2}t-1)]_{t=0}^{t=1}$$
$\text{atan}\,(1)=0$ et $\text{atan}\,(\sqrt{2}+1)+\text{atan}\,(\sqrt{2}-1)=\text{atan}\,(1/\sqrt{2}-1)+\text{atan}\,(\sqrt{2}-1)=\pi/2$
Donc :
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos(x)^4+\sin(x)^4}dx=\sqrt{2}\pi$$
Avec `Xcas`
On tape :

```
int(1/(cos(x)^4+sin(x)^4),x,0,pi)
```
On obtient :
```
sqrt(2)*pi
```
5. Calculer :
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{6 - 5\sin(x) + \sin(x)^2} dx$$
Sans `Xcas`
Soit
$$f(x) = \frac{\cos(x)}{6 - 5\sin(x) + \sin(x)^2}$$
En posant $u = \sin(x)$, on a :
$du = \cos(x)dx$, si $x = 0$ alors $u = 0$ et si $x = \pi/2$ alors $u = 1$ donc :
$I = \int_0^1 \frac{1}{6 - 5u + u^2} du = \int_0^1 \frac{1}{(u-3)(u-2)} du$
$I = \int_0^1 (\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u-2}) du$
Donc
$I = \ln(|1-3|) - \ln(|1-2|) - \ln(|0-3|) + \ln(|0-2|) = 2\ln(2) - \ln(3)$
Avec `Xcas`
On tape :
```
int(cos(x)/(6-5*sin(x)+sin(x)^2),x,0,pi/2)
```
On obtient :
```
2*ln(2)-ln(3)
```

14.11 Intégrales et intégration par parties

14.11.1 Un exemple

On veut calculer pour $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{2\pi} \sin(x)^n dx$$

1. En intégrant par partie I_n trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. En déduire la valeur de I_n.
4. Application :
   Calculer $I = \int_0^{2\pi} \sin(x)^{16} \cos(2x) dx$.
5. Vérifier le calcul précédent avec `Xcas`.

1. on pose $u = \sin(x)^{n-1}$ et $dv = \sin(x)$ donc
   $du = (n-1)\sin(x)^{n-2}\cos(x)$ et $v = -\cos(x)$.
   0n donc :
   $I_n = [-\sin(x)^{n-1}\cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (n-1)\sin(x)^{n-2}\cos(x)^2 dx$
   $I_n = 0 + \int_0^{2\pi} (n-1)\sin(x)^{n-2}(1 - \sin(x)^2) dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$
   On a donc :
   $$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

Avec `Xcas` on utilise `ibpu` (on indique la valeur de u) ou `ibpdv` (on indique la valeur de v) et `trigsin` pour transformer $\cos(x)^2$ en $1-\sin(x)^2$ et on tape :

```
assume(n,integer)
expand(trigsin(ibpu(sin(x)^(n-1)*sin(x),sin(x)^(n-1),
x,0,2*pi)))
```

On obtient :

```
[0,-n*sin(x)^n-sin(x)^(n-2)+n*sin(x)^(n-2)+sin(x)^n]
```

ou on tape

```
expand(trigsin(ibpdv(sin(x)^(n-1)*sin(x),-cos(x),
x,0,2*pi)))
```

On obtient :

```
[0,-n*sin(x)^n-sin(x)^(n-2)+n*sin(x)^(n-2)+sin(x)^n]
```

On retrouve donc le résultat précédent :
$I_n = 0 + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

2. Calcul de I_0 : $I_0 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$
Calcul de I_1 : $I_1 = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$
Avec `Xcas` on tape :

```
int(1,x,0,2*pi),int(sin(x),x,0,2*pi)
```

On obtient :

```
2*pi,0
```

3. Puisque $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et que $I_1 = 0$ on en déduit que si $n = 2p+1$ on a :
$I_{2p+1} = 0$
Puisque $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ on a donc pour $n = 2p$:
$2p(2p-2)(2p-4)...2 * I_{2p} = (2p-1)(2p-3)(2p-5)...1 * I_0$
en multipliant les 2 membres par $2p(2p-2)(2p-4)...2 = 2^p p!$ on a :
$(2^p p!)^2 * I_{2p} = (2p)! * I_0 = 2\pi(2p)!$
donc
$$I_{2p} = \frac{2\pi(2p)!}{(2^p p!)^2}$$
et
$$I_{2p+1} = 0$$

4. Calcul de $I = \int_0^{2\pi} \sin(x)^{16}\cos(2x)dx$
On a :
$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2$ donc
$I = I_{16} - 2I_{18} = I_{16} - 2\frac{17}{18}I_{16} = \frac{-8}{9}I_{16}$
$I = \dfrac{-16\pi(16)!}{9(2^8 8!)^2} = \texttt{comb}(16,8)\dfrac{-\pi}{9*2^{12}}$

```
ifactor(comb(16,8))=ifactor(12870)=2*3^2*5*11*13=2*9*715
```

$I =$
$frac{-}715\pi2^{11} = \dfrac{-715\pi}{2^{11}} = \dfrac{-715\pi}{2048}$ donc
$$I = \frac{-715\pi}{2048}$$
ou on tape :

```
normal(-16*pi*(16)!/(9*(2^8*8!)^2))
```

On obtient :
`(-715*pi)/2048`

5. Avec `Xcas` on tape :
`int(1,x,0,2*pi),int(sin(x),x,0,2*pi)`
On obtient :
`(-715*pi)/2048`
Remarque `Xcas` effectue ce calcul en utilisant les résidus.

14.11.2 Exercices

1. Calculer $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$
Sans `Xcas`
On sait que $I = \int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x$
On a $((ax^2 + bx + c)e^x)' = (ax^2 + (b + 2a)x + c + b)e^x = x^2 e^x$
Donc :
$a = 1$, $b = -2$, et $c = 2$
$I = \int x^2 e^x dx = [(x^2 - 2x + 2)e^x]_0^1 = e - 2$
Ou bien, on intégre par partie :
On pose : $u = x^2$ et $dv = e^x dx$ donc $du = 2xdx$ et $v = e^x$ donc $\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2J$
On intégre encore J par partie :
On pose : $u = x$ et $dv = e^x dx$ donc $du = dx$ et $v = e^x$ donc
$J = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1$
Donc $I = \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$
Avec `Xcas`
On tape :
`int(x^2*e^x,x,0,1)`
On obtient :
`exp(1)-2`
Ou on on intégre par parties en donnant la valeur de u ($\int udv$), on tape :
`ibpu(x^2*e^x,x^2,x,0,1)`
On obtient :
`[exp(1),-2*x*exp(x)]`
On tape :
`ibpu([exp(1),-2*x*exp(x)],2*x,x,0,1)`
On obtient :
`[-exp(1),2*exp(x)]`
On tape :
`ibpu([-exp(1),2*exp(x)],0,x,0,1)`
On obtient :
`exp(1)-2`
Ou on intégre par parties en donnant la valeur de v ($\int udv$), on tape :
`ibpdv(x^2*e^x,e^x,x,0,1)`
On obtient :
`[exp(1),-2*x*exp(x)]`
On tape :
`ibpdv([exp(1),-2*x*exp(x)],e^x,x,0,1)`
On obtient :

`[-exp(1),2*exp(x)]`
On tape :
`ibpdv([-exp(1),2*exp(x)],0,x,0,1)`
On obtient :
`exp(1)-2`

2. Calculer
$$I=\int_0^1 x\ \text{atan}\,(x)dx$$
Sans `Xcas`
On pose $u=\ \text{atan}\,(x)$ et $dv=xdx$ on a donc :
$du=dx/(1+x^2)$ et $v=x^2/2$ ce qui donne :
$I=\int_0^1 x\ \text{atan}\,(x)dx=[x^2\ \text{atan}\,(x)/2]_0^1-\int_0^1 x^2/(2*(1+x^2))=$
$\pi/8-(\int_0^1 dx-\int_0^1 dx/(1+x^2))/2=\pi/8+[-x/2+\ \text{atan}\,(x)/2]_0^1$
Donc :
$$I=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$
Avec `Xcas`
On tape :
`int(x*atan(x),x,0,1)`
On obtient :
`(-2+pi)/4`
Ou on on intégre par parties en donnant la valeur de u ($\int udv$), on tape :
`ibpu(x*atan(x),atan(x),x,0,1)`
On obtient :
`[pi/8,-x^2/(2+2*x^2)]`
On tape :
`ibpu([pi/8,-x^2/(2+2*x^2)],0,x,0,1)`
On obtient :
`(-4+pi)/8+pi/8`
Ou on intégre par parties en donnant la valeur de v ($\int udv$), on tape :
`ibpdv(x*atan(x),x^2/2,x,0,1)`
On obtient :
`[pi/8,-x^2/(2+2*x^2)]`
On tape :
`ibpdv([pi/8,-x^2/(2+2*x^2)],0,x,0,1)`
On obtient :
`(-4+pi)/8+pi/8`

3. Calculer
$$I=\int_1^2 \frac{x^2\ln(x)}{(x^3+1)^2}dx$$
Sans `Xcas`
On pose $u=\ln(x)$ et $dv=x^2/(x^3+1)^2dx$ on a donc :
$du=dx/x$ et $v=-1/(3(x^3+1))$ ce qui donne :
$I=\int_1^2\ln(x)x^2/(x^3+1)^2dx=[-\ln(x)/(3(x^3+1))]_1^2+\int_1^2 1/(3x(x^3+1))=$
On a : $1/(3x(x^3+1))=(1+x^3-x^3)/(3x(x^3+1))=1/(3x)-x^2/(3(x^3+$

1))
Donc :
$I = -\ln(2)/27 + \ln(2)/3 - [\ln(x^3+1)/9]_1^2 = 8\ln(2)/27 - \ln(9)/9 + \ln(2)/9$
Donc puisque $2^{11} = 2048$ et $3^6 = 729$ on a :

$$I = \frac{11\ln(2)}{27} - \frac{2\ln(3)}{9} = \frac{\ln(2048) - \ln(729)}{27}$$

Avec `Xcas`
On tape :
`int(x^2*ln(x)/(x^3+1)^2,x,1,2)`
On obtient :
`ln(2)/9+(8*ln(2)-3*ln(9))/27`
et après simplification :
`ln(2048/729)/27`
On tape en faisant une intégration par parties avec `ibpu` :
`ibpu(x^2*ln(x)/(x^3+1)^2,ln(x),x,1,2)`
On obtient :
`[-ln(2)/27,1/(3*x+3*x^4)]`
On tape :
`ibpu([-ln(2)/27,1/(3*x+3*x^4)],0,x,1,2)`
On obtient :
`2*ln(2)/27+(3*ln(2)-ln(9))/9`
et après simplification :
`ln(2048/729)/27`
On tape en faisant une intégration par parties avec `ibpdv` :
`ibpdv(x^2*ln(x)/(x^3+1)^2,-1/(3*(x^3+1)),x,1,2)`
On obtient :
`[-ln(2)/27,1/(3*x+3*x^4)]`
On tape :
`ibpdv([-ln(2)/27,1/(3*x+3*x^4)],0,x,1,2)`
On obtient :
`2*ln(2)/27+(3*ln(2)-ln(9))/9`
et après simplification :
`ln(2048/729)/27`

4. Calculer :

$$\int \frac{x^4 \ \text{atan}\,(x)}{x^2+1} dx$$

Sans `Xcas`
On a :
$\frac{x^4 \ \text{atan}\,(x)}{x^2+1} = \frac{(x^4-1) \ \text{atan}\,(x)}{x^2+1} + \frac{\text{atan}\,(x)}{x^2+1} = (x^2-1) \ \text{atan}\,(x) + \frac{\text{atan}\,(x)}{x^2+1}$
donc on va chercher les primitives de :
$(x^2-1) \ \text{atan}\,(x)$ et de $\frac{\text{atan}\,(x)}{x^2+1}$.

(a) Calcul de $I_1 = \int (x^2-1) \ \text{atan}\,(x) dx$. On fait une intégration par parties, on pose :

$u =$ atan (x) et $dv = (x^2-1)dx$, on a
$du = dx/(1+x^2)$ et $v = (x^3/3-x)$ donc :
$I = (x^3/3-x)$ atan $(x) - \int \frac{x^3/3-x}{1+x^2}dx$
On calcule $\int \frac{x^3/3-x}{1+x^2}dx$, on a $x^3-3x = (x^3+x)-4x$ donc :
$\frac{x^3/3-x}{1+x^2} = \frac{x^3-3x}{3(1+x^2)} = \frac{x^3+x}{3(1+x^2)} - \frac{4x}{3(1+x^2)} = \frac{x}{3} - \frac{4x}{3(1+x^2)}$
donc :

$$I_1 = (x^3/3-x)\ \text{atan}\,(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{2\ln(1+x^2)}{3}$$

(b) Calcul de $I_2 = \int \frac{\text{atan}\,(x)}{x^2+1}dx$

En posant $u =$ atan (x), on a $du = \frac{dx}{x^2+1}$ donc

$$I_2 = \int \frac{\text{atan}\,(x)}{x^2+1}dx = \frac{\text{atan}\,(x)^2}{2}$$

On trouve donc comme primitives de $\frac{x^4\ \text{atan}\,(x)}{x^2+1}$:

$$(x^3/3-x)\ \text{atan}\,(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{2\ln(1+x^2)}{3} + \frac{\text{atan}\,(x)^2}{2} + Cste$$

Avec `Xcas`
On tape :
```
int(x^4*atan(x)/(x^2+1))
```
On obtient :
```
(4*ln(1+x^2)+3*atan(x)^2-6*x*atan(x)-x^2+2*x^3*atan(x))/6
```

14.12 Relation de récurrence et intégration par parties

1. Calculer

$$I_n = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^n}dx$$

Sans `Xcas`
On calcule :
$I_0 = \int_1^2 \ln(x)dx = [x*\ln(x)-x]_1^2 = 2\ln(2)-2+1 = 2\ln(2)-1$
$I_1 = \int_1^2 \ln(x)/xdx = [\ln(x)^2/2]_1^2 = \ln(2)^2/2$ Pour $n \geq 2$, on pose $u = \ln(x)$ et $dv = dx/x^n$ donc
$du = dx/x$ et $v = -1/((n-1)x^{n-1})$.
On obtient :

$$I_n = -\frac{\ln(2)}{((n-1)2^{n-1}} + \int_1^2 \frac{dx}{(n-1)x^n} =$$

$$I_n = -\frac{\ln(2)}{((n-1)2^{n-1}} - [\frac{1}{(n-1)^2x^{n-1}}]_1^2 =$$

$$I_n = -\frac{\ln(2)}{((n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^22^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2}$$

$$I_n = -\frac{\ln(2)}{((n-1)2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}-1}{(n-1)^2 2^{n-1}}$$

Donc par exemple :
$I_2 = -\ln(2)/2 + 1/2$
$I_3 = -\ln(2)/8 + 3/16$
$I_4 = -\ln(2)/24 + 7/72$
$I_5 = -\ln(2)/64 + 15/256$
Avec `Xcas`
On tape :
`int(ln(x),x,1,2)`
On obtient :
`2*ln(2)-1`
On tape :
`int(ln(x)/x,x,1,2)`
On obtient :
`ln(2)^2/2`
On tape :
`int(ln(x)/x^2,x,1,2)`
On obtient :
`(1-ln(2))/2`
On tape :
`int(ln(x)/x^4,x,1,2)`
On obtient :
`(7-ln(8))/72`
On tape :
`int(ln(x)/x^3,x,1,2)`
On obtient :
`(3-ln(4))/16`
Ou on tape pour vérifier :
`int(ln(x)/x^n,x,1,2)$(n=2..5)`
On obtient :
`(1-ln(2))/2,(3-ln(4))/16,(7-ln(8))/72,(15-ln(16))/256`

2. Calculer $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$
Sans `Xcas`
On calcule :
$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = [-2(1-x)^{3/2}/3]_0^1 = 2/3$
On pose pour $n > 0$: $u = x^n$ et $dv = \sqrt{1-x}dx$ donc
$du = nx^{n-1}$ et $v = -2(1-x)^{3/2}/3$
On obtient :
$I_n = [-2x^n(1-x)^{3/2}/3]_0^1 + \int_0^1 2nx^{n-1}(1-x)^{3/2}/3dx$
On a : $(1-x)^{3/2} = (1-x) * \sqrt{1-x} = \sqrt{1-x} - x\sqrt{1-x}$ donc
$I_n = 0 + \int_0^1 2nx^{n-1}\sqrt{1-x}/3 - \int_0^1 2nx^n\sqrt{1-x}/3$
D'où la relation de récurrence :
$I_n(1 + 2n/3) = I_{n-1}(2n/3)$ donc

$$I_n = \frac{2nI_{n-1}}{3+2n}$$

On a : $I_0 = 2/3$ et

$(3+2n)(1+2n)...7*5 = (3+2n)!/3/((2+2n)(2n)..4*2)$
$(3+2n)(1+2n)...7*5 = (3+2n)!/(3*2^{n+1}(n+1)!$
Donc :

$$I_n = \frac{2^n n!}{(3+2n)(1+2n)...(5)} I_0 = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

Donc :

$$I_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

Par exemple :
$I_1 = 4/15$
$I_2 = 64*2*6/7! = 16/105$
Avec `Xcas`
On tape :
`int(sqrt(1-x),x,0,1)`
On obtient :
`2/3`
On tape :
`int(x*sqrt(1-x),x,0,1)`
On obtient :
`4/15`
On tape :
`int(x^2*sqrt(1-x),x,0,1)`
On obtient :
`16/105`
On tape :
`int(x^nsqrt(1-x),x,0,1)$(n=0..5)`
On obtient :
`2/3,4/15,16/105,32/315,256/3465,512/9009`
On vérifie la formule et on tape :
`((2^(2n+2)*n!*(n+1)!)/((2n+3)!))$(n=0..5)`
On obtient :
`2/3,4/15,16/105,32/315,256/3465,512/9009`

3. Calculer $I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$
Sans `Xcas`
On calcule :
$I_{0,n} = \int_0^1 (1-x)^n dx = -[(1-x)^{n+1}/(n+1)]_0^1 = 1/(n+1)$
$I_{m,0} = \int_0^1 x^m dx = [x^{m+1}/(m+1)]_0^1 = 1/(m+1)$
En faisant le changement de variable $u = 1-x$ on a :
$I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = -\int_1^0 (1-u)^m u^n du = I_{n,m}$
On a :
$x^m = (x-1+1)x^{m-1}$ donc
$I_{m,n} = -\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx + \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n dx$
Donc :
$I_{m,n} = I_{m-1,n} - I_{m-1,n+1} = I_{m-2,n} - I_{m-2,n+1} - I_{m-2,n+1} + I_{m-2,n+2}$
$I_{m,n} = I_{m-2,n} - 2I_{m-2,n+1} + I_{m-2,n+2} = I_{m-3,n} - 3I_{m-3,n+1} + 3I_{m-3,n+2} - I_{m-3,n+3}$
que l'on peut écrire avec les coefficients du binôme :

$I_{m,n}=\sum_{k=0}^{3}\texttt{comb}(3,\texttt{k})(-1)^k I_{m-3,n+k}$
et puisque `com(m,k)=comb(m-1,k)+comb(m-1,k-1)`, on a :
$I_{m-3,n+k}=I_{m-4,n+k}-I_{m-4,n+k+1}$ et $I_{m-3,n+k+1}=I_{m-4,n+k+1}-I_{m-4,n+k+2}$:
le coefficient de $I_{m-4,n+k+1}$ est :
$(-1)^{k+1}(\texttt{comb}(3,\texttt{k})+\texttt{comb}(3,\texttt{k}+1))=(-1)^{k+1}\texttt{comb}(4,\texttt{k}+1)$
Donc de proche en proche on obtient :
$I_{m,n}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\texttt{comb}(\texttt{m},\texttt{k})I_{m-m,n+k}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\texttt{comb}(\texttt{m},\texttt{k})/(n+k+1)$
Donc :

$$I_{m,n}=I_{n,m}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\texttt{comb}(\texttt{m},\texttt{k})/(n+k+1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\texttt{comb}(\texttt{n},\texttt{k})/(m+k+1)$$

Autre méthode
Mais il est plus simple de développer $(1-x)^n$:
$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}\texttt{comb}(\texttt{n},\texttt{k})(-1)^k x^k$
On a :
$\int_0^1((-1)^k x^{m+k}dx=(-1)^k/(m+k+1)$
ce qui montre que :

$$I_{m,n}=\sum_{k=0}^{n}\texttt{comb}(\texttt{n},\texttt{k})(-1)^k/(m+k+1)$$

Par exemple :
$I_{1,2}=1/12\;(1/3-1/4)$
$I_{7,9}=1/194480\;1/10-7/11+21/12-35/13+35/14-21/15+7/16-1/17=1/194480$
(ou on tape `sum((-1)^k*comb(7,k)/(10+k),k=0..7)`
Autre méthode
On peut aussi considérer que $I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ est le reste intégrale d'ordre m de la formule de Taylor de la fonction $f(x)$ entre 1 et 0 car on a :
$f(1)=f(0)+f'(0)++f''(0)/2!+...+f^{(n)}(0)/n!+1/n!\int_0^1(1-x)^n f^{(n+1)}(x)dx$.
On a $f^{(n+1)}(x)=x^m$ donc
$f^{(n)}(x)=x^{m+1}/(m+1)$
...
$f(x)=x^{m+n+1}/((m+1)...(m+n)(m+n+1))=x^{m+n+1}m!/(m+n+1)!$
Donc puisque $f(1)=m!/(m+n+1)!$ et $f^{(k)}(0)=0$:

$$I_{m,n}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

On a par exemple :
$I_{1,2}=2!/4!=1/12\;(f(x)=x^4 1!/4!=x^4/24)$
$I_{7,9}=7!*9!/17!=1/194480\;(f(x):=x^{17}7!/17!)$
Avec `Xcas`

On tape :
`int(x*(1-x)^2,x,0,1)`
On obtient :
`1/12`
On tape :
`int(x^7*(1-x)^9,x,0,1)`
On obtient :
`1/194480`
On donc montré la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \texttt{comb(n,k)}}{m+k+1} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

14.13 Approximation de π avec un tirage aléatoire dans un carré

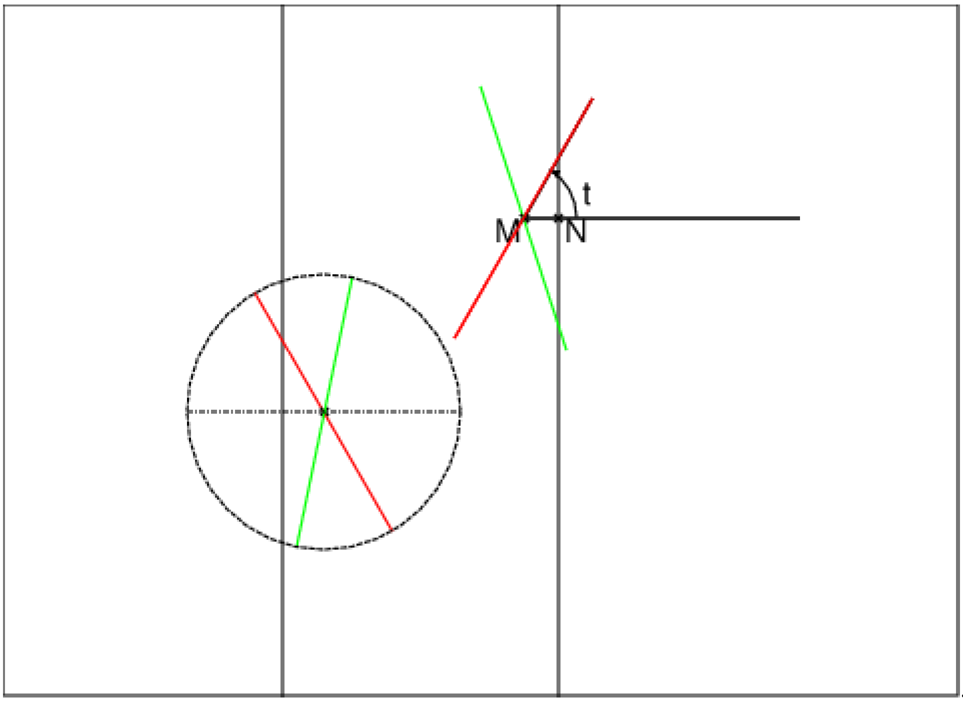
On tire au hasard N points d'un carré de côté 2 et on compte le nombre k de points qui se trouve dans le cercle inscrit dans ce carré. Une valeur approché de π est alors $4 * k/N$ (car le rapport des surfaces cercle/carré est $\pi/4 \sim k/N$.
On tape :

```
approxpi(N):={
local x1,y1,j,k;
ClrGraph();
randseed;
k:=0;
pour j de 1 jusque N faire
 x1:=rand(-1,1);
 y1:=rand(-1,1);
 si x1^2+y1^2<1 alors k:=k+1;point(x1+i*y1,affichage=1+point_point);
    sinon point(x1+i*y1,affichage=0+point_point);
 fsi;
fpour
retourne evalf(4*k/N);
 }:;
```

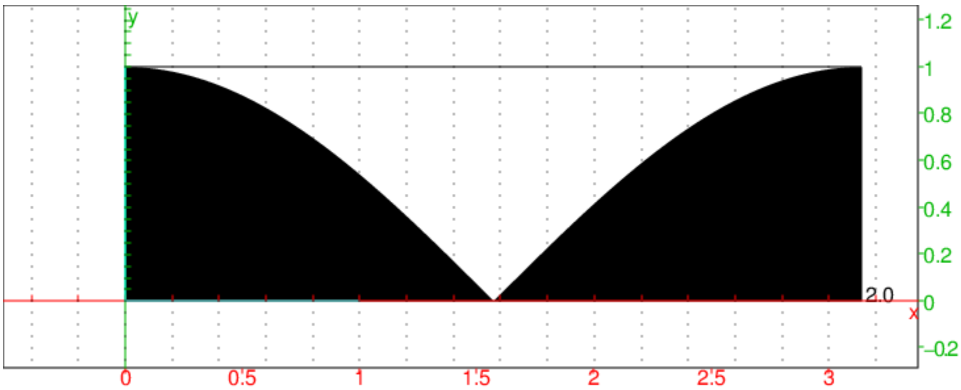
On tape : `approxpi(1000)` et on obtient : `3.076`
On tape : `approxpi(10000)`
On obtient (time : 0.97 si on a caché l'écran `DispG` avant de valider la commande) : `3.1136`
On tape : `approxpi(100000)` et on obtient (time : 8.78) : `3.14596`
et voici l'écran `DispG` correspondant à `approxpi(100000)` :

14.14 Approximation de π avec les aiguilles de Buffon

Le naturaliste Buffon, en 1777 a posé le problème de l'aiguille en ces termes : "On suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette et que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet..."
On va chercher la probabilité que la baguette rencontre une des parallèles lorsque la baguette a une longueur égale à la distance $2a$ entre deux parallèles.
Considérons un repère orthonormé Oxy où Oy est parallèle à une raie du parquet. Soient d la distance du milieu M de la baguette à la raie la plus proche ($d = MN$ où N est la projection de M sur l'axe des y i.e. d est la valeur absolue de l'abscisse de M) et t l'angle que fait la baguette avec Ox avec $t \in [0; \pi[$.



La baguette ne rencontrera pas l'une des raies si $-d \leq a\cos(t) \leq d$ ou si $0 \leq a|\cos(t)| \leq d$ et la baguette rencontrera l'une des raies si $d \leq a|\cos(t)|$.
On suppose $a = 1$ et on tire au hasard d entre 0 et 1 et t entre 0 et π. On trace la courbe représentative de $y = |\cos(t)|$ pour $0 \leq t \leq \pi$ ainsi que la région (en noire) qui représente l'événement : "la baguette coupe une raie".



La probabilité pour que la baguette coupe une raie est donc égale au quotient de l'aire en noire égale à $\int_0^\pi |\cos(t)|dt = 2$ par l'aire du rectangle $[0;\pi]$X$[0;1]$ égale à π. Donc :

$$\text{Proba(intersect)} = \frac{2}{\pi}$$

Pour faire le programme de simulation avec `Xcas`, on ne va pas utiliser π dans `rand(0,pi)` puisque justement on cherche à avoir une estimation de π. Donc il faut trouver un moyen pour choisir t aléatoirement dans $[0 : \pi[$: pour cela on va tirer au hasard un point $M = x + iy$ dans le demi-cercle $z = e^{it}$ pour $t = 0..\pi$: l'angle $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}$ sera la valeur de t et $\cos(t)$ sera égal à $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
On tape pour avoir une approximation de π :

```
buffon(n):={
local d,cost,x,y,j,k;
randseed;
k:=0;
pour j de 1 jusque n faire
 d:=rand(0,1);
 repeter
 x:=rand(-1,1);
 y:=rand(0,1);
 jusqua x^2+y^2<1 et x^2+y^2>0 ;
 cost:=x/sqrt(x^2+y^2);
 si abs(cost)>d alors k:=k+1; fsi;
fpour
retourne evalf(2*n/k);
}:;
```

On tape : `buffon(10000)`
On obtient : `3.15109500551`
On tape : `buffon(100000)`
On obtient : `3.14065419827`
Le temps mis pour effectuer ce programme est long et l'approximation de π par ce programme n'est pas plus précise que celle obtenue par le programme précédent qui consiste a faire une approximation de π par un tirage aléatoire dans un carré puisque c'est ce que l'on fait pour avoir la valeur aléatoire de t dans $[0;\pi[$.
Remarques
Pour tirer au hasard un point dans le cercle unité il ne faut pas écrire :

```
x:=alea(-1,1);
c:=sqrt(1-x^2);
y:=alea(0,c);
M:=point(x+i*y)
```

ni écrire

```
 x:=rand(-1,1);
 repeter
 y:=rand(0,1);
 jusqua x^2+y^2<1
M:=point(x+i*y)
```

car x et y ne sont pas indépendants et cela entraine que les points M ne sont pas équirépartis dans le disque de centre 0 et de rayon 1.
ni écrire

```
r:=alea(-1,1);
t:=alea(0,pi);
M:=point(r*exp(t*i))
```

car ici aussi les points M ne sont pas équirépartis dans le disque de centre 0 et de rayon 1.
Il faut écrire :

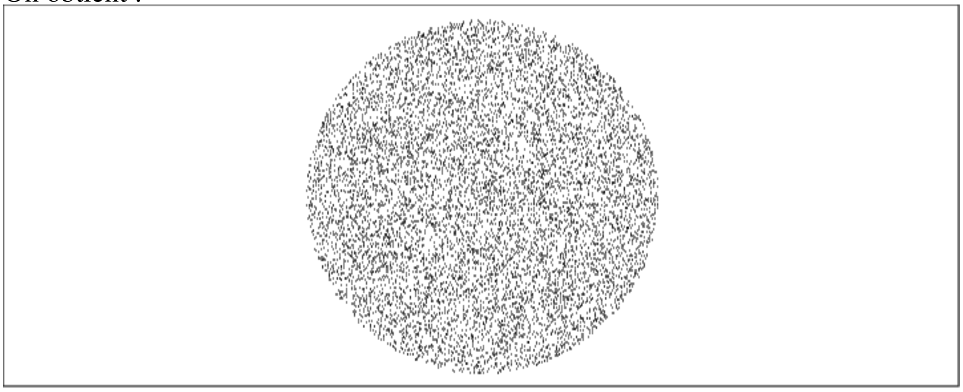
```
 repeter
   x:=rand(-1,1);
   y:=rand(0,1);
jusqua x^2+y^2<1
M:=point(x+i*y)
```

Pour se convaincre on tape :

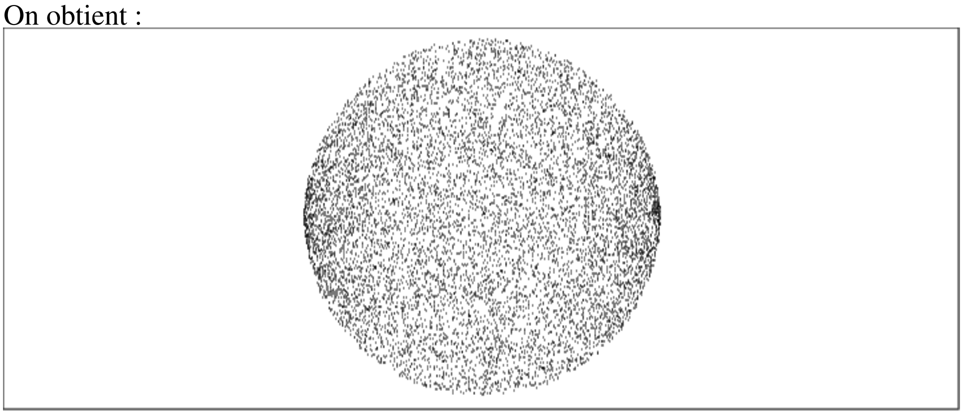
```
simul(n):={
local j,a,b,L;
L:=NULL;
pour j de 1 jusque n faire
  repeter
    a:=alea(-1,1);
    b:=alea(-1,1);
  jusqua a^2+b^2<1;
  L:=L,point(a+i*b);
fpour
retourne affichage(L,point_point);
}:;
simul0(n):={
local j,a,b,c,L;
L:=NULL;
pour j de 1 jusque n faire
  a:=alea(-1,1);
  c:=sqrt(1-a^2);
  b:=alea(-c,c);
  L:=L,point(a+i*b);
fpour
retourne affichage(L,point_point);
}
:;
simul1(n):={
local j,a,b,L;
L:=NULL;
pour j de 1 jusque n faire
  a:=alea(-1,1);
  repeter
    b:=alea(-1,1);
  jusqua a^2+b^2<1;
  L:=L,point(a+i*b);
fpour
retourne affichage(L,point_point);
}:;
simul2(n):={
local j,r,t,L;
L:=NULL;
pour j de 1 jusque n faire
  r:=alea(-1,1);
```

```
  t:=alea(0,pi);
  L:=L,point(r*exp(i*t));
fpour
retourne affichage(L,point_point);
}
:;
```

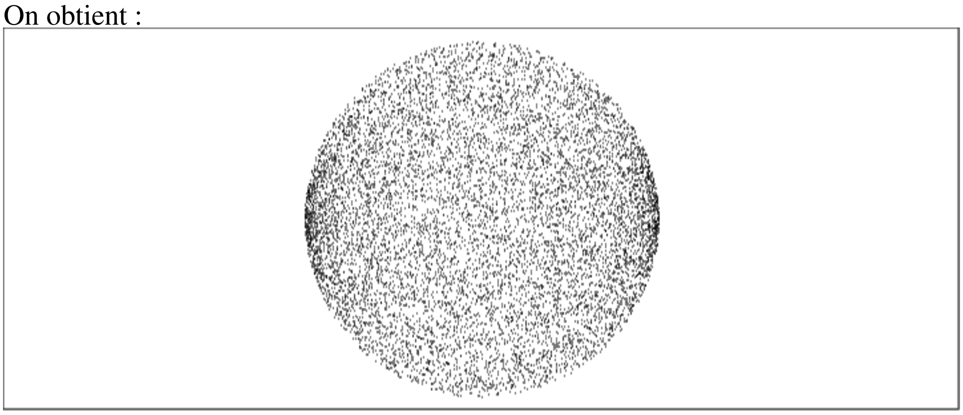
Puis, on tape : `simul(10000);`
On obtient :



On remarque que les points sont équirépartis.
Puis, on tape : `simul0(10000)`
On obtient :

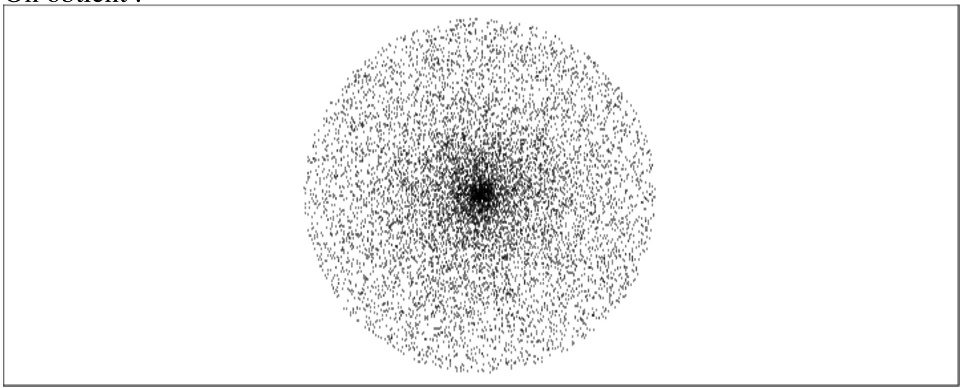


On remarque l'accumulation de points dans les secteurs $-1 < x < -0.9$ et $0.9 < x < 1$ Puis, on tape : `simul1(10000)`
On obtient :



On remarque encore l'accumulation de points dans les secteurs $-1 < x < -0.9$ et $0.9 < x < 1$ Puis, on tape : `simul2(10000)`

On obtient :



On remarque l'accumulation des points au centre.

14.15 Approximation décimale d'un nombre transcendant

Définition Un nombre réel est algébrique s'il vérifie une équation polynômiale à coefficients entiers, sinon il est transcendant.
On peut montrer que pour $b \in \mathbb{Z}, b > 1$, les nombres :

$$\xi(b) = \frac{1}{b^{0!}} + \frac{1}{b^{1!}} + ...\frac{1}{b^{n!}} + ...$$

sont transcendants.
Donner une approximation déciamle de $\xi(2)$ à 10^{-8} près.

La série de terme générale $\frac{1}{b^{n!}}$ est convergente car $\frac{1}{b^{n!}} < \frac{1}{b^n}$, donc :
$1 + \frac{1}{b} < \xi(b) < \frac{b}{b-1}$ et $1.5 < \xi(b) < 2$.
Pour avoir une approximation décimale de $\xi(2)$ à 10^{-8} près, il faut trouver une majoration du reste d'ordre $p \geq 1$:

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{b^{n!}} = \frac{1}{b^{p!}} + \frac{1}{b^{p!*(p+1)}} + \frac{1}{b^{p!*((p+1)(p+2)}} + ... + \frac{1}{b^{p!*((p+1)(p+2)...(p+n)}} + ... <$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{b^{p!}})^n = \frac{1}{b^{p!} - 1}$$

Il faut donc résoudre :

$$\frac{1}{2^{p!} - 1} < 10^{-8}$$

Pour $p = 5$ on a $\frac{1}{2^{120}-1} < 10^{-36}$
Pour $p = 4$ on a $\frac{1}{2^{24}-1} < 6 * 10^{-8}$
Donc il suffit de calculer la somme des 5 premiers termes ($p = 0..4$)) :
$1 + 1/2 + +1/2^2 + 1/2^6 + 1/2^{24}$.
On trouve :

```
1.7656250596
```

14.16 Série et développement en série de Fourier

14.16.1 Une série

L'énoncé

1. Trouver pour $x \in]-\pi;\pi]$ la valeur de la somme

$$s(x,N) = \sum_{k=1}^{N} \cos(kx)$$

2. En déduire que pour $x \in]-\pi;\pi[$ la somme

$$S(x,N) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}$$

s'écrit sous la forme $\frac{1}{2} + \frac{1}{N} I(x) + \frac{1}{N+1} J(x)$ où $I(x)$ et $J(x)$ sont des intégrales fonction de leur borne supérieure.

3. En déduire, lorsque $x \in [-\pi;\pi]$, la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}$$

.

La correction avec `Xcas`

1. **Première méthode**
On remarque $s(x,N)$ est la partie réelle de $\sum_{k=1}^{N} \exp(ix)$.
On tape :

```
sum(exp(i*k*x),k,1,N)
```

On obtient :

```
(exp((i)*(N+1)*x))/(exp((i)*x)-1)-(exp((i)*x))/
(exp((i)*x)-1)
```

On tape :

```
trigcos(re(sum(exp(i*k*x),k,1,N)))
```

On obtient :

```
(-cos(x)*cos(x*(N+1))-cos(x)+cos(x*(N+1))-
sin(x)*sin(x*(N+1))+1)/(2*cos(x)-2)
```

On réécrit la réponse avec `tlin` puis avec `normal` et on obtient :

```
(-cos(x)-cos(N*x)+cos(x*(N+1))+1)/(2*cos(x)-2)
```

donc

$$s(x,N) = \frac{(-\cos(x) - \cos(N*x) + \cos(x*(N+1)) + 1)}{(2*\cos(x) - 2)}$$

Autre méthode
On peut aussi simplifier : $2 * \sin(x/2) * s(x, N)$.
On tape :
`tlin(2*sin(x/2)*cos(k*x))`
On obtient :
`sin((2*k*x+x)/2)-sin((2*k*x-x)/2)`
Donc on a :

$$\sum_{k=1}^{N} \sin((2kx+x)/2) - \sin((2kx-x)/2) = \sin((2Nx+x)/2) - \sin(x/2)$$

et

$$2\sin(x/2)*s(x,N) = \sum_{k=1}^{N} 2\sin(x/2)\cos(kx) = \sin((2Nx+x)/2) - \sin(x/2)$$

On vérifie et on tape :
`tlin(2*sin(x/2)*(-sin(x/2)+sin((2*N+1)*x/2)))`
On obtient :
`-1+cos(x)+cos(N*x)-cos(N*x+x)`
On tape :
`trigsin(trigexpand(2*cos(2*(x/2))-2))`
On obtient :
`-4*sin(x/2)^2`
On tape :
`tlin((2*cos((N+1)*x/2)*sin(N*x/2)))`
On obtient :
`sin((2*N*x+x)/2)-sin(x/2)`
Donc on peut écrire $s(x, N)$ de 4 manières :

$$s(x,N) = \sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\sin((2N+1)x/2) - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} =$$

$$\frac{2\cos((N+1)x/2)\sin(Nx/2))}{2\sin(x/2)} = \frac{-1+\cos(x)+\cos(Nx)-\cos((N+1)x)}{-4\sin^2(x/2)} =$$

$$\frac{1-\cos(x)-\cos(Nx)+\cos((N+1)x)}{2*\cos(x)-2)}$$

2. On remarque que :

$$S'(x,N) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1}\cos(kx) = -\sum_{k=1}^{N} \cos(k(x+\pi)) = -s(x+\pi, N)$$

donc

$$S'(x,N) = \frac{\cos(x) - (-1)^N\cos(N*x) + (-1)^{N+1}\cos(x*(N+1)) + 1}{2+2\cos(x)}$$

On a :

$$S'(x,N) - \frac{1}{2} = \frac{-(-1)^N\cos(N*x) + (-1)^{N+1}\cos(x*(N+1))}{2+2\cos(x)}$$

On a $S(0,N)=0$ donc

$$S(x,N)=\frac{x}{2}+\int_0^x -\frac{(-1)^N\cos(N*t)+(-1)^{N+1}\cos(t*(N+1))}{(2+2\cos(x))}dt$$

On intègre par partie cette intégrale et on tape :

```
ibpu((-(-1)^N*cos(N*x)+(-1)^(N+1)*cos(x*(N+1)))/
(2+2*cos(x)),1/(2+2*cos(x)))
```

On obtient après factorisation du 2ième terme :

```
[(-(-1)^N*1/(N+1)*sin(x*(N+1))-(-1)^N*1/N*sin(N*x))/
(2+2*cos(x)),(sin(x)*(sin(N*x)*N+sin(N*x)+
sin(x*(N+1))*N)*(-1)^N)/(2*(cos(x)+1)^2*(N+1)*N)]
```

Donc

$$S(x,N)=\frac{x}{2}+$$

$$\frac{-(-1)^N*1/(N+1)*\sin(x*(N+1))-(-1)^N*1/N*\sin(N*x)}{2+2*\cos(x)}+$$

$$\int_0^x\frac{(-1)^N*\sin(t)*(\sin(N*t)*(N+1)+\sin(t*(N+1))*N)}{2*(\cos(t)+1)^2*(N+1)*N}dt$$

Si $x\in]-\pi,\pi[$, $\lim_{N\to+\infty}S(x,N)-\frac{x}{2}=0$ donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}=x/2$$

et si $x=-\pi$ ou si $x=\pi$

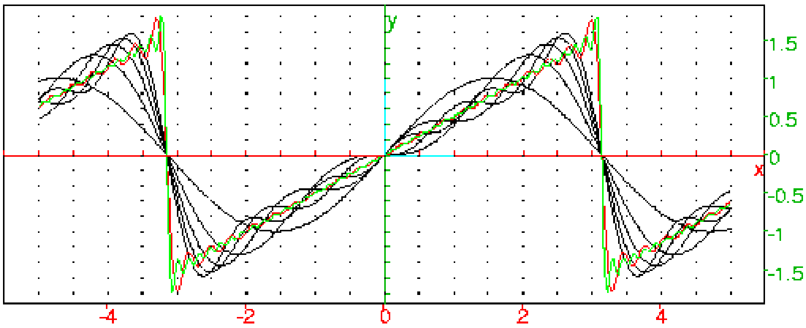
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}=0$$

Pour visualiser le résultat

On tape :

```
S(x,N):=sum((-1)^(k+1)*sin(k*x)/k,k,1,N);
(plotfunc(S(x,k),x))$(k=1..5);
plotfunc(S(x,20),x,affichage=rouge);
plotfunc(S(x,40),x,affichage=vert)
```

On obtient :



14.16.2 Développement en série de Fourier et phénomène de Gibbs

Rappels du cours

On sait que les coefficients de Fourier d'une fonction, 2π-périodique et intégrable sur tout intervalle fermé borné, sont définis pour $n \in \mathbb{Z}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

et que la série de Fourier associée à f est :

$$SF(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$$

On peut aussi définir les coefficients de Fourier réels pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

On a alors :

$$SF(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

Théorème de Dirichlet
Si au point x_0, f admet une limite à droite et une limite à gauche (que l'on note $f(x_0+0)$ et $f(x_0-0)$) et admet une dérivée à droite, et une dérivée à gauche, alors la série $SF(f)(x_0)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$.
En particulier si f est dérivable pour tout x, $SF(f)(x)$ converge vers $f(x)$.

Développement en série de Fourier

Développer en serie de Fourier la fonction $f(x)$ périodique de période 2π égale à $x/2$ sur $]-\pi;\pi]$.
On tape :

```
assume(n,integer);fourier_bn(x/2,x,2*pi,n,-pi)
```

On obtient :

```
DOM_INT,(-((-1)^n))/n
```

Puisque $f(x)$ est impaire, on sait que dans la série de Fourier de f, les coefficients des cosinus seront nuls i.e.
`fourier_an(x/2,x,2*pi,n,-pi) =0`
Donc le développement en série de Fourier de $f(x)$ est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -(-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}$$

D'après le théorème de Dirichlet on déduit que :

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} -(-1)^n \frac{\sin(nx)}{n} \text{ pour } x \in]-\pi;\pi[$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{2}) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} -(-1)^n \frac{\sin(nx)}{n} \text{ pour } x = -\pi \text{ ou } x = \pi$$

Le phénomène de Gibbs

Les graphes des fonctions $S(x,n)$ pour $x \in [-\pi;\pi]$ possède un maximum ayant comme coordonnées x_n, y_n.
Quand n tend vers $+\infty$, on va montrer que :
x_n tend vers π et
y_n tend vers $\alpha = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$.
Un calcul approché de α montre que $\alpha > 1.85193705198 > \pi/2$.
Ces "bosses" au voisinage du point de discontinuité s'appellent le phénomène de Gibbs.

Observation du phénomène de Gibbs

On cherche la limite de $y_n = S(x_n, n)$ quand n tend vers $+\infty$.
Déterminer graphiquement les coordonnées x_n, y_n du maximum de :
$S(x,n) = \sum_{k=1}^n -(-1)^k \frac{\sin(kx)}{k}$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$, $n = 20$ et $n = 40$.

On lit sur le graphique précédent fait avec `Xcas` :

— $x_1 = 1.57$, $y_1 = 1$
— $x_2 = 2.1$, $y_2 = 1.3$
— $x_3 = 2.38$, $y_3 = 1.44$
— $x_4 = 2.53$, $y_4 = 1.53$
— $x_5 = 2.63$, $y_5 = 1.59$
— $x_20 = 3.00$, $y_20 = 1.77$
— $x_40 = 3.07$, $y_40 = 1.80$

Démonstration du phénomène de Gibbs

On cherche x_n et la limite de $y_n = S(x_n, n)$ quand n tend vers $+\infty$ de façon théorique.

1. On va déterminer la valeur de x_n
   Pour avoir un calcul de la valeur approchée de x_n, on sait que :

$$S'(x,n) = s(x,n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} \cos(k(x+\pi)) =$$

$$\frac{(\cos(x) - (-1)^n \cos(n*x) - (-1)^n \cos(x*(n+1)) + 1)}{(2*\cos(x) - 2)} =$$

$$\frac{\sin((2n+1)(x+\pi)/2) - \sin((x+\pi)/2)}{2\sin((x+\pi)/2)}$$

   Donc
   — pour $n = 1$, on tape :
     `fsolve(2*cos(x)+cos(2*x)+1=0,x,1)`
     On obtient : `1.57079632679` donc $x_1 = 1.57079632679$
   — pour $n = 2$, on tape :
     `fsolve(cos(x)-cos(2*x)-cos(3*x)+1=0,x,2)`
     On obtient : `2.09439510239` donc $x_2 = 2.09439510239$
   — pour $n = 3$, on tape :
     `fsolve(cos(x)+cos(3*x)+cos(4*x)+1=0,x,2)`
     On obtient : `2.35619449019` donc $x_3 = 2.35619449019$
   — pour $n = 4$, on tape :
     `fsolve(cos(x)-cos(4*x)-cos(5*x)+1=0,x,2.5)`
     On obtient : `2.51327412287` donc $x_4 = 2.51327412287$
   — pour $n = 5$, on tape :
     `fsolve(cos(x)+cos(5*x)+cos(6*x)+1=0,x,2.5)`
     On obtient : `2.61799387799` donc $x_5 = 2.61799387799$
   — pour $n = 20$, on tape :
     `fsolve(cos(x)-cos(20*x)-cos(21*x)+1=0,x,3)`
     On obtient : `2.99199300342` donc $x_{20} = 2.99199300342$
   — pour $n = 40$, on tape :
     `fsolve(cos(x)-cos(40*x)-cos(41*x)+1=0,x,3.04)`
     On obtient : `3.06496844253` donc $x_{40} = 3.06496844253$

   Mais cela ne donne que des valeurs approchées....
   Pour avoir un calcul de la valeur exacte de x_n, il faut résoudre en x :

$$\sin((2n+1)(x+\pi)/2) - \sin((x+\pi)/2) = 0$$

   ou

$$\cos((n+1)(x+\pi)/2) * \sin(n(x+\pi)/2) = 0$$

   ce qui donne :
   $(n+1)(x+\pi)/2) = \pi/2 \bmod \pi$ soit
   $(n+1)x = -n\pi \bmod 2\pi$ donc

$x = \dfrac{(2k-n)\pi}{n+1}$ avec $n/2 < k < (2n+1)/2$ pour avoir $x \in]0;\pi[$
et
$n(x+\pi)/2 = k\pi$ soit
$nx = (2k-n)\pi$ donc
$x = \dfrac{(2k-n)\pi}{n}$ avec $n/2 < k < n$ pour avoir $x \in]0;\pi[$
Il y a donc, pour $x \in]0;\pi[$, un nombre impair d'extremum qui ont pour abscisse :

- si $n = 1$ $x_1 = \pi/2 \simeq 1.57079632679$
- si $n = 2$ $x_2 = 2\pi/3 \simeq 2.09439510239$
- si $n = 2p$ ou si $n = 2p+1$ (pour $p > 2$)
  $\dfrac{(p+1)\pi}{n+1}, \dfrac{(p+1)\pi}{n}, \dfrac{(p+2)\pi}{n+1}, \dfrac{(p+2)\pi}{n}, ..., \dfrac{(n-1)\pi}{n+1}, \dfrac{(n-1)\pi}{n}, \dfrac{n\pi}{n+1}$

On commence par un maximum et donc on finit aussi par un maximum. Le dernier maximum a pour abscisse :

$$x_n = \frac{n\pi}{n+1}$$

On vérifie les résultats précédent et on tape :
`evalf(k*pi/(k+1))$(k=1..5)`
On obtient :
`1.57079632679,2.09439510239,`
`2.35619449019,2.51327412287,2.61799387799`
Les maximum ont pour abscisse $\dfrac{(2k-n)\pi}{n+1}$ pour $k = p+1...n$ avec $p = floor(n/2)$
Pour $n = 20$ cela donne $x_{20} = \pi * 20/21 \simeq 2.99199300342$
Pour $n = 40$ cela donne $x_{40} = \pi * 40/41 \simeq 3.06496844253$

2. Déterminons la valeur de $y_n = S(x_n, n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -(-1)^k \sin(kn\pi/(n+1))/k$
   Par définition, on a :
   $$S(x,n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}$$
   et
   $$y_n = S(x_n, n) = \sum_{k=1}^{n} -(-1)^k \frac{\sin(\frac{kn\pi}{n+1})}{k} S$$
   On a montré que :
   $$S'(x,n) = s(x+\pi, n) = \frac{\sin(\frac{x+\pi}{2}) - \sin(\frac{(x+\pi)(2n+1)}{2})}{2\sin(\frac{x+\pi}{2})}$$
   En intégrant cette égalité entre π et x, puisque $S(\pi, n) = 0$, on obtient :
   $$S(x,n) = \int_{\pi}^{x} (\frac{1}{2} - \frac{\sin(\frac{(t+\pi)(2n+1)}{2})}{2\sin(\frac{t+\pi}{2})} dt = \frac{x-\pi}{2} - \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(\frac{(t+\pi)(2n+1)}{2})}{2\sin(\frac{t+\pi}{2})} dt$$

On fait le changement de variable $t = \pi - 2u$:
$(t+\pi)/2 = \pi - u$ et $dt = -2du$ et comme $\sin(\pi - u) = \sin(u)$ et $\sin((2n+1)(\pi - u)) = \sin((2n+1)u)$ on a :

$$S(x,n) = \frac{x-\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)} du$$

Puisque $x_n = \dfrac{n\pi}{n+1}$ on a :
$\dfrac{x_n - \pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
Donc

$$y_n = S(x_n, n) = -\frac{\pi}{2(n+1)} + \int_0^{\frac{\pi}{2n+2}} \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)} du$$

Exercice
Montrez que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2n+2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Pour cela on utilisera la continuité de la fonction g définie sur $[0;\pi[$ par :
$g(0) = 0$,
$g(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$ pour $x \in]0;\pi[$
et on montrera que
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n+2}} \sin((2n+1)t)g(t)dt$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice
On tape en effet : `limit(1/sin(x)-1/x,x,0)`
On obtient `0`
donc g est continue sur $[0;\pi[$.
Donc il existe K tel que pour tout $x \in [0;\pi/2]$ $|g(x)| < K$.
Puisque $\dfrac{\pi}{2n+2} < \dfrac{\pi}{2}$ quand $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2n+2}} \sin((2n+1)t)g(t)dt\right| < K\frac{\pi}{2n+2}$$

Donc
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n+2}} \sin((2n+1)t)\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)dt$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.
On en déduit :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2n+2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$
On fait le changement de variable $v = (2n+1)t$ donc $dv/v = dt/t$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2n+2}} \frac{\sin(v)}{v} dv = \int_0^{\pi} \frac{\sin(v)}{v} dv = \alpha$$

On tape :
```
romberg(sin(t)/t,t,0,pi)
```

On obtient :
`1.85193705198`
On tape :
`evalf(pi/2)`
On obtient :
`1.57079632679`
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \alpha = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt \simeq 1.85193705198$$

et il a une bosse puisque `1.57079632679<1.85193705198`

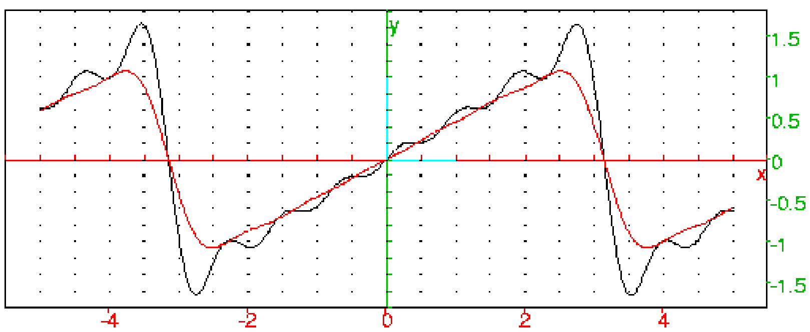
Utilisation de la moyenne de Césaro

Définition
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, on pose $S_k = \sum_{i=0}^{k} u_i$.
On dit que la série $\sum u_n$ converge vers σ au sens de Césaro si la suite :
$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k$ tend vers σ.
On pose :
$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} SF_k(f)$
Théorème
$\sigma_n(f)(x)$ converge vers $f(x)$ en tous les points de continuité de f.
On observe que la convergence au sens de Césaro permet de régulariser la convergence, donc d'éliminer le phénomène de Gibbs.
Exercice
Calculer $\sigma_n(f)(x)$ pour la fonction f périodique de période 2π définie par : $f(x) = x/2$ sur $]-\pi;\ \pi]$
Tracer sur un même graphique $S(x,7)$ et $\sigma_7(f)(x)$ et aussi $S(x,40)$ et $\sigma_{40}(f)(x)$.

1. On tape :

```
S(x,n):=sum((-1)^(k+1)*sin(k*x)/k,k,1,n);
sigma(x,n):=1/n*sum(S(x,k),k,1,n-1);
plotfunc(S(x,7),x);plotfunc(sigma(x,7),x,affichage=1)
```

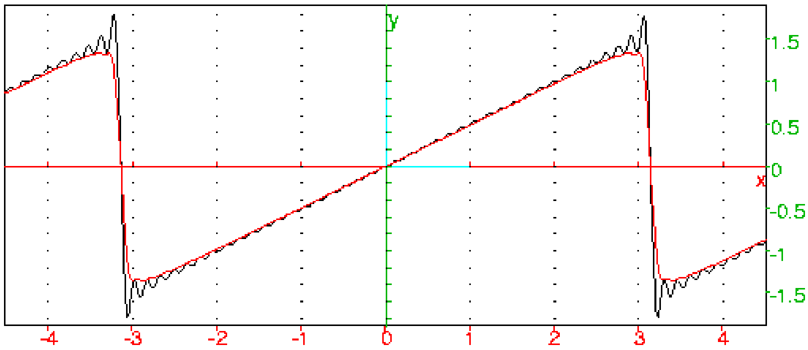
   On obtient :



2. On tape :

```
plotfunc(S(x,40),x);
plotfunc(sigma(x,40),x,affichage=1)
```

On obtient :



14.17 Une suite

1/ Etude de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$ dans l'intervalle]0 ;1[.
2/ Pour n entier strictement positif, on considère $P_n(x) = x^n + x - 1$.
Montrer que P a une racine unique a_n, dans l'intervalle]0 ;1[.
Calculer a_1, a_2 puis, à l'aide de la méthde de Newton donner une valeur approchée de $a_3, a_4, a_{50}, a_{100}$ à 10^{-10} près.
3/ Etude de la suite a_n.

Correction

On tape :

```
f(x):=log(1-x)/log(x)
plotfunc(f(x),x,0,1)
diff(f(x),x)
```

On obtient :

```
(x*log(x)-x*log(-x+1)+log(-x+1))/(x^2*(log(x))^2-x*(log(x))^2)
```

On tape :

```
lncollect(ans())
```

On obtient :

```
(x*log(x)+(-x+1)*log(-x+1))/(x^2*(log(x))^2-x*(log(x))^2)
```

Le numérateur et le dénominateur sont négatifs donc f est croissante.
On tape :

```
limit(f(x),x=1)
```

On obtient :

```
infinity
```

On tape :

```
limit(f(x),x=0)
```

On obtient :

```
0
```

2/ $P_n(x)$ est croissante et continue dans l'intervalle [0 ;1] et on a :
$P(0) = -1, P(1) = 1$

Il existe donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires une valeur a_n unique dans l'intervalle]0 ;1[telle que $P(a_n) = 0$.
On a :
$\mathtt{a}_1 = 1/2$.
On tape :
`solve(x^2+x-1,x)`
On obtient :
`[(-1+sqrt(5))/2,(-1-sqrt(5))/2]`
donc $\mathtt{a}_2 = (-1 + \mathtt{sqrt}(5))/2 \simeq 0.61803398875$
On définit la fonction qu'il faut itérer pour n fixé :
`g(n,x):=x-(x^n+x-1)/(n*x^(n-1)+1)`
puis,
```
h(x):=g(3,x)
h(1.0)
h(ans()).....
h(ans())
```
On obtient :
$\mathtt{a}_3 = 0.682327803828$
puis,
```
h(x):=g(4,x)
h(1.0)
h(ans())....
h(ans())
```
On obtient :
$\mathtt{a}_4 = 0.686046511628$
puis,
```
h(x):=g(50,x)
h(1.0)
h(ans())....
h(ans())
```
On obtient :
$\mathtt{a}_{50} = 0.943986614988$
puis,
```
h(x):=g(100,x)
h(1.0)
h(ans())....
h(ans())
```
On obtient :
$\mathtt{a}_{100} = 0.966583901079$
3/ On a donc :
$(a_n)^n = 1 - a_n$.
On en déduit :
$n * \ln(a_n) = \ln(1 - a_n)$
c'est à dire $f(a_n) = n$
Comme f est une bijection de $[0; 1[$ sur $[0; +\infty[$, f admet une fonction inverse qui tend vers 1 à l'infini.
On a :
$a_n = f^{-1}(n) = g(n)$ donc, la suite a_n est convergente et sa limite est 1.

Chapitre 15

Exercices d'Algèbre niveau licence 1,2

15.1 Intersection de 2 sous espaces vectoriels

Soient dans R^4 les vecteurs :
$V_1 = [1, 2, 3, 4]$
$V_2 = [1, 1, 1, 3]$
$V_3 = [0, 1, 2, 2]$
$V_4 = [-1, 0, 1, -2]$
$V_5 = [2, 3, 0, 1]$
Soient F le sous espace engendré par V_1, V_2, V_3 et G le sous espace engendré par V_4, V_5.
Déterminer une base de F, G, $F \cap G$, $F + G$.

Correction

On tape :

```
V1:=[1,2,3,4]
V2:=[1,1,1,3]
V3:=[0,1,2,2]
F:=basis(V1,V2,V3)
```

On obtient :

```
[[-1,0,1,0],[0,-1,-2,0],[0,0,0,-1]]
```

Ou on tape :

```
rank(V1,V2,V3)
```

On obtient :

```
3
```

Donc `F` est de dimension 3, et `V1, V2, V3` forment aussi une base de `F`.
On tape :

```
V4:=[-1,0,1,-2]
V5:=[2,3,0,1]
G:=basis(V4,V5)
```

On obtient :

```
[[-3,0,3,-6],[0,-3,-2,3]]
```

Ou on tape :

```
rank(V4,V5)
```

On obtient :
`2`
Donc `G` est de dimension 2, et `V4, V5` forment aussi une base de `G`.
On tape :
`FIG:=ibasis(F,G)`
On obtient :
`[[-1,0,1,-2]]`
Ou on tape :
`rank(V1,V2,V3,V4)`
On obtient :
`3`
et on tape :
`rank(V1,V2,V3,V5)`
On obtient :
`4`
Donc `F ∩ G` est engendré par `V4`.
On tape :
`FPG:=basis(F union G)`
On obtient :
`[[-4,0,0,0],[0,-4,0,0],[0,0,-4,0],[0,0,0,-4]]`
Ou on tape :
`rank(V1,V2,V3,V5)`
On obtient :
`4`
Donc `F+G` est de dimension 4, et `V1, V2, V3, V5` forment aussi une base de `F+G`.

Refaire le même exercice en remplacant `V4` par `V4+V5`.
On tape :
`V4:=V4+V5`
On obtient :
`[1,3,1,-1]`
On tape :
`G:=basis(V4,V5)`
On obtient le même résultat que précédemment :
`[[-3,0,3,-6],[0,-3,-2,3]]`
On tape :
`FIG:=ibasis(F,G)`
On obtient le même résultat que précédemment :
`[[-1,0,1,-2]]`
Mais si on tape :
`rank(V1,V2,V3,V4)`
On obtient cette fois :
`4`
et on tape :
`rank(V1,V2,V3,V5)`
On obtient :
`4`

cela ne nous permet pas de trouver une base de $F \cap G$: on sait seulement que $F \cap G$ est de dimension 1. Pour trouver un vecteur non nul contenu dans F et dans G il faut résoudre le système :
$x * V1 + y * V2 + z * V3 = a * V4 + b * V5$.
On tape :
`linsolve(x*V1+y*V2+z*V3-a*V4-b*V5,[x,y,z,a])`
On obtient :
`[-b,2*b,0,-b]`
Si on prend `b=-1`, on retrouve que le vecteur `V1-2*V2=V4-V5=[-1,0,1,-2]` est une base de `F ∩ G`.

15.2 Rang de formes linéaires

Étudier le rang de l'ensemble des formes :
$x + y - z - t$
$x - y - z + t$
$x + y + z + a * t$
$x - y + z - a * t$

On tape :
`A:=syst2mat([x+y-z-t,x-y-z+t,x+y+z+a*t,x-y+z-a*t],[x,y,z,t])`
On obtient :
`[[1,1,-1,-1,0],[1,-1,-1,1,0],[1,1,1,a,0],[1,-1,1,-a,0]]`
On tape :
`C:=tran(A)[0..3]`
On obtient :
`[[1,1,1,1],[1,-1,1,-1],[-1,-1,1,1],[-1,1,a,-a]]`
On tape :
`det(C)`
On obtient :
`8*a+8`
Donc pour `a!=-1` le rang est 4.
On tape :
`D:=subst(C,a=-1)`
On obtient :
`[[1,1,1,1],[1,-1,1,-1],[-1,-1,1,1],[-1,1,-1,1]]`
On tape :
`rank(D)`
On obtient :
`3`
Donc pour `a=-1` le rang est 3.
Ou on tape :
`normal(lu(C))`
On obtient :
`[0,1,2,3],[[1,0,0,0],[1,1,0,0],[-1,0,1,0],[-1,-1,a/2+1/2,1]],`
`[[1,1,1,1],[0,-2,0,-2],[0,0,2,2],[0,0,0,-2*a-2]]`
On retrouve ainsi le résultat précédent.

15.3 Une rotation

Montrer que la matrice :

$$M = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

est une matrice de rotation.
Déterminer l'axe et l'angle de cette rotation.
On tape :
`M:=1/9*[[8,1,-4],[-4,4,-7],[1,8,4]]`
`isom(M)`
On obtient :
`[[3,-1,-1],acos(7/18),1]`
Cela signifie que l'on a une rotation (le 1 indique que l'on a une isométrie positive) d'axe porté par le vecteur [3,-1,-1] et d'angle $t = \arccos(7/18)$ avec $\sin(t) > 0$ (`isom` choisit l'orientation de l'axe pour que l'angle soit dans $[0, \pi]$ ie pour que son sinus soit positif).

Comment retrouver ces résultats ?
On cherche les points fixes de l'application linéaire `rot` de matrice `M` dans la base canonique de R^3, c'est à dire les points `[x,y,z]` tels que :
`(M-idn(3))*[x,y,z]=0.`
On tape :
`linsolve((M-idn(3))*[x,y,z],[x,y,z])`
On obtient :
`[-3*z,z,z]`
Il y a donc une droite de points fixes qui est pour `z` $\in R$:
`z*[-3,1,1]`
Cherchons une base orthonormée $E1, E2, E3$ avec $E3$ porté par l'axe, par exemple $E3 = \frac{\sqrt{11}}{11}[-3, 1, 1]$.
On choisit $E1 * E3 = 0$ les coordonnées `[x,y,z]` de $E1$ doivent vérifier :
`-3*x+y+z=0`
On choisit `x=0,y=-z` donc $E1 = \frac{\sqrt{2}}{2}[0, 1, -1]$
Puis on choisit $E2 = E3 \wedge E1$.
On tape :
`E3:=sqrt(11)/11*[-3,1,1]`
`E1:=sqrt(2)/2*[0,1,-1]`
`E2:=normal(cross(E3,E1))`
On obtient :
`[-(2*sqrt(22))/22,-(3*sqrt(22))/22,-(3*sqrt(22))/22]`
En prenant comme nouvelle base $E1, E2, E3$ on a comme matrice de passage `P:=tran(Q)` avec `Q:=[E1,E2,E3]`.
On tape :
`Q:=[E1,E2,E3]`
`P:=tran(Q)`
On vérifie que `Q=inv(P)` en tapant :
`normal(P*Q)` et `normal(Q*P)`
On obtient bien `idn(3)`

La matrice de `rot` dans cette nouvelle base est donc obtenue en tapant :
`normal(Q*M*P)`
On obtient :
`[[7/18,5*sqrt(11)/18,0],[(-(5*sqrt(11)))/18,7/18,0],[0,0,1]]`
L'angle `t` de la rotation est donc défini par :
`acos(t)=7/18` et `asin(t)=-5*sqrt(11)/18`
On retrouve les résultats trouvés avec la commande `isom` car on n'a pas choisit la même orientation pour l'axe `E3` est dirigé selon le vecteur `[-3,1,1]` et non `[3,-1,-1]`...
On tape :
```
isom([[7/18,5*sqrt(11)/18,0],[(-(5*sqrt(11)))/18,7/18,0],
[0,0,1]])
```
On obtient :
`[[0,0,-1],acos(7/18),1]`
car `isom` choisit l'orientation de l'axe pour que l'angle soit dans $[0, \pi]$ ie pour que son sinus soit positif : si l'axe est dirigé selon `-E3`, l'angle vaut $\alpha = \operatorname{acos}(7/18)$ avec $0 \leq \alpha \leq \pi$.

15.4 Puissance n-ième d'une matrice

Calculer la puissance n-ième de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

On cherche si `A` est diagonalisable.
On tape :
```
A:=[[7,4,0,0],[-12,-7,0,0],[20,11,-6,-12],[-12,-6,6,11]]
P,B:=jordan(A)
```
On obtient :
```
P:=[[0,1,0,2],[0,-2,0,-3],[-3,2,4,1],[2,-1,-3,0]]
B:=[[2,0,0,0],[0,-1,0,0],[0,0,3,0],[0,0,0,1]]
```
Donc `A` est diagonalisable.
On a :
`B=P^-1*A*P`
donc
`B^n=P^-1*A^n*P`
ou encore
`A^n=P*B^n*P^-1`
On a :
`B^n=[[2^n,0,0,0],[0,(-1)^n,0,0],[0,0,3^n,0],[0,0,0,1]]`
On tape :
```
Bn:=[[2^n,0,0,0],[0,(-1)^n,0,0],[0,0,3^n,0],[0,0,0,1]]
An:=normal(P*Bn*inv(P))
```
On obtient :
$[[-3*(-1)^{n}+4, -2*(-1)^{n}+2, 0, 0], [6*(-1)^{n}-6, 4*(-1)^{n}-3, 0, 0],$

$[-6*(-1)^n+4*3^n+2, 3*2^n-4*(-1)^n+1, 9*2^n-8*3^n, 12*2^n-12*3^n]$,
$[3*(-1)^n-3*3^n, -2*2^n+2*(-1)^n, -6*2^n+6*3^n, -8*2^n+9*3^n]]$

Autre méthode :
On calcule le polynômr caractéristique de `A`.
On tape :
`pcar(A)`
On obtient :
`[1,-5,5,5,-6]`
`r2e([1,-5,5,5,-6],X)=(((X-5)*X+5)*X+5)*X-6`
Donc le polynôme caractéristique de `A` est :
$X^4-5*X^3+5*X^2+5*X-6$
On tape :
`factor(r2e([1,-5,5,5,-6],X))`
On obtient :
`(X-2)*(X-3)*(X+1)*(X-1)`
La matrice `A` a donc 4 valeurs propres distinctes, et on a :
$A^4-5*A^3+5*A^2+5*A-6*idn(4)=0$
Donc :
$A^4=5*A^3-5*A^2-5*A+6*idn(4)$
$A^{n+4}=5*A^{n+3}-5*A^{n+2}-5*A^{n+1}+6*A^n$
On va donc étudier les suites récurrentes vérifiant :
(1) $u_{n+4}=5*u_{n+3}-5*u_{n+2}-5*u_{n+1}+6*u_n$
en cherchant les progressions géométriques de raison r qui vérifient (1). La raison est donc solution de :
$X^4-5*X^3+5*X^2+5*X-6=(X-2)*(X-3)*(X+1)*(X-1)=0$
c'est à dire on peut avoir :
$r=-1$ ou $r=1$ ou $r=2$ ou $r=3$
donc comme une suite récurrente qui vérifie (1) est entièrement définie par ses 4 premiers termes : u_0, u_1, u_2, u_3, si il existe a, b, c, d tel que :
$u_0=a*(-1)^0+b*1^0+c*2^0+d*3^0=a+b+c+d$
$u_1=a*(-1)^1+b*1^1+c*2^1+d*3^1=-a+b+2*c+3*d$
$u_2=a*(-1)^2+b*1^2+c*2^2+d*3^2=a+b+4*c+9*d$
$u_3=a*(-1)^3+b*1^3+c*2^3+d*3^3=-a+b+8*c+27*d$
on aura :
$u_n=a*(-1)^n+b*1^n+c*2^n+d*3^n$
On tape :
```
g(u0,u1,u2,u3):=linsolve([a+b+c+d=u0,-a+b+2*c+3*d=u1,
     a+b+4*c+9*d=u2,-a+b+8*c+27*d=u3],[a,b,c,d])
```
Puis :
`g(u0,u1,u2,u3)`
On obtient :
```
[1/4*u0+-11/24*u1+1/4*u2+1/-24*u3,3/2*u0+1/4*u1-u2+1/4*u3,
-u0-1/-3*u1+u2-1/3*u3,1/4*u0+1/-8*u1+1/-4*u2+1/8*u3]
```
On tape :
```
normal((-1)^n*(1/4*idn(4)+-11/24*A+1/4*A^2+1/-24*A^3)+
3/2*idn(4)+1/4*A-A^2+1/4*A^3+2^n*(-idn(4)-1/-3*A+A^2-
1/3*A^3)+3^n*(1/4*idn(4)+1/-8*A+1/-4*A^2+1/8*A^3))
```
ou on tape :

```
vn:=[(-1)^n,1,2^n,3^n]
```
puis,
```
vn*g(idn(4),A,A^2,A^3)
```
On obtient :
$[[-3*(-1)^n+4, -2*(-1)^n+2, 0, 0], [6*(-1)^n-6, 4*(-1)^n-3, 0, 0],$
$[-6*(-1)^n+4*3^n+2, -4*(-1)^n+3*2^n+1, 9*2^n-8*3^n, 12*2^n-12*3^n],$
$[3*(-1)^n-3*3^n, 2*(-1)^n-2*2^n, -6*2^n+6*3^n, -8*2^n+9*3^n]]$

15.5 Rang d'une matrice

Soit $a \in R$, on considère la matrice :

$$M_a = \begin{bmatrix} 2a-1 & a & 2a-1 \\ a^2+a-2 & a^2-1 & a-1 \\ a^2+a-1 & a^2+a-1 & a \end{bmatrix}$$

1/ Pour quelles valeurs de a, la matrice M_a est-elle inversible ?
Quel est le rang de M_a ?
2/ Calculer l'inverse de M_a lorsque cela est possible.

1/ On cherche si `Ma` est inversible en calculant son déterminant.
On tape :
```
Ma:=[[2a-1,a,2a-1],[a^2+a-2,a^2-1,a-1],[a^2+a-1,a^2+a-1,a]]
d:=det(Ma)
```
On obtient :
```
2*a^4+-2*a^3+-2*a^2+2*a
```
On tape :
```
factor(d)
```
On obtient :
```
2*(a+1)*a*(a-1)^2
```
Donc M_a est inversible si est seulement si $a \in R - \{-1, 0, 1\}$.
Donc lorsque $a \in R - \{-1, 0, 1\}$ le rang de M_a est 3.
Pour $a = -1$ on tape :
```
A:=subst(Ma,a=-1)
```
On obtient :
```
[[-3,-1,-3],[-2,0,-2],[-1,-1,-1]]
```
On tape :
```
rank(A)
```
On obtient :
```
2
```
en effet :
```
det([[-3,-1],[-2,0]])!=0
```
Pour $a = 0$, on tape :
```
B:=subst(Ma,a=0)
```
On obtient :
```
[[-1,0,-1],[-2,-1,-1],[-1,-1,0]]
```
On tape :
```
rank(B)
```

On obtient :
`2`
en effet :
`det([[-1,0],[-2,-1]])!=0`
Pour $a = 1$ on tape :
`C:=subst(Ma,a=1)`
On obtient :
`[[1,1,1],[0,0,0],[1,1,1]]`
On tape :
`rank(C)`
On obtient :
`1`
en effet :
Les trois colonnes sont identiques et non nulles.
2/ On tape :
`normal(inv(Ma))`
On obtient :

```
[[1/(2*a^3-2*a),(2*a^2+2*a-1)/(2*a^3-2*a),
(-2*a^2+1)/(2*a^3-2*a)],[1/(-2*a^2+2*a),
(-2*a+1)/(2*a^2-2*a),(2*a-1)/(2*a^2-2*a)],
[(a^2+a-1)/(2*a^3-2*a),(-a^2-a+1)/(2*a^3-2*a),
(a^2-a-1)/(2*a^3-2*a)]]
```

15.6 Changement de base

Soit u l'endomorphisme de R^4 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice B de u dans la base :
$E1 = e1$
$E2 = e1 + e2$
$E3 = e1 + e2 + e3$
$E4 = e1 + e2 + e3 + e4$

Correction

On tape :
`A:=[[1,a,0,0],[0,1,a,0],[0,0,1,a],[0,0,0,1]]`
On définit la matrice de passage P en mettant en colonne les coordonnées des nouveaux vecteurs de base :
`P:=[[1,1,1,1],[0,1,1,1],[0,0,1,1],[0,0,0,1]]`
On définit la matrice de u dans la nouvelle base :
`B:=normal(changebase(A,P))`
On obtient :
`[[1,a,0,0],[0,1,a,0],[0,0,1,a],[0,0,0,1]]`
On a :
$B = \text{inv}(P) * A * P$

Vérifions :
On tape :
```
E1:=[1,0,0,0]
E2:=[1,1,0,0]
E3:=[1,1,1,0]
E4:=[1,1,1,1]
```
On tape :
`A*E1` On obtient :
`[1,0,0,0]`
On tape :
`A*E2`
On obtient :
`[1,1,0,0]`
On tape :
`A*E3`
On obtient :
`[1,1,1,0]`
On tape :
`A*E4`
On obtient :
`[1,1,1,1]`

15.7 Résolution d'un système

Résoudre le système :
$x+2y-z+2t=1$
$3x-y+z+2t=3$
$x+3y+3z-t=1$
$5x+5y-z+7t=a$
Pour quelles valeurs de a ce système admet-il des solutions entières ?

Correction
On tape :
```
linsolve([x+2y-z+2t=1,3x-y+z+2t=3,x+3y+3z-t=1,5x+5y-z+7t=a],
[x,y,z,t])
```
On obtient :
`[-31/24*a+179/24,-1/6*a+5/6,25/24*a+(-125)/24,4/3*a+(-20)/3]`
Pour que z soit entier il faut et il suffit que :
$a-5$ soit un mulitple de 24.
Si $a=5+k*24$, x, y, t sont alors aussi des entiers. On tape :
```
linsolve([x+2y-z+2t=1,3x-y+z+2t=3,x+3y+3z-t=1,5x+5y-z+7t=5+24*k],
[x,y,z,t])
```
On obtient :
`[-31*k+1,-(4*k),25*k,32*k]`

15.8 Forme bilinéaire

Soient E l'espace vectoriel réel des polynômes de degré leq 2 et à coefficients réels et f la forme bilinéaire symétrique définie par :
$f(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x), Q(x)dx$
1/ Déterminer la matrice de f et montrer que f est positive et non dégénérée.
2/ Déterminer l'endomorphisme adjoint à la dérivation.

Correction
La base canonique de E est : $1, x, x^2$.
Pour déterminer la matrice A de f on va calculer : $f(e_j, e_k)$.
On tape :
`integrate(1,x,-1,1)`
On obtient :
`2`
On tape :
`integrate(x,x,-1,1)`
On obtient :
`0`
On tape :
`integrate(x^2,x,-1,1)`
On obtient :
`2/3`
On tape :
`integrate(x^3,x,-1,1)`
On obtient :
`0`
On tape :
`integrate(x^4,x,-1,1)`
On obtient :
`2/5`

Donc on a :
$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$
On tape pour avoir $f(c, b, a)$:
`normal(integrate((a*x^2+b*x+c)*(a*x^2+b*x+c),x,-1,1))`
On obtient :
$(2 * \mathtt{a}^2)/5 + (4 * \mathtt{a} * \mathtt{c})/3 + (2 * \mathtt{b}^2)/3 + 2 * \mathtt{c}^2$
On tape :
`gauss(2/5*a^2+4/3*a*c+2/3*b^2+2*^2,[c,b,a])`
On obtient :
$(2/3 * \mathtt{a} + 2 * \mathtt{c})^2/2 + (2/3 * \mathtt{b})^2/(2/3) + 8 * \mathtt{a}^2/45$
on a donc :
$\mathtt{f}(\mathtt{c}, \mathtt{b}, \mathtt{a}) = (2/3 * \mathtt{a} + 2 * \mathtt{c})^2/2 + (2/3 * \mathtt{b})^2/(2/3) + 8 * \mathtt{a}^2/45$
donc `f(c,b,a)>=0` et on a :
`f(c,b,a)=0` si et seulement si `a=b=c=0`.

2/ La dérivation d est une application linéaire de E dans E matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'adjoint d^* de d vérifie $f(d^*(P), Q) = f(P, d(Q))$ ou encore si C est la matrice de d^* :
${}^tP * A * B * Q = {}^tP * {}^tC * A * Q$
$A * B = {}^tC * A$ ou ${}^tB * {}^tA = {}^tA * C$
donc :
$C = ({}^tA)^{-1} * {}^tB * {}^tA$
On tape :
```
A:=[[2,0,2/3],[0,2/3,0],[2/3,0,2/5]]
B:=[[0,1,0],[0,0,2],[0,0,0]]
C:=normal(inv(tran(A))*tran(B)*tran(A))
```
On obtient :
```
[[0,-5/2,0],[3,0,1],[0,15/2,0]]
```
donc

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

donc
$d^*(a * x^2 + b * x + c) = -\frac{5}{2} * b + (3 * c + a) * x + \frac{15}{2} * b * x^2$

15.9 Exercices utilisant le PGCD

15.9.1 L'énoncé 1

Calculer le pgcd modulo 3 et le pgcd modulo 5 de $x^{202} + x^{101} + 1$ et de sa derivée. Que peut-on en conclure ?
La solution
On tape :
```
gcd((x^202+x^101+1)%3,(x^202+x^101+1)'%3)
```
On obtient :
```
(1 % 3)*x^101-1 % 3
```
On tape :
```
gcd((x^202+x^101+1)%5,(x^202+x^101+1)'%5)
```
On obtient :
```
1 % 5
```
Donc $x^{202} + x^{101} + 1$ et sa derivée sont premiers entre eux donc $x^{202} + x^{101} + 1$ n'a pas de racine multiple (ce que l'on pouvait prévoir puisqu l'on peut calculer ls racines de $x^{202} + x^{101} + 1$

15.9.2 L'énoncé 2

Soient $P = 51x^3 - 35x^2 + 39x - 115$ et $Q = 17x^4 - 23x^3 + 34x^2 + 39x - 115$
Calculer le pgcd modulo 5, le pgcd modulo 7 et le pgcd modulo 11 de P et Q. En déduire le pgcd de P et Q par le théoréme des restes chinois.
Pourquoi ne doit-on pas utiliser modulo 17 ?

La solution
On tape :
`gcd((51x^3-35x^2+39x-115)%5,(17x^4-23x^3+34x^2+39x-115)'%5)`
On obtient :
`(1 % 5)*x^2+(1 % 5)*x`
Le poolynôme obtenu est de degré 2 car 5 est un diviseur des termes constants de P et Q.
On tape :
`gcd((51x^3-35x^2+39x-115)%7,(17x^4-23x^3+34x^2+39x-115)'%7)`
On obtient :
`(1 % 7)*x-3 % 7`
On tape :
`gcd((51x^3-35x^2+39x-115)%11,(17x^4-23x^3+34x^2+39x-115)'%11)`
On obtient :
`(1 % 11)*x-2 % 11`
On tape :
`ichinrem((1 % 7)*x-3 % 7,(1 % 11)*x-2 % 11))`
On obtient :
`(1 % 77)*x-24 % 77`
On tape (on cherche le pgcd des coefficients dominants) :
`gcd(51,17)`
On obtient :
`17`
On tape :
`17*(-24)%77`
On obtient :
`-23 % 77`
Donc le pgcd de $P = 51x^3 - 35x^2 + 39x - 115$ et $Q = 17x^4 - 23x^3 + 34x^2 + 39x - 115$ est $17x - 23$.
On vérifie et on tape :
`gcd(51x^3-35x^2+39x-115,17x^4-23x^3+34x^2+39x-115)`
On obtient :
`17*x-23`
On ne doit pas essayer modulo 17 car 17 est un diviseur des coefficients dominants.

15.9.3 L'énoncé 3 utilisant l'identité de Bézout

En utilisant l'identité de Bézout, décomposer en éléments simples :
$F_1(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$, $F_2(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^2(x+2)}$
On donnera le détail des calculs.

Avec `Xcas`
On tape :
`egcd(x^2-1,x+2)`
On obtient :
`[1,-x+2,3]`
Donc :

$F_1(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)} = \dfrac{1}{3(x+2)} + \dfrac{-x+2}{3(x^2-1)}$
$F_2(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^2(x+2)} = \dfrac{1}{3(x+2)(x^2-1)} + \dfrac{-x+2}{3(x^2-1)^2}$
$F_2(x) = \dfrac{1}{3}F_1(x) + \dfrac{-x+2}{3(x^2-1)^2}$
Il reste donc à décomposer :
$F_3(x) = \dfrac{-x+2}{3(x^2-1)}$ et $F_4(x) = \dfrac{-x+2}{3(x^2-1)^2}$

Décomposition de $F_3(x) = \dfrac{-x+2}{3(x^2-1)}$

On tape :
```
abcuv(x-1,x+1,-x+2)
```
On obtient :
```
[(-3)/2,1/2]
```
Donc
$F_3(x) = \dfrac{-x+2}{3(x-1)(x+1)} = \dfrac{-1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{6(x-1)}$

Décomposition de $F_1(x)$
$F_1(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)} = \dfrac{1}{3(x+2)} + \dfrac{-1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{6(x-1)}$

Décomposition de $F_4(x) = \dfrac{-x+2}{3(x^2-1)^2}$

On tape :
```
abcuv((x-1)^2,(x+1)^2,(-x+2)/3)
```
On obtient :
```
[(2*x+5)/12,(-2*x+3)/12]
```
Donc
$F_4(x) = \dfrac{-x+2}{3(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{2x+5}{12(x+1)^2} + \dfrac{-2x+3}{12(x-1)^2}$
$F_4(x) = \dfrac{2x+2+3}{12(x+1)^2} + \dfrac{-2x+2+1}{12(x-1)^2}$
Donc
$F_4(x) = \dfrac{1}{6(x+1)} + \dfrac{1}{4(x+1)^2} + \dfrac{-1}{6(x-1)} + \dfrac{1}{12(x-1)^2}$

Décomposition de $F_2(x)$
$F_2(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^2(x+2)} = \dfrac{1}{3}F_1(x) + F_4(x) =$
$\dfrac{1}{9(x+2)} + \dfrac{-1}{6(x+1)} + \dfrac{1}{18(x-1)} + \dfrac{1}{6(x+1)} + \dfrac{1}{4(x+1)^2} + \dfrac{-1}{6(x-1)} + \dfrac{1}{12(x-1)^2}$
Donc
$F_2(x) = \dfrac{1}{9(x+2)} + \dfrac{1}{4(x+1)^2} + \dfrac{1}{9(x-1)} + \dfrac{1}{12(x-1)^2}$

15.10 Exercices utilisant le résultant

15.10.1 L'énoncé 1

Pour quelles valeurs de p le polynôme $x^5 + x^3 - p * x + 1$ admet-il une racine multiple ?

La solution
On cherche les valeurs de p pour lesquels le polynôme $x^5 + x^3 - p * x + 1$ et sa derivée sont premiers entre eux.
On tape :
`factor(resultant(x^5+x^3-p*x+1,(x^5+x^3-p*x+1)'))`
On obtient :
`-(16*p^2+40*p+61)*(16*p^3-32*p^2+20*p-53)`
On tape, en mode réel :
`solve(-(16*p^2+40*p+61),p),solve((16*p^3-32*p^2+20*p-53),p)`
On obtient :
`[],[2.13943295467]`
Donc pour $p \simeq 2.13943295467$ le polynôme $x^5 + x^3 - p * x + 1$ admet une racine double. En mode complexe :
`solve(-(16*p^2+40*p+61),p),solve((16*p^3-32*p^2+20*p-53),p)`
On obtient :
```
[(-5+6*i)/4,(-5-6*i)/4],[-0.0697164773345+1.24235545275*i,
-0.0697164773345-1.24235545275*i,2.13943295467]
```
On vérifie avec `Xcas`, on tape en mode complexe :
`solve([x^5+x^3-p*x+1,5x^4+3x^2-p],[x,p])`
On obtient :

```
[[(-1-i)/2,(-5+6*i)/4],[(-1+i)/2,(-5-6*i)/4],
[0.17610056437-0.860716618624*i,-0.0697164773345+1.24235545275*i],
[0.17610056437+0.860716618624*i,-0.0697164773345-1.24235545275*i],
[0.647798871261,2.13943295467]]
```

15.10.2 L'énoncé 2

Résoudre le système d'inconnues a, b, c :

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 & = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 & = 6 \\ a + b + 2c & = 4 \end{cases}$$

On éliminera les variables grâce au résultant.
La solution
On remarque que si a, b, c est solution alors b, a, c est aussi solution (symétrie des variables a et b). De plus $a \neq b$ car si $a = b$ on aurait $b = a$ et $c = 2 - a$ et $a^2 + b^2 + c^2 - 6 = 3a^2 - 4a - 2 = 0$ qui n'a pas les mêmes solutions que $a^3 + b^3 + c^3 - 8 = a^3 + 6a^2 - 12a = a(a^2 + 6a - 12) = 0$
On élimine a entre la première et la troisième équation, on tape :
`eq1:=resultant(a^3+b^3+c^3-8,a+b+2c-4,a)`
On obtient :
`6*b^2*c-12*b^2+12*b*c^2-48*b*c+48*b+7*c^3-48*c^2+96*c-56`
On élimine a entre la deuxième et la troisième équation, on tape :
`eq2:=resultant(a^2+b^2+c^2-6,a+b+2c-4,a)`
On obtient :
`2*b^2+4*b*c-8*b+5*c^2-16*c+10`
On élimine b entre les 2 résultats obtenus, on tape :

```
factor(resultant(eq1,eq2,b))
```
On obtient :
```
16*(c-2)^2*(c+(sqrt(33)-7)/8)^2*(4*c+(-(sqrt(33))-7)/2)^2
```
Donc les valeurs possibles de c sont :
$2, \frac{-\sqrt{33}+7}{8}, \frac{\sqrt{33}+7}{8}$
On tape car `eq2` est de degré 2 par rapport à `b` :
```
c:=2;
solve(eq2,b)
```
On obtient :
```
[-1,1]
```
Ou on tape car `eq1` et `eq2` ont une racine commune :
```
c:=2;
gcd(eq1,eq2)
```
On obtient :
```
2*b^2-2
```
et on retrouve ainsi les valeurs `[-1,1]`
On tape :
```
b:=-1;c:=2;a:=4-b-2c
```
On obtient :
```
-1,2,1
```
Cela donne comme solution :
$a, b, c = 1, -1, 2$ et par symétrie $a, b, c = -1, 1, 2$.
On tape pour vérifier :
```
simplify(a^3+b^3+c^3-8,a^2+b^2+c^2-6,a+b+2c-4)
```
On obtient :
```
0,0,0
```
On tape :
```
c:=(-sqrt(33)+7)/8;solve(eq2,b)
```
On obtient :
```
(-(sqrt(33))+7)/8,list[]
```
Il n'y a donc pas de solution réelle si $c = \frac{-\sqrt{33}+7}{8}$
Si `Complexe` est coché dans la configuration du CAS, on obtient :
```
[1/64*(8*sqrt(33)+72+sqrt(704*sqrt(33)-2368)*(i)),
1/64*(8*sqrt(33)+72-sqrt(704*sqrt(33)-2368)*(i))]
```
On tape :
```
b:=1/64*(8*sqrt(33)+72+sqrt(704*sqrt(33)-2368)*(i))
a:=1/64*(8*sqrt(33)+72-sqrt(704*sqrt(33)-2368)*(i))
```
Cela donne comme solution a, b, c :
$$\frac{-\sqrt{33}+9}{8} - i\frac{\sqrt{704\sqrt{33}-2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+9}{8} + i\frac{\sqrt{704\sqrt{33}-2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+7}{8}$$
et par symétrie
$$\frac{-\sqrt{33}+9}{8} + i\frac{\sqrt{704\sqrt{33}-2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+9}{8} - i\frac{\sqrt{704\sqrt{33}-2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+7}{8}$$
On tape pour vérifier :
```
simplify(a^3+b^3+c^3-8,a^2+b^2+c^2-6,a+b+2c-4)
```
On obtient :
```
0,0,0
```

On tape :
```
c:=(+sqrt(33)+7)/8;
solve(eq2,b)
```
On obtient :
```
[1/64*(-8*sqrt(33)+72-(sqrt(704*sqrt(33)+2368))),
1/64*(-8*sqrt(33)+72+sqrt(704*sqrt(33)+2368))]
```
On tape :
```
b:=1/8*(-sqrt(33)+9)-1/64*(sqrt(704*sqrt(33)+2368));
a:=4-b-2c
```
On obtient :
```
4-((-(sqrt(33))+9)/8)+(sqrt(704*sqrt(33)+2368))/64-
((2*(sqrt(33)+7))/8)
```
On tape :
```
simplify(4-((-(sqrt(33))+9)/8)-((2*(sqrt(33)+7))/8))+
(sqrt(704*sqrt(33)+2368))/64
```
On obtient comme valeur simplifiée de a :
```
(-(sqrt(33))+9)/8+(sqrt(704*sqrt(33)+2368))/64
```
Cela donne comme solution a, b, c :
$$\frac{-\sqrt{33}+9}{8}+\frac{\sqrt{704\sqrt{33}+2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+9}{8}-\frac{\sqrt{704\sqrt{33}+2368}}{64}, \frac{\sqrt{33}+7}{8}$$
et par symétrie
$$\frac{-\sqrt{33}+9}{8}-\frac{\sqrt{704\sqrt{33}+2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+9}{8}+\frac{\sqrt{704\sqrt{33}+2368}}{64}, \frac{\sqrt{33}+7}{8}$$
On tape pour vérifier :
```
simplify(a^3+b^3+c^3-8,a^2+b^2+c^2-6,a+b+2c-4)
```
On obtient :
```
0,0,0
```
Donc les solutions sont :
$a, b, c = 1, -1, 2$
$a, b, c = -1, 1, 2$
$$a, b, c = \frac{-\sqrt{33}+9}{8} - i\frac{\sqrt{704\sqrt{33}-2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+9}{8} + i\frac{\sqrt{704\sqrt{33}-2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+7}{8}$$
$$a, b, c = \frac{-\sqrt{33}+9}{8} + i\frac{\sqrt{704\sqrt{33}-2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+9}{8} - i\frac{\sqrt{704\sqrt{33}-2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+7}{8}$$
$$a, b, c = \frac{-\sqrt{33}+9}{8} + \frac{\sqrt{704\sqrt{33}+2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+9}{8} - \frac{\sqrt{704\sqrt{33}+2368}}{64}, \frac{\sqrt{33}+7}{8}$$
$$a, b, c = \frac{-\sqrt{33}+9}{8} - \frac{\sqrt{704\sqrt{33}+2368}}{64}, \frac{-\sqrt{33}+9}{8} + \frac{\sqrt{704\sqrt{33}+2368}}{64}, \frac{\sqrt{33}+7}{8}$$
On vérifie avec `Xcas`, on tape :
```
solve([a^3+b^3+c^3=8,a^2+b^2+c^2=6,a+b+2c=4],[a,b,c])
```
On obtient :
```
[[-1,1,2],[1,-1,2],
[1/64*(-8*sqrt(33)-(sqrt(704*sqrt(33)+2368))+72),
(-8*sqrt(33)+72+sqrt(704*sqrt(33)+2368))/64,(7+sqrt(33))/8],
[1/64*(-8*sqrt(33)+sqrt(704*sqrt(33)+2368)+72),
(-8*sqrt(33)+72-(sqrt(704*sqrt(33)+2368)))/64,(7+sqrt(33))/8],
[1/64*(8*sqrt(33)+(-i)*sqrt(704*sqrt(33)-2368)+72),
(8*sqrt(33)+72+sqrt(704*sqrt(33)-2368)*(i))/64,(7-(sqrt(33)))/8],
```

```
[1/64*(8*sqrt(33)+(i)*sqrt(704*sqrt(33)-2368)+72),
(8*sqrt(33)+72-sqrt(704*sqrt(33)-2368)*(i))/64,(7-(sqrt(33)))/8]]
```

15.10.3 L'énoncé 3 : résultant et géométrie

On cherche une relation entre les affixes a, b, c, d de 4 points distincts A, B, C, D qui traduise le fait que ces 4 points sont cocycliques. Soient le cercle de centre O et de rayon R et 4 points A, B, C, D sur ce cercle d'arguments respectifs ta, tb, tc, td.
On pose :
$t_0 = \tan(ta/2), t_1 = \tan(tb/2), t_2 = \tan(tc/2), t_3 = \tan(td/2)$
$x_1 + iy_1 = b - a$, $x_2 + iy_2 = c - a$,$x_3 + iy_3 = d - a$.

1. Calculer x_1, y_1 en fonction de R, t_0, t_1(resp x_2, y_2 en fonction de R, t_0, t_2 et x_3, y_3 en fonction de R, t_0, t_3).
2. Calculer les 6 polynômes (fonction de $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, R, t_0, t_1, t_2, t_3$) qui doivent s'annuler pour que les 4 points. A, B, C, D soient cocycliques
3. Éliminer successivement b, c, d, R et t_0.
4. Vérifier que la relation trouvée est équivalente à la nullité de la partie imaginaire du birapport de a, b, c, d : $\mathrm{im}\dfrac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)}$
5. Montrer géométriquement que si 4 points distincts A, B, C, D d'affixes a, b, c, d sont cocycliques alors $\mathrm{im}\dfrac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)} = 0$.

15.10.4 La solution

1. On a $x_1 + iy_1 = b - a = R(\cos(t-1) - \cos(t_0) + i(\sin(t_1) - \sin(t_0)))$.
   Donc
   $x_1 - R(\cos(tb) - \cos(ta)) = x1 - R(\dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2} - \dfrac{1-t_0^2}{1+t_0^2}) = 0$
   $y_1 - R(\sin(tb) - \sin(ta)) = y1 - R(\dfrac{2t_1}{1+t_1^2} - \dfrac{2t_0}{1+t_0^2}) = 0$
   $x_2 - R(\cos(tc) - \cos(ta)) = x2 - R(\dfrac{1-t_2^2}{1+t_2^2} - \dfrac{1-t_0^2}{1+t_0^2}) = 0$
   $y_2 - R(\sin(tc) - \sin(ta)) = y2 - R(\dfrac{2t_2}{1+t_2^2} - \dfrac{2t_0}{1+t_0^2}) = 0$
   $x_3 - R(\cos(td) - \cos(ta)) = x3 - R(\dfrac{1-t_3^2}{1+t_3^2} - \dfrac{1-t_0^2}{1+t_0^2}) = 0$
   $y_3 - R(\sin(td) - \sin(ta)) = y3 - R(\dfrac{2t_3}{1+t_3^2} - \dfrac{2t_0}{1+t_0^2}) = 0$
2. Après avoir réduit au même dénominateur ces équations, on obtient 6 fractions rationnelles. Les numérateurs de ces fractions simplifiées donnent les 6 polynômes (fonction de $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, R, t_0, t_1, t_2, t_3$) qui doivent s'annuler pour que les 4 points. A, B, C, D soient cocycliques.
   On tape :
   `eq1:=numer(x1-R*(1-t1^2)/(1+t1^2)+R*(1-t0^2)/(1+t0^2))`
   On obtient :
   `x1*t1^2*t0^2+x1*t1^2+x1*t0^2+x1+2*R*t1^2-2*R*t0^2`
   On tape :

```
eq4:=numer(y1-R*(2*t1)/(1+t1^2)+R*(2*t0)/(1+t0^2))
```
On obtient :
```
y1*t1^2*t0^2+y1*t1^2+y1*t0^2+y1+2*R*t1^2*t0-2*R*t1*t0^2-
2*R*t1+2*R*t0
```
Donc on a 6 polynômes qui s'annulent lorsque A, B, C, D sont cocycliques.
On tape :
```
eq1:=x1*t1^2*t0^2+x1*t1^2+x1*t0^2+x1+2*R*t1^2-2*R*t0^2
eq2:=x2*t2^2*t0^2+x2*t2^2+x2*t0^2+x2+2*R*t2^2-2*R*t0^2
eq3:=x3*t3^2*t0^2+x3*t3^2+x3*t0^2+x3+2*R*t3^2-2*R*t0^2
eq4:=y1*t1^2*t0^2+y1*t1^2+y1*t0^2+y1+2*R*t1^2*t0-
2*R*t1*t0^2-2*R*t1+2*R*t0
eq5:=y2*t2^2*t0^2+y2*t2^2+y2*t0^2+y2+2*R*t2^2*t0-
2*R*t2*t0^2-2*R*t2+2*R*t0
eq6:=y3*t3^2*t0^2+y3*t3^2+y3*t0^2+y3+2*R*t3^2*t0-
2*R*t3*t0^2-2*R*t3+2*R*t0
```

3. On élimine $t1$ de $eq1$ et $eq4$.
On tape :
```
eq7:=resultant(eq1,eq4,t1)
```
On élimine $t2$ de $eq2$ et $eq5$.
On tape :
```
eq8:=resultant(eq2,eq5,t2)
```
On élimine $t3$ de $eq3$ et $eq6$.
On tape :
```
eq9:=resultant(eq3,eq6,t3)
```
On cherche le pgcd de `eq7, eq8, eq9`. On tape :
```
D:=factor(gcd(eq7,eq8,eq9))
```
On obtient :
```
4*(t0^2+1)^3*R^2
```
$4*(t0^2+1)^3*R^2$ n'est jamais nul donc on tape :
```
eq7:=eq7/D
```
On obtient :
```
x1^2*t0^2+x1^2-2*x1*t0^2*R+2*x1*R+t0^2*y1^2+4*t0*R*y1+y1^2
```
On tape :
```
eq8:=eq8/D
```
On obtient :
```
x2^2*t0^2+x2^2-2*x2*t0^2*R+2*x2*R+t0^2*y2^2+4*t0*R*y2+y2^2
```
On tape :
```
eq9:=eq9/D
```
On obtient :
```
x3^2*t0^2+x3^2-2*x3*t0^2*R+2*x3*R+t0^2*y3^2+4*t0*R*y3+y3^2
```
On élimine R de $eq8$ et $eq7$.
On tape :
```
eq10:=resultant(eq8,eq7,R)
```
On élimine R de $eq8$ et $eq9$.
On tape :
```
eq11:=resultant(eq8,eq9,R)
```
On cherche le pgcd de `eq10, eq11`. On tape :
```
DD:=gcd(eq10,eq11)
```

On obtient :
`2*t0^2+2`
$2 * t0^2 + 2$ n'est jamais nul donc on tape :
On tape :
```
eq10:=eq10/DD
eq11:=eq11/DD
```
On élimine t_0 de $eq10$ et $eq11$.
```
factor(resultant(eq10,eq11,t0))
```
On obtient :
```
(-4*(y2^2+x2^2)^2)*(x1^2*x2*y3-x1^2*x3*y2-x1*x2^2*y3+
x1*y3^2*y2-x1*y3*y2^2+x1*x3^2*y2+x2^2*x3*y1-x2*y3^2*y1+
x2*y3*y1^2-x2*x3^2*y1+x3*y2^2*y1-x3*y2*y1^2)^2
```

4. La nullité du résultat précédent donne la relation que doivent vérfier $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ pour que les 4 points soient cocycliques On tape :
```
eq12:=x1^2*x2*y3-x1^2*x3*y2-x1*x2^2*y3+x1*y3^2*y2-x1*y3*y2^2+
x1*x3^2*y2+x2^2*x3*y1-x2*y3^2*y1+x2*y3*y1^2-x2*x3^2*y1+
x3*y2^2*y1-x3*y2*y1^2
```
Les affixes a, b, c, d des 4 points distincts A, B, C, D vérifient par définition :
$x_1 + iy_1 = b - a$, $x_2 + iy_2 = c - a$,$x_3 + iy_3 = d - a$
On tape :
```
eq13:=numer(im((x1+i*y1)/(x2+i*y2)*(x3-x2+i*(y3-y2))/
(x3-x1+i*(y3-y1))))
```
On tape :
```
simplify(eq12/eq13)
```
On obtient :
`-1`
Donc les 2 relations `eq12=0` et `eq13=0` sont donc équivalentes.

5. On sait que :
Les points distincts A, B, C, D d'affixes a, b, c, d sont cocycliques si et seulement si $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB} + k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$).
$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$=`arg`($\frac{b-a}{c-a}$)
$\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}$=`arg`($\frac{b-d}{c-d}$)
Donc `arg`($\dfrac{b-a}{c-a} * \dfrac{c-d}{b-d} = k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$).
Donc `im`($\dfrac{b-a}{c-a} * \dfrac{c-d}{b-d}$ =`im`($\dfrac{a-b}{a-c} * \dfrac{d-c}{d-b} = 0$ i.e. $\alpha = \dfrac{a-b}{a-c} * \dfrac{d-c}{d-b} \in \mathbb{R}$.
On peut même dire si $\alpha > 0$ A et D sont sur le même arc BC et si $\alpha < 0$ A et D ne sont pas sur le même arc BC.

Chapitre 16

Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

16.1 Calcul pour $b \neq 0$ de $J(b) = \int_0^{2\pi} \tan(t+ib)dt$

16.1.1 L'énoncé

Soit a un nombre réel positif non nul différent de 1.
On considère la fonction :

$$f(z) = \frac{z^2 - a^2}{z(z^2+a^2)}$$

1. Calculer $I(a) = \displaystyle\int_{\partial D(0,1)} f(z)dz$
2. Déterminer les pôles de la fonction $t(z) = \tan(z)$ et en déduire que si $b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$ l'intégrale $J(b) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \tan(t+ib)dt$ existe.
3. Exprimer $\tan(t+ib)$ à l'aide de $\dfrac{e^{2it} - a^2}{e^{2it} + a^2}$ pour un a convenable.
   En déduire la valeur de $J(b)$ pour $b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$.

16.1.2 La solution

1. On cherche la valeur des résidus de f en $z = 0$, $z = ia$, $z = -ia$.
   On tape :
   ```
   f(z,a):=(z^2-a^2)/(z*(z^2+a^2))
   series(f(z,a),z=0,1)
   ```
   On obtient :
   ```
   -1/z+2*1/(a^2)*z+z^2*order_size(z)
   ```
   On tape :
   ```
   series(f(z,a),z=i*a,1)
   ```
   On obtient :
   ```
   (z-(i)*a)^-1+(i)/(2*a)-3*1/(4*a^2)*(z-(i)*a)+
   (-7*i)*1/(8*a^3)*(z-(i)*a)^2+(z-(i)*a)^3*order_size(z-(i)*a)
   ```
   On tape :
   ```
   series(f(z,a),z=-i*a,1)
   ```
   On obtient :

`(z-(-i)*a)^-1+(-i)/(2*a)-3*1/(4*a^2)*(z-(-i)*a)+`
`(7*i)*1/(8*a^3)*(z-(-i)*a)^2+(z-(-i)*a)^3*order_size(z-(-i)*a)`
Ou on tape :
`residue(f(z,a),z=0)`
On obtient :
`-1`
On tape :
`residue(f(z,a),z=i*a)`
On obtient :
`1`
On tape :
`residue(f(z,a),z=-i*a)`
On obtient :
`1`
Donc :
si $a > 1$ on a $I(a) = -2i\pi$ et si $a < 1$ on a $I(a) = 2i\pi$

2. On tape :
`solve(cos(z)=0,z)`
On obtient :
`[pi/2,(-pi)/2]`
Donc les les pôles de la fonction $t(z) = \tan(z)$ sont $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Donc si $b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$ l'intégrale $J(b) = \int_0^{2\pi} \tan(t + ib)dt$ existe car les pôles de $\tan(z)$ sont en dehors de l'axe réel.

3. On tape pour écrire autrement $\tan(t + i * b)$:
`T:=tan(t+i*b)`
`T:=trig2exp(T)`
On obtient :
`(exp((i)*(t+(i)*b))^2-1)/((i)*(exp((i)*(t+(i)*b))^2+1))`
On tape :
`T:=normal(lin(T))`
On obtient :
`((-i)*exp(-(2*b+(-2*i)*t))+i)/(exp(-(2*b+(-2*i)*t))+1)`
On tape :
`T:=lin(numer(T)*exp(2*b))/lin(denom(T)*exp(2*b))`
On obtient :
`((-i)*exp((2*i)*t)+(i)*exp(2*b))/(exp((2*i)*t)+exp(2*b))`
On pose donc $\exp(b) = a$.
On tape :
`subst(T,exp(2*b)=a^2)`
On obtient :
`((-i)*exp((2*i)*t)+(i)*a^2)/(exp((2*i)*t)+a^2)`
On a donc pour $a = \exp(b)$:
$J(b) = -i * \int_0^{2\pi} \frac{e^{2it} - a^2}{e^{2it} + a^2} dt = -i * \int_0^{2\pi} \frac{e^{2it} - a^2}{e^{i*t}(e^{2it} + a^2)} e^{i*t} dt$
Donc :
$J(b) = -\int_0^{2\pi} f(\exp(i * t), a) * i * \exp(i * t)dt = -\int_{\partial D(0,1)} f(z)dz$
Donc : Si $b > 0$ on a $J(b) = 2i\pi$ et si $b < 0$ on a $J(b) = -2i\pi$.

Remarques
Si on tape directement :
`normal(int(f(e^i*t,a)*i*e^i*t,t=0..2*pi))`
On trouve :
`(-2*i)*a*atan((2*pi*exp(i))/a)*exp(-i)+(2*i)*pi*exp(-i)*exp(i)`
Si on tape directement :
`normal(int(f(exp(i*t),a)*i*exp(i*t),t=0..2*pi))`
On trouve car `Xcas` suppose $a > 1$:
"Searching int of $((-i) * a^2 + (i) * t)/(a^2 * t + t^2)$ where t is on the unit circle, using residues"
`(-2*i)*pi`
On tape maintenant :
```
assume(a>0 and a<1)
normal(int(f(exp(i*t),a)*i*exp(i*t),t=0..2*pi))
```
On obtient :
`(2*i)*pi`

16.2 Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^5} dx$

16.2.1 L'énoncé

1. Soit $a \in \mathbb{C}$.
   Calculer le développement en série de Laurent de $\dfrac{1}{z^5 - a^5}$ en $z = a$ et en déduire le résidu de $\dfrac{1}{z^5 - a^5}$ en $z = a \in \mathbb{C}$
2. En déduire le residu de $f(z) = \dfrac{1}{z^5 + 1}$ en $z = \exp(\dfrac{i\pi}{5})$
3. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z^5 + 1}$ lorsque Γ est le bord (parcouru dans le sens direct) du secteur angulaire de rayon R d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$ et ayant comme côtés les segments $[0, R]$ et $[0, R * \exp(\dfrac{2i\pi}{5})]$
4. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^5} dx$

16.2.2 La solution

1. On tape :
   `series(1/(z^5-a^5),z=a,1)`
   On obtient :
   `1/(5*a^4)*(z-a)^-1+((-2)/a)/(5*a^4)+`
   `2/(a^2)*1/(5*a^4)*(z-a)+(z-a)^2*order_size(z-a)`
   Ou on tape :
   `residue(1/(z^-a^5),z=a)`
   On obtient :
   `1/(5*a^4)`

2. On pose $a = \exp(\frac{i\pi}{5})$ on a alors $a^5 = -1$ donc :
   le résidu de f en a est : $\frac{1}{5 * \exp(\frac{4i\pi}{5})}$
3. D'après le th des résidus on a : $\int_\Gamma \frac{dz}{z^5+1} = \frac{2i\pi}{5 * \exp(\frac{4i\pi}{5})}$
4. Sur l'arc de cercle γ on a $z = R\exp(it)$ avec $t = 0..\frac{2i\pi}{5}$.
   Donc :
   $\int_\gamma \frac{dz}{z^5+1} = iR\int_0^{\frac{2i\pi}{5}} \frac{\exp(it)dt}{R^5\exp(5it)+1}$
   Comme $\frac{1}{R^5\exp(5it)+1} < \frac{1}{R^5-1}$ pour $R > 1$, on en déduit que $\int_\gamma \frac{dz}{z^5+1}$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini.
   Donc :
   $\lim_{R->+\infty}(\int_0^R \frac{dx}{x^5+1} - \int_0^R \frac{\exp(\frac{2i\pi}{5})dx}{x^5+1}) = \frac{2i\pi}{5 * \exp(\frac{4i\pi}{5})}$.
   Soit :
   $lim_{R->+\infty}((1-\exp(\frac{2i\pi}{5}))\int_0^R \frac{dx}{x^5+1}) = \frac{2i\pi}{5*\exp(\frac{4i\pi}{5})}$
   En faisant tendre R vers l'infini on obtient :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^5}dx = \frac{\pi}{5\sin(\frac{\pi}{5})}$$
   Pour le détail des calculs :
   On tape :
   `normal(2*i*pi/5/a^4/(1-a^2))`
   On obtient :
   `((-2*i)*pi)/(5*a^6-5*a^4)`
   comme $a = \exp(\frac{i\pi}{5})$ on a $a^5 = -1$ donc :
   $\frac{-2i\pi}{5(a^6-a^4)} = \frac{-2i\pi}{-5(a+1/a)}$ et $-5(a+1/a) = -10i\sin(\pi/5)$ donc
   $\frac{-10i\pi}{5*a^6-5*a^4} = \frac{\pi}{5\sin(\frac{\pi}{5})}$

16.3 Calcul d'une intégale

On veut calculer pour $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \notin \{0, 1/2, 2\}$ l'intégrale :

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)}$$

La solution
Les pôles de $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-1/a)}$ sont a et $\frac{1}{a}$.
Le résidu de f en $z = a$ vaut $1/(a - \frac{1}{a}) = \frac{a}{a^2-1}$
Le résidu de f en $z = \frac{1}{a}$ vaut $1/(\frac{1}{a} - a) = \frac{a}{1-a^2}$

— Si $|a| < \dfrac{1}{2}$ alors $\dfrac{1}{a}$ se trouve à l'extérieur du disque $D = \{z \in \mathbb{C} |z| < 2\}$.
Donc si $|a| < \dfrac{1}{2}$:
$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)} = 2i\pi * \frac{a}{a^2-1}$

— Si $\dfrac{1}{2} < |a| < 2$ alors a et $\dfrac{1}{a}$ se trouvent à l'intérieur du disque $D = \{z \in \mathbb{C} |z| < 2\}$.
Donc si $\dfrac{1}{2} < |a| < 2$:
$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)} = 2i\pi * (\frac{a}{a^2-1} + \frac{a}{1-a^2}) = 0$

— Si $|a| > 2$ alors $\dfrac{1}{a}$ se trouve à l'intérieur du disque $D = \{z \in \mathbb{C} |z| < 2\}$.
Donc si $|a| > 2$:
$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)} = 2i\pi * \frac{a}{1-a^2} = 0$

Vérifions avec `Xcas`
On tape :
`residue(f(z),z=a)`
On obtient :
`a/(a^2-1)` On tape :
`residue(f(z),z=1/a)`
On obtient :
`-a/(a^2-1)` On pose $z = 2\exp(it)$ et on a :
$I = 2i \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\exp(it)}{(2\exp(it)-a)(2\exp(it)-1/a)}$
On tape :
```
a:=3/2
int(2*i*exp(i*t)/((2*exp(i*t)-a)*(2*exp(i*t)-1/a)),t=0..2*pi)
```
On obtient :
`0`
On tape :
```
a:=1/3
int(2*i*exp(i*t)/((2*exp(i*t)-a)*(2*exp(i*t)-1/a)),t=0..2*pi)
```
On obtient :
`(2*pi*(-3*i))/8`
On a bien $2 * i * \pi/3/(-8/9) = -3 * i\pi/4$
On tape :
```
a:=4
int(2*i*exp(i*t)/((2*exp(i*t)-a)*(2*exp(i*t)-1/a)),t=0..2*pi)
```
On obtient :
`(2*pi*(-4*i))/15`
On a bien $2i\pi * 4/(-15) = -8i\pi/15$

16.4 Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{(\cos(x)-\sin(x))\exp(-x)}{(1+4x^4)^2}dx$

Soit R un réel strictement positif.
On considère le triangle T_R défini par :
$T_R = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{re}(z) \leq R, \;\; -\text{re}(z) \leq \text{im}(z) \leq \text{re}(z)\}$
Soit :
$I(R) = \displaystyle\int_{\partial T_R} \frac{\exp(-z)}{(1-z^4)^2}dz$
Montrer que $\displaystyle\lim_{R->+\infty} I(R)$ existe et calculer cette limite.
En déduire la valeur de :
$I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\cos(x)-\sin(x))\exp(-x)}{(1+4x^4)^2}dx$

La solution
T_R est le triangle OAB de côtés :
$AB = R + iy$ avec $-R \leq y \leq R$,
$OB = x(1+i)$ avec $0 \leq x \leq R$
$OA = x(1-i)$ avec $0 \leq x \leq R$
Cherchons les zéros de $(1-z^4)$, on tape :

```
factor(1-z^4)
```

On obtient :

```
-(z-1)*(z+1)*(z+i)*(z-i)
```

Donc sur T_R, la fonction $f(z) = \dfrac{\exp(-z)}{(1-z^4)^2}$ a un pôle d'ordre 2 en $z = 1$.
0n cherche la valeur du résidu de f en $z = 1$ et on tape :

```
residue(exp(-z)/(1-z^4)^2,z=1)
```

On obtient :

```
-(1/4)*exp(-1)
```

0u bien on tape :

```
h(z):=exp(-z)/((1+z)*(1+z^2))^2
normal(function_diff(h)(1))
```

On obtient :

```
-1/4*exp(-1)
```

Donc :

$$I(R) = -2i\pi\frac{\exp(-1)}{4}$$

Montrons que $\int_{AB} f(z)dz$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$:
Sur AB, on a $z = R + iy$ avec $-R \leq y \leq R$ donc :
$|\displaystyle\int_{AB} f(z)dz| = |\int_{-R}^{R} \frac{\exp(-R)\exp(-iy)}{(1-(R+iy)^4)^2}dy| \leq \frac{2R\exp(-R)}{(R^4-1)^2}$
puisque $|\exp(-R)\exp(-iy)| = \exp(-R)$ et
$|(R+iy)^4 - 1| \geq ||R+iy|^4 - 1| = R^4 - 1$ pour $R > 1$
Donc $|\displaystyle\int_{AB} f(z)dz|$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini.
Calculons :
$\displaystyle\int_{0A} f(z)dz + \int_{B0} f(z)dz = \int_0^R \left(\frac{(1-i)\exp(-x(1-i))}{(1-x^4(1-i)^4)^2} - \frac{(1+i)\exp(-x(1+i))}{(1-x^4(1+i)^4)^2}\right)dx.$
0n tape :

```
(1-i)^4,(1+i)^4
```

On obtient :
`-4,-4`
0n tape :
`factor(exp2trig((1-i)*exp(-x*(1-i))-(1+i)*exp(-x*(1+i))))`
On obtient :
`2*((-i)*cos(x)+(i)*sin(x))*exp(-x)`
Donc
$(1-i)^4 = (1+i)^4 = -4$ et
$(1-i)\exp(-x(1-i)) - (1+i)\exp(-x(1+i)) = 2i\exp(-x)(\sin(x)-\cos(x))$
on a :
$\displaystyle\int_{0A} f(z)dz + \int_{B0} f(z)dz = 2i\int_0^R \frac{\exp(-x)(\sin(x)-\cos(x))}{(1+4x^4)^2}dx$
En conclusion :
$\displaystyle I(R) = -2i\pi\frac{\exp(-1)}{4} = \lim_{R->+\infty} 2i\int_0^R \frac{\exp(-x)(\sin(x)-\cos(x))}{(1+4x^4)^2}dx$
Donc $\displaystyle -2i\pi\frac{\exp(-1)}{4} = -2i\int_0^{+\infty} \frac{(\cos(x)-\sin(x))\exp(-x)}{(1+4x^4)^2}dx$
En conclusion :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos(x)-\sin(x))\exp(-x)}{(1+4x^4)^2}dx = \frac{\pi}{4e}$$

Prolongement
Refaire le même exercice avec $g(z) = \frac{\exp(-z)}{(1-z^4)}$ et
calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos(x)-\sin(x))\exp(-x)}{1+4x^4}dx$
0n cherche la valeur du résidu de g en $z = 1$ et on tape :
`residue(exp(-z)/(1-z^4),z=1)`
On obtient la même valeur que précédement :
`-1/4*exp(-1)`
On déduit de l'exercice précédent que :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos(x)-\sin(x))\exp(-x)}{1+4x^4}dx = \frac{\pi}{4e}$$

Chapitre 17

Les courbes de degré au plus 2.

Ce sont les courbes qui ont comme équation, dans un repère Oxy, $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

17.1 La droite

L'équation cartésienne d'une droite non parallèle à l'axe Oy est $y = a * x + b$.
Avec `Xcas`
Si on veut voir l'influence de a et b on tape dans un écran de géométrie :

```
a:=element(-4..5);
b:=element(-4..2);
droite(y=a*x+b);
```

L'équation cartésienne d'une droite quelconque est $m * x + n * y + p = 0$: son vecteur normal est $m + i * n$ et elle passe par le point $-i * p/n$ si $n \neq 0$ ou par le point $-p/m$ si $m \neq 0$ (on suppose $m * n \neq 0$).
L'équation paramétrique d'une droite passant par le point $A = x_0 + i * y_0$ et parallèle au vecteur $V = u + i * v$ est $x(t) = x_0 + u * t,\ y(t) = y_0 + v * t$ (on suppose $u * v \neq 0$).
Avec `Xcas`
si on veut voir l'influence de A, u et v on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
u:=element(-4..5);
v:=element(-4..2);
plotparam(re(A)+u*t+i*(im(A)+v*t),t);
plotparam(evalc(A+(u+i*v)*t),t)
//plotparam(A+(a+i*b)*t,t);
```

L'équation paramétrique d'une droite passant par le point $A = x_0 + i * y_0$ et le point $B = x1 + i * y1$ est $x(t) = \dfrac{x_0 + t * x1}{1 + t},\ y(t) = \dfrac{y_0 + t * y1}{1 + t}$ (si $t \neq -1$).
Avec `Xcas`
Si on veut voir l'influence de A et B on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(1,0);
B:=point(0,1);
```

```
plotparam(affixe(A+B*t)/(1+t),t);
m:=element(-4..5);
M:=point((A+B*m)/(1+m));
```

17.2 Le cercle

L'équation cartésienne d'un cercle centré à l'origine et de rayon $|a|$ est :
$x^2 + y^2 = a^2$.
Avec Xcas
Si on veut voir l'influence de a on tape dans un écran de géométrie :

```
a:=element(0..5);
plotfunc(sqrt(a^2-x^2),x);
plotfunc(-sqrt(a^2-x^2),x);
```

L'équation cartésienne d'un cercle centré en $A = x_0 + i * y_0$ et de rayon $|a|$ est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$.
L'équation paramétrique d'un cercle centré en $A = x_0 + i * y_0$ et de rayon $|a|$ est $x(t) = x_0 + |a| * \cos(t),\ y(t) = y_0 + |a| * \sin(t)$.
Avec Xcas
Si on veut voir l'influence de A et de a on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
a:=element(0..5);
plotparam(affixe(A)+a*cos(t)+i*a*sin(t),t)
```

Pour avoir un demi-cercle pour t allant de $-\pi/2$ à $\pi/2$, on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
a:=element(0..5);
plotparam(affixe(A)+a*cos(t)+i*a*sin(t),t=-pi/2..pi/2)
```

L'équation polaire d'un cercle centré à l'origine est $r = |a|$.
Avec Xcas
Si on veut voir l'influence de a on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
a:=element(0..5);
plotpolar(a,t);
```

Le cercle centré en $A = x_0 + i * y_0$ est le translaté du précédent dans la translation de vecteur l'affixe du point A.
Si on veut voir l'influence de A et de a on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
a:=element(0..5);
translation(affixe(A),plotpolar(a,t))
```

L'équation polaire d'un cercle passant par l'origine et de diamètre $OA = d$ avec $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = t_0$ $r = d * \cos(t - t_0)$.
Avec Xcas
Si on veut voir l'influence de a on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
a:=affixe(A);
plotpolar(abs(a)*cos(t-arg(a)),t);
```

Le cercle centré en $B = x_0 + i * y_0$ est le translaté du précédent dans la translation de vecteur l'affixe du point B.
Avec `Xcas`
Si on veut voir l'influence de A et de B on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(1,0);
B:=point(0,1);
ba:=affixe(A-B);
translation(affixe(B),plotpolar(abs(ba)*cos(t-arg(ba)),t));
```

17.3 L'ellipse

L'équation cartésienne d'une ellipse centrée en $A = x_0 + i * y_0$ et de demi-axes parallèles aux axes et de longueur $|a|$ et $|b|$ est :
$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
on a $a^2 = b^2 + c^2$ et $AF = AF' = |c|$ si F et F' sont les foyers.

L'équation paramétrique d'une ellipse centrée en $A = x_0 + i * y_0$, de demi-axes parallèles aux axes et de longueur $a > 0$ et $b > 0$ est :
$x(t) = x_0 + a * \cos(t),\ y(t) = y_0 + b * \sin(t)$.
Avec `Xcas`
Si on veut voir l'influence de A et de a on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
a:=element(0..5);
plotparam(affixe(A+a*cos(t)+i*b*sin(t)),t)
```

Remarque
On peut aussi utiliser les commandes :
`ellipse`, `conique` et `conique_reduite`.

17.4 L'hyperbole

L'équation cartésienne d'une hyperbole centrée en $A = x_0 + i * y_0$, de demi-axes parallèles aux axes et et de longueur $|a|$ et $|b|$ est :
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (on a $a^2 = b^2 + c^2$ et $AF = AF' = |c|$ si F et F' sont les foyers).

L'équation paramétrique d'une hyperbole centrée en $A = x_0 + i * y_0$, de demi-axes parallèles aux axes et de longueur $a > 0$ et $b > 0$ est :
$x(t) = x_0 + a * \cosh(t),\ y(t) = y_0 + a * \sinh(t)$.
Avec `Xcas`
Si on veut voir l'influence de A et de a on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
a:=element(0..5);
plotparam(affixe(A+a*cosh(t)+i*b*sinh(t)),t)
```

Remarque
On peut aussi utiliser les commandes :
`hyperbole`, `conique` et `conique_reduite`.

17.5 La parabole

L'équation cartésienne d'une parabole de sommet $A = x_0 + i * y_0$ et de directrice d d'équation $x = a = x_0 - p/2$ (où $p/2$ est la distance de A à d) a pour équation :
$(y - y_0)^2 = 4x(x_0 - a) - x_0(x_0 - a) = 4(x - x_0)(x_0 - a) = 2 * p * (x - x_0)$
Par exemple, si $p = 3$, $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$, son sommet est `A:=point(1,2)`, son foyer F est défini par `F:=point(1+3/2,2)` et son équation est :
$(y - 2)^2 = 6 * (x - 1)$ L'équation paramétrique de cette parabole est :
$x_0 + t^2/(2 * p) + i(t + y_0)$ **Avec** `Xcas`
Si on veut voir l'influence de A et de p, on tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0,1);
p:=element(-5..5);
plotparam(affixe(A)+t^2/(2*p)+i*t,t)
```

Remarque
On peut aussi utiliser les commandes :
`parabole`, `conique` et `conique_reduite`.

17.6 Propriétés caractéristiques de la parabole

17.6.1 Définitions

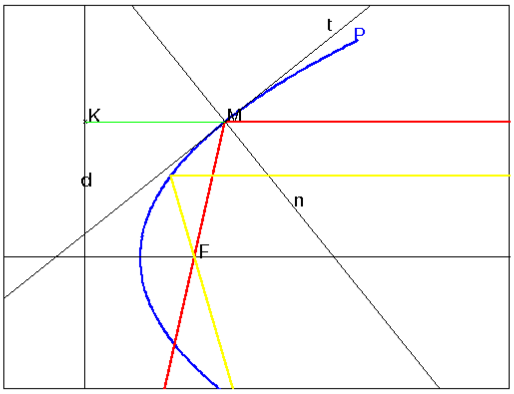
En géométrie plane la définition est : On appelle parabole le lieu géométrique du centre M d'un cercle tangent à une droite d et passant par un point F.
d est la directrice de la parabole
F est le foyer de la parabole
la distance de F à d est le paramètre p de la parabole.

17.6.2 Propriétés de la parabole

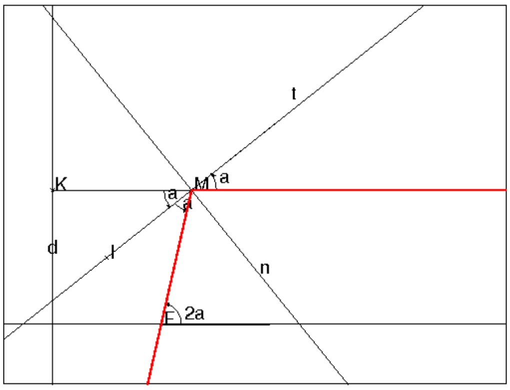
Une condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne à la parabole de foyer F et de directrice d est que M est équidistant de F et de d.
En tout point la parabole admet une tangente.
Soit K est la projection de m sur d. La tangente en M est la médiatrice du segment FK où K est la projection de m sur d et c'est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{FMK}$.

17.6.3 Propriétés caractéristiques de la parabole

Soit (P) une parabole de foyer F et de directrice d.
On suppose que des rayons lumineux perpendiculaires à d arrivent sur P du même côté que F. Alors tous les rayons réfléchis par la parabole perpendiculairement à d passent par le foyer F.



En effet la tangente t en M est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMK}$.
Question Quelles sont les courbes qui ont cette propriété ?
On cherche donc les courbes telles que : les rayons lumineux qui se réfléchissent sur sa surface passent par tous par un même point F.
Si t est la tangente en M, On considère le point K situé dans le prolongement du rayon incident et tel que $KM = MF$.
Soit I est le milieu de KM. On va montrer que K se déplace sur une droite fixe d.
Pour cela on prend F comme origine d'un repère avec Fx parallÌe au rayon incident.
On a donc la figure :



Soient (x, y) les coordonnées de M et $a = \widehat{KMI} = \widehat{IMF}$. On suppose $y > 0$ i.e $y' > 0$ car le problème est symétrique par rapport à Fx.
On a donc : $y' = \tan(a)$ (c'est la pente de la tangente t)
$\tan(2 * a) = y/x = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2} \frac{2y'}{1-y'^2}$ donc

$$yy'^2 + 2y'x - y = 0$$

ou puisque l'on a supposé $y' > 0$

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

ou

$$yy' = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

On obtient une équation différentielle à résoudre.

Résolution de $yy' = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$ **par changement de variable**

On a :
$yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ Le premier membre est la dérivée de $(y^2 + x^2)/2$, on pose donc :
$z = (y^2 + x^2)/2$ et l'équation différentielle devient :
$z' = \sqrt{2z}$ ou $\frac{z'}{\sqrt{2z}} = 1$donc
$\sqrt{2z} = x + p$ où $p = Cste$
donc $x^2 + y^2 = (x + p)^2$
On trouve l'équation de la parabole de foyer l'origine F et de directrice d d'équation $x = -p$.

Résolution de $yy' = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$ **géométriquement**

On a :
$\overrightarrow{KM} = MF\overrightarrow{i} = \sqrt{x^2 + y^2}\,\overrightarrow{i}$
donc $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées : $x_K = x - \sqrt{x^2 + y^2}$ et $y_K = y$
Montrons que lorsque M se déplase sur le courbe, x_K reste constant. x_K est une fonction de x dérivable de dérivee :
$x'_K = 1 - \frac{x+y*y'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x-y*y'}{\sqrt{x^2+y^2}}$
On remplace yy' par sa valeur et on obtient :
$x'_K = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x-(-x+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$
Donc $x_K = -p$ et M est sur une parabole de foyer F et de directrice d d'équation $x = -p$.

17.7 Équation tangentielle des coniques, foyers, directrices

Exercice :
Déterminer les foyers de la conique d'équation dans le reère Oxy :

$$-2x^2 - 2 * x * y - 2 * y^2 - 2 * x + 2 * y + 3 = 0$$

17.7.1 On utilise conique_reduite

On tape :

```
conique_reduite(-2*x^2-2*x*y-2*y^2-2*x+2*y+3,[x,y])
```

On obtient :

```
[[-1,1],[[(-(sqrt(2)))/2,-((sqrt(2))/2)],
[(sqrt(2))/2,(-(sqrt(2)))/2]], 1,-x^2-3*y^2+5,
[[-1+i+((-(sqrt(2)))/2+((i)*sqrt(2))/2)*(sqrt(5)*cos(t)+
((i)*sqrt(15)*sin(t))/3),t,0,2*pi,(2*pi)/60]]]
```

Dans le nouveau repère l'équation de l'ellipse est :
$\frac{X^2}{5}+\frac{Y^2}{\frac{5}{3}}=1$ On a donc $a^2=5$, $b^2=\frac{5}{3}$ et $c^2=a^2-b^2=\frac{10}{3}$ On tape :
`c:=sqrt(5-5/3)`
On obtient `(sqrt(30))/3`
L'origine du nouveau repère est $O1$ =`point(-1+i)` et la matrice de passage est :
$P=[[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}],[\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}]]$
On tape pour définir la matrice de passage :
`P:=[[-sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2],[sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2]]`
On tape pour définir les foyers :
```
F1:=point(P*[c,0]+[-1,1])
F2:=point(P*[-c,0]+[-1,1])
```
On tape :
`coordonnees(F1)`
On obtient :
`[(-2*sqrt(15))/6-1,(sqrt(15)*2)/6+1]`
On tape :
`coordonnees(F2)`
On obtient :
`[(2*sqrt(15))/6-1,-((sqrt(15)*2)/6)+1]`
La directrice $D1$ a pour équation dans le nouveau repère $X=a^2/c=\sqrt{30}/2$
Pour avoir dans le repère Oxy, l'équation de $D1$, on tape :
`A:=normal(P*[sqrt(30)/2,0]+[-1,1])`
On obtient :
`[(-4*sqrt(15)-8)/8,(4*sqrt(15)+8)/8]`
On tape :
`B:=normal(P*[sqrt(30)/2,sqrt(2)]+[-1,1])`
On obtient : `[(-4*sqrt(15)-16)/8,(4*sqrt(15))/8]`
On tape :
```
D1:=droite(point(A),point(B))
equation(D1)
```
On obtient : `y=(x+sqrt(15)+2)`
La directrice $D2$ a pour équation dans le nouveau repère $X=a^2/c=-\sqrt{30}/2$
Pour avoir dans le repère Oxy, l'équation de $D2$, on tape :
`C:=normal(P*[-sqrt(30)/2,0]+[-1,1])`
On obtient : `[(sqrt(15)-2)/2,(-(sqrt(15))+2)/2]`
On tape :
`D:=normal(P*[-sqrt(30)/2,sqrt(2)]+[-1,1])`
On obtient : `[(sqrt(15)-4)/2,(-(sqrt(15)))/2]`
On tape :
```
D2:=droite(point(C),point(D))
equation(D2)
```
On obtient :
`y=(x-(sqrt(15))+2)`
On tape :
```
conique(-2*x^2-2*x*y-2*y^2-2*x+2*y+3,[x,y]);
F1:=F1;F2:=F2;D1:=D1;D2:=D2;O:=point(-1+i);
M:=point(i*-1/2*(-1+sqrt(7)));
```

On obtient :

On peut vérifier que :
$MF1+MF2 = 2*\sqrt(5)$ et que
$MF1/MH1 = e = c/a = \sqrt(6)/3$ avec $H1$ la projection de M sur $D1$.
On tape :
`simplify(longueur2(M,F1)),simplify(longueur2(M,F2))`
On obtient :
`(2*sqrt(15)*sqrt(7)+6*sqrt(15)+3*sqrt(7)+38)/6,`
`(-2*sqrt(15)*sqrt(7)-6*sqrt(15)+3*sqrt(7)+38)/6`
On pose :
`a:=3*sqrt(7)+38`
`b:=2*sqrt(15)*sqrt(7)+6*sqrt(15)`
Car on a `sqrt(6)*longueur(M,F1)=sqrt(a+b)` et
`sqrt(6)*longueur(M,F2)=sqrt(a-b).`
On tape :
`simplify(sqrt(a+b)+sqrt(a-b))`
On obtient :
`2*sqrt(30)`
Soit : $MF1+MF2 = 2\sqrt{30}/\sqrt{6} = 2\sqrt{5}$
On tape :
`H1:=projection(D1,M)`
`normal(longueur2(M,F1)/longueur2(M,H1))`
On obtient :
`2/3`
Donc $MF1/MH1 = \sqrt{6}/3$

17.7.2 On utilise l'équation tangentielle

On rappelle l'énoncé :
Déterminer les foyers de la conique d'équation dans le reère Oxy :

$$-2x^2 - 2*x*y - 2*y^2 - 2*x + 2*y + 3 = 0$$

On pose :
$f(x,y) = -2x^2 - 2*x*y - 2*y^2 - 2*x + 2*y + 3$ et
$g(x,y,t) = t^2 f(x/t, y/t)$
On tape pour définir la fonction f :
`f(x,y):=-2*x^2-2*x*y+-2*y^2-2*x+2*y+3`

On obtient :
`(x,y)->-2*x^2-2*x*y-2*y^2-2*x+2*y+3`
On tape pour définir la fonction g :
`g:=unapply(normal(t^2*f(x/t,y/t)),[x,y,t])`
On obtient :
`(x,y,t)->3*t^2-2*t*x+2*t*y-2*x^2-2*x*y-2*y^2`
L'équation tangentielle est la condition nécessaire et suffisante sur u, v, w pour qu'une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à cette conique.
En coordonnées homogènes l'équation de la tangente à la courbe $g(x, y, t) = 0$ au point x_0, y_0, t_0 est :
$xg'_x(x_0, y_0, t_0) + yg'_y(x_0, y_0, t_0) + tg'_t(x_0, y_0, t_0) = 0$
On tape :
`g1:=normal(diff(g(x,y,t),x)/2)`
On obtient :
`-t-2*x-y`
On tape :
`g2:=normal(diff(g(x,y,t),y)/2)`
On obtient :
`t-x-2*y`
On tape :
`g3:=normal(diff(g(x,y,t),t)/2)`
On obtient :
`3*t-x+y`
Donc $xg_1 + yg_2 + t_g3 = 0$ est tangente à la courbe $g(x, y, t) = 0$.
On cherche la condition nécessaire et suffisante sur u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à cette conique.
On cherche donc à résoudre les équations lin'eaires en x, y, t :
$g_1 = u, g_2 = v, g_3 = w$.
On tape pour avoir x, y, z en fonction de u, v, w :
`L:=linsolve([g1-u,g2-v,g3-w],[x,y,t])`
On obtient :
`[-7/15*u-(-2)/15*v-1/5*w,2/15*u+(-7)/15*v+1/5*w,`
`-1/5*u-(-1)/5*v-(-1)/5*w]`
On tape pour définir l'équation tangentielle $G(u, v, w) = 0$ de la conique d'équation $g(x, y, t) = 0$:
`G:=unapply(numer(g(L[0],L[1],L[2])),[u,v,w])`
On obtient :
`(u,v,w)->-7*u^2+4*u*v-6*u*w-7*v^2+6*v*w+3*w^2`
Pour une courbe, un foyer au sens de Plücker est un point d'où l'on peut mener deux tangentes isotropes à la courbe. Une isotrope est une droite de pente i ou de pente $-i$, par exemple si $F1 =$`point(x1+i*y1)`, la droite :
$i * x - y - i * x_1 + y_1 = 0$ est une isotrope qui passe par F_1.
Donc pour que F_1 soit un foyer il faut que :
$G(i, -1, w_1) = 0$ avec $w_1 = -i * x_1 + y_1$.
Pour avoir les foyers, on tape :
`C:=normal(G(i,-1,w1))`
On obtient :
`3*w1^2+(-6-6*i)*w1-4*i`

On tape pour déterminer $w_1 = -i * x_1 + y_1$ tel que $G(i, -1, w_1) = 0$:
`LF:=normal(csolve(C,w1))`
On obtient :
`[((1+i)*sqrt(15)+3+3*i)/3,((-1-i)*sqrt(15)+3+3*i)/3]`
Il y a donc 2 foyers F_1 et F_2 qui ont comme coordonnées x_1, y_1 et x_2, y_2.
On tape pour avoir les coordonnées de F_1 :
`x1:=-im(LF[0]);y1:=re(LF[0]);`
On obtient :
`-((sqrt(15)+3)/3),(sqrt(15)+3)/3`
Donc :

$$F_1 = \frac{-(\sqrt{15}+3) + i(\sqrt{15}+3)}{3}$$

On tape pour avoir les coordonnées de F_2 :
`x2:=-im(LF[1]);y2:=re(LF[1]);`
On obtient :
`-((-(sqrt(15))+3)/3),(-(sqrt(15))+3)/3`
Donc

$$F_2 = \frac{\sqrt{15}-3) + i(-\sqrt{15}+3)}{3}$$

La directrice d'une conique propre associée à un foyer F est la polaire de F.
La polaire d'un point x_0, y_0, t_0 d'une conique $g(x, y, t) = 0$ a pour équation homogène :
$x * g'_{x_0} + y * g'_{y_0} + t * g'_{t_0} = 0$
Pour avoir la directrice D_1 associée au foyer F_1 de coefficients u_1, v_1, w_1, on tape :
`u1:=normal(subst(g1,[x=x1,y=y1,t=1]))`
On obtient :
`sqrt(15)/3`
On tape :
`v1:=normal(subst(g2,[x=x1,y=y1,t=1]))`
On obtient :
`-sqrt(15)/3`
On tape :
`w1:=normal(subst(g3,[x=x1,y=y1,t=1]))`
On obtient :
`(2*sqrt(15)+15)/3`
Donc la directrice D_1 associée au foyer F_1 a pour équation :

$$x\sqrt{15} - y\sqrt{15} + 2\sqrt{15} + 15 = 0$$

Pour avoir la directrice D_2 associée au foyer F_2 de coefficients u_2, v_2, w_2, on tape :
`u2:=normal(subst(g1,[x=x2,y=y2,t=1]))`
On obtient :
`-(sqrt(15))/3`
On tape :
`v2:=normal(subst(g2,[x=x2,y=y2,t=1]))`
On obtient :
`sqrt(15)/3`
On tape :
`w2:=normal(subst(g3,[x=x2,y=y2,t=1]))`

On obtient :
`(-2*sqrt(15)+15)/3`
Donc la directrice D_2 associée au foyer F_2 a pour équation :

$$-x\sqrt{15} + y\sqrt{15} - 2\sqrt{15} + 15 = 0$$

On fait le dessin, on tape :

```
conique(f(x,y));F1:=point(x1+i*y1);F2:=point(x2+i*y2);
D1:=droite(u1*x+v1*y+w1=0);D2:=droite(u2*x+v2*y+w2=0)
```

On obtient :

Si M est un point de la conique (par exemple $M)(0; (-\sqrt{7}+1)/2)$ et si H est la projection de M sur la directrice associée à F alors l'éxcentricité e de la conique vaut :

$$e = \frac{MF}{MH}$$

On tape :

```
M:=point(i*(1-sqrt(7))/2);
H1:=projection(D1,M)
e2:=normal(longueur2(M,F1)/longueur2(M,H1))
```

On obtient e^2 :
`2/3`
donc

$$e = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

17.7.3 Avec un programme

On rappelle l'énoncé :
Déterminer les foyers de la conique d'équation dans le reère Oxy :

$$f(x,y) = -2x^2 - 2*x*y - 2*y^2 - 2*x + 2*y + 3 = 0$$

On écrit le programme `conique2fd` qui a comme argument la fonction de 2 variables qui définit la conique.
On tape dans l'éditeur de programmes :

```
conique2fd(f):={
local t,x,y,g,g1,g2,g3,L,G,u,v,w,w1,C,
      LF,x1,x2,y1,y2,u1,u2,v1,v2,w1,w2,s;
purge(x);purge(y);purge(t);
purge(u);purge(v);purge(w);
g:=unapply(normal(t^2*f(x/t,y/t)),[x,y,t]);
g1:=normal(diff(g(x,y,t),x)/2);
g2:=normal(diff(g(x,y,t),y)/2);
g3:=normal(diff(g(x,y,t),t)/2);
L:=linsolve([g1-u,g2-v,g3-w],[x,y,t]);
G:=unapply(numer(g(L[0],L[1],L[2])),[u,v,w]);
C:=normal(G(i,-1,w));
LF:=normal(csolve(C,w));
s:=size(LF);
si s==0 alors
return[];
fsi;
x1:=-im(LF[0]);y1:=re(LF[0]);
u1:=normal(subst(g1,[x=x1,y=y1,t=1]));
v1:=normal(subst(g2,[x=x1,y=y1,t=1]));
w1:=normal(subst(g3,[x=x1,y=y1,t=1]));
si s==1 alors
return [normal([x1,y1]),numer(u1*x+v1*y+w1)];
fsi;
x2:=-im(LF[1]);y2:=re(LF[1]);
u2:=normal(subst(g1,[x=x2,y=y2,t=1]));
v2:=normal(subst(g2,[x=x2,y=y2,t=1]));
w2:=normal(subst(g3,[x=x2,y=y2,t=1]));
return [normal([x1,y1]),numer(u1*x+v1*y+w1)],
       [normal([x2,y2]),numer(u2*x+v2*y+w2)];
}:;
```

Puis, on tape :

```
f(x,y)=-2x^2-2*x*y-2*y^2-2*x+2*y+3
conique2fd(f)
```

On obtient :

```
[[(-(sqrt(15))-3)/3,(sqrt(15)+3)/3],
sqrt(15)*x-sqrt(15)*y+2*sqrt(15)+15],
[[(sqrt(15)-3)/3,(-(sqrt(15))+3)/3],
-sqrt(15)*x+sqrt(15)*y-2*sqrt(15)+15]
```

17.7.4 Avec un programme en utilisant `q2a`

On rappelle l'énoncé :
Déterminer les foyers de la conique d'équation dans le repère Oxy :

$$f(x,y) = -2x^2 - 2*x*y - 2*y^2 - 2*x + 2*y + 3 = 0$$

On écrit le programme `conique2fd` qui a comme argument la fonction de 2 variables qui définit la conique.

On tape dans l'éditeur de programmes :

```
conique2fdir(f):={
local t,x,y,g,A,A1,B,C,g,L,G,u,v,w,w1,
      LF,x1,x2,y1,y2,u1,u2,v1,v2,w1,w2,s;
purge(x);purge(y);purge(t);
purge(u);purge(v);purge(w);
g:=unapply(normal(t^2*f(x/t,y/t)),[x,y,t]);
A:=q2a(g(x,y,t),[x,y,t]);
si det(A)!=0 alors B:=inverse(A) else return 0 fsi;
G(u,v,w):=g(op(B*[u,v,w]));
C:=normal(G(i,-1,w));
LF:=normal(csolve(C,w));
s:=size(LF);
si s==0 alors
return[];
fsi;
x1:=-im(LF[0]);y1:=re(LF[0]);
A1:=A*[x1,y1,1];
u1:==normal(A1[0]);
v1:=normal(A1[1]);
w1:=normal(A1[2]);
si s==1 alors
return [normal([x1,y1]),numer(u1*x+v1*y+w1)];
fsi;
x2:=-im(LF[1]);y2:=re(LF[1]);
A1:=A*[x2,y2,1];
u2:=normal(A1[0]);
v2:=normal(A1[1]);
w2:=normal(A1[2]);
return [normal([x1,y1]),numer(u1*x+v1*y+w1)],
       [normal([x2,y2]),numer(u2*x+v2*y+w2)];
}
:;
```

Puis, on tape :

```
f(x,y):=-2x^2-2*x*y-2*y^2-2*x+2*y+3
conique2fdir(f)
```

On obtient :

```
[[(-(sqrt(15))-3)/3,(sqrt(15)+3)/3],
sqrt(15)*x-sqrt(15)*y+2*sqrt(15)+15],
[[(sqrt(15)-3)/3,(-(sqrt(15))+3)/3],
-sqrt(15)*x+sqrt(15)*y-2*sqrt(15)+15]
```

17.7.5 Tangentes communes à 2 coniques

On utilise l'équation tangentielle de ces 2 coniques :

```
tangentes(f,g):={
```

```
local x,y,t,u,v,w,A,A1,B,B1,F,G,FT,GT,D,k,L0,L1;;
purge(x);purge(y);purge(t);
purge(u);purge(v);purge(w);
F:=unapply(normal(t^2*f(x/t,y/t)),[x,y,t]);
A:=q2a(F(x,y,t),[x,y,t]);
si det(A)!=0 alors A1:=inverse(A) else return 0 fsi;
FT(u,v,w):=F(op(A1*[u,v,w]));
G:=unapply(normal(t^2*g(x/t,y/t)),[x,y,t]);
B:=q2a(G(x,y,t),[x,y,t]);
si det(B)!=0 alors B1:=inverse(B) else return 0 fsi;
GT(u,v,w):=G(op(B1*[u,v,w]));
L0:=solve(normal(FT(u,v,0),GT(u,v,0)),[u,v]);
L1:=solve(normal(FT(u,v,1),GT(u,v,1)),[u,v]);
D:=NULL;
if (L0[0]==[0,0]) {L0:=tail(L0);}
for (k:=0;k<size(L0);k++){
D:=D, droite(L0[k,0]*x+ L0[k,1]*y);
}
for (k:=0;k<size(L1);k++){
D:=D,droite( L1[k,0]*x+ L1[k,1]*y+1)
;}
return D;
}
:;
```

On tape :

```
f(x,y):=x^2+y^2-2*x
g(x,y):=x^2+y^2-8x+12
cercle(f(x,y)),cercle(g(x,y)),tangentes(f,g)
```

On obtient :

On tape :

```
f(x,y):=2*x^2+y^2-2*x
g(x,y):=x^2+y^2-8*x+12
conique(f(x,y)),cercle(g(x,y)),tangentes(f,g)
```

On obtient :

On tape :

```
f(x,y):=2*x^2+y^2-2*x
g(x,y):=x^2-y^2-8x+12
conique(f(x,y)),conique(g(x,y)),tangentes(f,g)
```

On obtient :

On tape :

```
f(x,y):=2*x^2+y^2-2*x-4*y
g(x,y):=x^2-y^2-8x+12
conique(f(x,y)),conique(g(x,y)),tangentes(f,g)
```

On obtient :

On tape :

```
f(x,y):=2*x^2+y^2-16*x-8*y+32
g(x,y):=x^2-y^2-8x+12
conique(f(x,y)),conique(g(x,y)),tangentes(f,g)
```

On obtient :

17.8 Équation d'une ellipse ou d'une hyperbole

17.8.1 L'ellipse ou l'hyperbole est donnée par ses foyers et 1 point

L'ellipse

Soient F_1 et F_2 les foyers et M_0 un point de l'ellipse.
On a :
$a = (M_0F_1 + M_0F_2)/2$
$M_0F_1^2 - M_0F_2^2 = 2a * (M_0F_1 - M_0F_2)$
donc puisque pour qu'un point M soit un point de l'ellipse on a : $MF_1+MF_2 = 2a$ et
$MF_1 - MF_2 = (MF_1^2 - MF_2^2)/(2a)$ on a :
$MF_1 = a + (MF_1^2 - MF_2^2)/(4 * a)$
ou encore :
$MF_1^2 = (a+(MF_1^2 - MF_2^2)/(4*a))^2$ L'équation de l'ellipse est donc : $MF_1^2 - (a + (MF_1^2 - MF_2^2)/(4 * a))^2 = 0$ avec $a = (M_0F_1 + M_0F_2)/2$.

L'hyperbole

Soient F_1 et F_2 les foyers et M_0 un point de l'hyperbole.
On a :
$a = |M_0F_1 - M_0F_2|/2$
$|M_0F_1^2 - M_0F_2^2| = 2a * (M_0F_1 + M_0F_2)$
donc puisque pour qu'un point M soit un point de l'hyperbole on a : $MF_1 - MF_2 = 2a * s$ (avec $s = +1$ ou $s = -1$) et
$MF_1 + MF_2 = (MF_1^2 - MF_2^2)/(2 * a * s)$ on a :
$MF_1 = s * (a + (MF_1^2 - MF_2^2)/(4 * a))$
ou encore :
$MF_1^2 = (a + (MF_1^2 - MF_2^2)/(4 * a))^2$ L'équation de l'hyperbole est donc : $MF_1^2 - (a + (MF_1^2 - MF_2^2)/(4 * a))^2 = 0$ avec $a = |M_0F_1 - M_0F_2|/2$.
On tape le programme :

```
eqcon2fm(F1,F2,M0,s):={
local x1,x2,y1,y2,x0,y0,x,y,ae,ah,a,M,eq,l1,l2,l,l3;
x1,y1:=coordonnees(F1);
x2,y2:=coordonnees(F2);
x0,y0:=coordonnees(M0);
l3:=longueur2(F1,F2)/4;
```

```
ae:=(longueur(M0,F1)+longueur(M0,F2))/2;
ah:=abs(longueur(M0,F1)-longueur(M0,F2))/2
si s=="ellipse" alors a:=simplify(ae); sinon a:=simplify(ah); fsi;
si simplify(a^2-l3)==0 alors si s=="ellipse" alors print("segment");sinon
print("2 demi-droites");fsi;fsi
purge(x,y);
M:=point(x,y);
l2:=longueur2(M,F1);
l:=(l2-longueur2(M,F2))/(4*a);
l1:=simplify(a+l);
eq:=numer(simplify(l2-l1^2));
si simplify(a^2-l3)>0 alors print("ellipse centre "+(F1+F2)/2+" a="+a);
 sinon
 si simplify(a^2-l3)<0 alors print("hyperbole centre "+(F1+F2)/2+" a="+a);
   sinon
     eq:=factors(eq)[0];
 fsi;
fsi;
return eq;
}:;
```

On tape :
`eqcon2fm(point(1-i),point(i),point(1+i),"ellipse")` On obtient :
`ellipse centre 1/2 a=3/2`
`8*x^2+4*x*y-8*x+5*y^2-2*y-7` On tape :
`eqcon2fm(point(1-i),point(i),point(1+i),"hyp")` On obtient :
`hyperbole centre 1/2 a=(sqrt(5))/4`
`16*x^2+256*x*y-16*x-176*y^2-128*y+79` On tape :
`eqcon2fm(point(1-i),point(i),point(1/4+i/2),"ellipse")` On obtient :
`segment`
`2*x+y-1`
On tape :
`eqcon2fm(point(1-i),point(i),point(-1/4+3*i/2),"hyp")` On obtient :
`2 demi droites`
`2*x+y-1`

17.8.2 L'ellipse ou l'hyperbole est donnée par ses foyers et a

On a donc comme précédement :
L'équation de l'ellipse ou de l'hyperbole est : $MF_1^2-(a+(MF_1^2-MF_2^2)/(4*a))^2=0$.
On tape le programme :

```
eqcon2fa(F1,F2,a):={
local x1,x2,y1,y2,x,y,M,eq,l1,l2,l,l3;
```

```
x1,y1:=coordonnees(F1);
x2,y2:=coordonnees(F2);
purge(x,y);
M:=point(x,y);
l2:=longueur2(M,F1);
l:=(l2-longueur2(M,F2))/(4*a);
l1:=simplify(a+l);
eq:=numer(simplify(l2-l1^2));
l3:=longueur2(F1,F2)/4;
si simplify(a^2-l3)>0 alors print("ellipse centre "+(F1+F2)/2+" a="+a
 sinon
 si simplify(a^2-l3)<0 alors print("hyperbole centre "+(F1+F2)/2+" a=
   sinon
     eq:=factors(eq)[0];
     print("segment ou 2 demi droites")
 fsi;
fsi;
return eq;
}:;
```

On tape :
`eqcon2fa(point(1-i),point(i),sqrt(5)/2))` On obtient :
`segment ou 2 demi droites`
`2*x+y-1` On tape :
`eqcon2fa(point(1-i),point(i),sqrt(5)))` On obtient :
`ellipse centre 1/2 a=sqrt(5)`
`76*x^2+16*x*y-76*x+64*y^2-8*y-281`
On tape :
`eqcon2fa(point(1-i),point(i),sqrt(5)/3))` On obtient :
`hyperbole centre 1/2 a=(sqrt(5))/3`
`396*x^2+1296*x*y-396*x-576*y^2-648*y+599`

17.9 Exercice

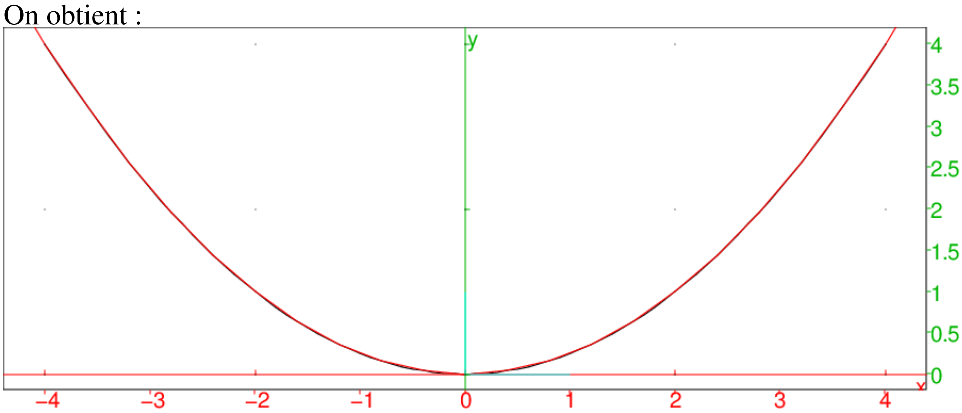
On considère les deux coniques C_1 et C_2 d'équations $x^2 = 4y$ et $x^2 + 4(y - \frac{1}{2})^2 = 1$ et on étudie l'ensemble des points M obtenus comme milieu d'un segment horizontal entre deux points $M_1 \in C_1$ etv$M_2 \in C_2$

1. Déterminer la nature de ces deux coniques, et donner une paramétrisation de chacune d'entre elles.
2. Tracer sur un même systèmes d'axes les coniques C_1 et C_2.
3. Montrer que M décrit les 4 courbes déquation :
$$x = \pm\sqrt{y} \pm \sqrt{y(1-y)}$$
.
4. En déduire l'équation cartésienne suivante pour M :
$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$$
.

5. Montrer que l'équation polaire de M est $\rho = 4\sin(\theta)\cos(\theta)^2$

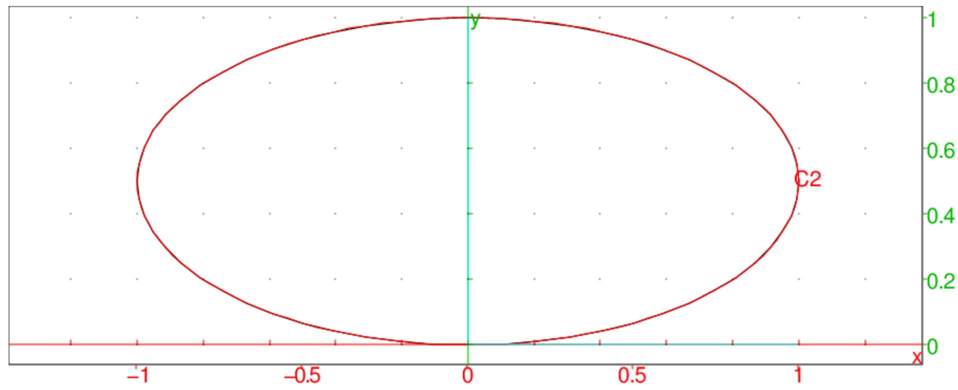
La solution

1. Nature de C_1 et C_2
   C_1 a pour équation $x^2 = 4y$ ou encore $y = x^2/4$.
   C_1 est donc une parabole de foyer `F:=point(i)` et de directrice `d:=droite(y=-1)`.
   C_2 a pour équation $x^2 + 4(y - \frac{1}{2})^2 = 1$.
   On tape :
   `a:=1;b:=1/2;c:=normal(sqrt(a^2-b^2))`
   On obtient les valeurs a du demi grand axe, b du demi petit axe et c de la distance $c = OF$ entre le centre O et un foyer F de l'ellipse :
   `1,1/2,(sqrt(3))/2`
   C_2 est donc une ellipse de foyer $F_1 = point(-\sqrt{3}/2 + i/2)$ et $F_2 = point(\sqrt{3}/2 + i/2)$.
   On tape :
   `conique(x^2+4*(y-1/2)^2=1)`
   On obtient :
   en vert `Ellipse de centre (0,1/2)`
   et le tracé de l'ellipse.

2. Tracé des coniques C_1 et C_2 On tape :
   `conique(x^2-4*y=0)`
   ou bien :
   `parabole(x^2-4*y=0);`
   ou bien :
   `C1:=parabole(0,1,affichage=1)`
   On obtient :
   

   On tape :

   ou bien :
   `ellipse(x^2+4*(y-1/2)^2=1)`
   ou bien :
   `C2:=ellipse(-sqrt(3)/2+i/2,sqrt(3)/2+i/2,point(i),affichage=1)`
   On obtient :

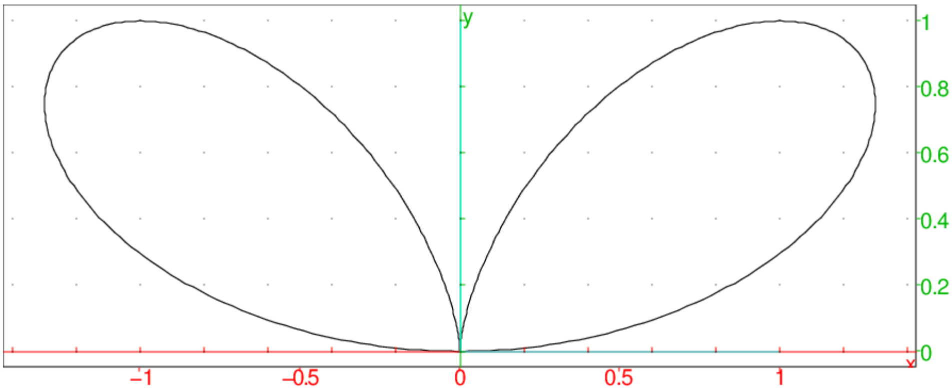


3. M décrit les 4 courbes $x = \pm\sqrt{y} \pm \sqrt{y(1-y)}$.
   On tape pour `eps1=+/-1` et `eps2=+/-1` :
   ```
   M1(eps1,y):=point(2*eps1*sqrt(y)+i*y)
   M2(eps2,y):=point(eps2*sqrt(1-4*(y-1/2)^2)+i*y)
   M(eps1,eps2,y):=milieu(M1(eps1,y),M2(eps2,y)
   simplify(abscisse(M(eps1,eps2,y)))
   ```
   On obtient :
   `eps2*sqrt(y-y^2)+eps1*sqrt(y)`

4. Équation cartésienne de M.
   On tape :
   `normal(expand((x-eps1*sqrt(y))^2)-expand((eps2*sqrt(y-y^2))^2))`
   On obtient :
   `x^2+(-y+y^2)*eps2^2+(-2*sqrt(y))*eps1*x+y*eps1^2`
   Donc puisque `eps1^2=1` et `eps2^2=1`, on a :
   $x^2 + y^2 - 2 * \sqrt{y}) * eps1 * x = 0$
   Donc puisque `eps1^2=1`, on a :
   $(x^2 + y^2)^2 = 4yx^2$

5. Équation polaire de M.
   On tape :
   `factor(simplify(subst((x^2+y^2)^2-4*y*x^2,[x=r*cos(t),y=r*sin(t)`
   On obtient :
   `r^3*(r-4*sin(t)+4*sin(t)^3)`
   Comme $r \neq 0$ on en déduit que :
   $r = 4\sin(t)(\sin(t)^2 - 1) = 4\sin(t)\cos(t)^2$

6. Tracé du lieu de M.
   On tape :
   `plotpolar(4*sin(t)*cos(t)^2,t=0..pi)`
   On peut assi taper : `plotimplicit((x^2+y^2)^2=4y*x^2,x=-1.3..1.3,y=0..1)`
   On obtient :



On tape :

```
r(t):=4*sin(t)*cos(t)^2
normal(r(t+pi)+r(t),r(-t)+r(t),r(pi-t)-r(t))
```

On obtient :

```
0,0,0
```

On fait l'étude sur $[0,\pi/2]$, puis, on fait une symétrie par rapport à Oy : on a la courbe en entier lorsque $t \in [0,\pi]$.
Recherche des points singuliers : on cherche donc les valeurs de t qui sont solutions de $\rho(t) = 0$ et $\rho'(t) = 0$.
On tape :

```
r1:=diff(r(t),t)
```

On obtient :

```
4*cos(t)^3-8*cos(t)*sin(t)^2
```

On tape :

```
solve(r(t)=0,t)
```

On obtient :

```
[0,pi,pi/2,-pi/2,3*pi/2]
```

On tape :

```
solve(r1=0,t)
```

On obtient :

```
[pi/2,-pi/2,acos((sqrt(6))/3),-acos((sqrt(6))/3), (2*asin((sqrt(6))/3)+p
```

Donc pour $t = \pi/2$ on a un point singulier.
Cherchons la nature de ce point singulier.
On tape pour avoir le développement de $x(t)$ en $\pi/2$:

```
series(4*sin(t)*cos(t)^3,t=pi/2,5)
```

On obtient :

```
-4*(t-pi/2)^3+4*(t-pi/2)^5+(t-pi/2)^7*order_size(t-pi/2)
```

On tape pour avoir le développement de $y(t)$ en $\pi/2$:

```
series(4*sin(t)^2*cos(t)^2,t=pi/2,5)
```

On obtient :

```
4*(t-pi/2)^2+-16*(t-pi/2)^4/3+(t-pi/2)^6*order_size(t-pi/2)
```

Pour $t = \pi/2$ on a $x^{[3]}(\pi/2) \neq 0$ et $y^{[2]}(\pi/2) \neq 0$.
Pour $t = \pi/2$ on a :
$y^{[2]}(\pi/2) \neq 0$: donc la normale n'est pas traversée et
$x^{[3]}(\pi/2) \neq 0$: donc la tangente est traversée.
On a donc un rebroussement de première espèce.

Chapitre 18

Exemples de courbes en paramétrique

18.1 Les cycloïdes

18.1.1 La cycloïde

La courbe

Une cycloïde est le lieu d'un point M situé sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite.
Si au départ M est à l'origine O, si le cercle C, de centre A et rayon R, roule sur l'axe des x, si P est le point de contact de C avec Ox lorsque C a tourné d'un angle t, on a :
$\overrightarrow{OP} = Rt$,$\overrightarrow{AP} = -iR$ et $\overrightarrow{AM}$=rotation$(A, -t, \overrightarrow{AP}) = -Ri(\cos(-t)+i\sin(-t)) = -R\sin(t) - Ri\cos(t)$ donc
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = Rt + iR - R\sin(t) - Ri(\cos(t)) = R(t - \sin(t) + i(1 - \cos(t)))$
L'équation paramétrique d'une cycloïde est donc :

$$x = R(t - \sin(t));\ y = R(1 - \cos(t))$$

Avec `Xcas`
On tape :

```
R:=element(0..5);
plotparam(R*(t-sin(t)+i*(1-cos(t))),t,affichage=rouge);
```

On peut faire une animation pour voir le déplacement d'un point `M` d'un cercle `C` de rayon `R` lorsque `C` roule sur l'axe des `x`.
On tape :

```
R:=element(0..5);
plotparam(R*(t-sin(t)+i*(1-cos(t))),t=-10..10,affichage=rouge);
animation(seq('cercle(R*u+i*R,R)',u,-10,10,0.5));
animation(seq('M:=point(R*(u-sin(u)+i*(1-cos(u))))',u,-10,10,0.5));
animation(seq('segment(R*u+i*R,R*(u+i-i*exp(-i*u)))',u,-10,10,0.5));
```

On peut aussi faire une animation pour voir l'infuence du rayon R, mais ici, cela n'a pas beaucoup d'interêt.
On tape :

```
animation(seq('plotparam(R*(t-sin(t)+i*(1-cos(t))),
               t=-10..10,affichage=rouge)',R,0,3,0.1));
```

La longueur d'une arche de cycloïde

On peut calculer la longueur d'une arche de cycloïde.
On a : $ds^2 = dx^2 + dy^2$ On tape :
`tlin(diff(R*(t-sin(t)),t)^2+diff(R*(1-cos(t)),t)^2)`
On obtient : `2*R^2+(-2*R^2)*cos(t)`
On tape :
`trigsin(halftan(2*R^2+(-2*R^2)*cos(t)))` On obtient : `4*R^2*sin(t/2)^2`
Quand t varie de 0 à 2π, la longueur d'une arche de cycloïde est :
`normal(int(2*R*sin(t/2),t,0,2*pi))`
On obtient : `8*R`

18.1.2 La cycloïde raccourcie

Une cycloïde raccourcie est le lieu d'un point P situé sur un rayon AM du cercle de centre A qui roule sans glisser sur une droite.
Si $AP = k * AM = k * R$ avec $k < 1$, l'équation paramétrique d'une cycloïde raccourcie est donc :

$$x = R(t - k * \sin(t));\ y = R(1 - k * \cos(t)) \text{ avec } k < 1$$

Avec Xcas, on tape :

```
R:=element(0..3);
k:=element(0..1);
plotparam(R*(t-k*sin(t)+i*(1-k*cos(t))),t,affichage=rouge);
```

18.1.3 La cycloïde allongée ou trochoïde

Une cycloïde allongée ou trochoïde est le lieu d'un point Q situé sur le prolongement du rayon AM du cercle de centre A qui roule sans glisser sur une droite.
Si $AQ = k * AM = k * R$ avec $k > 1$, l'équation paramétrique d'une cycloïde allongée donc :

$$x = R(t - k * \sin(t));\ y = R(1 - k * \cos(t)) \text{ avec } k > 1$$

Avec Xcas, on tape :

```
R:=element(0..3);
k:=element(1..5);
plotparam(R*(t-k*sin(t)+i*(1-k*cos(t))),t,affichage=rouge);
```

18.1.4 Les cycloïdes

On peut faire une animation pour voir le déplacement d'un point `M` d'un cercle `C` de centre `A` et de rayon `R`, et d'un point `P` du rayon `AM` lorsque `C` roule sur l'axe des `x`.
On tape :

```
R:=element(0..3);
k:=element(0..5,0.84);
plotparam(R*(t-sin(t)+i*(1-cos(t))),t=-8..8,affichage=rouge);
plotparam(R*(t-k*sin(t)+i*(1-k*cos(t))),t=-8..8,affichage=vert);
animation(seq('cercle(R*u+i*R,R)',u,-8,8,0.5));
animation(seq('M:=point(R*(u-sin(u)+i*(1-cos(u))))',u,-8,8,0.5));
animation(seq('P:=point(R*(u-k*sin(u)+i*(1-k*cos(u))))',u,-8,8,0.5));
animation(seq('segment(R*u+i*R,R*(u+i-i*max(k,1)*exp(-i*u)))',u,-8,8,0.5));
```

On peut aussi faire une animation pour voir le déplacement d'un point `M` d'un cercle `C` de centre `A` et de rayon `R`, d'un point `P` du rayon `AM` et d'un point `Q` sur le prolongement du rayon `AM` lorsque `C` roule sur l'axe des `x`.
On tape :

```
R:=element(0..3);
k:=element(0 .. 1,0.84);
l:=element(1 .. 4,2);
plotparam(R*(t-sin(t)+i*(1-cos(t))),t=-10..10,affichage=rouge);
plotparam(R*(t-k*sin(t)+i*(1-k*cos(t))),t=-10..10,affichage=vert);
plotparam(R*(t-l*sin(t)+i*(1-l*cos(t))),t=-10..10,affichage=bleu);
animation(seq('cercle(R*u+i*R,R)',u,-10,10,0.5));
animation(seq('M:=point(R*(u-sin(u)+i*(1-cos(u))))',u,-10,10,0.5));
animation(seq('P:=point(R*(u-k*sin(u)+i*(1-k*cos(u))))',u,-10,10,0.5));
animation(seq('Q:=point(R*(u-l*sin(u)+i*(1-l*cos(u))))',u,-10,10,0.5));
animation(seq('segment( R*u+i*R, R*(u+i-i*l*exp(-i*u)))',u,-10,10,0.5));
```

18.2 Épicycloïde et hypocycloïde

18.2.1 Épicycloïde

Une épicycloïde est le lieu d'un point M situé sur un cercle C, de centre A et de rayon R, qui roule sans glisser sur un cercle C_0, de rayon R_0, lorsque C se trouve à l'extérieur de C_0.
Si le cercle C_0 est de centre O, si au départ M est en I sur Ox, si P est le point de contact de C avec C_0 lorsque C a tourné d'un angle u, P a tourné d'un angle t sur C_0, on a :
$\overrightarrow{IP} = R_0 t = Ru$,
$\overrightarrow{OA} = (R+R_0)(\cos(t)+i\sin(t)) = (R+R_0)\exp(it)$,
$\overrightarrow{PA} = R(\cos(t)+i\sin(t))$,
$\overrightarrow{AM}$=rotation$(A,u,\overrightarrow{AP}) = -R(\cos(t)+i\sin(t))(\cos(u)+i\sin(u)) =$
$-R(\cos(u+t)+i\sin(u+t)) = -R(\cos((R_0/R+1)t)+i\sin((R_0/R+1)t))$
On a :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = (R + R_0)(\exp(it)) - R\exp(i(R_0/R + 1)t)$
On pose $R_0/R + 1 = m$, on a $R + R_0 = Rm$.
Donc l'équation paramétrique d'une épicycloïde est :

$$x = R(m\cos(t) - \cos(mt));\ y = R(m\sin(t) - \sin(mt))$$

La courbe se referme si $2k\pi R_0 = 2n\pi R$ c'est à dire si le rapport R_0/R est rationnel.

Cas particuliers
$R = R_0$ on a une cardioïde,
$R = R_0/2$ on a une néphroïde de rebroussement,
Avec `Xcas`
On tape :

```
C:=cercle(0,3);
R:=element(0.1..4);
m:=3/R+1;
plotparam(R*m*cos(t)-R*cos(m*t)+i*(R*m*sin(t)-R*sin(m*t)),
          t=-10..10,affichage=rouge);
```

On a choisit $R_0 = 3$. On peut ainsi faire varier R et voir les 4 cas :
$R = 1$, $R = 1.5$, $R = 3$, $R = 4$. On peut faire une animation et voir le déplacement d'un point `M` d'un cercle `C` de centre `A` et de rayon `R` lorsque ce cercle roule à l'extérieur d'un cercle `C0` de centre `0` et de rayon `3`.
On tape :

```
C:=cercle(0,3);
R:=element(0..5);
m:=3/R+1;
plotparam(R*m*cos(t)-R*cos(m*t)+i*(R*m*sin(t)-R*sin(m*t)),
       t=-10..10,affichage=rouge);
animation(seq('cercle((3+R)*exp(i*v),R)',v,-10,10,0.5));
animation(seq('M:=point(R*m*cos(v)-R*cos(m*v)+
       i*(R*m*sin(v)-R*sin(m*v)))',v,-10,10,0.5));
```

18.2.2 Hypocycloïde

Une hypocycloïde est le lieu d'un point M situé sur un cercle C, de centre A et de rayon R, qui roule sans glisser sur un cercle C_0, de rayon $R_0 > R$, lorsque C se trouve à l'intérieur de C_0.
On peut changer R en $-R$ dans l'équation d'une épicycloïde ou refaire les calculs...
Si le cercle C_0 est de centre O, si au départ M est en I sur Ox, si P est le point de contact de C avec C_0 lorsque C a tourné d'un angle u, P a tourné d'un angle t sur C_0, on a :
$\overrightarrow{IP} = R_0t = -Ru$ (car u est négatif et R positif),
$\overrightarrow{OA} = (R_0 - R)(\cos(t) + i\sin(t))$,
$\overrightarrow{PA} = -R(\cos(t) + i\sin(t))$,
$\overrightarrow{AM}$=rotation$(A, u, \overrightarrow{AP}) = R(\cos(t) + i\sin(t))(\cos(u) + i\sin(u)) = R(\cos(u + t) + i\sin(u + t)) = -R(\cos((R_0/R - 1)t) + i\sin((R_0/R - 1)t))$

On a :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = (R_0 - R)(\cos(t) + i\sin(t)) - R(\cos((R_0/R - 1)t) + i\sin((R_0/R - 1)t))$
Si on pose $-R_0/R+1 = m$, l'équation paramétrique d'une hypocycloïde est donc :

$$x = -R(m\cos(t) - \cos(mt));\ y = -R(m\sin(t) - \sin(mt))$$

La courbe se referme si $2k\pi R_0 = 2n\pi R$ c'est à dire si le rapport R_0/R est rationnel.

Cas particuliers
$R = 2R_0/3$ on a une hypocycloïde à 3 rebroussements,
$R = R_0/4$ on a une astroïde.
Avec `Xcas`
On tape :

```
C:=cercle(0,3);
R:=element(0..2.9);
m:=-3/R+1;
plotparam(-R*m*cos(t)+R*cos(m*t)+i*(-R*m*sin(t)+R*sin(m*t)),
           t,affichage=rouge)
```

On a choisit $R_0 = 3$. On peut ainsi faire varier R et voir les 3 cas :
$R = 0.75$, $R = 1.2$, $R = 2$.

On peut faire une animation et voir le déplacement d'un point `M` d'un cercle `C` de centre `A` et de rayon `R` lorsque ce cercle roule à l'intérieur d'un cercle `C0` de centre `O` et de rayon `3`.
On tape :

```
C:=cercle(0,3);
R:=element(0..3);
m:=3/R+1;
plotparam(R*m*cos(t)-R*cos(m*t)+i*(R*m*sin(t)-R*sin(m*t)),
       t,affichage=rouge);
animation(seq('cercle((3-R)*exp(i*v),R)',v,-10,10,0.5));
animation(seq('M:=point(-R*m*cos(v)+R*cos(m*v)+
       i*(-R*m*sin(v)+R*sin(m*v)))',v,-10,10,0.5));
```

18.2.3 Epicycloïde et hypocycloïde

On peut unifier les 2 cas en prenant R négatif pour les hypocycloïde.
Avec `Xcas`
On tape :

```
C:=cercle(0,3);
R:=element(-3..4);
m:=3/R+1;
plotparam(R*m*cos(t)-R*cos(m*t)+i*(R*m*sin(t)-R*sin(m*t)),
          t=-10..10,affichage=rouge)
```

On a choisit $R_0 = 3$. On peut ainsi faire varier R et voir les différents cas :
$R = -1.2$, $R = -1$, $R = -0.75$, $R = 1$, $R = 1.5$, $R = 3$, $R = 4$. On peut faire une animation et voir le déplacement d'un point `M` d'un cercle `C` de centre `A` et de rayon `|R|` lorsque ce cercle roule (à l'intérieur si `R<0` et à l'extérieur si `R>0`) sur le cercle `C0` de centre `0` et de rayon `3`.
On tape :

```
C0:=cercle(0,3);
R:=element(-3..4);
m:=3/R+1;
plotparam(R*m*cos(t)-R*cos(m*t)+i*(R*m*sin(t)-R*sin(m*t)),
        t=-10..10,affichage=rouge);
animation(seq('cercle((3+R)*exp(i*v),R)',v,-10,10,0.5));
animation(seq('M:=point(R*m*cos(v)-R*cos(m*v)+
        i*(R*m*sin(v)-R*sin(m*v)))',v,-10,10,0.5));
animation(seq('segment((3+R)*exp(i*v),R*m*cos(v)-R*cos(m*v)+
        i*(R*m*sin(v)-R*sin(m*v)))',v,-10,10,0.5));
```

18.3 L'astroïde

On pourra se reporter à la session `astroide.xws`.

18.3.1 La courbe

Définition On déplace un segment AB de longueur constante a de façon que A soit sur $0x$ et B sur Oy.
L'astroïde est l'enveloppe de ce segment.
L'astroïde est aussi le lieu de la projection M de C sur AB, lorsque $OACB$ est un rectangle. Si $OACB$ est un rectangle et si t est l'angle $\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0C}$, on a :
$\overline{0A} = a\cos(t)$ et $\overline{0B} = a\sin(t)$
La droite AB a donc comme équation :
$x/(a\cos(t)) + y/(a\sin(t)) = 1$ ou encore
$x * tan(t) + y = a\sin(t)$
L'enveloppe de la droite AB est le lieu des points d'intersection de :
$x * \tan(t) + y = a\sin(t)$ et de $x/\cos(t)^2 = a\cos(t)$
donc $x = a\cos(t)^3$ et $y = a\sin(t) - a\sin(t) * \cos(t)^2 = a\sin(t)^3$.
L'astroïde a donc comme équation paramètrique : $x = a\cos(t)^3; y = a\sin(t)^3$.
On tape :
`plotparam(cos(t)^3+i*sin(t)^3,t)`

18.3.2 La longueur de cette courbe

On peut calculer la longueur d'un quart d'astroïde.
On a : $ds^2 = dx^2 + dy^2$
On tape :
`tlin(diff(a*cos(t)^3,t)^2+diff(a*sin(t)^3,t)^2)`
On obtient : `(9*a^2)/8+(-((9*a^2)/8))*cos(4*t)`

On tape :
`trigsin(halftan((9*a^2)/8+(-((9*a^2)/8))*cos(4*t)))`
On obtient : `9/4*a^2*sin((4*t)/2)^2`
Quand t varie de 0 à 2π, la longueur d'un quart d'astroïde est :
`normal(int( 3/2*a*sin(2*t),t,0,pi/2))`
On obtient : `3/2*a`
On a la longueur de l'astroïde est donc : `6*a`

18.4 Le trifolium de paramètres a et b

18.4.1 Définition géométrique

Soient un repère orthonormé $O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et 2 réels a et b.
Soient le cercle C de centre $J = (a, b)$ et passant par O et une droite d passant par O. d coupe C en P ($P \neq O$). Sur la parallèle à Ox menée par P, on définit M et N par $OM = ON = OP$.
Le lieu de M et N est un trifolium de paramètres a et b. On tape :

```
O:=point(0);
supposons(a=[1.0,-5,5,0.1]);
supposons(b=[0.5,-5,5,0.1]);
C:=cercle(point(2a+i*2b),O);
supposons(c=[1.53,(-pi)/2,pi/2,0.01]);
P:=inter_unique(C,d,[O]);
l:=simplify(tan2sincos(trigcos(trigtan(longueur(O,P)))));
M:=P+l;
N:=P-l;
trace(M);
trace(N);
m:=simplify(trigcos(trigtan(affixe(M))));
affichage(plotparam(m,c),1);
```

On obtient :
La valeur de `affixe(P)` apres simplification :
`2*(cos(c)+(i)*sin(c))*(a*cos(c)+b*sin(c))`
La valeur de l=`longueur(O,P)` apres simplification :
`2*a*cos(c)+2*b*sin(c)`
La valeur l est périodique en c de période 2π et donc selon les valeurs de a, b, c, la valeur de l est soit positive, soit négative.
et la valeur de m=`affixe(M)` :
`2*a*cos(c)^2+2*a*cos(c)+2*b*cos(c)*sin(c)+2*b*sin(c)+`
`(i)*(2*a*cos(c)*sin(c)-2*b*cos(c)^2+2*b)`
m est donc l'affixe de M quand $l > 0$ et l'affixe de N quand $l < 0$.

L'équation paramétrique du trifolium de paramètres a et b est donc :
`2*(cos(c)+(i)*sin(c)+1)*(a*cos(c)+b*sin(c))`, $c \in [-\pi; \pi]$.
On a :
$x(c) = 2(\cos(c) + 1)(a\cos(c) + b\sin(c))$
$y(c) = 2\sin(c)(a\cos(c) + b\sin(c))$
On tape dans un niveau de géométrie !

```
supposons(a=[3.1,-5,5,0.1])
supposons(b=[1.4,-5,5,0.1])
plotparam(2*(cos(c)+1)*(a*cos(c)+b*sin(c))+
i*(2*sin(c)*(a*cos(c)+b*sin(c))),c=-pi..pi)
```

On obtient le trifolium pour différentes valeurs de a et b.
Cas particulier b=0
L'équation paramétrique du trifolium de paramètres a et $b = 0$ est donc :
$x(c) = 2a(\cos(c) + 1)\cos(c) = a(\cos(2c) + 2\cos(c) + 1)$
$y(c) = 2a\sin(c)\cos(c) = a\sin(2c)$
On le retrouve dans l'exercice suivant mais dans un repère d'origine différente.

18.4.2 Exercice : le trifolium (avec $b = 0$)

Le plan est muni d'un repère orthonormé O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$. Soit C le cercle de centre O et de rayon r.
A tout point M de C on associe le point N de C tel que :
$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON}) = 2(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.
Soit P le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
Soit G le centre de gravité du triangle MNP.
Le lieu de G décrit un trifolium qui est une courbe d'équation paramétrique :
$x(t) = \frac{a}{3}(2\cos(t) + \cos(2t))$
$y(t) = \frac{a}{3}\sin(2t)$ On tape (prend r=4) :

```
C:=cercle(0,4)
supposons(a=[0.6,-5,5,0.1])
M:=point(4*exp(i*a))
N:=point(4*exp(2*i*a))
P:=point(4*exp(-i*a))
G:=isobarycentre(M,N,P)
lieu(G,a)
```

On obtient :

On tape :
`trigcos(re(affixe(G))+i*im(affixe(G)))`
On obtient :
`8/3*cos(a)+4/3*cos(a*2)+4*i/3*sin(a*2)`

18.5 Le folium de Descartes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$.
Étant donné p un nombre réel, soient la parabole P d'équation $(x+y)^2 = 2b(x-y)$ et la parabole p d'équation $(x-y)^2 = 2b(x+y)$.
Pour chaque u réel, la droite D d'équation $y = \tan(u)x$ coupe P en A et p en B.
Soit M le conjugué harmonique de O par rapport à A et B. Le lieu de M est un folium de Descartes de paramètre a.
On tape :

```
supposons(b=[0.375,-5,5,0.005]);
P:=parabole((x+y)^2-b*(x-y));
p:=parabole((x-y)^2-b*(x+y));
supposons(u=[0.2,-pi,pi,0.005]);
D:=droite(y=tan(u)*x);
A:=inter(D,P)[1];
B:=inter(D,p)[1];
M:=conj_harmonique(A,B,point(0));
```

```
trace(M);
L:=lieu(M,u):;affichage(L,1);
```

On obtient :

On tape :

```
m:=affixe(M)
```

On obtient :

```
((-i)*b*tan(u)^3-b*tan(u)^2+i*b*tan(u)+b)/(3*tan(u)^2+1)
```

On tape :

```
normal(abs(m))
```

On obtient :

```
((-tan(u)^2+1)*sqrt(tan(u)^2+1)*b)/(3*tan(u)^2+1)
```

Le folium de Descartes a donc comme équation polaire :

$r = b\frac{1-\tan(u)^2}{\cos(u)(1+3\tan(u)^2)}$

Remarque

Le folium de Descartes se déduit de la trisectrice de Mac-Laurin (d'équation polaire $r = b/3(4\cos(t) - 1/\cos(t))$ cf section suivante) par une affinité de direction Oy et de rapport $1/\sqrt{3}$.

En effet considérons l'affinité de direction Oy et de rapport $\sqrt{3}$ qui transforme P en M.

On a :

$x_M = x_P$ et $y_M = y_P * \sqrt(3)$
Donc $\tan(u) = \tan(t)/\sqrt(3)$ et $OM = x_M/\cos(t)$ et $OP = x_M/\cos(u)$
$OM = OP\cos(u)/\cos(t) = b(1-\tan(u)^2)/(3*\tan(u)^2+1)/\cos(t)$ On a $3\tan^2(u)) = \tan(t)^2$ donc
$OM = b/3*(3-\tan(t)^2)/(\tan(t)^2+1)/\cos(t)$
$OM = b/3*(3-\tan(t)^2)*\cos(t) = b/3*(3\cos(t)-\sin(t)^2/\cos(t))$
$OM = b/3*(3\cos(t)+\cos(t)-1/\cos(t)) = b/3(4\cos(t)-1/\cos(t))$
On tape :

```
affichage(plotpolar(0.6/3*(4*cos(t)-1/cos(t)),t),1)
plotpolar(0.6*(1-tan(u)^2)/cos(u)/(1+3*tan(u)^2),u)
```

On obtient en rouge la trisectrice de Mac-Laurin et en noir la folium de Descartes. La courbe en rouge se déduit de la courbe en noir par une affinité de direction Oy et de rapport $\sqrt{3}$.
:

18.6 La trisectrice de Mac-Laurin

La trisectrice de Mac-Laurin de paramètre a est la courbe d'équation paramétrique :
$x(t) := a\frac{3-t^2}{t^2+1}$
$y(t) := a\frac{t(3-t^2)}{t^2+1}$
Tracer sa représentation paramétrique et calculer l'aire de la boucle. Cette courbe a été étudié par Mac-Laurin vers 1742.
C'est une cubique circulaire unicursale. La boucle est obtenue pour $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
On tape dans un niveau de géométrie :

```
supposons(a=[-1.0,-5,5,0.1])
plotparam((3-t^2)*(1+i*t)/(t^2+1))
```

On obtient pour $a = -1$:

On tape :

```
int(2*t*a*(3-t^2)/(t^2+1)diff(a*(3-t^2)/(t^2+1),t),t,sqrt(3),0)
```

On obtient : `3*sqrt(3)*a^2`

18.6.1 Construction géométrique

On peur donner de cette courbe a plusieurs constructions géométriques.
En voici :
Soit a un nombre réel.
Dans un repère orthonormé $O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$, on considère une droite d et les points : $A(2a, 0)$, $S(3a, 0)$.
Soit P le point de d d'angle polaire t défini par $OP = PA$ et soit M le point de d défini par $AM = AP$.
Quel est le lieu de M ?
Dans un niveau de géométrie, on tape :

```
supposons(a=[1.0,-5,5,0.1]);
supposons(t=[0.5,-5,5,0.1]);
A:=point(2a);
S:=point(3a);
P:=point(a+i*a*tan(t));
O:=point(0);
d:=droite(y=tan(t)*x):;d;
M:=point(2a+a/cos(t)*exp(3*i*t));
```

```
trace(M);
triangle(A,P,M);
angle(O,A,P,"t");
```

On obtient selon les valeurs de t et pour $a = 1$:

Montrons que le lieu de M est la trisectrice de Mac-Laurin de paramètre a.
Les triangles OAP et PAM sont isocèles donc on a :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = t,\ (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PM}) = 2t,\ (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AM}) = 3t.$
Cette courbe à été utilisée pour avoir une solution graphique au problème de la

trisection de l'angle, d'où son nom de trisectrice.
Calculons $OP = PA = AM$:
On a : $\cos(t) = a/OP$ donc $AM = OP = a/\cos(t)$
Dans le repère orthonormé $A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$, l'équation polaire du lieu est donc $r = \dfrac{a}{\cos(\frac{\theta}{3})}$ (puisque $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AM}) = 3t = \theta$)
On retrouve alors l'aire de la boucle (`(3*sqrt(3))/2*a^2`) en tapant :
`int(int(r,r,0,a/cos(t/3)),t,0,pi)`
Le point M a donc comme coordonnées : $2a + a\cos(3t)/\cos(t), a\sin(3t)/\cos(t)$
Donc $OM^2 = 4a^2+a^2/\cos(t)^2+4a^2\cos(3t)/\cos(t)$ Comme $\cos(3t) = \cos(t)^3-3\cos(t)(1-\cos(t)^2) = 4\cos(t)^3 - 3\cos(t)$
On a $OM^2 = 4a^2 + a^2/\cos(t)^2 + 16a^2\cos(t)^2 - 12a^2 = (4a\cos(t) - a/\cos(t))^2$
Dans le repère orthonormé $O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$, l'équation polaire du lieu est donc :
$r = a(4\cos(t) - 1/\cos(t))$

Les coordonnées de M sont donc : $xM + iyM = r * exp(it)$
On tape :

```
z:=a*(4*cos(t)-1/cos(t))*exp(i*t)
xM:=re(z);yM:=im(z)
trigsin(xM*(xM^2+yM^2)-a*(3*xM^2-yM^2))
```

On obtient : `0`
L'équation cartésienne est donc :
$x(x^2 + y^2) - a(3x^2 - y^2) = 0$
ou encore : $y^2(x + a) = x^2(3a - x)$
Dans le repère orthonormé $O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$, l'équation paramétrique du lieu est donc en posant $y = tx$:
$x = a(3a - t^2)/(1 + t^2), y = t * x = at(3a - t^2)/(1 + t^2)$
On peut créer une animation qui montre que la trisectrice de Mac-laurin est le lieu des points qui sont l'intersection de 2 droites qui tournent l'une autour de O à la vitesse angulaire t et l'autre autour de A à la vitesse angulaire $3t$.
On tape (pour $a = 1$) :

```
d(t):=droite(y=tan(t)*x);D(t):=droite(y=tan(3*t)*(x-2));
M(t):=inter_unique(d(t),D(t),affichage=1+epaisseur_point_2)
```

puis sur un même niveau :

```
plotpolar(4*cos(t)-1/cos(t),t,-pi,pi);A:=point(2);
animation(seq([d(t),D(t),M(t)],t,-3,3,0.05))
```

On obtient :

On peut aussi montrer que la trisectrice de Mac-laurin est le lieu de la projection de O sur les tangentesà la parabole p d'équation $y^2 = 4ax - 12a^2$ (c'est la podaire de p par rapport à O). p a comme foyer le point de coordonnées $(4a, 0)$ et comme directrice la droite d'équation $x = 2a$.
On tape :

```
supposons(a=[1.3,0,5,0.1]);
p:=plotparam(3a+(t^2)/(4*a)+(i)*t,t=-10.0..10.0);
supposons(t=[-9.0,-10,10,0.2]);
T:=mediatrice(point(4a),point(2a+i*t));
M:=projection(T,point(0));;
trace(M);
segment(0,M);
O:=point(0);
```

On obtient :

Pour faire une animation, on tape dans un même niveau :

```
p:=plotparam(3+(t^2)/(4)+(i)*t,t=-10.0..10.0);
plotpolar(4*cos(t)-1/cos(t),t,-pi,pi);O:=point(0);
animation(seq([mediatrice(point(4),point(2+i*t)),
segment(M:=projection(T,O),O),
affichage(M,1+epaisseur_point_2)],t,-10,10,0.1))
```

et on obtient l'animation souhaitée. **Autre définition** Soit le cercle C de centre $(4a, 0)$ et la droite D d'équation $x = -2a$. Un droite d pivote autour de O et coupe C en P et D en Q. Le milieu M de PQ décrit alors une trisectrice de Mac-Laurin de paramètre a, de point double O et d'asymptote $x = -a$.
On tape :

```
supposons(a=[1.3,0,5,0.1]);
p:=plotparam(3a+(t^2)/(4*a)+(i)*t,t=-10.0..10.0);
cercle(4*a,4*a);
D:=droite(x=-2a);
supposons(t=[-9.0,-10,10,0.2]);
d:=droite(y=tan(t)*x):;d
P:=point(8a*cos(t)*exp(i*t));
Q:=point(-2a*(1+i*tan(t)));
M:=milieu(P,Q);
trace(M);
O:=point(0);
```

On obtient :

18.7 Un exercice

18.7.1 L'énoncé

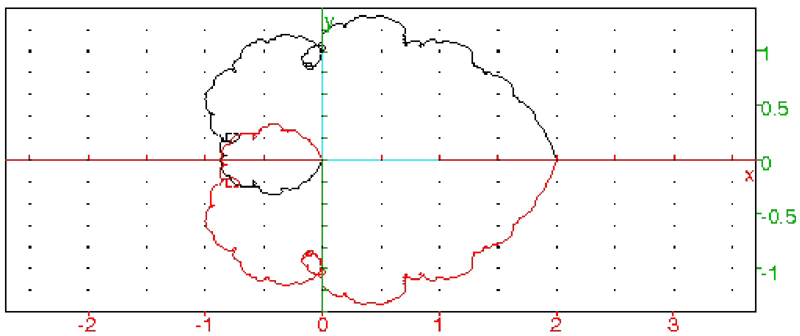
On considère la fonction g $\mathbb{R}->\mathbb{C}$ définie par : $g(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i2^nt}}{2^n}$

1. Montrer que g est périodique.
   Calculer $g(-t)$ et $\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t)|$.
   Majorer l'erreur commise lorsqu'on prend : $\sum_{n=0}^{20}\frac{e^{i2^nt}}{2^n}$ comme valeur approchée de $g(t)$

2. En utilisant `Xcas` dessiner l'image de $\mathbb{R}$ par cette approximation de g.

18.7.2 Le corrigé

1. On a $g(t+2\pi)=g(t)$ donc g est périodique de période 2π.
   On a $g(-t)=\overline{g(t)}$.
   On a $|\frac{e^{i2^nt}}{2^n}|<\frac{1}{2^n}$ donc $\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t)|<=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=2$.
   Si on prend : $\sum_{n=0}^{20}\frac{e^{i2^nt}}{2^n}$ comme valeur approchée de $g(t)$ l'erreur commise est inférieure à : $\sum_{n=21}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{20}}<1e-06$
2. On définit la fonction g et on tape :
   `g(t):=sum(exp(i*2^n*t)/2^n,n=0..20)`
   L'image de $\mathbb{R}$ par g est la courbe en paramétrique définie par g. On tape :
   `plotparam(g(t),t=0..pi);plotparam(g(t),t=pi..2pi,affichage=1)`
   On visualise la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des x, symétrie due au fait que $g(-t)=\overline{g(t)}$ et on obtient :



18.8 Deux exercices

1. On considère la courbe paramétrée suivante :

$$x(t)=\frac{t^2-2t+3}{t^2-2t},\quad y(t)=\frac{t^2-3}{t}$$

   (a) Faire un double tableau de variation pour $x(t)$ et $y(t)$.

   (b) Étudier les branches infinies.

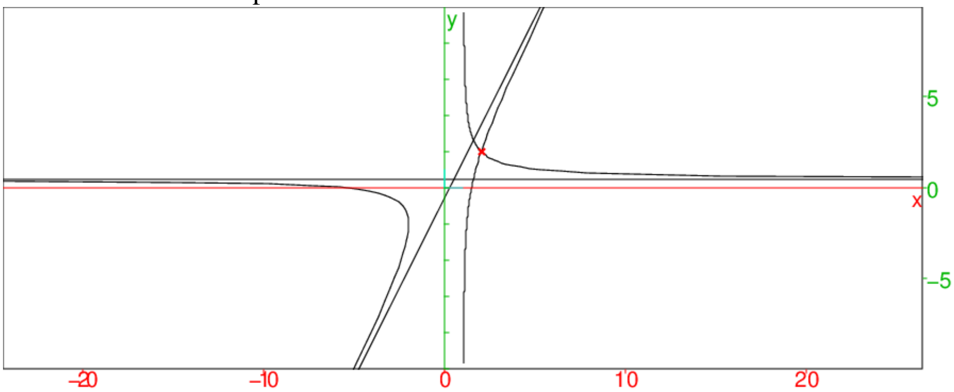
   (c) Tracer la courbe.

   Solution avec `Xcas` :
   $x(t)$ est définie pour $t\in]-\infty,0[\cup]0,2[\cup]2,\infty[$.
   $y(t)$ est définie pour $t\in]-\infty,0[\cup]0,\infty[$.
   On tape :
   `x(t):=(t^2-2*t+3)/(t^2-2*t)`
   `y(t):=(t^2-3)/t`

`factor(diff(x(t),t))`
On obtient :
`-6*(-1+t)/(t^2*(-2+t)^2)`
Donc $x(t)$ est croissante sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1]$ et est décroissante sur $]1, 2[\cup]2, \infty[$ et
`normal(diff(y(t),t))`
On obtient :
`(3+t^2)/t^2`
Donc $y(t)$ est croissante sur $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$
On tape :
`limit(x(t),t,-inf),limit(y(t),t,-inf)`
On obtient :
`1,-infinity`
On tape :
`limit(x(t),t,-inf),limit(y(t),t,-inf)`
On obtient :
`1,infinity`
Donc $x = 1$ est une asymptote lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
On tape :
`limit(x(t),t,0,-1),limit(y(t),t,0,-1)`
On obtient :
`+infinity,+infinity`
On tape :
`limit(x(t),t,0,1),limit(y(t),t,0,1)`
On obtient :
`-infinity,-infinity`
On tape :
`limit(y(t)/x(t),t,0,-1),limit(y(t)/x(t),t,0,1)`
On obtient :
`2,2`
On tape :
`limit(y(t)-2*x(t),t,0,-1),limit(y(t)-2*x(t),t,0,1)`
On obtient :
`-1/2,-1/2`
Donc $y = 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote lorsque t tend vers 0.
On tape :
`limit(x(t),t,2,-1),y(2))`
On obtient :
`-infinity,1/2`
On tape :
`limit(x(t),t,2,1),y(2))`
On obtient :
`+infinity,1/2`
Donc $y = \dfrac{1}{2}$ est une asymptote lorsque t tend vers 2.
On tape pour avoir la courbe les asymptotes et le point double :

```
plotparam(x(t)+i*y(t),t),droite(y=2x-1/2)
point(2,2,affichage=1+epaisseur_point_2)
```

On obtient avec un repère orthonormé :



2. On considère la courbe paramétrée suivante :

$$x(t) = t, \;\; y(t) = \frac{t^2}{4}$$

   (a) Calculer le repère de Frenet $\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t)$ au point de paramètre t.

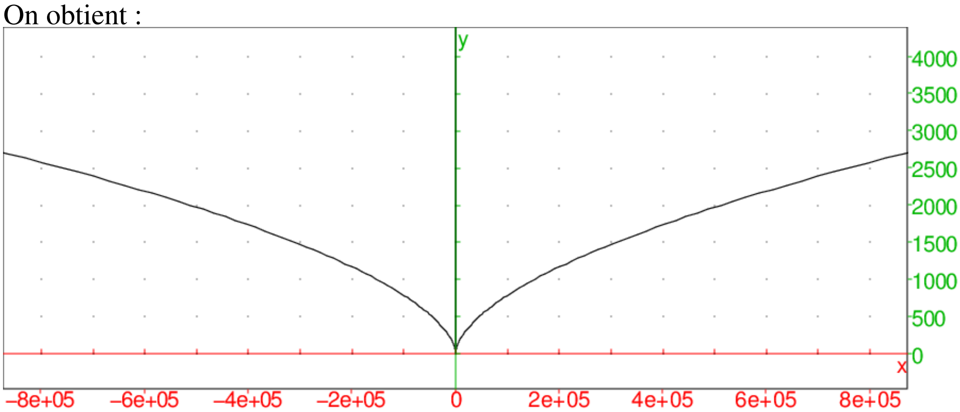
   (b) Calculer la courbure au point de paramètre t.

   (c) Pour quelle(s) valeur(s) de t la courbure est-elle maximale ?

   (d) Donner une paramétrisation de la developée, et préciser ses points singuliers.

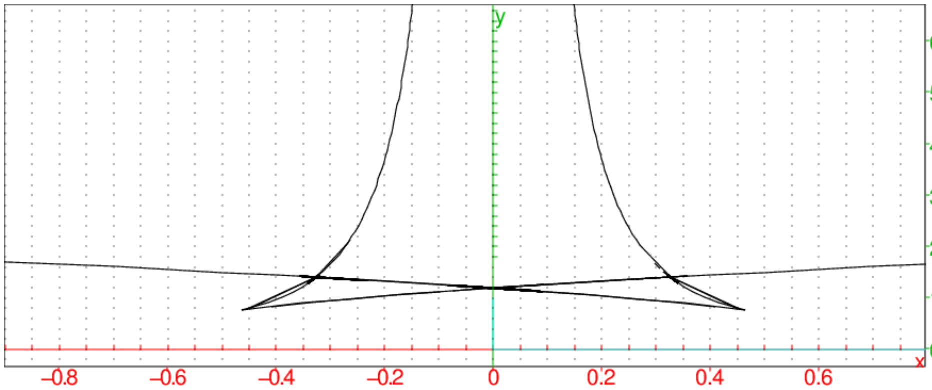
Solution avec `Xcas` :
On tape :
```
x(t):=t;y(t):=t^4/4
T1:=[diff(x(t),t),diff(y(t),t)
```
On obtient :
```
[1,t^3]
```
On a donc :
$ds = \sqrt{1+t^6}dt$
On tape :
```
T:=T1/l2norm(T1)
```
On obtient :
```
[1/(sqrt(1+t^6)),t^3/(sqrt(1+t^6))]
```

On tape :
```
normal(courbure([t,t^4/4],t))
```
On obtient :
```
3*t^2*sqrt(1+t^6)/(1+2*t^6+t^12)
```
On vérifie, on tape :
```
N1:=diff(T,t)/sqrt(1+t^6)
```
On obtient :
```
[-3*t^5/(1+2*t^6+t^12),3*t^2/(1+2*t^6+t^12)]
```
La courbure est : `C:=1/R` avec `R:=1/l2norm(N1)`, donc pour avoir la courbure, on tape :
```
C:=normal(l2norm(N1))
```
On obtient :

`3*t^2*sqrt(1+t^6)/(1+2*t^6+t^12)`
On tape pour avoir `N` :
`N:=N1/l2norm(N1)`
On obtient :
`[-t^3*sqrt(1+t^6)/(1+t^6),(sqrt(1+t^6))/(1+t^6)]`
On tape :
`normal(diff(C,t))`
On obtient :
`(6*t-21*t^7)*sqrt(1+t^6)/(1+3*t^6+3*t^12+t^18)`
On tape :
`solve(6*t-21*t^7=0,t)`
On obtient :
`[-(2/7)^(1/6),0,(2/7)^(1/6)`≃0.811562539801]
`C` est une fonction paire de t qui est nulle en $t = 0$ et et pour avoir sa valeur en $t = (2/7)\hat{}(1/6), 0, (2/7)\hat{}(1/6)$:
On tape :
`subst(C,t,(2/7)^(1/6))`
On obtient :
`49*(2/7)^(1/3)*sqrt(9/7)/27`≃1.35534087381
On tape :
`D:=developpee([t,t^4/4],t)`
On obtient :


On tape :
`evalc(parameq(D))`
On obtient :
`(8*t^3-4*t^9)/(12*t^2)+i*(4+7*t^6)/(12*t^2)`
On vérifie, puisque D est le lieu du centre de courbure Ω on a :
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M\Omega} = \overrightarrow{O\Omega}$.
On tape :
`Omega:=normal([t,t^4/4]+N/C))`
On obtient les coordonnèes de l'équation paramétrique de D :
`[(2*t-t^7)/3,(4+7*t^6)/(12*t^2)]`
Si on chande t en $-t$ on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc D est symétrique par rapport à Oy. Pour vavoir les coordonnées du vecteur $x'(t), y'(t)$ `normal(diff([(2*t-t^7)/3,(4+7*t^6)/(12*t^2)],t))`
On obtient :
`[2/3-7/3*t^6,(-2+7*t^6)/(3*t^3)]`

Pour avoir points singuliers de la developée, on tape :
On tape :
`solve([2/3-7/3*t^6=0,(-2+7*t^6)/(3*t^3)=0],t)`
On obtient des valeurs opposées de t :
`[-(2/7)^(1/6),(2/7)^(1/6)]`
On fait les calculs pour $t = (2/7)^(1/6)$.
Pour avoir les coordonnées du point singulier $t = (2/7)^(1/6)$, on tape :
`normal(subst([(2*t-t^7)/3,(4+7*t^6)/(12*t^2)],t=(2/7)^(1/6)))`
On obtient :
`[4*33614^(1/6)/49,(98^(1/3))^2/28]`
On note :
$OM = V = (x(t), y(t))$,
$\dfrac{dOM}{dt} = V' = (x'(t), y'(t))$,
$\dfrac{d^2OM}{dt^2} = V'' = (x''(t), y''(t))$ etc...
Pour avoir les coordonnées du vecteur V'', on tape :
`normal(diff([2/3-7/3*t^6,(-2+7*t^6)/(3*t^3)],t))`
On obtient V'' :
`[-14*t^5,(2+7*t^6)/t^4]`
V'' est non nul en $t = (2/7)^(1/6)$, on a donc un point de rebroussement.
Pour avoir les coordonnées du vecteur V''', on tape :
`normal(diff([-14*t^5,(2+7*t^6)/t^4],t))`
On obtient V''' :
`[-70*t^4,(-8+14*t^6)/t^5]`
V''' est non nul en $t = (2/7)^(1/6)$, donc on a un point de rebroussement de première espèce.
Les 2 points singuliers sont des points de rebroussement de première espèce.
On ne le voit pas sur le graphe de D. On va faire un graphique plud précis en cherchant l'équation de D.
On tape :
`equation(D)`
On obtient :
`-186624+221184*y^3+1778112*x^2*y-823543*x^6-65536*y^6-1505280*x^2*y^4-3226944*x^4*y^2+442368*x^2*y^7=0`
On tape :
```
f(x,y):=gauche(equation(D))
plotimplicit(f(x,y),[x,y])
```
On obtient :


y
6
5
4
3
2
1
0
x
–0.8
–0.6
–0.4
–0.2
0
0.2
0.4
0.6

Chapitre 19

Exemples de courbes en polaire

On donne ici les équations en polaire de différentes courbes.

19.1 La droite

$$r = \frac{1}{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)}$$

19.2 Le cercle passant par O

$$r = a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$$

19.3 Conique

19.3.1 Conique de foyer O

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$

19.3.2 Conique générale

$$r = \frac{1}{a + b\cos(\theta) + c\sin(\theta)}$$

19.4 Conchoïde de courbes

19.4.1 Définition

On appelle conchoïde d'une courbe (C) par rapport à un point O le lieu (Γ) des points M et N que l'on obtient en portant sur la droite OP : $\overline{PM} = -\overline{PN} = a$ lorsque P décrit la courbe C et que a a une valeur constante.
Si l'équation polaire de C est $r = f(\theta)$, celle de (Γ) est : $r = f(\theta) \pm a$.
Remarque
Si $f(\theta - \pi) = -f(\theta)$ alors le double signe est inutile. En effet un point K de coordonnées polaires r, θ est aussi et le point K_1 de coordonnées polaires $-r, \theta+\pi$.
Si on considère :
le point M de coordonnées polaires :

$f(\theta) + a, \theta$ et
$\theta_1 = \theta + \pi$ On a :
$f(\theta)+a = f(\theta_1-\pi)+a = -f(\theta_1)+a = -(f(\theta_1)-a)$ le point M de coordonnées polaires $f(\theta) + a, \theta$ est donc identique au point de coordonnées polaires :
$-(f(\theta_1) - a, \theta)$ qui est le point N de coordonnées polaires $f(\theta_1) - a, \theta_1$.

19.4.2 Conchoïde de droite ou conchoïde de Nicomède

Soient une droite d, un point O non situé sur d et un nombre réel a.
La conchoïde de Nicomède est le lieu (Γ) des points M et N que l'on obtient en portant sur la droite OP : $\overline{PM} = -\overline{PN} = a$ lorsque P décrit la droite d et que a a une valeur constante.
Soit h la distance de O à la droite d.
La conchoïde de Nicomède a comme équation :

$$r = h/\cos(\theta) + a$$

Le double signe est inutile car $\cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta)$.
Avec `Xcas`
On tape :

```
O:=point(0,0);
d:=droite(x=3);
a:=element(1..5);
plotpolar(3/cos(t)+a,t,affichage=rouge)
```

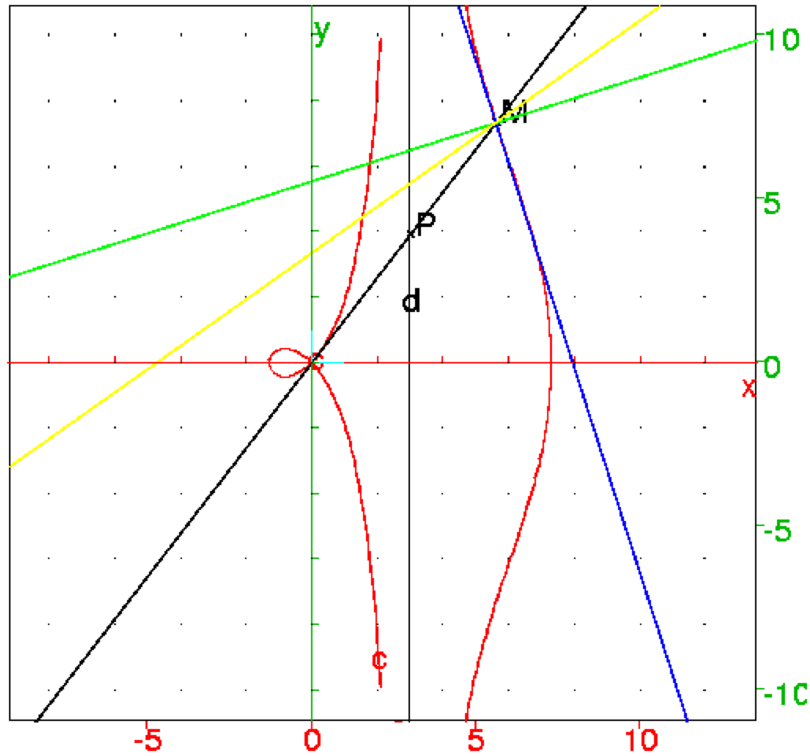
On a choisit $h = 3$. On peut ainsi faire varier a et voir les 3 cas :
$h < a$, $h = a$, $h > a$. On peut trouver l'équation cartésienne :
$r = rh/x + a$ donc
$r - rh/x = r(x - h)/x = a$ donc

$$(x^2 + y^2)(x - h)^2 - a^2x^2 = 0$$

c'est donc une quartique. On peut faire une animation et voir la construction de la courbe quand `P` se déplace sur la droite `d`.
On ouvre un écran de géométrie 2D et on tape (on a choisit $h = 3$ et a entre 1 et 5) pour faire une animation (ne pas oublier de mettre `animate` à 0.5 à l'aide du bouton `cfg`) :

```
O:=point(0,0);
d:=droite(x=3):;d;
supposons(a=[4.3,-5.0,5.0,0.0]);
plotpolar(3/cos(t)+a,t,affichage=rouge);
T(a,u,x):=(3/(-a*sin(u)*cos(u)^2)-cos(u)/sin(u))*x+
(a+3/cos(u))^2/(a*sin(u));
animation(seq('droite(y=tan(u)*x)',u,-10,10,0.1));
animation(seq('P:=point(3+i*tan(u)*3)',u,-10,10,0.1));
animation(seq('M:=point((3/cos(u)+a)*exp(i*u))',u,-10,10,0.1));
animation(seq('droite(y=T(a,u,x),affichage=vert)',u,-10,10,0.1));
```

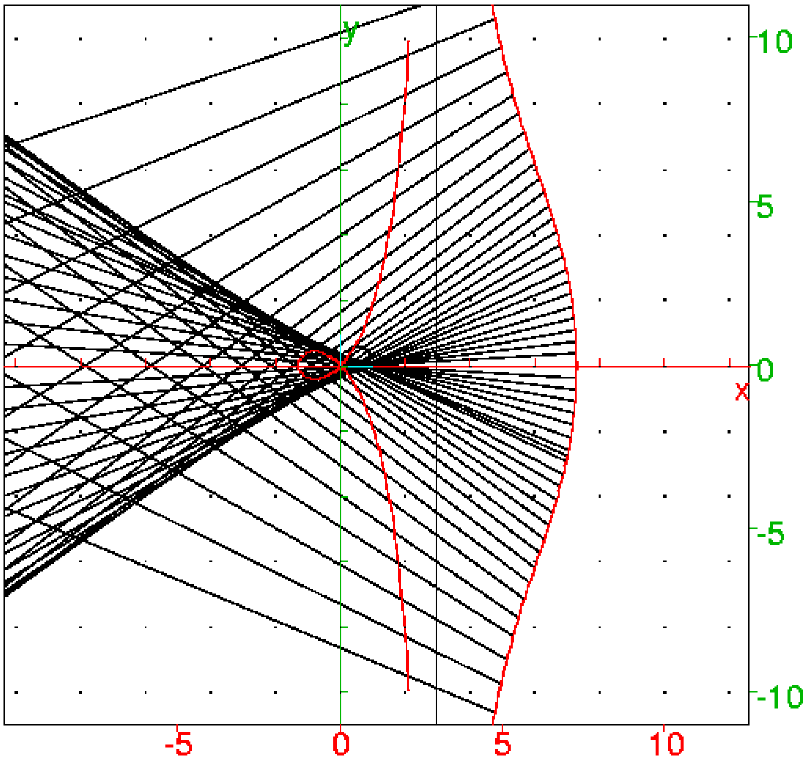
On obtient :
`La conchoïde de Nicomède (en rouge) :`



On suppose maintenant que des rayons parallèles à l'axe des y se réfléchissent sur la deuxième nappe (lorsque $-\pi/2 < \theta < \pi/2$).
Pour avoir la trace des rayons réfléchis, on tape :

```
O:=point(0,0);
d:=droite(x=3):;d;
supposons(a=[4.3,-5.0,5.0,0.0]);
plotpolar(3/cos(t)+a,t,affichage=rouge);
T(a,u,x):=(3/(-a*sin(u)*cos(u)^2)-cos(u)/sin(u))*x+
(a+3/cos(u))^2/(a*sin(u));
N:=unapply(equal2list(equation(perpendiculaire(
                M,droite(y=T(a,u,x)))))[1],[a,u,x]);
//N(a,u,x):=(a*sin(u)*cos(u)^2)/(3+a*cos(u)^3)*x+
//(9*tan(u)+3*a*sin(u))/(3+a*cos(u)^3);
supposons(u:=[1.2,(-pi)/2,pi/2,0.05]);
M:=point((3/cos(u)+a)*exp(i*u));
dd:=symetrie(droite(y=N(a,u,x)),
     demi_droite(M,point(i*(3/cos(u)+a)*sin(u)))):;
trace(dd);
```

On obtient quand on fait bouger le curseur `u` pour avoir la trace des rayons réfléchis :



`Les rayons réfléchis sur une conchoïde de Nicomède`

19.4.3 Conchoïde de cercle

On construit ainsi le limaçon de Pascal.
Soit un cercle C de rayon R, un point O situé sur C et un nombre réel a. Le limaçon de Pascal est le lieu (Γ) des points M et N que l'on obtient en portant sur la droite OP : $\overline{PM} = -\overline{PN} = a$ lorsque P décrit le cercle C et que a a une valeur constante.

Une conchoïde de cercle a comme équation :

$$r = 2R\cos(\theta) + a$$

Le double signe est inutile car $\cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta)$.
Avec `Xcas`
On tape :

```
O:=point(0,0);
C:=cercle(3,3);
a:=element(1..5);
plotpolar(6*cos(t)+a,t,affichage=rouge);
```

On a choisit $R = 3$. On peut ainsi faire varier a et voir les 3 cas :
$2R < a$, $2R = a$, $2R > a$.

Lorsque $2R = a$ on a $r = 2R(\cos(\theta) + 1) = a(\cos(\theta) + 1)$ c'est donc une cardioïde.
On peut faire une animation et voir et les points `M`, `N` et la construction de la courbe quand `P` se déplace sur le cercle `C`.
On tape :

```
O:=point(0,0);
C:=cercle(3,3);
a:=element(1..5);
plotpolar(6*cos(t)+a,t,affichage=rouge);
animation(seq('droite(y=tan(u)*x)',u=-10..10));
animation(seq('P:=point(6*cos(u)*exp(i*u))',u,-10,10));
animation(seq('M:=point((6*cos(u)+a)*exp(i*u))',u,-10,10));
animation(seq('N:=point((6*cos(u)-a)*exp(i*u))',u,-10,10));
```

19.5 Cissoïde droite et strophoïde droite

19.5.1 Cissoïde droite

Soient une droite d, un point O non situé sur d et H la projection orthogonale de O sur d. Soit $h = OH$ la distance de O à la droite d et C le cercle de diamètre OH.
Soit P un point de d et N l'intersection de OP avec C. Lorsque P décrit la droite d, le lieu de M, obtenu en portant sur OP, $OM = NP$ est une cissoïde droite.
Si O est l'origine, OH l'axe des x et t l'angle de OP avec Ox, on a :
$P = point(h/\cos(t) * \exp(i * t))$, $N = point(h * \cos(t) * \exp(i * t))$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP} = h*\exp(i*t)*(1/\cos(t)-\cos(t)) = h*\exp(i*t)*(1-\cos(t)^2)/\cos(t) = x + i * y = r * \exp(i * t)$ Donc :
$x = h * \sin(t)^2$ et $y = h * \tan(t) * \sin(t)^2$ et
$r = h * \sin(t)^2/\cos(t)$
donc l'équation polaire de la cissoïde droite est :
$r = h * \sin(t)^2/\cos(t)$.

Avec `Xcas`
On tape :

```
O:=point(0,0);
h:=element(0..6);
d:=droite(x=h);
cercle(0,point(h));
plotpolar(h*sin(t)^2/cos(t),t,affichage=rouge);
```

Cette courbe ressemble à un morceau de conchoïde de droite lorsque $a < h$.

Un exemple de TP : la cissoïde ou la duplication du cube
Dans un repère orthonormé O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, on considère le point A de coordonnées

(1,0), C le cercle de diamétre OA et la droite D d'équation $x = 1$.
Soit un point $N = 1 + ia$ sur D. La droite ON coupe C en P.
Trouver les équations cartésienne, paramétrique et polaire du lieu de M défini par : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN}$.

Avec Xcas, on tape dans un niveau de géométrie 2d :

```
C:=cercle(0,point(1))
D:=droite(x=1):;D
supposons(a=[-2.7,-5,5,0.1]);
N:=element(D,a)
d0:=droite(0,N)
P:=inter_unique(C,d0)
M:=point(N-P)
L:=lieu(M,N)
affichage(L,1)
equation(L)
parameq(L)
```

On obtient :
et comme équation :
`-x^3-x*y^2+y^2`
et comme équation paramétrique :
`((i)*t^2)/(t+i)`
Donc l'équation paramétrique est :
$x(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}, y(t) = \dfrac{t^3}{t^2+1}$
L'équation polaire est alors :
$r =$ `abs(((i)*t^2)/(t+i))`
Donc l'équation polaire est :

$r = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$

Remarque

On peut aussi mettre `trace(M)` comme derniére instruction pour voir comment `M` se déplace et qui donne en commentaire les coordonnées de `M` en fonction de `a`.

On tape :

```
equation(droite(A,M))
```

On obtient :

```
y=((-a^3)*x+a^3)
```

La duplication du cube

Comment construire un cube de volume égal au double du volume d'un cube donné de coté 1 ?

Il faut construire un segment de longueur $2^{1/3}$.

On sait que cette construction est impossible avec la règle et le compas...mais la représentation graphique L de la cissoïde permet de résoudre ce problème :

Soit :

```
Q:=point(2*i)
B:=inter_unique(droite(A,Q),L,[A])
N:=inter_unique(droite(O,B),D,[O])
longueur(A,N)
```

On trouve pour `longueur(A,N)` :

```
2^(1/3)
```

en effet si $a = y/x$, et si $M(a) \in L$ (L=la cissoïde), la droite $OM(a)$ coupe la droite $D(x = 1)$ en un point de coordonnées $(1, a)$ et la droite $AM(a)$ coupe la droite $x = 0$ en un point Q de coordonnées (O, a^3) (puisque $AM(a)$ a comme équation $y = ((-a^3) * x + a^3)y$).

Réciproquement, soient $Q = (0, a)$ et B le point d'intersection de la droite AQ avec la cissoïde. La droite OB coupe D en $P = (1, a^{1/3})$.

19.5.2 Strophoïde droite

Soient une droite d, un point O non situé sur d et H la projection orthogonale de O sur d. Soit $h = OH$ la distance de O à la droite d .
Soit P un point de d. Lorsque P décrit la droite d, le point M de la droite OP tel que $\overline{PM} = overlineHP$ est une strophoïde droite.
Si O est l'origine, OH l'axe des x, et t l'angle de OP avec Ox, on a :
$P = point(h/\cos(t) * \exp(i * t)) = point(h * (1 + i * \tan(t)))$
$|OP| = h/\cos(t)$
$H = point(h)$
$PH = h * \tan(t)$
On a :
$\overline{OM} = \overline{OP} + overlineHP$
donc :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP} * \cos(t) * \tan(t)) = \overrightarrow{OP} * (1 + \sin(t))$
Donc on a :
$\overrightarrow{OM} = h * (1 + \sin(t))/\cos(t) * \exp(i * t)) = r * \exp(i * t)$
donc l'équation polaire de la strophoïde droite est :
$r = h * (1 + \sin(t))/\cos(t)$.
Cette courbe ressemble à un morceau de conchoïde de droite lorsque $a > h$. **Remarque**
Si on prend l'origine en H on a comme équation polaire :
$r = -h * \cos(2 * t))/\cos(t)$.

Avec `Xcas`
On peut faire une animation et voir la construction de la courbe quand `P` se déplace sur la droite `d`.
On tape :

```
O:=point(0,0);
h:=element(1..5);
d:=droite(x=h);
plotpolar(h*(1+sin(t))/cos(t),t,affichage=rouge);
animation(seq('droite(y=tan(u)*x)',u,-10,10,0.5));
animation(seq('P:=point(h+i*tan(u)*h)',u,-10,10,0.5));
animation(seq('M:=point(h*(1+sin(u))/cos(u))*exp(i*u)',u,-10,10,0.5));
```

19.6 Ovale de Cassini

19.6.1 Définition

Étant donnés deux points F_1 et F_2 et un nombre réel k, le lieu de M de coordonnées $(x; y)$ tel que $MF_1 * MF_2 = k^2$ est une ovale de Cassini.
Si O est le milieu de $F1F2$ et $OF1 = c$, on a :
$MF_1^2 = (x + c)^2 + y^2$ et $MF_2^2 = (x - c)^2 + y^2$ donc
$MF_1^2 * MF_2^2 = ((x + c)^2 + y^2) * ((x - c)^2 + y^2) =$
$c^4 - 2 * c^2 * x^2 + 2 * c^2 * y^2 + (x^2 + y^2)^2$ Alors le lieu de M a pour équation :
$(x^2 + y^2)^2 - 2 * c^2 * (x^2 - y^2) = k^4 - c^4$
ou encore

$(x^2+y^2+c^2)^2 = 4*c^2*x^2+k^4$

19.6.2 Lemniscate de Bernoulli

Une lemniscate de Bernoulli est une ovale de Cassini avec :
$k = OF1 = c$.
Posons $a = c*\sqrt{2}$.
Donc c'est le lieu de M tel que : $MF1*MF2 = OF1^2$ et on a :
$(x^2+y^2)^2 = a^2*(x^2-y^2)$
si $x = r*\cos(t)$ et $y = r*\sin(t)$ on a : $r^4 = a^2*r^2*(\cos(t)^2-\sin(t)^2) = a^2*r^2*\cos(2*t)$ donc
$r^2 = a^2*\cos(2*t)$
L'équation polaire d'une lemniscate de Bernouilli est :
$r = \pm a*\sqrt{\cos(2*t)}$

Avec `Xcas`
On tape :

```
O:=point(0,0);
a:=element(1..5);
F1:=point(-a*sqrt(2)/2,0);
F2:=point(a*sqrt(2)/2,0);
plotpolar(a*sqrt(cos(2*t)),t=0..2*pi);
```

19.7 Limaçon de Pascal

L'équation cartésienne du limaçon de Pascal est :
$(x^2+y^2-a*x)^2 = b^2*(x^2+y^2)$
L'équation polaire du limaçon de Pascal est :
$r = a*\cos(t)+b$ **Avec** `Xcas`
On tape :

```
a:=element(1..5);
b:=element(0..5);
plotpolar(a*cos(t)+b,t=-10..10);
```

19.8 Cardioïde

19.8.1 Équations d'une cardioïde

Soit la cardioïde de paramètre a ayant sont point de rebroussement en O et passant par le point $A = 2a$. Son équation cartésienne est :
$(x^2+y^2)^2-2*a*x*(x^2+y^2)-a^2*y^2$
Son équation paramétrique est :
$x = a*(1+\cos(t))*\cos(t) = (2*\cos(t)+\cos(2t)+1)*a/2$,
$y = a*(1+\cos(t))*\sin(t) = (2*\sin(t)+\sin(2t)+1)*a/2$. Son équation

polaire est :
$r = a * (1 + \cos(t))$.

Une cardioïde est le lieu d'un point M situé sur un cercle de rayon $a/2$ qui roule sans glisser sur un cercle fixe de même rayon et de centre $a/2$.
On tape :

```
assume(t=[1.570796325,0,2*pi]);
cercle(0,1);
cercle(2*exp(i*t),1);
A:=point(2*exp(i*t)-exp(2*i*t));
plotparam(affixe(A),t)
//lieu(A,t);
```

On obtient une cardioïde de paramètre $a = 2$ ayant sont point de rebroussement en 1 et passant par le point $A = -3$.
On peut se reporter à la section 18.2.1 pour voir les animations sur les épicycloïdes.

19.8.2 La longueur d'une cardioïde

La cardioïde a pour équation polaire $r = a(\cos(t) + 1)$. On peut calculer la longueur d'une cardioïde.
On a :
$ds^2 = dr^2 + r^2dt^2$
On tape :
`normal(diff(a*(cos(t)+1),t)^2+(a*(cos(t)+1))^2)`
On obtient :
`a^2*cos(t)^2+2*a^2*cos(t)+a^2*sin(t)^2+a^2`
On tape :
`trigcos(halftan(trigcos(a^2*cos(t)^2+2*a^2*cos(t)+a^2*sin(t)^2+a^2)))`
On obtient :
`4*a^2*cos(t/2)^2`
On tape :
`2*int(2*a*cos(t/2),t,0,pi)`
On obtient :
`2*4*a`
La longueur de la cardioïde d'équation $r = a(\cos(\theta) + 1)$ est donc $8 * a$.

19.9 La cycloïde

```
t:=element(0 .. 7,0);
cercle(t+i,1);
A:=point(t+i-i*exp(-(i)*t));
lieu(A,t);
```

19.10 La Néphroïde

```
t:=element(0 .. 7,0);
cercle(0,2);
```

```
cercle(3*exp(i*t),1);
A:=point(3*exp(i*t)-exp(3*i*t))
lieu(A,t);
```

19.11 L'hypocycloïde à 3 rebroussements

```
t:=element(0 .. 7,0);
cercle(0,3);
cercle(2exp(i*t),1);
A:=point(2*exp(i*t)+exp(-2*i*t));
lieu(A,t);
```

19.12 L'astroïde

```
t:=element(0 .. 7,0);
cercle(0,2);
cercle(3/2*exp(i*t),1/2);
A:=point(3/2*exp(i*t)+1/2*exp(-3*i*t));
lieu(A,t);
```

19.13 Les rosaces

Ce sont les courbes qui ont comme équation polaire $r = a * \sin(m * t)$ et l'origine est le centre de la rosace.
Lorsque m est rationnel ces courbes se referment et lorsque m est irrationnel ces courbes sont formées de boucles qui se déduisent l'une de l'autre par des rotations de centre O et d'angle π/m

19.13.1 Rosace à 4 boucles

Cette rosace a pour équation :
$r = a * \sin(2 * t)$
En coordonnées cartésienne son équation est :
$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$

19.13.2 Une rosace à 10 boucles

Cette rosace a pour équation :
$r = a * \sin(5/2 * t)$

19.13.3 Une rosace à une infinité de boucles

On trace la rosace qui a pour équation :
$r = a * \sin(sqrt(2) * t)$
Avec `Xcas`
On tape :

```
a:=element(1..5);
m:=element(1..5);
plotpolar(a*sin(m*t),t=-10..10);
```

19.14 Les courbes de Moritz

Ce sont les courbes en forme de fleurs qui ont comme équation polaire $r = a * \cos(m * t) + b$ et l'origine est le centre de la fleur.
Lorsque m est rationnel ces courbes se referment et lorsque m est irrationnel ces courbes sont formées de boucles qui se déduisent l'une de l'autre par des rotations de centre O et d'angle π/m

19.14.1 Les trèfles

Le trèfle simple a pour équation :
$r = \cos(3 * t)$
Le trèfle général a pour équation :
$r = \cos(3 * t) + b$
Essayez $r = \cos(3 * t) + 1/3$

19.14.2 Les fleurs à 14 pétales

Les fleurs à 14 pétales ont par exemple pour équation :
$r = \cos(14 * t)$, $r = \cos(7/2 * t)$ ou $r = \cos(7/4 * t)$ Et plus généralement, les fleurs d'équation :
$r = \cos(7/p * t) + b$

19.14.3 Les différents cas

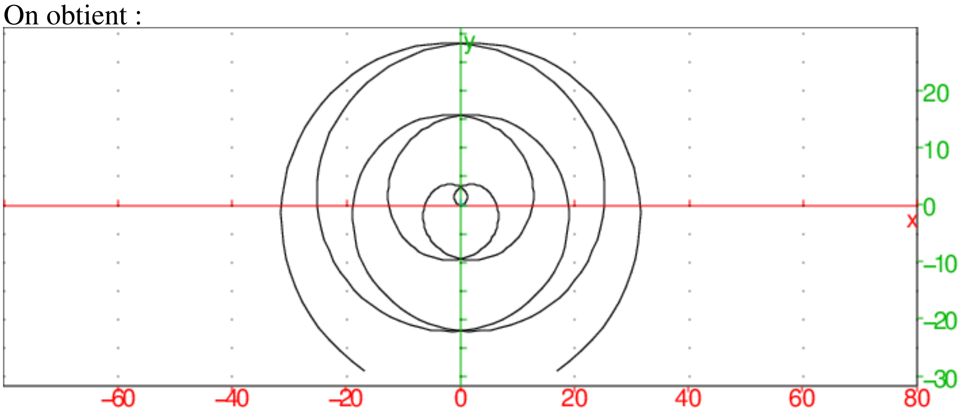
On essayera :
$m = 7, b = 3$
$m = 3/2, b = 1/4$
$m = 5/2, b = 3$
$m = 7/2, b = 0$
$m = 1/3, b = 1/9$
$m = 5/4, b = 1/3$
$m = 7/4, b = 0$
$m = 9/4, b = 7/3$
etc...
Avec `Xcas`
On tape :

```
a:=element(1..5);
b:=element(0..5);
m:=element(1..5);
plotpolar(a*sin(m*t),t=-10..10);
```

19.15 Les spirales en coordonnées polaires

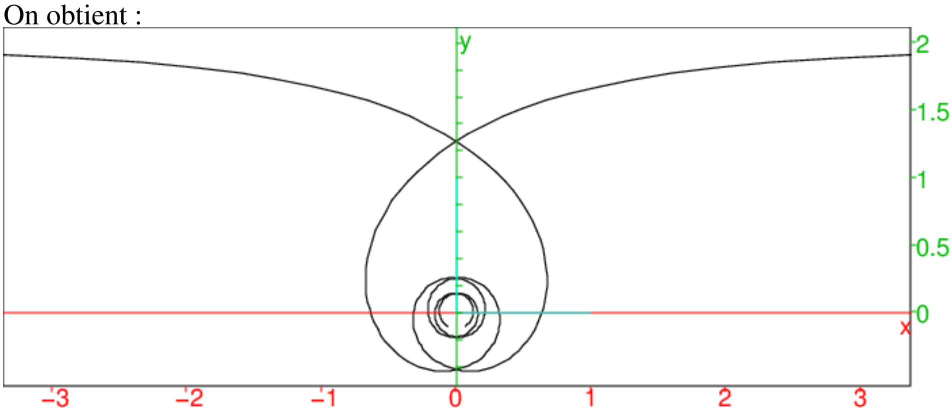
19.15.1 La spirale d'Archimède

L'équation polaire de la spirale d'Archimède est :
$r = a\theta$.
On tape :
`plotpolar(2*x,x,-5*pi-pi/3,5*pi+pi/3)`
On obtient :



19.15.2 La spirale hyperbolique

L'équation polaire de la spirale hyperbolique est :
$r = \frac{a}{\theta}$
C'est l'inverse de la spirale d'Archimède. Oy est un axe de symétrie.
Cette courbe admet comme asymptote $y = a$.
On tape pour $a = 2$:
`plotpolar(2/x,x,-5*pi-pi/3,5*pi+pi/3)`
On obtient :

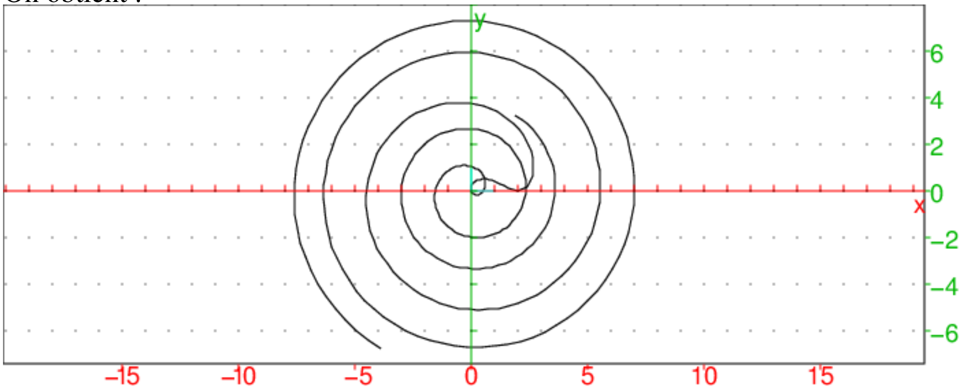


19.15.3 La spirale parabolique

L'équation polaire de la spirale parabolique est :
$(r - a)^2 = 2ap\theta$
$r = a \pm \sqrt{(2ap\theta)}$
On tape pour $a = 2$ et $p = 1/2$:
`plotpolar(2+sqrt(2*x),x,-5*pi-pi/3,5*pi+pi/3)`

```
plotpolar(2-sqrt(2*x),x,-5*pi-pi/3,5*pi+pi/3)
```

On obtient :

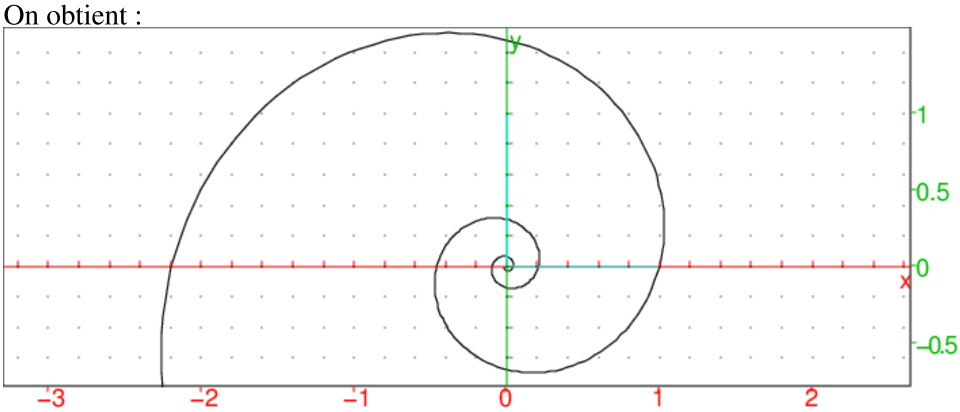


19.15.4 La spirale logarithmique

L'équation polaire de la spirale logarithmique est :
$r = a\exp(m\theta)$
On tape pour $a = 1$ et $m = 1/4$:

```
plotpolar(exp(x/4),x,-5*pi,5*pi/4)
```

On obtient :

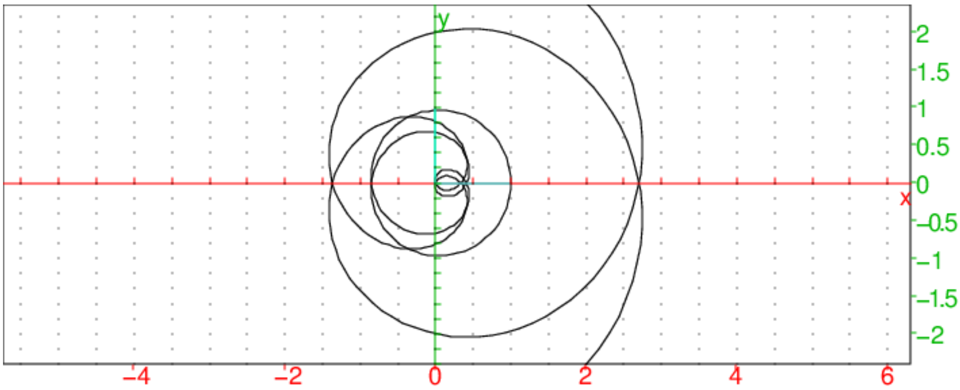


19.15.5 La spirale de Galilée

L'équation polaire de la spirale de Galilée est :
$r = a(1 - m\theta^2)$
On tape pour $a = 1$ et $m = 0.015$:

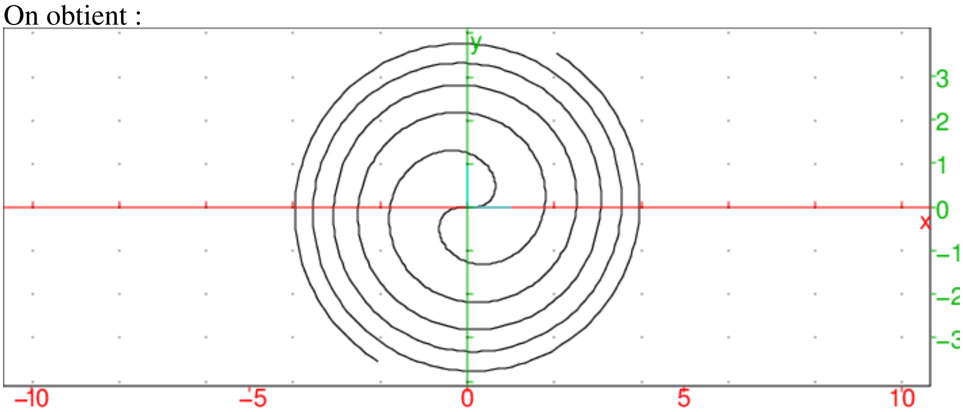
```
plotpolar((1-0.015*x^2),x,-5*pi-pi/3,5*pi+pi/3)
```

On obtient :



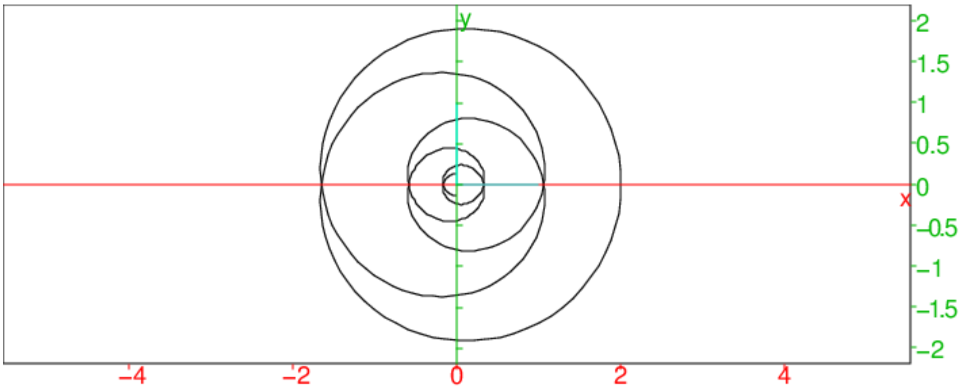
19.15.6 La spirale de Fermat

L'équation polaire de la spirale de Fermat est :
$r = \pm a\sqrt(\theta)$
On tape pour $a = 1$:
```
plotpolar(sqrt(x),x,0,5*pi+pi/3),
plotpolar(-sqrt(x),x,0,5*pi+pi/3)
```
On obtient :



19.15.7 La spirale de Poinsot

L'équation polaire de la spirale de Poinsot est :
$r = a/\cosh(m\theta)$
On tape pour $a = 2$ et $m = 0.2$:
```
plotpolar(2/cosh(0.2*x),x,-5*pi-pi/2,5*pi+pi/2)
```
On obtient :

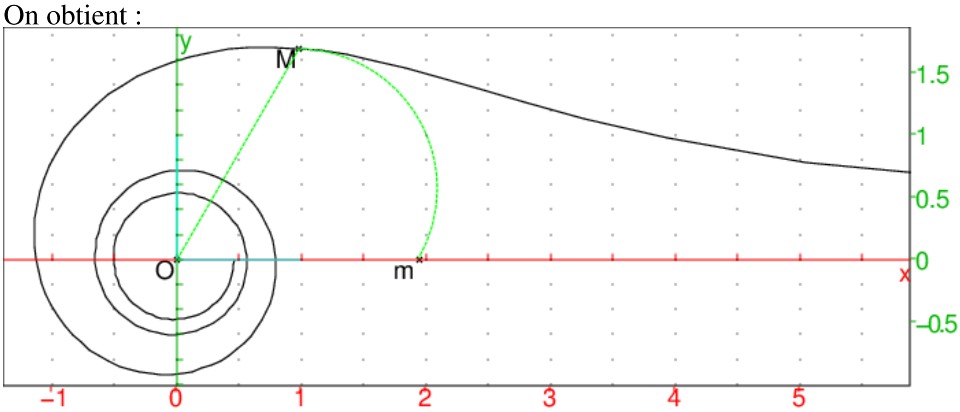


19.15.8 Lituus

L'équation polaire du lituus est :
$r = a/sqrt(\theta)$
Si M est un point de cette courbe, et si m est le point de l'axe des x tel que $Om = OM$, alors l'aire du secteur circulaire OmM est constante. On tape pour $a = 2$:

```
M:=point(exp(i*pi/3)*2/sqrt(pi/3));
O:=point(0);m:=point(2/sqrt(pi/3));
affichage(arc(m,M,2*pi/3),2+ligne_tiret);
affichage(segment(O,M),2+ligne_tiret);
plotpolar(2/sqrt(x),x,-5*pi-pi/2,5*pi+pi/2)
```

On obtient :

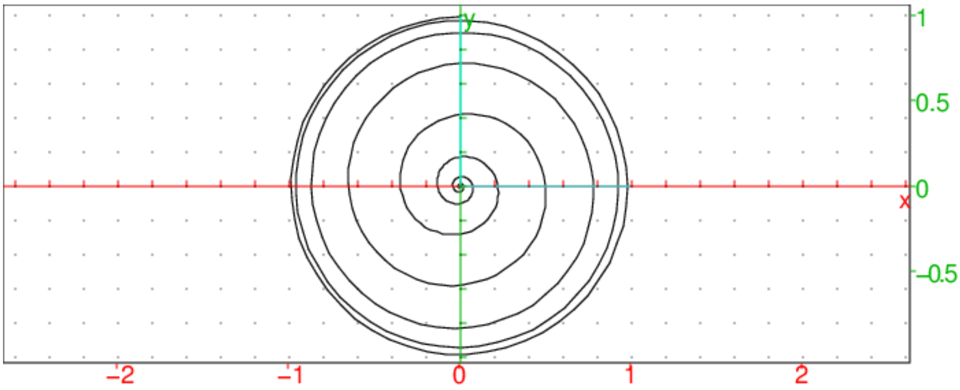


19.15.9 Courbe du spiral

L'équation polaire de la courbe du spiral est :
$r = a/(1 + m * \exp(k * \theta))$ où $k > 0$.
On tape pour $a = 1$, et $m = 1$ et $k = 0.2$:

```
plotpolar(1/(1+exp(0.2*x)),x,-7*pi-pi/2,7*pi+pi/2)
```

On obtient :

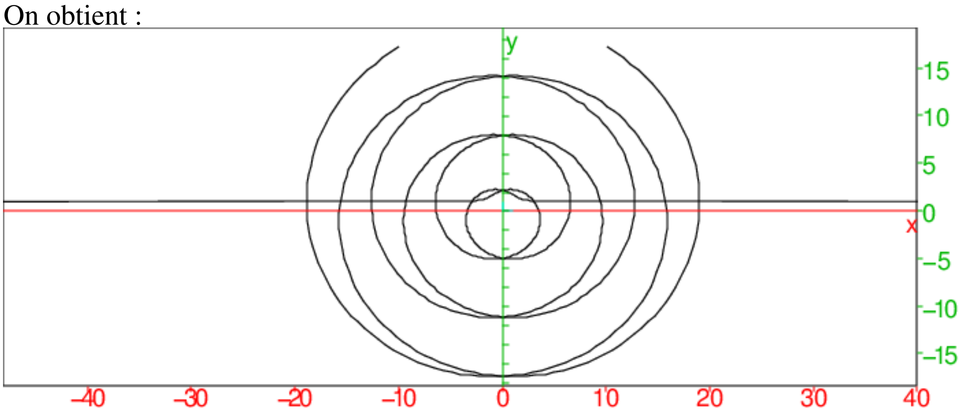


19.15.10 La spirale $r = \theta + \dfrac{1}{\theta}$

Oy est un axe de symétrie.
Cette courbe admet comme asymptote $y = 1$ Elle a une infinité de points doubles.
Elle a des points d'inflexion qui sont sur les droites d'angles 1 radian et -1 radian.
On tape :

```
plotpolar(x+1/x,x,-5*pi-4*pi/3,-0.01),
plotpolar(x+1/x,x,0.01,5*pi+4*pi/3)
```

On obtient :

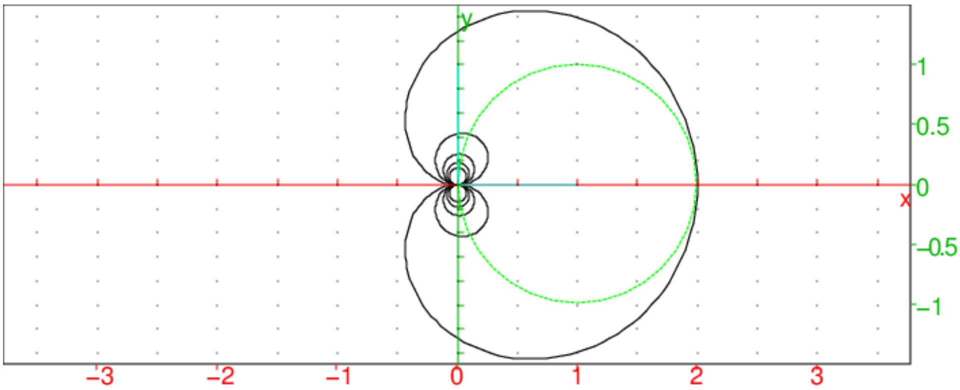


19.15.11 La cochléoïde

L'équation polaire de la cochléoïde est :
$r = a\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$.
Si `A:=point(A)`, le cercle de diamètre `OA` passe par les points où r est maximum.
On tape pour $a = 2$: `plotpolar(2*sin(x)/x,x,x=0,-5*pi),`

```
plotpolar(2*sin(x)/x,x=0,5*pi),
affichage(cercle(0,point(2)),2+ligne_tiret)
```

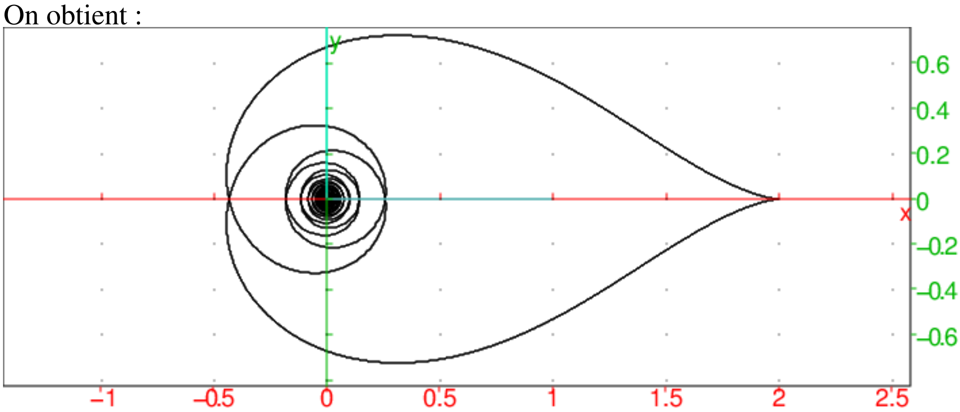
On obtient :



19.16 Les spirales en coordonnées paramétriques

19.16.1 La spirale tractrice

C'est une courbe C telle quel le triangle OMA soit rectangle en O, lorsque O est l'origine, M est un point de C et A un point de la tangente en M à C tel que $OA = a = cste$.
C'est aussi l'inverse d'une développante de cercle et la podaire d'une spirale hyperbolique.
On a : $OA^2 + OM^2 = a^2 = (mr)^2 + r^2$ avec $m = r/r'$=pente de la tangente en M.
Donc la spirale tractrice a comme équation polaire :
$r^2 + \frac{r^4}{r'^2} = a^2$ (r' désigne la dérivée de r par rapport à θ).
c'est à dire :
$\pm\theta = (\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r} - \text{ acos}(\frac{r}{a}))$
On tape :
```
plotparam(r*exp(i*(sqrt(2^2-r^2)/r-acos(r/2))),r=-2..2,tstep=0.001);
plotparam(r*exp(-i*(sqrt(2^2-r^2)/r-acos(r/2))),r=-2..2,tstep=0.001)
```
On obtient :



19.16.2 La spirale de Cornu ou clothoïde

La clothoïde est une courbe transcendante plane dont la courbure est proportionnelle à l'abscisse curviligne ou encore dont le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'abscisse curviligne.

Elle est également appelée spirale de Cornu, en référence à Alfred Cornu, le physicien français qui l'a redécouverte. Plus rarement, elle peut apparaître sous le nom de radioïde aux arcs, spirale d'Euler (Leonhard Euler en est le véritable codécouvreur et qui l'a complètement formulée suite aux travaux de Jacques Bernoulli sur les déformations d'une lamelle élastique), mais encore spirale de Fresnel (qui l'a redécouverte plus tard dans ses travaux sur les franges de diffraction de la lumière au travers d'une fente rectiligne, avant que sa formule soit finalement identifiée comme équivalente à la formule d'Euler), ou encore plus récemment spirale de transition d'un rail de Talbot (suite aux travaux cherchant à réduire les effets d'une montée brutale de la force centrifuge dans l'amorce d'un virage), une dénomination qui recouvre aussi son utilisation dans la conception des raccordements de virages routiers.
Concrètement, elle représente la trajectoire d'une automobile se déplaçant à vitesse stabilisée et dont on tourne le volant progressivement. C'est donc la trajectoire que l'on adopte pour le tracé des autoroutes et des voies ferrées. En pratique, on n'utilise cette courbe que pour assurer le raccordement progressif d'un alignement droit et d'un arc de cercle.
Pour les mêmes raisons, on utilise la clothoïde aux fins de courbes dans les tracés des chemins de fer parce qu'un véhicule suivant ce tracé à une vitesse constante subit une accélération angulaire continue mais pas constante, ce qui réduit à la fois les efforts sur les rails et l'inconfort des passagers dans les voitures. On retrouve cette courbe dans les boucles verticales ou loopings des montagnes russes pour le confort des passagers, afin que l'accélération verticale subie soit continue.
Enfin, les sabots montés sur les pylones de téléphériques, et qui supportent le cable porteur, adoptent cette forme. De fait, il est possible de faire circuler la cabine à sa vitesse maximale sur le pylone, sans incommoder les passagers.
Hors ces aspects cinématiques, la clothoïde intervient en sidérurgie pour aplanir ou cintrer les tôles et barres de grande épaisseur (au-delà de 30 mm). On limite ainsi le risque d'apparition de criques tout en ménageant le matériel. Typiquement, les outils concernés sont la coulée continue et les cintreuses.

Si en un point M de cette courbe d'abscisse curviligne s, R est le rayon de courbure, $\overrightarrow{T}$ le vecteur tangent de longueur 1 et $\overrightarrow{N}$ le vecteur normal de longueur 1 tel que le repère $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}$ soit direct, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}$$

Si $\overrightarrow{T}$ fait avec Ox un angle $\varphi(s)$, on a :
coordonnées de $\overrightarrow{T}$: $\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s))$
coordonnées de $\overrightarrow{N}$: $-\sin(\varphi(s)), \cos(\varphi(s))$
Donc :

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = \frac{1}{R}$$

$\frac{1}{R}$ est proportionnel à s donc il existe k tel que :

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = ks = \frac{1}{R}$$

ou encore :
$d\varphi(s) = ksds$ c'est à dire
$\varphi(s) = \frac{ks^2}{2}$ si pour $s = 0$ on suppose $\varphi(s) = 0$
On peut aussi supposer $k > 0$ i.e $R > 0$ quitte à faire une symétrie par rapport à Ox, on pose donc $k = 2/a^2$ et on a $\varphi(s) = (s/a)^2$.
Si le paramétrage de cette courbe est $x(t) + iy(t)$, on a :
coordonnées de $\overrightarrow{T}$:

$$\cos(\varphi(s)) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}},\ \sin(\varphi(s)) = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

ou encore puisque $ds^2 = (x'(t)^2 + y'(t)^2)dt^2$:

$$\cos(\varphi(s))ds = \cos((s/a)^2) = x'(t)dt\ \sin(\varphi(s))ds = \sin((s/a)^2) = y'(t)dt$$

La courbe peut être définie paramètriquement par les équations suivantes :

$$x(t) = \int_0^t \cos((s/a)^2)ds,\ y(t) = \int_0^t \sin((s/a)^2)ds$$

ou en posant $u = s/a$ on a $ds = adu$ donc :

$$x(t) = a\int_0^{t/a} \cos(u^2)du,\ y(t) = a\int_0^{t/a} \sin(u^2)du$$

ou en modifiant le paramètre t

$$x(t) = a\int_0^{t} \cos(u^2)du,\ y(t) = a\int_0^{t} \sin(u^2)du$$

On peut également définir la clothoïde par une équation intrinsèque (équation de Bernoulli, résolue par Euler avec une intégrale curviligne) : puisque

$$ks = \frac{1}{R}$$

$2R \cdot s = 2/k = b$ ou si on suppose $R > 0$ $2R \cdot s = a^2$

où R représente le rayon de courbure local et s l'abscisse curviligne. On peut aussi l'écrire préférablement :

$2s = b\kappa$

où $\kappa = 1/R$, représente la courbure locale (signée dans le repère de Frenet ou non signée si $b = a^2$), avec l'avantage que cette équation évite la singularité du point d'inflexion au centre de symétrie de la spirale (où le rayon de courbure est localement indéfini, tendant simultanément vers plus et moins l'infini, selon le côté d'approche de ce point d'inflexion, tandis que la courbure est nulle sur ce point d'inflexion), la courbure ne tendant vers l'infini qu'à l'approche des deux points asymptotiques autour desquels s'enroule la spirale.
Euler est également le premier à établir un développement en série des coordonnées paramétriques des points de la courbe (en fonction de l'abscisse curviligne) :
On sait que :

$$\cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{2n!}$$

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1!}$$

donc :

$$\begin{cases} x(t) &= a\sum_{n=0}^{+\infty} & \dfrac{(-1)^n \cdot t^{4n+1}}{(2n)! \cdot (4n+1)} \\ y(t) &= a\sum_{n=0}^{+\infty} & \dfrac{(-1)^n \cdot t^{4n+3}}{(2n+1)! \cdot (4n+3)} \end{cases}$$

Si on s'intéresse au comportement de la courbe lorsque l'abscisse curviligne tend vers l'infini, étant donné que la courbure croit linéairement avec cette abscisse, le rayon de courbure décroit en même temps de façon inversement proportionnelle.

Par exemple entre deux points sur la clothoïde séparés par une longueur d'arc Δs, la courbure κ, s'accroit de $\Delta\kappa = 2\Delta s/a^2$ puisque $2s = b\kappa = a^2\kappa$.

Par conséquent le rayon de courbure passe de $R = \dfrac{1}{\kappa}$, à $R+\Delta R = \dfrac{1}{\kappa + \Delta\kappa} = \dfrac{1}{\kappa + 2\Delta s/a^2}$.

La différence de rayon de courbure (mesuré hors du point d'inflexion sur la même branche de la double spirale, par exemple sur la branche du premier cadran, de coordonnées positives) est alors :

$$\Delta R = \frac{1}{\kappa + 2\Delta s/a^2} - \frac{1}{\kappa} = -2R^2 \frac{\Delta s}{a^2 + 2R\Delta s}$$

En résumé

Cette courbe a un rayon de courbure en un point M qui est inversement proportionnel à la longueur de l'arc OM.

Si a est une constante arbitraire, son équation paramétrique est :

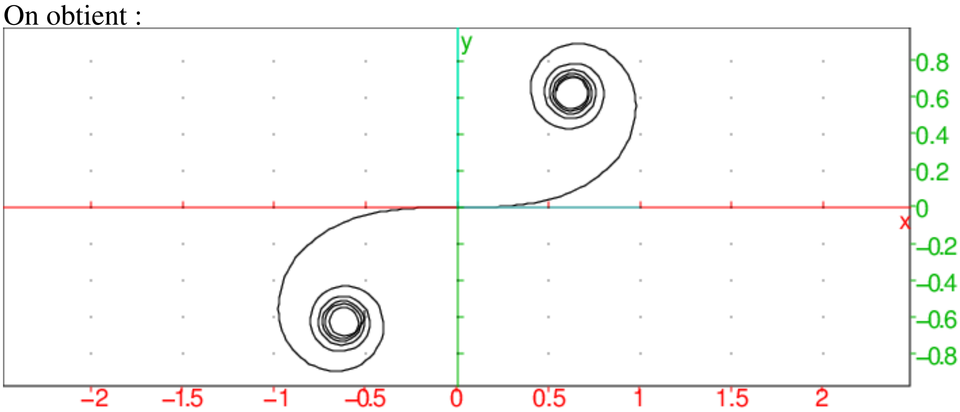
$x(t) = a\int_0^t \cos(u^2)du$

$y(t) = a\int_0^t \sin(u^2)du$

On tape par exemple pour $a = 1$:

```
plotparam(int(cos(u^2)+i*sin(u^2),u,0,t),t=-6..6)
```

On obtient :



On tape :

```
convert(series(cos(u^2),u,0,16),polynom)
```

On obtient :

```
1-u^4/2+u^8/24-u^12/720+u^16/40320
```

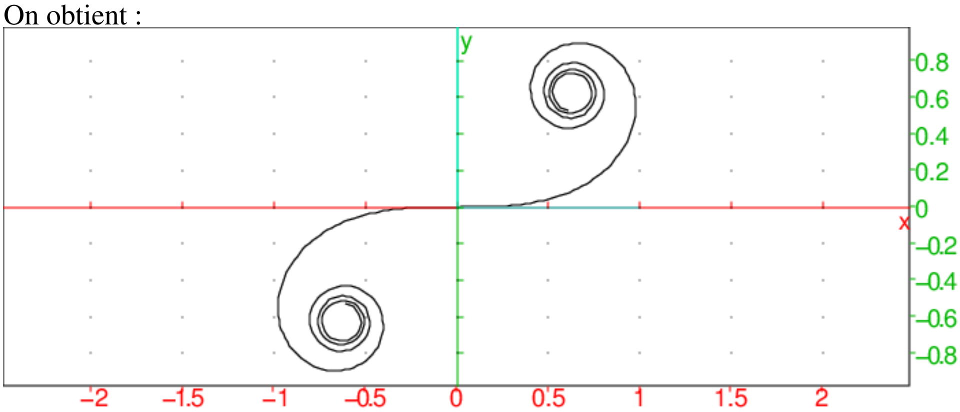
On tape :

```
int(1-u^4/2+u^8/24-u^12/720+u^16/40320,u,0,t)
```

On obtient :
`t-t^5/10+t^9/216-t^13/9360+t^17/685440`
On tape :
`convert(series(sin(u^2),u,0,16),polynom)`
On obtient :
`u^2-u^6/6+u^10/120-u^14/5040`
On tape :
`int(u^2-u^6/6+u^10/120-u^14/5040,u,0,t)`
On obtient :
`t^3/3-t^7/42+t^11/1320-t^15/75600`
On tape par exemple en utilisant le développement en série de $x(t)$ et $y(t)$ pour

```
a:=1;
x(t):=sum((-1)^n*t^(4*n+1)/((2n)!*(4*n+1)),n=0..50);
y(t):=sum((-1)^n*t^(4*n+3)/((2n+1)!*(4*n+3)),n=0..50);
plotparam(x(t)+i*y(t),t=-5..5);
```

On obtient :



Avec `Xcas` et la tortue
On peut avoir une discrétisation de la courbe en pilotant la tortue dans l'écran de dessin tortue pour que la courbure soit proportionnelle à la distance parcourue par la tortue.
On tape dans léditeur de programme de `Xcas` :

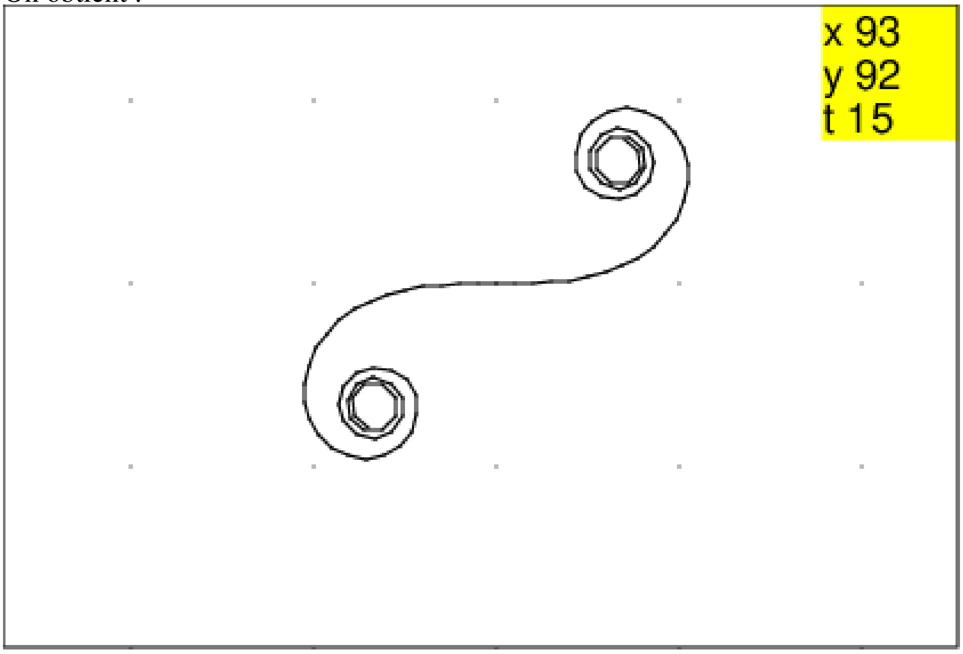
```
clotho(ds,k,n):={
local s;
  s:=0;
  repeat
    avance ds;
    s:=s+ds;
    tourne_gauche k*s;
  until s==n;
  s:=0;
  leve_crayon;
  position(100,100);
  cap 180;
  baisse_crayon;
  repeat
    avance ds;
    s:=s+ds;
```

```
    tourne_gauche k*s;
  until s==n;
}:;
```

On tape par exemple dans un écran de dessin tortue (Alt+d) :

```
efface;
cache_tortue;
clotho(1,1,50);
```

On obtient :



Remarque
si on tape :

```
clotho0(ds,k,n):={
local s;
  s:=0;
  repeat
    avance ds;
    s:=s+ds;
    tourne_gauche k*s;
  until s==n;
}:;
efface;
cache_tortue;
clotho0(1,1,720);
```

on obtient les 2 boucles de la courbe et une tortue qui est revenue à sa position de départ car :
`efface; clotho0(1,1,360)` fait revenir la tortue à sa position de départ mais avec un cap de 180.
On peut aussi écrire une procédure récursive :

```
clothor(s,ds,k,n):={
si s<n alors
  avance ds;
  tourne_gauche(k*s);
  clothor(s+ds,ds,k,n);
  fsi;
}:;
efface;
cache_tortue;
clothor(0,1,1,100);
leve_crayon;
position(100,100);
cap 180;
baisse_crayon;
clothor(0,1,1,100);
```

ou encore en allant en reculons :

```
clothor(s,ds,k,n):={
si s>-n alors
  avance ds;
  tourne_gauche(k*s);
  clothor(s+ds,ds,k,n);
  fsi;
}:;
efface;
cache_tortue;
clothor(0,-1,1,720);
```

19.17 Les courbes de Lissajous

Les courbes de Lissajous ont comme équation paramétrique :
$x(t) = a\cos(\omega * t)$
$y(t) = b\sin(\phi * t + \phi)$
Avec `Xcas`
On tape :

```
k:=element(0 .. 4);
m:=element(0 .. 4);
p:=element(0..pi/2);
plotparam(3*cos(k*t)+i*2*sin(m*t+p),t);
```

On peut voir les différentes courbes en faisant varier m et p.
En particulier $k = 1$ et $m = 1$ puis on fait varier p, $k = 2$ et $m = 3$ puis on fait varier p etc...

19.18 Exercice

On considère la courbe donnée en coordonnées polaires $\rho,\ \theta$ par l'équation :
$\rho = 4\sin(\theta)\cos(\theta)^3$

— Déterminer la périodicité et les symétries de la courbe.
— Donner une valeur approchée de la longueur de la courbe entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.
— Équation de la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta = \pi/3$.
— Étude de la convexité de la courbe.
— Donner la liste des valeurs de θ pour lesquels la courbe a un point singulier.
— Tracer la courbe.

Solution avec `Xcas`

— Périodicité et symétries de la courbe.
On tape :
```
r(t):=4*sin(t)*cos(t)^3
normal(r(t+pi)-r(t))
```
On obtient :
```
0
```
On a donc une période $T = \pi$ et une symétrie par rapport à l'origine.
On tape :
```
r(-t)+r(t)
```
On obtient :
```
0
```
On a donc une symétrie par rapport à Oy.
On tape :
```
normal(r(pi-t)+r(t))
```
On obtient :
```
0
```
On a donc une symétrie par rapport à Ox.

— Longueur de la courbe entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.
On tape :
```
ds:=simplify(sqrt(diff(r(t)*cos(t),t)^2+diff(r(t)*sin(t),t)^2))
```
On obtient :
```
4*cos(t)^2*sqrt(9-23*cos(t)^2+15*cos(t)^4)
```
On tape :
evalf(int(4*cos(t)^2*sqrt(9-23*cos(t)^2+15*cos(t)^4),t=0..pi/2))
On obtient :
```
2.94150695122
```

— Tangente au point $\theta = \pi/3$.
On tape :
```
A:=point(r(pi/3)*exp(i*pi/3))
affixe(A)
```
On obtient :
```
(3*i+sqrt(3))/8
```
On tape :
```
equation(tangente(plotpolar(4*sin(t)*cos(t)^3,t=-pi..pi),pi/3))
```
On obtient :
```
y=(sqrt(3)*7*1/11*x+3/22)
```
On tape :
```
normal(r(t)/diff(r(t),t))
```
On obtient :

`cos(t)*sin(t)/(-3+4*cos(t)^2)`

On tape :

`normal(subst(cos(t)*sin(t)/(-3*sin(t)^2+cos(t)^2),t=pi/3))`

On obtient :

`-(sqrt(3))/8`

Dans le repère AXY (repère entrainé par le point courant) l'équation de la tangente en A est $Y = -sqrt(3) * X/8$.

On a :

$X = (x - x_A)\cos(t_A) + (y - y_A)\sin(t_A)$ et

$Y = -(x - x_A)\sin(t_A) + (y - y_A)\cos(t_A)$

Comme $Y + sqrt(3) * X/8 = 0$, on a :

$(x - x_A) * (\sqrt{(3)}/8\cos(t_A) - \sin(t_A)) - (y - y_A) * (\sqrt{(3)}/8\sin(t_A) + \cos(t_A) = 0$

c'est à dire :

$(x - \sqrt{3}/8) * (\sqrt{3}/16 - \sqrt{3}/2) + (y - 3/8) * (3/16 + 1/2) = 0$

On tape :

`solve((x-sqrt(3)/8)*(sqrt(3)/16-sqrt(3)/2)+(y-3/8)*(3/16+1/2)=0,`

On obtient :

`[sqrt(3)*7/11*x+3/22]`

Donc $y = 7\sqrt{3}/11x + 3/22$ est l'équation de la tangente en A

— Convexité de la courbe.

On tape :

`factor(simplify((r(t)^2+2*diff(r(t),t)^2-r(t)*diff(diff(r(t),t),`

On obtient :

`16*cos(t)^4*(12-25*cos(t)^2+15*cos(t)^4)`

Cette expression est toujours positive donc la concavité est tourné vers l'origine.

— Points singuliers.

Les points singuliers vérifient :

en coordonnées paramétriques : $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$,

en coordonnées polaires : $\rho(\theta) = 0$ et $\rho'(\theta) = 0$.

On tape :

`simplify(solve(diff(r(t)*cos(t),t)=0,t))`

On obtient :

```
[pi/2,-pi/2,acos(2*sqrt(5)/5),-acos(2*sqrt(5)/5),
(2*asin(2*sqrt(5)/5)+pi)/2,(-2*asin(2*sqrt(5)/5)-pi)/2],
```

On tape :

`simplify(solve(diff(r(t)*sin(t),t)=0,t))`

On obtient :

```
[0,pi,pi/2,-pi/2,3*pi/2,asin((sqrt(10))/5),-asin((sqrt(10))/5)+p
-asin((sqrt(10))/5),asin((sqrt(10))/5)+pi]
```

Donc les valeurs de θ pour lesquels la courbe a un point singulier sont $[-\pi/2, \pi/2]$ ce qui correspond au pole O.

On peut facilement chercher la nature de ces points points singuliers, on tape :

```
x1:=diff(r(t)*cos(t),t)
y1:=diff(r(t)*sin(t),t)
x2:=diff(x1,t)
```

```
y2:=diff(y1,t)
x3:=diff(x2,t)
y3:=diff(y2,t)
x4:=diff(x3,t)
y4:=diff(y3,t)
subst([x2,y2],t=-pi/2), subst([x2,y2],t=pi/2)
```

On obtient :

```
[0,0],[0,0]
```

On tape :

```
subst([x3,y3],t=-pi/2), subst([x3,y3],t=pi/2)
```

On obtient :

```
[0,24],[0,-24]
```

On tape :

```
subst([x4,y4],t=-pi/2), subst([x4,y4],t=pi/2)
```

On obtient :

```
[-96,0],[96,0]
```

Donc ces points singuliers ne sont pas des points de rebroussement ni des points d'inflexion et on a une disposition banale.
On peut aussi taper pour avoir le développement de $x(t)$ au voisinage de $\pi/2$:

```
series(4*sin(t)*cos(t)^4,t=pi/2,5))
```

On obtient :

```
4*(t-pi/2)^4+(t-pi/2)^6*order_size(t-pi/2)
```

et pour avoir le développement de $y(t)$ au voisinage de $\pi/2$:

```
series(4*sin(t)^2*cos(t)^3,t=pi/2,5)
```

On obtient :

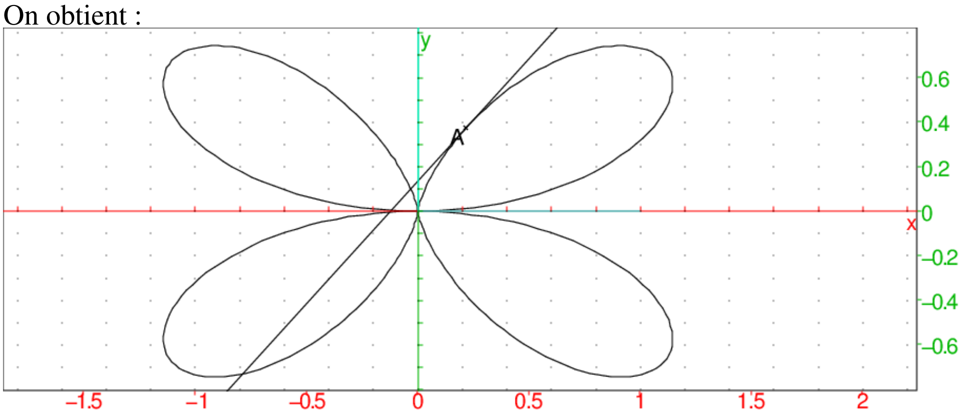
```
-4*(t-pi/2)^3+6*(t-pi/2)^5+(t-pi/2)^7*order_size(t-pi/2)
```

On voit directement que $x_4(pi/2) \neq 0$ ey $y_3(\pi/2) \neq 0$

— Tracer la courbe.
On tape :

```
P:=plotpolar(4*sin(t)*cos(t)^3,t=-pi..pi):;P;
A:=point(4*sin(pi/3)*cos(pi/3)^3*(cos(pi/3)+i*sin(pi/3)));
tangente(P,pi/3);
```

On obtient :



Remarques

On a :

$4\sin(t)\cos(t)^3 = 2\sin(2t)\cos(t)^2 = \sin(2t)(\cos(2t) - 1)$.
L'équation polaire de cette courbe est donc aussi :
$\rho = \sin(2t)(\cos(2t) - 1)$.
On a aussi :
$\rho^5 = 4\rho\sin(t)(\rho\cos(t))^3$
Donc l'équation cartésienne est :
$(x^2 + y^2)^5 = 16x^6y^2$
On tape :
```
plotimplicit((x^2+y^2)^(5)=16x^6*y^2,x=-2..2,y=-2..2)
```
On obtient la même représentation graphique que ci-dessus.

Chapitre 20

La roue hexagonale ou isopolygonale

Un polygone régulier roule sur l'axe des x. Tracer la trajectoire d'un sommet A.
Exprimer la distance parcourue par le point A quand la "roue" a fait un tour complet.

20.1 La roue hexagonale

Avec `Xcas` on pourra exécuter `hexagone.xws` pour avoir la correction.

On peut chercher la liste `S` des affixes des sommets de l'"hexagone lorsque `A` est en `0` et `B` est en `1`, puis utiliser `polygone(S)` ou utiliser directement `hexagone(0,1)` ou `isopolygone(0,1,6)`.
Lorsque la "roue" a fait un tour complet, le point `A` décrit 6 arcs de cercle et on met dans `L` les extrémités de ces arcs (le dernier arc est de rayon nul donc on peut dire que la trajectoire est formée de 5 arcs). Pour calculer ces extrémités on tape :
`a:=normal(affixe(rotation(1,-pi/3,0)));`
`b:=normal(affixe(rotation(2,-pi/3,a))),`
puis on complète par symétrie par rapport à $x = 3$
`AL` est la liste de ces 5 arcs lorsque la "roue" a fait un tour complet.
`BL` est la liste `AL` translatée : on a ainsi la trajectoire du point `A` lorsque la "roue" a fait 2 tours complets.
On définit `Hs` la figure formée par l'hexagone de centre `O` et le segment `AO` : on visualise ainsi le point `A`.
Pour faire une animation on va créer la liste `LH` contenant plusieurs positions de `Hs` obtenues par deux rotations de centre 1 d'angle $-\pi/6$ et $-\pi/3$, deux rotations de centre 2 d'angle $-\pi/6$ et $-\pi/3$ etc... On obtient ainsi une liste de 12 éléments.
On tape :

```
L:=[0,1/2+i*sqrt(3)/2,2+i*sqrt(3),4+i*sqrt(3),11/2+i*sqrt(3)/2,6];
affichage((AL:=seq(arc(L[k],L[k+1],-pi/3),k,0,4)),hidden_name);
affichage((BL:=translation(6,AL)),hidden_name);
Hs:=[isopolygone(0,1,6),segment(0,(1+i*sqrt(3))/2)];
LH:=[Hs];
for (j:=0;j<12;j++){LH:=concat(LH,[rotation(j+1,-pi/6,LH[2*j]),rotation(j+1,-
```

```
affichage((A:=seq(arc(L[k],L[k+1],-pi/3),k,0,4)),hidden_name);
affichage((B:=translation(6,A)),hidden_name);
animation(LH);
```

Le point A décrit des 6 arcs de cercles qui sont :

- un arc de rayon 1 et d'angle au centre $\pi/3$ donc de longueur $\pi/3$,
- un arc de rayon $r^2 = (-2+1/2)^2 + (\sqrt(3)/2)^2 = 3$ et d'angle au centre $\pi/3$ donc de longueur $\pi\sqrt{3}/3$,
- un arc de rayon 2 et d'angle au centre $\pi/3$ donc de longueur $2\pi/3$,
- un arc de rayon $\sqrt{3}$ et d'angle au centre $\pi/3$ donc de longueur $\pi\sqrt{3}/3$,
- un arc de rayon 1 et d'angle au centre $\pi/3$ donc de longueur $\pi/3$,
- un arc de rayon 0 et d'angle au centre $\pi/3$ donc de longueur 0.

donc la distance parcourue par le point A quand la ‘"roue" a fait un tour complet est $\pi(4+2\sqrt{3})/3$.
On peut aussi calculer cette longueur à l'aide d'une boucle. On tape :

```
dist:=0;
for (k:=0;k<5;k++){arc(L[k],L[k+1],-pi/3,C,R);
                   dist:=dist+R*pi/3;};
normal(dist)
```

20.2 La roue isopolygonale

Avec `Xcas` on pourra exécuter `rouepoly.xws` pour avoir la correction.

On va écrire des procédures de param‘etre `n` qui représente le nombre de côtés de l'isopolygône.
`Lsarc(n)` renvoie la liste des sommets des arcs qui forment la trajectoire de `A`.
`Lpoly(n)` renvoie la liste des positions successives de la figure formée par `P` l'isopolgône de centre `O`, et `S` le segment `OA`. On pourra ainsi faire facilement une animation.
`tracerarc(n)` ou `tracer(n)` trace la trajectoire lorsque la "roue" a fait 2 tours complets. `longtrajet(n)` renvoie la longueur d'une arche : le résultat est approché, mais on peut supprimer `evalf` pour avoir un résultat exact lorsque `n=3,4,6`.

On tape :

```
  Lsarc(n):={
    local L,j;
    L:=[point(0)];
    for (j:=1;j<n;j++){
      L:=concat(L,normal(rotation(j,-2*pi/n,L[j-1])));
    }
    return(L);
  };

Lpoly(n):={
local LP,j,P,S;
P:=normal(isopolygone(0,1,n));
S:=segment(0,evalf(1/2+i/2/tan(pi/n)));
```

```
LP:=[[P,S]];
for (j:=0;j<2*n;j++){
LP:=concat(LP,[rotation(j+1,evalf(-pi/n),LP[2*j]),
           rotation(j+1,evalf(-2*pi/n),LP[2*j])]);
}
return LP;
};

tracerarc(n):={
  local A,B,Ls;
  Ls:=evalf(Lsarc(n));
  A:=seq(arc(Ls[k],Ls[k+1],evalf(-2*pi/n)),k,0,n-2);
  B:=translation(n,A);
  return concat(A,B);
};

//ou encore
tracer(n):={
  local A,B,j,Ls;
  Ls:=evalf(Lsarc(n));
  A:=[arc(Ls[0],Ls[1],evalf(-2*pi/n))];
  for (j:=1;j<n-1;j++){
    A:=concat(A,arc(Ls[j],Ls[j+1],-2*pi/n));
  }
  B:=translation(n,A);
  return(A,B)
};

longtrajet(n):={
local dist,k,C,R;
dist:=0
for (k:=0;k<(n-1);k++){
  arc((Lsarc(n))[k],(Lsarc(n))[k+1],-pi/3,C,R);
  dist:=evalf(dist+R*pi/3);
};
return normal(dist);
}
```

On tape par exemple, pour avoir une animation :

```
tracerarc(5);animation(Lpoly(5))
```

Chapitre 21

Les fonctions de plusieurs variables

21.1 La continuité

21.1.1 Exercice1

Étudiez la continuité en (0,0) de :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solution
Si on fait tendre $M(x, y)$ vers (0,0), sur la droite $y = ax$ on a :
$f(x,y) = \dfrac{x^2 - a^2x^2}{x^2 + a^2x^2} = \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} = b.$
Donc la limite de $f(x, y)$ en (0,0) dépend de la façon dont (x, y) tend vers (0,0) donc f n'est pas continue en (0,0).
On tape :

```
f(x,y):=ifte([x,y]!=[0,0],(x^2-y^2)/(x^2+y^2),0)
limit(f(x,0),x,0)
```

On obtient :

```
1
```

On tape :

```
limit(f(0,y),y,0)
```

On obtient :

```
-1
```

Donc f n'admet pas de limite au point (0,0) puisque la limite est différente selon que l'on fait tendre le point $M(x, y)$ vers (0,0) sur l'axe des x ou sur l'axe des y.
Donc f n'est pas continue en (0,0).
Essayez :

```
plotfunc(f(x,y),[x=-1..1,y=-1..1])
```

21.1.2 Exercice2

Étudiez la continuité en (0,0) de :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solution
On a :
$g(x,y) = x(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}) + y(\dfrac{y^2}{x^2+y^2})$
Si $(x,y) \neq (0,0)$ alors $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ et $0 \leq \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$, on a donc :
$|g(x,y) - g(0,0)| = |g(x,y)| \leq (|x| + |y|)$.
Donc pour tout ϵ si $|x| < \epsilon/2$ et $|y| < \epsilon/2$ alors $|g(x,y) - g(0,0)| < \epsilon$.
Donc g est continue en 0.
Essayez :

```
g(x,y):=ifte([x,y]!=[0,0],(x^3+y^3)/(x^2+y^2),0)
plotfunc(g(x,y),[x=-1..1,y=-1..1])
```

21.1.3 Exercice3

Étudiez la continuité en $(0, y_0)$ de :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solution
Continuité en $0, y_0$ avec $y_0 \neq 0$.
Si $x- > 0$ et $y- > y_0$, on a :
$\dfrac{y^2}{x}$ tend vers l'infini avec le signe de x.
donc f n'est pas continue en $0, y_0$ avec $y_0 \neq 0$.
Continuité en $(0,0)$
Soit $a > 0$.
Si pour $x > 0$ on fait tendre $M(x,y)$ vers (0,0), sur la parabole $y = \sqrt{a}x$ et pour $x < 0$ on fait tendre $M(x,y)$ vers (0,0), sur la parabole $y = \sqrt{-ax}$ on a :
pour $x > 0$ $f(x,y) = \dfrac{x}{x} = a$ et
pour $x < 0$ $f(x,y) = \dfrac{-x}{x} = -a$ Donc la limite de $f(x,y)$ en (0,0) dépend de la façon dont (x,y) tend vers (0,0) donc f n'est pas continue en (0,0).
Donc f n'est pas continue sur la droite $x = 0$.
On tape :

```
f(x,y):=ifte(x!=0,y^2)/x,0)
limit(f(x,y0),x,0))
```

On obtient :

```
infinity
```

On tape :

```
assume(a>0)
```

```
limit(f(x,sqrt(a*x)),x,0,1)
```
On obtient :
```
a
```

21.1.4 Exercice4

Étudiez la continuité et la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ e^x & \text{si } x = y \end{cases}$$

Solution

La fonction f est continue en x_0, y_0 lorsque $x_0 \neq y_0$.
Continuité en (x_0, y_0).
D'après la formule des accroissements finis appliquée à $\exp$ entre x et y, on a :
Il existe c dans l'intervalle $]x, y[$ (ou $]y, x[$) tel que on ait :
$\exp(x) - exp(y) = (x-y)\exp(c)$ donc :
$\dfrac{e^x - e^y}{x-y} = e^c$
Quand (x,y) tend vers (x_0, x_0), c tend vers x_0 donc $f(x,y)$ tend vers e^{x_0}.
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$. On remarque que $f(x,y) = f(y,x)$.
Pour montrer que f est différentiable il suffit donc de montrer :
$g(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est défini sur $\mathbb{R}^2$ et
g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
On a :
si $x \neq y$:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{e^a}{a-b} - \dfrac{e^a - e^b}{(a-b)^2}$ si $x = y$:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,) = \lim\limits_{x->a} \dfrac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a}$
D'après la formule de Taylor il existe c entre x et a tel que :
$\dfrac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a} = \dfrac{e^x - e^a - e^a(x-a)}{(x-a)^2} = \dfrac{e^c}{2}$
Donc quand x tend vers a on a :
$\lim\limits_{x->a} \dfrac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a} = \dfrac{e^a}{2}$
Montrons maintenant $g(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ défini par :
$g(x,y) = \dfrac{e^x}{x-y} - \dfrac{e^x - e^y}{(x-y)^2}$ si $x \neq y$ et
$g(x,x) = \dfrac{e^a}{2}$
est continue sur $\mathbb{R}^2$.
On a g est continue en (x,y) lorsque $x \neq y$ car
$g(x,y) = \dfrac{e^x}{x-y} - \dfrac{e^x - e^y}{(x-y)^2} = \dfrac{e^y - e^x + e^x(x-y)}{(x-y)^2}$
Montrons que g est continue en (a,a), on a en effet :
$g(x,y) = \dfrac{e^x}{x-y} - \dfrac{e^x - e^y}{(x-y)^2} = \dfrac{e^y - e^x + e^x(x-y)}{(x-y)^2}$
D'après la formule de Taylor il existe c entre x et y tel que :

$e^y - e^x = e^x(y-x) + e^c(y-x)^2/2$ donc
$g(x,y) = \frac{e^c(y-x)^2}{2(x-y)^2} = \frac{e^c}{2}$ Quand (x,y) tend vers $(a,a$ c tebd vers a donc g(x,y) tend vers $\frac{e^a}{2} = g(a,a)$
f admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$ donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

21.2 Dérivées partielles et differentielles

21.2.1 Définition et théorème

Définition
f est differentiable en (x,y) si il existe une fonction ϵ tels que :
$f(x+h,y+k) - f(x,y) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + (|h|+|k|)\epsilon(h,k)$ où $\epsilon(h,k)$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers (0,0).
Théorèmes Si f est différentiable alors f est continue et f admet des dérivées partielles.
Si f admet des dérivées partielles continues en un point alors f est différentiable en ce point.
Attention
f admet des dérivées partielles n'entraine pas que f soit continue !

21.2.2 Exercice1

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neg(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en (0,0).
Ces dérivées partielles sont-elles continues ?
Étudiez la differentiablité de f en (0,0).
Solution
On tape :
```
f(x,y):=ifte([x,y]!=[0,0],(x^3-y^3)/(x^2+y^2),0);
diff(f(x,0),x)
```
On obtient :
```
1
```
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$.
On tape :
```
diff(f(0,y),y)
```
On obtient :
```
-1
```
Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.
On tape :
```
dfx:=normal(diff(f(x,y),x))
```
On obtient :

`(x^4+2*x*y^3+3*x^2*y^2)/(x^4+y^4+2*x^2*y^2)`
On tape :
`limit(subst(dfx,y,0),x,0))`
On obtient : `1`
On tape :
`limit(subst(dfx,x,0),y,0))`
On obtient : `0`
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas continue en (0,0).
On tape :
`dfy:=normal(diff(f(x,y),y))`
On obtient :
`(-y^4-3*x^2*y^2-2*x^3*y)/(x^4+y^4+2*x^2*y^2)`
On tape :
`limit(subst(dfy,y,0),x,0))`
On obtient : `0`
On tape :
`limit(subst(dfy,x,0),y,0))`
On obtient : `-1`
Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en (0,0).
Si f est différentiable en (0,0), sa différentielle est la forme linéaire df définie sur $\mathbb{R}^2$ par $df(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = h - k$.
Donc f sera différentiable en (0,0) si :
$\frac{df(h,k)-(h-k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers (0,0).
Étudions, quand (h,k) tend vers (0,0), la limite de :
$g(h,k) = \frac{f(h,k)-f(0,0)-(h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))}{\sqrt{h^2+k^2}} = f(h,k)-(h-k) =$
$\frac{h^3-k^3-(h-k)(h^2+k^2)}{h^2+k^{2\frac{3}{2}}} = \frac{kh^2-hk^2}{h^2+k^{2\frac{3}{2}}} = \frac{kh(h-k)}{h^2+k^{2\frac{3}{2}}}$.
On a :
$g(h,-h) = \frac{-2h^3}{2h^{2\frac{3}{2}}} = \frac{-h}{\sqrt{2}|h|}$.
Donc $g(h,-h)$ n'admet pas de limite quand on fait tendre h vers 0.
Donc $g(h,k)$ n'admet pas de limite au point (0,0).
Donc f n'est pas différentiable en (0,0).

21.2.3 Exercice2

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Démontrer que f est différentiable au point (0,0).
Les dérivées partielles de f sont-elles continues ?

On tape :
```
f(x,y):=(x^2+y^2)*sin(1/sqrt(x^2+y^2);
diff(f(x,0),x=0)
```
On obtient :
```
0
```
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
On tape :
```
diff(f(0,y),y=0)
```
On obtient :
```
0
```
Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
On tape :
```
ghk:=f(h,k)/sqrt(h^2+k^2)
```
On obtient :
```
sin(1/(sqrt(h^2+k^2)))*sqrt(h^2+k^2)
```
Donc $\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \leq \sqrt{x^2+y^2}$ donc :
$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers (0,0).
Donc f est différentiable en (0,0).
Étude de la continuité des dérivées partielles.
On tape :
```
dfx:=diff(f(x,y),x):;
subst(dfx,y,0)
```
On obtient :
```
2*x*sin(1/abs(x))-cos(1/abs(x))*abs(x)/x
```
Donc :
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 2x\sin(\frac{1}{|x|}) - \frac{x}{|x|}\cos(\frac{1}{|x|})$.
$2x\sin(\frac{1}{|x|}) - \frac{x}{|x|}\cos(\frac{1}{|x|})$ qui n'a pas de limite quand x tend vers 0.
Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en (0,0).
De même puisque $f(x,y) = f(y,x)$, on a : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 2y\sin(\frac{1}{|y|}) - \frac{y}{|y|}\cos(\frac{1}{|y|}$
qui n'a pas de limite quand y tend vers 0.
Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en (0,0).

21.2.4 Exercice3

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Démontrer que f admet des dérivées partielles en tous les points de $\mathbb{R}^2$.
f est-elle continue au point (0,0) ?
f est-elle différentiable en (0,0) ?

Les dérivées partielles de f sont-elles continues ?
Solution
On remarque que $f(x,y) = f(y,x)$.
Calcul des dérivées partielles au point $(x,y) \neq (0,0)$:
On tape :
```
f(x,y):=x*y/(x^2+y^2)
diff(f(x,y),x)
```
On obtient :
```
(y^3-x^2*y)/(y^4+2*x^2*y^2+x^4)
```
On tape :
```
diff(f(x,y),y)
```
On obtient :
```
(x^3-y^2*x)/(x^4+2*y^2*x^2+y^4)
```
Calcul de $f'_x(0,0)$ et $f\prime_y(0,0)$.
On tape :
```
limit(f(x,0)/x,x,0)
```
On obtient :
```
0
```
On tape :
```
limit(f(0,y)/y,y,0)
```
On obtient :
```
0
```
Donc f admet des dérivées partielles en tous les points de $\mathbb{R}^2$.
f est-elle continue au point (0,0) ?
On a :
$f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$
$f(x,-x) = \dfrac{-x^2}{2x^2} = \dfrac{-1}{2}$
Donc f n'est pas continue en (0,0) puisque $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) \neq \lim\limits_{x \to 0} f(x,-x)$.
La fonction f n'est pas continue en (0,0) donc f n'est pas différentiable en en (0,0) et donc les dérivées partielles ne sont pas continues en (0,0).

21.3 La formule de Taylor

21.3.1 Théorèmes

$f''_{xy} = f''_{yx}$ en tout point où elles sont continues.
Une fonction de plusieurs variables admet un développement de Taylor si elle admet des dérivées partielles continues.
On se ramène à un acroissement d'une fonction d'une variable en posant :
$x = x_0 + ht,\ y = y_0 + kt,\ z = z_0 + lt$ et $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt, z_0 + lt)$ on a ainsi :
$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = g(1) - g(0)$.
Par analogie avec la formule du binôme, on notera :
$h^2 f''_{xx} + 2hk f''_{xy} + k^2 f''_{yy}$ par la puissance symbolique : $[hf'_x + kf'_y]^2$.
et de même la puissance symbolique $[hf'_x + kf'_y]^p$ désignera $\sum_{\alpha=0}^{p} C_p^\alpha h^{p-\alpha} k^\alpha f^p_{x^{p-\alpha} y^\alpha}$.

21.3.2 Exercice1

Développement de Taylor à l'ordre 3 de :
$f(x, y) = \sin(xy)$ au point $x_0 = 1$ et $y_0 = \pi/2$ On a la formule de Taylor si $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$:
$f(x, y) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2hkf''_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f''_{yy}(x_0, y_0)) + \frac{1}{3!}(h^3 f'''_{xxx}(x_0, y_0) + 3h^2 k f'''_{xxy}(x_0, y_0) + 3hk^2 f'''_{xyy}(x_0, y_0) + k^3 f'''_{yyy}(x_0, y_0)) + R_4$ Où R_4 avec la notation symbolique vaut :
$R_4 = \frac{1}{4!}([h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}]^4 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$
On a :
$f(x_0, y_0) = \sin(\pi/2) = 1$
$f'_x(x, y) = y\cos(xy)$ donc $f'_x(x_0, y_0) = 0$
$f'_y(x, y) = x\cos(xy)$ donc $f'_y(x_0, y_0) = 0$
$f''_{xx}(x, y) = -y^2 \sin(xy)$ donc $f''_{xx}(x_0, y_0) = -\pi^2/4$
$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -xy\sin(xy)$ donc $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = -\pi/2$
$f''_{yy}(x, y) = -x^2 \sin(xy)$ donc $f''_{yy}(x_0, y_0) = -1$
$f'''_{xxx}(x, y) = -y^3 \cos(xy)$ donc $f'''_{xxx}(x_0, y_0) = 0$
$f'''_{xxy}(x, y) = -2y\sin(xy) - xy^2 \cos(xy)$ donc $f'''_{xxy}(x_0, y_0) = -\pi$ $f'''_{xyy}(x, y) = -2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy)$ donc $f'''_{xyy}(x_0, y_0) = -2$
$f'''_{yyy}(x, y) = -x^3 \cos(xy)$ donc $f'''_{yyy}(x_0, y_0) = 0$
Donc on a :
$f(x, y) = \sin(xy) = 1 + -\pi^2/8(x-1)^2 - \pi/2(x-1)*(y-\pi/2) - (y-\pi/2)^2/2 - \pi/2(x-1)^2(y-\pi/2) - (x-1)*(y-\pi/2)^2 + R_3$
avec $R_3 = (h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}} * \epsilon(h, k)$ avec $\epsilon(h, k) -> 0$ quand $(h^2 + k^2) -> 0$.
Avec **Xcas**
On tape :
`P:=series(sin(x*y),[x,y],[1,pi/2],3)`
On obtient :
`1+(-pi^2*(x-1)^2-4*(y-pi/2)*pi*(x-1)-4*(y-pi/2)^2)/8+ (-(y-pi/2)*pi*(`
Soit on pose :
$x = x_0 + ht, y = y_0 2 + k * t$
On définit la fonction $g(t) = f(x_0 + h * t, y_0 + k * t)$.
On a donc $g(1) - g(0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ donc :
on fait un développement de Taylor à l'ordre 3 de :
$g(t) = f(x_0 + h * t, y_0 + k * t)$ au voisinage de $t = 0$ Puisque $x - 1 = h * t$ et $y - \pi/2 = kt$ il suffira ensuite de remplacer t par 1 et h par $x - x_0$ et k par $y - y_0$.
On tape :
`g(t):=sin((1+h*t)*(pi/2+k*t));series(g(t),t=0,3,polynom)(t=1)`
On obtient le développement dans lequel $h = x - 1$ et $k = y - \pi/2$:
`1+(-2*h*k^2-h^2*k*pi)/2+(-4*k^2-4*h*k*pi-h^2*pi^2)/8`
On retrouve le polynôme $Q(h, k)$.
Dans les 2 cas, il faut rajouter le reste qui vaut :
$(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}} * \epsilon(h, k)$ avec $\epsilon(h, k) -> 0$ quand $h^2 + k^2 -> 0$

21.3.3 Exercice2

Trouver les extremums de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ quand u et v varient dans $]0, 1[$.

Une solution
On calcule les dérivées partielles On tape :
```
f(x,y):=x^4+y^4-2*(x-y)^2
diff(f(x,y),x)
```
On obtient :
```
-4*(x-y)+4*x^3
```
Donc :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4*(x-y)+4*x^3$ et
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
On remarque que $f(x;y) = f(y,x)$ donc :
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4*(x-y)+4*y^3$ et
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
Donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
En tout point où f admet un extremum on a :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
On tape :
```
normal(solve([-4*(x-y)+4*x^3=0,4*(x-y)+4*y^3=0],[x,y]))
```
On obtient 3 solutions :
```
[[0,0],[sqrt(2),-(sqrt(2))],[-(sqrt(2)),sqrt(2)]]
```
Est-ce que f admet un extremum au point((0,0) ? On calcule les dérivées partielles d'ordre 2.
On tape :
```
diff(f(x,y),x$2)
```
On obtient :
```
-4+12*x^2
```
Donc :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4+12x^2$, On tape :
```
diff(f(x,y),y$2)
```
On obtient :
```
-4+12*y^2
```
Donc :
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4+12y^2$, On tape :
```
diff(diff(f(x,y),x),y)
```
On obtient :
```
4
```
Donc :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$, Donc :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -4$ et
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 4$
Si h et k sont voisins de 0 alors $f(h,k) - f(0,0)$ est du signe de l'expression de

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)k^2 = -4h^2 + 8hk - 4k^2$.
On a donc $-4h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(h^2 - 2hk + k^2) = -4(h-k)^2$.
Cette expression est négative si $h \neq k$ ou nulle si $h = k$.
Donc $(0,0)$ n'est pas un extremum pour f.
On tape puisque $f(0,0) = 0$:

```
factor(f(x,x)),factor(f(x,-x))
```

On obtient :

```
2*x^4,2*x^2*(-2+x)*(2+x)
```

(0,0) est un minimum de $f(x,x)$ et un maximum de $f(x,-x)$ lorsque $x = -1..1$.
Est-ce que f admet un extremum au point $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$? On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
On a :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20$ et
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4$
Si h et k sont voisins de 0 alors $f(h,k) - f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est du signe de l'expression de $20h^2 + 8hk + 20k^2 = 4(h+k)^2 + 16(h^2 + k^2)$.
Cette expression est positive, donc $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum pour f.
Le graphe de f est symétrique par rapport au lan $x = y$ donc on a aussi $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est un minimum pour f.
On tape pour voir le graphe de f :

```
plotfunc(f(x,y),[x=-2..2,y=-2..2]),plan(y=x,affichage=1)
```

21.3.4 Exercice3

Trouver le minimum de $f(u,v) = \frac{u+v}{uv(1-uv)}$ quand u et v varient dans $]0,1[$.

Une solution

En tout point u, v où f admet un extremum on a :
$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0$.
Comme $f(u,v) = f(v,u)$ on ne cherche que les solutions de $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0$ Avec `Xcas`,on tape :

```
f(u,v):=(u+v)/(u*v*(1-u*v))
normal(diff(f(u,v),u))
```

On obtient :

```
(-1+2*u*v+u^2)/(u^2-2*u^3*v+u^4*v^2)
```

On tape :

```
solve(-1+2*u*v+u^2=0,u)
```

On obtient :

```
[sqrt(1+v^2)-v,-(sqrt(1+v^2))-v]
```

Comme $u > 0$ on en déduit que :
$u = \sqrt{1+v^2} - v$ et $v = \sqrt{1+u^2} - u$ donc
$u + v = \sqrt{1+v^2}$ et $u + v = \sqrt{1+u^2}$ donc
$u^2 = v^2$ ce qui implique $u = v$ puisque ($u > 0$ et $v > 0$)
si $u = v$ et $-1 + 2uv + u^2 = 0$ alors $-1 + 2 * u^2 + u^2 = 3u^2 - 1 = 0$
Donc si f a un extremum c'est lorsque $u = v = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Puisque $f(u,v)=f(v,u)$ on a :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(u,v)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(u,v)$.
Donc on cherche le signe de l'expression :
$J=h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(u,v)+k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)$.
On tape :
```
d2u:=normal(diff(f(u,v),u$2))
```
On obtient :
```
(-2+6*u*v-6*u^2*v^2-2*u^3*v)/(-u^3+3*u^4*v-3*u^5*v^2+u^6*v^3)
```
On tape :
```
normal(subst(d2u,[u=1/sqrt(3),v=1/sqrt(3)]))
```
On obtient :
```
9*sqrt(3)
```
On tape :
```
d2uv:=normal(diff(diff(f(u,v),u),v))
```
On obtient :
```
(-2*u-2*v)/(-1+3*u*v-3*u^2*v^2+u^3*v^3)
```
On tape :
```
normal(subst(d2uv,[u=1/sqrt(3),v=1/sqrt(3)]))
```
On obtient :
```
9*sqrt(3)/2
```
Donc $J=9\sqrt{3}(h^2+k^2+hk)=9\sqrt{3}-h+k)^2>0$
Donc pour tout h et k de l'intervalle $]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}1/\sqrt{3}[$ on a :
$f(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+h,\dfrac{1}{\sqrt{3}}+k)\geq f(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$
On tape :
```
normal(f(1/sqrt(3),1/sqrt(3)))
```
On obtient :
```
3*sqrt(3)
```
Donc f a un minimum en $u=v=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et ce minimum vaut $3\sqrt{3}$

21.3.5 Exercice4

Énoncé Soient un triangle ABC et un point M situé à l'intérieur de ABC.
Soient P, Q, R les projections de M sur AB, AC, BC.
Où faut-il placer le point M pour que $MP*MQ*MR$ soit maximum ?
Où faut-il placer le point M pour que $MP*MQ*MR$ soit minimum ?
Solution de l'énoncé Pour le minimum c'est facile !
Puisque $MP*MQ*MR\geq 0$ le minimum sera atteint quand $MP*MQ*MR=0$ c'est à dire quand $MP=0$ ou $MQ=0$ ou $MR=0$ i.e. M se trouve sur les côtés du triangles ABC.
Pour le maximum on va utiliser les propriétés des fonctions de plusieurs variables.
On note $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ et S=2*aire(ABC).
On remarque que :
cMP+bMQ+aMR =2*aire(PAB)+2*aire(PAC)+2*aire(PBC)=2*aire(ABC) $=S$ Donc on peut exprimer MR en fonction de MP et de MQ ou exprimer MP en fonction de MR et de MQ.

On pose :
$MP = u$, $MQ = v$ $MR = w$ et
$cMP = U, bMQ = V$ $aMR = W$.
Si M est situé à l'intérieur de ABC, on a $0 < U < S, 0 < V < S, 0 < W < S$.
On cherche en quel point situé à l'intérieur de ABC, le produit uvw est maximum ou encore en quel point situé à l'intérieur de ABC, le produit UVW est maximum .
On a $W = S - U - V$ et on cherche le maximum de $UVW = abcuvw = SUV - U^2V - UV^2$.
On pose :
$f(U, V) = SUV - U^2V - UV^2$.
f est continue et admet des dérivées partielles continues de tous les ordres donc f admet un développement de taylor en tous les points.
Lorsque f admet un extremum on a :
$\frac{\partial f}{\partial U} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial V} = 0$ i.e.
$SV - 2UV - V^2 = V(S - 2U - V) = 0$ et $SU - U^2 - 2UV = U(S - U - 2V) = 0$
Les solutions possibles sont donc :
$U = 0, V = 0, W = S$, $U = 0, V = S, W = 0$, $U = S, V = 0, W = 0$ ce qui désigne les 3 sommets A, B, C du triangle(ABC) et
$S - 2U - V = 0, S - U - 2V = 0$
Donc :
$2V = S - U = 2S - 4U$ et $V = S - 2U$ donc
$U = S/3$, $V = S/3$ et donc $W = S/3$.
Cela signifie que :
$cMP = bMQ = aMR = S/3$ ce qui veut dire que le point M partage le triangle ABC en 3 triangles (ABM, ACM, BCM) de même aire.
Soient s_1 (resp Q) l'homothétique du segment BC (resp du point C) dans l'homothétie de centre A et de rapport 2/3 et
s_2 (resp R) l'homothétique du segment BC (resp du point C) dans l'homothétie de centre B et de rapport 2/3.
M est donc l'intersection des 2 segments s_1 et s_2.
Puisque le centre de gravité G de ABC est aussi l'intersection de ces 2 segments s_1 et s_2, c'est que M est en G.
Donc $MP * MQ * MR$ est maximum si et seulement si M est le centre de gravité G de ABC.

Chapitre 22

La géométrie dans l'espace

22.1 Le plan

L'équation cartésienne d'un plan quelconque est :
$ax + by + cz + d = 0$: son vecteur normal est $[a, b, c]$ et il passe par le point $[-d/a, 0, 0]$ si $a \neq 0$ ou par le point $[0, -d/b, 0]$ si $b \neq 0$ ou par le point $[0, 0, -d/c]$ si $c \neq 0$ (on suppose $a * b * c \neq 0$).
Avec `Xcas`
On tape pour dessiner le plan d'équation $2x + y - 2z - 1 = 0$:
`plan(2*x+y-2*z-1=0)`

L'équation cartésienne d'un plan passant par les points $A = [x_0, y_0, z_0]$, $B = [x_1, y_1, z_1]$, $C = [x_2, y_2, z_2]$ est :
`det(`$[[x_0, y_0, z_0, 1], [x_1, y_1, z_1, 1], [x_2, y_2, z_2, 1], [x, y, z, 1]]$`)=0`.
Par exemple le plan d'équation $x/a + y/b + z/c = 1$ passe par les points :
$A = [a, 0, 0], B = [0, b, 0]$ et $C = [0, 0, c]$ (on suppose $a \neq 0$ $b \neq 0$ et $c \neq 0$).
Avec `Xcas`
On définit 3 points `A`,`B`,`C`.
On tape pour dessiner la plan passant par ces 3 points :
`plan(A,B,C)`
On tape pour avoir son équation cartésienne :
`equation(plan(A,B,C))`

L'équation cartésienne d'un plan passant par le point $A = [x_0, y_0, z_0]$ et parallèle aux vecteurs $U = [a, b, c]$ et $V = [d, e, f]$ est :
$h * (x - x_0) + k * (y - y_0) + l * (z - z_0) = 0$ avec $[h, k, l] = W = U \wedge V$=`cross(U,V)`.

L'équation paramétrique d'un plan passant par le point $A = [x_0, y_0, z_0]$ et parallèle aux vecteurs $U = [a, b, c]$ et $V = [d, e, f]$ est :
$x(t) = x_0 + \lambda * a + \mu * d$,
$y(t) = y_0 + \lambda * b + \mu * e$,
$y(t) = y_0 + \lambda * c + \mu * f$,
(on suppose $a * b * c \neq 0$ et $d * e * f \neq 0$).

22.2 La sphère

La sphère de centre $A = [x_0, y_0, z_0]$ et de rayon R a pour équation cartésienne :
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.
De façon générale, une sphère de centre $A = [a, b, c]$ est l'ensemble des points $M = [x, y, z]$ qui vérifient une équation de la forme :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
L'équation paramétrique d'une sphère de centre $A = [x_0, y_0, z_0]$ et de rayon R est :
$x = x_0 + R\cos(\theta)\cos(\lambda)$,
$y = y_0 + R\sin(\theta)\cos(\lambda)$,
$z = z_0 + R\sin(\lambda)$
Avec `Xcas`
On tape dans un écran de géométrie 3D :
```
A:=point(1,0,1)
S:=sphere(A,2)
equation(S)
```
Ou on tape :
```
sphere(x^2+y^2+z^2-2*x-2*z-2=0)
```

22.3 L'ellipsoïde

L'équation cartésienne d'un ellipsoïde centrée en $A = [x_0, y_0, z_0]$ et de demi-axes de longueur $|a|$, $|b|$ et $|c|$ est :
$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$

22.4 L'hyperboloïde

22.4.1 L'hyperboloïde à une nappe

L'équation cartésienne d'une hyperboloïde centrée en $A = [x_0, y_0, z_0]$ et de demi-axes de longueur $|a|$,$|b|$ et $|c|$ est :
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$

22.4.2 L'hyperboloïde à deux nappes

L'équation cartésienne d'une hyperboloïde centrée en $A = [x_0, y_0, z_0]$ et de demi-axes de longueur $|a|$,$|b|$ et $|c|$ est :
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = -1$

22.5 Le paraboloïde

22.5.1 Le paraboloïde elliptique

L'équation cartésienne d'un paraboloïde elliptique centrée en $A = [x_0, y_0, z_0]$ et de demi-axes de longueur $|a|$, $|b|$ et $|c|$ est :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)}{c}=0$$

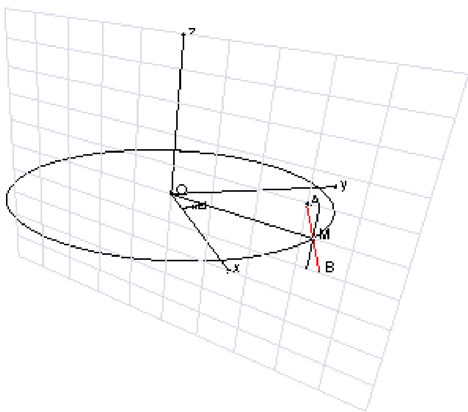
22.5.2 Le paraboloïde hyperbolique

L'équation cartésienne d'un paraboloïde hyperbolique centrée en $A=[x_0,y_0,z_0]$ et de demi-axes de longueur $|a|$, $|b|$ et $|c|$ est :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)}{c}=0$$

22.6 Le ruban de Mœbius

On cherche tout d'abord l'équation paramétrique du ruban de Mœbius



Pour cela on considère :

- un repère orthonormé Oxy, avec $\overrightarrow{i}$ (resp $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$) le vecteur unitaire de Ox (resp Oy, Oz),
- le cercle de centre O et de rayon R dans le plan Oxy,
- un point M sur ce cercle tel que l'angle $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OM})=u$,
- dans le plan normal au cercle (contenant $O\overrightarrow{k}$), un segment BA de milieu M, de longueur $2l$, tel que l'angle $(M\overrightarrow{k},\overrightarrow{MA})=u/2$ (on oriente le plan normal avec la tangente au cercle).

Lorsque u varie de 0 à 2π le segment BA engendre le ruban de Moebius (ou la bande de Moebius) car le point M revient à son point de départ, le point A se trouve en B et le point B se trouve en A.

On a :

$\overrightarrow{OM}=[R\cos(u),R\sin(u),0]$

$\overrightarrow{n}=\cos(u),\sin(u),0]$ est le vecteur normal au cercle

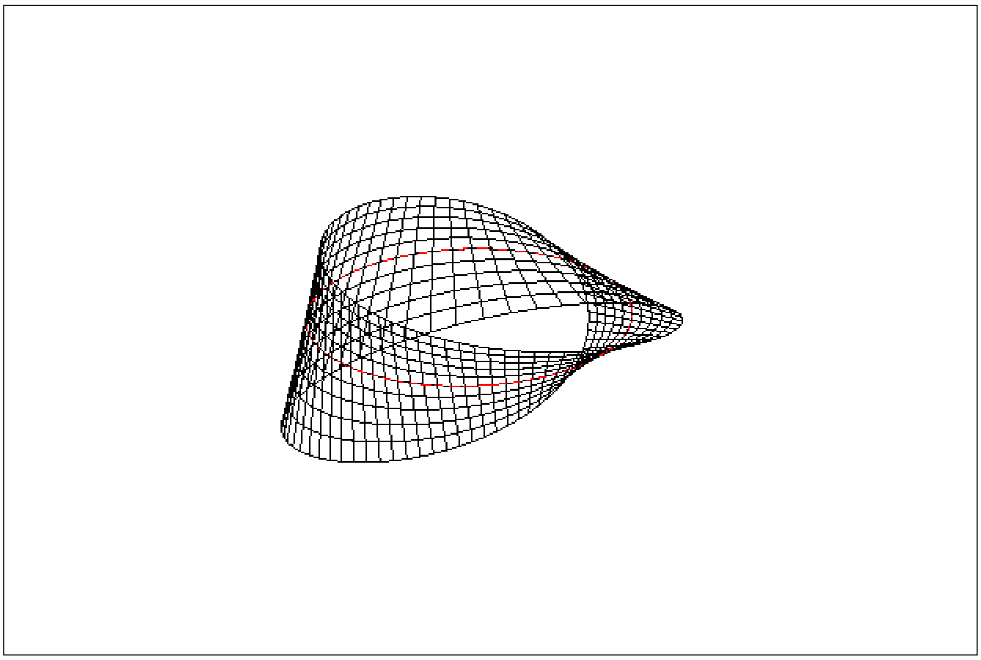
$\overrightarrow{MA} = l\cos(u/2+\pi/2)\overrightarrow{n} + l\sin(u/2+\pi/2)\overrightarrow{k} = -l\sin(u/2)\overrightarrow{n} + l\cos(u/2)\overrightarrow{k}$
donc
$\overrightarrow{MA} = [-l\sin(u/2)\cos(u), -l\sin(u/2)\sin(u), l*\cos(u/2)]$
Lorsque N se trouve sur le segment AB on a :
$\overrightarrow{MN} = v*\overrightarrow{MA}$ pour $v = -1..+1$ donc
$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} + v*\overrightarrow{MA}$
$\overrightarrow{ON} = [R\cos(u), R\sin(u), 0] - v[l\sin(u/2)\cos(u), -l\sin(u/2)\sin(u), l\cos(u/2)]$
donc
$\overrightarrow{ON} = [R\cos(u) - lv\sin(u/2)\cos(u), R\sin(u) - lv\sin(u/2)\sin(u), lv\cos(u/2)]$
Avec `Xcas`, on tape :

```
f(u,v,R,l):=R*cos(u)-l*v*cos(u)*sin(u/2)
g(u,v,R,l):=R*sin(u)-l*v*sin(u)*sin(u/2)
h(u,v,l):=l*v*cos(u/2)
```

On ouvre un écran de géométrie 3d et on tape :

```
plotparam([f(u,v,4,1),g(u,v,4,1),h(u,v,1)],[u=0..2*pi, v=-1..1],
ustep=0.1,vstep=0.2)
affichage(cercle(point(4,0,0),point(-4,0,0),point(0,4,0)),1)
```

On obtient :

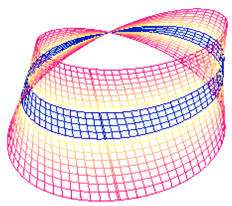


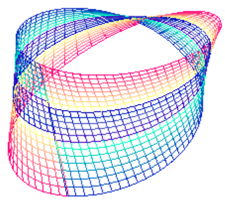
Ou bien pour avoir dela couleur, on tape dans un éditeur de programmes :

```
mobcolor():={
local L,j;
L:=NULL;
pour j de 0 jusque 9  faire
L:=L,affichage(plotparam([f(u,v,4,1),g(u,v,4,1),h(u,v,1)],
[u=0..2*pi, v=-1+j*0.1..-1+0.1*j+0.1], ustep=0.1,vstep=0.1),
 168+j);
L:=L,affichage(plotparam([f(u,v,4,1),g(u,v,4,1),h(u,v,1)],
[u=0..2*pi, v=1-j*0.1-0.1..1-j*0.1], ustep=0.1,vstep=0.1),
```

```
168+j);
//pour le second dessin
//168+j+9);
fpour;
retourne L;
}:;
```

Puis on ouvre un écran de géométrie 3d et on tape :
`mobcolor()`
On obtient :





22.7 Le cube

22.7.1 L'énoncé

On veut trouver les intersections du cube avec un plan passant par les milieux de ses côtés.
Soient A, B, C, D, E, F, G, H les sommets du cube ($ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces parallèles du cube et AE en est un côté), M le milieu de AB, et N le milieu de AD.
On cherche l'intersection du cube avec le plan MNP avec P le milieu de l'un des 10 autres côtés.
Au cube on associe le repère orthonormé $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AE}/2$

22.7.2 La solution

P milieu de BC ou DC

Ici la solution est évidente car P se trouve dans le plan $ABCD$.
L'intersection du cube avec le plan MNP est donc le carré $ABCD$ Le plan MNP a pour équation $z = 0$
On note $P0$ le milieu de BC et $P1$ le milieu de DC.

P milieu de AE

Les trois segments MN, MP, NP se trouvent chacun sur une des faces du cube.

L'intersection du cube avec le plan MNP est donc le triangle MNP.
Le plan MNP a pour équation $x + y + z = 1$.
On note $P2$ le milieu de AE.

P **milieu de** EF **ou** EH

Si $P3$ est le milieu de EF et si $P4$ est le milieu de EH, les segments $MP3$ et $NP4$ sont parallèles, donc $M, N, P3, P4$ sont dans le même plan.
Les segments $MP3$ et $NP4$ se trouvent chacun sur une des faces du cube et dans le plan $MNP3P4$.
Donc, le plan $MNP3$ (resp $MNP4$) contient $P4$ (resp $P3$) et coupe le cube selon le rectangle $MP3P4N$.
Le plan MNP a pour équation $x + y = 1$.

P **milieu de** BF **ou** FG **ou** GH **ou** DH

Si $P5$ est le milieu de BF, si $P6$ est le milieu de FG, si $P7$ est le milieu de GH et si $P8$ est le milieu de DH, les segments $P5P8$, $P6P7$ BD et MN sont parallèles. Le milieu de $P5P8$ est le centre du cube et c'est aussi le milieu de $MP7$ et de $NP6$. Donc $N, M, P5, P6, P7, P8$ sont dans un même plan. L'intersection du cube avec le plan MNP est donc l'hexagone $NMP5P6P7P8$.
Le plan MNP a pour équation $x + y - z = 1$.

P **milieu de** CG

Si MN coupe BC en I et DC en J.
PI coupe BF en Q et PJ coupe DH en R.
On a $BQ = BF/6$ et $DR = DH/6$.
Les segments MN, MQ, QP, PR, RN se trouvent chacun sur une des faces du cube et dans le plan MNP.
L'intersection du cube avec le plan MNP est donc le pentagone $NMQPR$.
Le plan MNP a pour équation $x + y - 3z = 1$.
On note $P9$ le milieu de CG.

22.7.3 Visualisation de l'hexagone avec `Xcas`

On peut se servir du bouton du milieu de la souris pour modifier les unités de l'axe des z.
On tape :

```
A:=point(0,0,0);
B:=point(2,0,0);
C:=point(2,2,0);
E:=point(0,0,2);
M:=point(1,0,0);
N:=point(0,1,0);
P0:=point(2,1,0);
P1:=point(1,2,0);
P2:=point(0,0,1);
```

```
P3:=point(1,0,2);
P4:=point(0,1,2);
P5:=point(2,0,1);
P6:=point(2,1,2);
P7:=point(1,2,2);
P8:=point(0,2,1);
P9:=point(2,2,1);
cube(A,B,C);
polygone(N,M,P5,P6,P7,P8);
plan(M,N,P0);
plan(M,N,P2);
plan(M,N,P3);
equation(plan(M,N,P5));
equation(plan(M,N,P9));
```

On peut aussi visualiser tous les résultats précédents.
Si vous voulez voir même les lignes cachées il faut décocher `hidden3d` dans la configuration du graphique.

22.8 Exercice sur plans et droites

22.8.1 L'énoncé

Soient $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$ trois points de $\mathbb{R}^3$.

1/ Déterminer l'équation du plan P passant par A, B, C. Donner un vecteur normal au plan P.

2/ Soit D_0 la droite perpendiculaire à P passant par l'origine.
Déterminer une équation paramétrique de D_0.
Calculer les coordonnées du point J intersection de P et D_0.

3/ Déterminer les équations paramétriques de la droite D_1 passant par A et J et de la droite D_2 passant par B et C.
Montrer que D_1 et D_2 se coupent au milieu M de BC. On precisera les coordonnées de M.

22.8.2 La solution avec l'aide de `Xcas`

1/ L'équation du plan P est de la forme :$ax + by + cz + d = 0$.
P passe par A donc : $a + d = 0$
P passe par B donc : $b + d = 0$
P passe par C donc : $c + d = 0$
donc $a = b = c = -d$ et une équation du plan P est $x + y + z = 1$.
Un vecteur normal au plan P est donc $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.
Ou encore on a :
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
On a :
$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$
On tape :
`cross([-1,1,0],[-1,0,1])`
On obtient un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan P :

`[1,1,1]`
Si $M=(x,y,z)$ est un point du plan P, l'équation du plan P est :
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.
On tape :
`dot([1,1,1],[x-1,y,z])=0`
On obtient une équation du plan P : `(x-1+y+z)=0`

2/ Si $M=(x,y,z)$ est un point de D_0, $\overrightarrow{OM}$ est parallèle à $\overrightarrow{n}$ donc :
$\overrightarrow{OM}=\lambda\cdot\overrightarrow{n}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
Ou on tape :
`cross([x,y,z],[1,1,1])=[0,0,0]`
On obtient :
`[y-z,z-x,x-y]=[0,0,0]`
L'équation de D_0 est donc :
$x=y=z$ ou encore :
$x=\lambda, y=\lambda, z=\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
Pour obtenir l'intersection de P et D_0, on tape :
`solve([y-z,z-x,x-y,x-1+y+z],[x,y,z])`
On obtient les coordonnées de J :
`[[1/3,1/3,1/3]]`

3/ Pour obtenir l'équation de D_1 on a :
$\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AJ}$ donc :
$[x-1=\lambda*(-2)/3, y=\lambda/3, z=\lambda/3]$
Ou on tape :
`cross([x-1,y,z],[-2/3,1/3,1/3])=[0,0,0]`
On obtient :
`[y/3-z/3,(z*-2)/3-(x-1)/3,(x-1)/3-(y*-2)/3]=[0,0,0]`
On tape :
`solve([y/3-z/3,(z*-2)/3-(x-1)/3,(x-1)/3-(y*-2)/3],[x,y,z])`
et on obtient : `[[x,(x-1)/-2,(x-1)/-2]]`
donc `x=x,y=(x-1)/-2,z=(x-1)/-2` est l'équation paramétrique de D_1 de paramètre `x`.

Pour obtenir l'équation de D_2 on a :
$\overrightarrow{BM}=\lambda\cdot\overrightarrow{BC}$ donc :
$x=0,\ y-1=-\lambda,\ z=\lambda$
Ou on tape :
`cross([x,y-1,z],[0,-1,1])=[0,0,0]`
On obtient :
`[y-1+z,-x,-x]=[0,0,0]`
donc `x=0, y=y, z=1-y` est l'équation paramétrique de D_2 de paramètre `y`.

Pour avoir l'intersection de D_1 et de D_2, on tape :
`solve([ x=x,y=(x-1)/-2,z=(x-1)/-2, x=0,y=y,z=1-y],[x,y,z])`
On obtient les coordonnées de M :
`[[0,1/2,1/2]]`
Ce point est bien le milieu de BC puisque :
$2*\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

22.9 Le problème des quatre cônes

Ce problème aète donné aux olympiades académiques de 2005.
Quatre cônes opaques sont posés sur le sol.
Les trois cônes K_1, K_2, K_3 sont identiques : leur hauteur est égale au rayon r de leurs cercles de base et les centres de ces cercles sont les sommets d'un triangle équilatèral de côté 1.
Le cône K_4 a une hauteur égale au diamètre de son cercle de base et celui-ci est tangent extérieurement aux cercles de base des trois autres cônes.
Quelle condition doit vérifier r pour que, depuis le sommet de chacun des quatre cônes, les trois autres sommets soient visibles ?

22.9.1 La modélisation avec `Xcas`

Pour tracer on cône, ayant un sommet et une base , il faut utiliser la commande `demi_cone` de `Xcas` qui a comme patramètres :
son sommet, la direction de son axe, son demi-angle au sommet et, sa hauteur algégrique.
Le rayon des cercles de base des cônes K_1, K_2, K_3 vaut r avec $0 \leq r \leq 0.5$.
Le rayon du cercle de base du cône K_4 vaut $R = \sqrt{3}/3 - r$, et son demi-angle au sommet a pour tangente $1/2$.
On appelle A, B, C, D les sommets des cônes K_1, K_2, K_3, K_4.
On tape ou on exécute `cones.xws` :

```
r:=element(0 .. 0.5,0.19);
A:=point([0,0,r]):;
B:=point(1,0,r):;
C:=point(1/2,sqrt(3)/2,r):;
demi_cone(A,[0,0,1],pi/4,-r);
demi_cone(B,[0,0,1],pi/4,-r);
demi_cone(C,[0,0,1],pi/4,-r);
R:=sqrt(3)/3-r;
D:=point(1/2,sqrt(3)/6,2*R):;
K4:=affichage(demi_cone(D,[0,0,1],atan(0.5),-2*R),rempli+bleu);
segment(A,B,couleur=rouge);
segment(C,B,couleur=rouge);
segment(C,A,couleur=rouge);
affichage(inter(plan(A,B,C),K4),vert);
evalf(sqrt(3)/9);
```

On peut faire varier r et voir qu'il faut choisir $r > a$ avec $a \simeq 0.2$.
Le cas limite étant que les segments AB, BC et AC doivent être tangent au cercle C_4 qui est l'intersection du cône K_4 et du plan ABC.
Il est interessant de regarder la vue de dessus (`Menu->3-d`) pour voir comment évolue l'intersection du cône K_4 avec le plan ABC.

22.9.2 Le raisonnement

Il est évident que depuis D on peut toujours voir les points A, B, C et inversement d'un des points A, B, C on peut toujours voir le point D.

Pour que l'on puisse voir B et C depuis le point A il ne faut pas que le cercle C_4, intersection du cône K_4 avec le plan ABC coupe les segments AB et AC. Pour que l'on puisse voir C depuis le point B il ne faut pas que le cercle C_4 coupe le segments BC. IL faut donc chercher l'intersection C_4, du cône K_4 avec le plan ABC, à savoir son centre et son rayon. Son centre a pour coordonnées $1/2$, $\sqrt{3}/6, r$.
Si son rayon vaut $r1$, on sait que la hauteur du cône K_4 vaut $2 * R$ et Comme le demi-angle au sommet du cône K_4 a pour tangente $1/2$, la distance du centre de C_4 au sommet de K_4 est égale au double du rayon du cercle C_4 donc :
$2 * R = r + 2 * r1$ or $R = \sqrt{3}/3 - r$ donc :
$2 * R = 2 * \sqrt{3}/3 - 2 * r = r + 2 * r1$ $r1 = \sqrt{3}/3 - 3 * r/2$.
Pour tracer ce cercle en vert il faut taper :

```
r1:=sqrt(3)/3-3*r/2
affichage(cercle([1/2,sqrt(3)/6,r],[r1,0,0],A),vert)
```

Lorsque ce cercle est tangent aux segments AB, BC et AC il est facile de trouver son rayon car c'est donc le cercle inscrit au triangle ABC. Comme le triangle ABC est équilatéral, son rayon vaut $\sqrt{3}/6$. donc $2 * R = r + \sqrt{3}/3$ 0n a donc, le cercle C_4 est tangent aux segments AB, BC et AC :
$r1 = \sqrt{3}/3 - 3 * r = \sqrt{3}/6$,
c'est à dire :
$r = \sqrt{3}/9 = a$ et `evalf(sqrt(3)/9)=0.19245008973`.
Si $r < a$ chaque segment AB, BC et AC coupent le cône K_4 en 2 points et si $r \geq a$ les segments sont tangents ou extérieurs au cône K_4.

Chapitre 23

Les limites

23.1 Un exercice sur limite et développement limité

23.1.1 L'énoncé

1/ Trouver le développement limité à l'ordre 4 autour de zéro de :

$$f(x) = \cos(\sin(x))$$

. 2/ Calculer :

$$\lim_{x->0} \frac{f(x) - e^{-x^2}}{x^2}$$

3/ Soit g définie sur $]0; +\infty$ par :

$$g(x) = x^2(f(\frac{1}{\sqrt(x)}) - 1)$$

Montrer que g admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et en donner une équation.

23.1.2 La solution avec `Xcas`

1/ On tape :
`taylor(cos(sin(x)))`
On obtient :
`1+(x^2)/-2+(5*x^4)/24+x^6*order_size(x)`
donc le développement limité à l'ordre 4 autour de zéro de $f(x) = \cos(\sin(x))$ est :
`1+(x^2)/-2+(5*x^4)/24+x^5*`ϵ`(x)`
2/ On tape :
`limit((cos(sin(x))-exp(-x^2))/x^2,x=0)`
On obtient :
`1/2`
3/ On tape :
`f(x):=cos(sin(x))`
Puis, on tape :
`series(x^2*(f(1/sqrt(x))-1),x=+infinity,4)`

On obtient :
`x/-2+5/24+(order_size(1/x))/x`
Donc g admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ déquation :
$y = -x/2 + 5/24$

23.2 Des calculs de limite

On tape :

```
limit((1-cos(x))*sin(x)^2/(x^3*ln(x+1)),x,0);
limit(sqrt(x^2+x+1)-sqrt(x^2+1),x,+infinity);
limit((x^n-y^n)/(x-y),x,t);
limit((x+1)/sqrt((x+1)/(x-1)),x,+infinity);
limit((1-2*x)/(x^2+x-2),x,1);
limit(exp(x*exp(-x)/(exp(-x)+exp(-2*x^2/(x+1))))/x,
      x,+infinity);
limit((exp(x*exp(-x)/(exp(-x)+exp(-2*x^2/(x+1))))-
      exp(x))/x,x,+infinity);
```

23.3 Des calculs de développements limités

On tape :

```
series(cos(x)/exp(x),x,0,4);
series(ln(cos(x)),x,0,4);
series(atan(x*y)+1-exp(x+y),x,1/2,2);
series(cos(x)*exp(2*x+1),x,0,4);
series(sin(sin(x)),x,0,7);
```

Exercice 1
Développement limité à l'ordre 8 de $\tan(x)$ au voisinage de 0.
On peut faire cela de 2 manières :

— On utilise l'égalité :
  $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
  On a :
  $\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040 + o(x^8)$
  $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - x^6/720 + o(x^7)$
  $1/(1-u) = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$
  Donc on pose :
  $u = x^2/2 - x^4/24 + x^6/720 + o(x^7)$:
  on a alors :
  $u^2 = x^4/4 - x^6/24 + o(x^7)$
  $u^3 = x^6/8 + o(x^7)$
  Donc :
  $1/\cos(x) = 1 + x^2/2 - x^4/24 + x^6/720 + x^4/4 - x^6/24 + x^6/8 + o(x^7) = 1 + x^2/2 + 5 * x^4/24 + 61 * x^6/720 + o(x^7)$
  On vérifie, on tape :

`series(1/cos(x),x=0,7)`
On obtient :
`1+x^2/2+5*x^4/24+61*x^6/720+x^8*order_size(x)`
On effectue $\sin(x) * 1/\cos(x)$:
`(x-x^3/6+x^5/120-x^7/5040+o(x^8))*(1+x^2/2+5*x^4/24+61*x^6/720+o(x^7))=`
`x+x^3/2+5*x^5/24+61*x^7/720-x^3/6-x^5/12-5x^7/144+x^5/120+x^7/240-x^7/50`

— On utilise l'égalité $\tan(x)' = 1 + \tan(x)^2$
On sait que :
$\tan(x) = x + o(x^2)$ donc
$\tan(x)' = 1 + x^2 + o(x^3)$ donc en intégrant :
$\tan(x) = x + x^3/3 + o(x^4)$ donc
$\tan(x)' = 1 + (x + x^3/3 + o(x^4))^2 = 1 + x^2 + 2x^4/3 + o(x^5)$ donc en intégrant :
$\tan(x) = x + x^3/3 + 2 * x^5/15 + o(x^6)$ donc
$\tan(x)' = 1 + (x + x^3/3 + 2 * x^5/15 + o(x^5 6))^2 =$
$1 + x^2 + 2 * x^4/3 + x^6/9 + 4 * x^6/15 + o(x^7) =$
$1 + x^2 + 2 * x^4/3 + 17 * x^6/45 + o(x^7)$ donc en intégrant :
$\tan(x) = x + x^3/3 + 2 * x^5/15 + 17 * x^7/315 + o(x^8)$

On vérifie, on tape :
`series(tan(x),x=0,7)`
On obtient :
`x+x^3/3+2*x^5/15+17*x^7/315+x^8*order_size(x)`

Exercice 2
Développement limité à l'ordre 7 de $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x))$ au voisinage de 0.
On tape :
`series(tan(sin(x)),x=0,7)`
On obtient :
`x+x^3/6-x^5/40+-107*x^7/5040+x^8*order_size(x)`
On tape :
`series(sin(tan(x)),x=0,7)`
On obtient :
`x+x^3/6-x^5/40+-55*x^7/1008+x^8*order_size(x)`
On peut faire ces calculs comme à la main en tapant :
```
s1:=series(sin(x),x=0,7)
s3:=series(sin(x)^3,x=0,7,polynom)
s5:=series(sin(x)^5,x=0,7,polynom)
s7:=series(sin(x)^7,x=0,7,polynom)
normal(s1+s3/3+2*s5/15+17*s7/315)
```
On obtient :
`x+x^3/6-x^5/40-107*x^7/5040+x^8*order_size(x)`
Puis on tape :
```
t1:=series(tan(x),x=0,8)
t3:=series(tan(x)^3,x=0,7,polynom)
t5:=series(tan(x)^5,x=0,7,polynom)
t7:=series(tan(x)^7,x=0,7,polynom)
normal(t1-t3/6+t5/120+t7/5040)
```
On obtient :
`x+x^3/6-x^5/40-13*x^7/240+x^8*order_size(x)`

On tape :
`-107*x^7/5040+13*x^7/240`
On obtient :
`x^7/30`
On a donc :
`tan(sin(x))-sin(tan(x))=x^7/30+x^8*order_size(x)`
On vérifie, on tape :
`series(tan(sin(x))-sin(tan(x)),x=0,7)`
On obtient :
`x^7/30+x^8*order_size(x)` **Exercice 3**
Développement limité à l'ordre 4 de :
asin $(\frac{1+x}{2+x})$ au voisinage de 0.
On tape :
`normal(series(asin((1+x)/(2+x)),x=0,3))`
On obtient :
`pi/6+(sqrt(3))/6*x+(-5*sqrt(3)/72)*x^2+7*sqrt(3)/216*x^3+(-83*sqrt(3)/`
Comment fait-on pour vérifier nos calculs ?
On tape :
`normal(asin((1+x)/(2+x))'`
On obtient :
`(sqrt(2*x+3))/((2*x+3)*abs(x+2))`
Comme x est voisin de 0 on peut simplifier en $1/\sqrt{2*x+3}(x+2)$ On tape :
`a:=series(1/sqrt(2*x+3),x=0,3,polynom)`
On obtient :
`1/(sqrt(3))-x/(3*sqrt(3))+x^2*1/6/(sqrt(3))-5*1/54*x^3/(sqrt(3))`
On tape :
`b:=series(1/(x+2),x=0,3,polynom)`
On obtient :
`1/2-x/4+x^2/8-x^3/16`
On tape :
`normal(truncate(a*b,3))`
On obtient :
`(sqrt(3))/6+(-5*sqrt(3)/36)*x+7*sqrt(3)/72*x^2+(-83*sqrt(3)/1296)*x^3`
Il faut maintenant intégrer et ne pas oublier la constante d'intégration qui vaut asin $(1/2) = \pi/3$.
On tape :
`normal(int((sqrt(3))/6+(-5*sqrt(3)/36)*x+7*sqrt(3)/72*x^2+(-83*sqrt(3`
On obtient :
`(sqrt(3))/6*x+(-5*sqrt(3)/72)*x^2+7*sqrt(3)/216*x^3+(-83*sqrt(3)/5184`
Donc le développement limité à l'ordre 4 de :
asin $(\frac{1+x}{2+x})$ au voisinage de 0 est :

$$\pi/3+(sqrt(3))/6*x+(-5*sqrt(3)/72)*x^2+7*sqrt(3)/216*x^3+(-83*sqrt(3)/5184)*x^4+x^5*order$$

Exercice 4
Développement limité à l'ordre 4 de $\ln(1/\cos(x))$ au voisinage de 0.
On tape :
`series(ln(1/cos(x)),x=0,4)`

On obtient :
`x^2/2+x^4/12+x^5*order_size(x)`
Comment fait-on pour vérifier nos calculs ?
On a $\ln(1/\cos(x)) = -\ln(\cos(x))$ et on sait que :
$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + x^5 * order\_size(x)$ et que :
$\ln(1+u) = u - u^2/2 + u^3 * order\_size(u)$ lorsque u est voisin de 0.
donc on pose $u = -x^2/2 + x^4/24 + x^5 * order\_size(x)$ et on tape :
`u:=-x^2/2+x^4/24+x^5*order_size(x)`
`u-truncate(u^2,4)/2`
On obtient :
`-x^2/2-x^4/12+x^5*order_size(x)`
Donc $\ln(1+u) = -x^2/2 - x^4/12 + x^6 * order\_size(x)$
Donc :

$$\ln(1/\cos(x)) = x^2/2 + x^4/12 + x^6 * order\_size(x)$$

Exercice 5
Développement limité à l'ordre 4 de $\sqrt{1+\cos(x)}$ au voisinage de 0.
On tape :
`series(sqrt(1+cos(x)),x=0,4)`
On obtient :
`sqrt(2)-sqrt(2)*x^2/8+sqrt(2)*x^4/384+x^5*order_size(x)`
Comment fait-on pour vérifier nos calculs ?
On a $\sqrt{(}1+\cos(x)) = \sqrt{(}2 - x^2/2 + x^4/24 + x^5 * order\_size(x))$ et on sait que :
$\sqrt{(}1+u) = 1 + u/2 - u^2/8 + u^3 * order\_size(u)$ lorsque u est voisin de 0.
donc :
$\sqrt{(}1+\cos(x)) = \sqrt{2} * (\sqrt{(}1 - x^2/4 + x^4/48 + x^5 * order\_size(x)))$
On pose $u = -x^2/4 + x^4/48 + x^5 * order\_size(x)$ et on tape :
`u:=-x^2/4+x^4/48+x^5*order_size(x)`
On tape :
`normal(sqrt(2)*(1+u/2-truncate(u^2,4)/8))`
On obtient :
`sqrt(2)+(-(sqrt(2))/8)*x^2+(sqrt(2))/384*x^4+(sqrt(2))/2*x^5*order_size(x)`
Donc

$$\sqrt{(}1+\cos(x)) = \sqrt{2} * (1 - x^2/8 + x^4/384 + x^5 * order\_size(x)$$

Exercice 6
Développement limité à l'ordre 4 de $\exp(\cos(x))$ au voisinage de 0.
On tape :
`series(exp(cos(x)),x=0,4)`
On obtient :
`exp(1)-exp(1)*x^2/2+exp(1)*x^4/6+x^5*order_size(x)`
Comment fait-on pour vérifier nos calculs ?
On a $\exp(\cos(x)) = \exp(1 - x^2/2 + x^4/24 + x^5 * order\_size(x))$ et on sait que :
$\exp(u) = 1 + u + u^2/2 + u^3 * order\_size(u)$ lorsque u est voisin de 0.
donc :
$\exp(\cos(x)) = \exp(1) * \exp(-x^2/2 + x^4/24 + x^5 * order\_size(x))$ On pose $u = -x^2/2 + x^4/24 + x^5 * order\_size(x)$ et on tape :

```
u:=x^2/2+x^4/24+x^5*order_size(x)
```
On tape :
```
normal(exp(1)*(1+u+truncate(u^2,4)/2))
```
On obtient :
```
exp(1)-1/2*x^2*exp(1)-1/6*x^4*exp(1)+exp(1)*x^5*order_size(x)
```
Donc

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1) * (1 - x^2/2 - x^4/6 + x^5 * order\_size(x))$$

Problème Soit la fonction f définie par :
$f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ si $x \neq 0$. On va montrer que f admet un développement limité en $x = 0$ et on veut le calculer à l'ordre n.

1. Montrer que $f(x)$ est continue et a une dérivé continue en $x = 0$.
2. Montrer que pour $x \neq 0$ $f(x)$ est indéfiniment dérivable et que sa dérivée $n$ième est de la forme :
   $f^{(n)}(x) = P_n(1/x) * e^{-\frac{1}{|x|}}$ où P_n est un polynôme qui est différent selon le signe de x.
3. Montrer que la dérivée $n$ième de $f(x)$ en $x = 0$ est nulle pour tout n.
   En déduire le développement limité à l'ordre n de $f(x)$ en $x = 0$.
4. tracer le graphe de f.

Chapitre 24

Les suites

24.1 Les suites récurrentes

24.1.1 L'énoncé d'une suite d'itérations

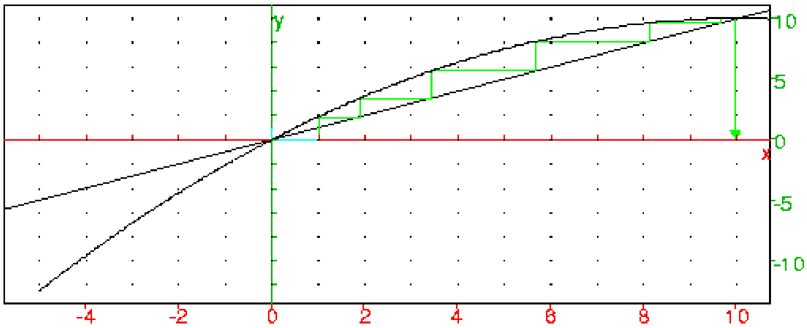
Soit la suite définie par :
$u_0 = 1$
$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$
Calculer u_1 édutier les variations de la fonction $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.
En déduire que pour tout n $u_n \in [0; 10]$ et que u est croissante.
l'expression de u_n en fonction de n.

24.1.2 La réponse

On montre facilement que f est une bijection de $[0; 10]$ sur $[0; 10]$ et donc puisque $u_0 \in [0; 10]$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \geq 0$ $u_n \in [0; 10]$. On a $u_{n+1} - u_n = u_n(10 - u_n)/10$ donc puisque pour tout n $u_n \in [0; 10]$, la suite u est croissante et majorée par 10, donc u est convergente et sa limite l vérifie $l \geq u_0$ et $l = \frac{1}{10}l(20 - l)$ puisque f est continue.
Donc u converge vers $l = 10$.

24.1.3 La réponse avec `Xcas`

On tape pour définir la fonction f :
```
f(x):=x*(20-x)/10
```
On tape pour voir les 6 premiers termes de la suite u :
```
plotseq(f(x),x=1,6)
```
On obtient :



On tape pour avoir le signe de $u_{n+1} - u_n$:
```
factor(f(un)-un)
```
On obtient :
```
(-(un-10)*un)/10
```
On tape pour résoudre $l = \frac{1}{10}l(20 - l)$:
```
solve(f(x)=x)
```
On obtient :
```
[0,10]
```

24.1.4 L'énoncé

Soit la suite définie par :
$u_0 = 1$
$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + n - 1$
Déterminer a et b pour que la suite :
$v_n = k * u_n + a * n + b$ soit une suite géométrique dont on déterminera la raison.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

24.1.5 La réponse

On a :
$v_{n+1} = k * u_{n+1} + a * (n + 1) + b = k * \frac{u_n}{3} + k * n - k + a * (n + 1) + b$
donc :
$v_{n+1} = k * \frac{u_n}{3} + (a * n + b)/3 + 2 * (a * n + b)/3 + k * n + a - k$
$v_{n+1} = \frac{v_n}{3} + 2 * (a * n + b)/3 + k * n + a - k$
Si on veut que v soit une suite géométrique , il faut que :
$2 * (a * n + b) + 3 * k * n + 3 * a - 3 * k = 0$
ou encore :
$2 * a + 3 * k = 0$ et $2 * b + 3 * a - 3 * k = 0$ cela donne :
$3 * k = -2 * a$ et $2 * b = -5 * a$
On choisit $a = -6$ et alors $k = 4$ et $b = 15$ et alors :
$v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$ avec $v_n = 4 * u_n - 6 * n + 15$ donc $v_0 = 19$
On en déduit que :
$v_n = 19 * \frac{1}{3}^n$
donc

$u_n = 19/4 * \frac{1}{3}^n + 3/2 * n - 15/4$

24.1.6 L'énoncé

Soit la suite définie par :
$u_0 = 1$
$n * u_n = (n+1) * u_{n-1} + 1$ si $n > 0$
Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
À votre avis quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?
Démontrez que cette expression est la bonne.
Généraliser lorsque $u_0 = a$ et $n * u_n = (n+1) * u_{n-1} + 1$ si $n > 0$

24.1.7 La réponse avec `Xcas`

On tape :
```
u(n):=ifte(n==0,1,u(n-1)*(n+1)/n+1/n)
u(n)$(n=0..5)
```
On obtient :
```
1,3,5,7,9,11
```
On pense que $u_n = 2*n+1$ et on va le montrer par récurrence. La relation est vrai pour $n = 0$: $u_0 = 2*0+1 = 1$ Supposons que pour tout $0 \leq k < n$, $u_k = 2*k+1$ donc $u_{n-1} = 2*n-1$ On a $n*u_n = (n+1)*(2*n-1)+1$
On tape :
```
factor((n+1)*(2*n-1)+1)
```
On obtient :
```
(2*n+1)*n
```
donc $n * u_n = (2*n+1)*n$ et comme $n > 0$ on peut diviser par n donc $u_n = 2*n+1$.
Généralisation
On tape :
```
u(n):=ifte(n==a,1,u(n-1)*(n+1)/n+1/n)
normal(u(n)$(n=0..5))
```
On obtient :
```
a,2*a+1,3*a+2,4*a+3,5*a+4,6*a+5
```
On pense que $u_n = (n+1)*a+n$ et on va le montrer par récurrence. La relation est vrai pour $n = 0$: $u_0 = (0+1)*a+0 = a$ Supposons que pour tout $0 \leq k < n$, $u_k = (k+1)+k$ donc $u_{n-1} = n*a+n-1$ On a $n*u_n = (n+1)*(n*a+n-1)+1$
On tape :
```
factor((n+1)*(n*a+n-1)+1)
```
On obtient :
```
n*(a*n+a+n)
```
donc $n * u_n = n*(a*n+a+n)$ et comme $n > 0$ on peut diviser par n donc $u_n = a*n+a+n = (n+1)*a+n$.

On peut aussi chercher à calculer :
$u_n - u_{n-1}$ en fonction de $u_{n-1} - u_{n-2}$.
On a :
$u_n - u_{n-1} = (n^2 * u_{n-1} - n^2 * u_{n-2} - u_{n-1} - 1)/(n^2 - n)$

On sait que :
$u_{n-1} = n * u_{n-2} + n * u_{n-1} - 1$ donc
$u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} = ... = u_1 - u_0 = a + 1$
Ainsi, u_n est une suite arithmétique de raison $a + 1$ et donc

$$u_n = n(a + 1) + u_0 = n(a + 1) + a = a(n + 1) + n$$

Avec `Xcas`, on pose `un`=u_n, `un1`=u_{n-1} et `un2`=u_{n-2}.
On tape :

```
un:=(n*un1+un1+1)/n
un1:=(n*un2+1)/(n-1)
simplify(un-un1)
```

On obtient :

```
(un2+1)/(n-1)
simplify(un1-un2)
```

On obtient :

```
(un2+1)/(n-1)
```

Donc $u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} = ...u_1 - u_0 = a + 1$.
Avec `Xcas`, si on veut obtenir directement `un-un1=un1-un2`, on doit faire la différence entre : `un11`=u_{n-1} que l'on exprime en fonction de `un2`=u_{n-2} et `un1`=u_{n-1} qui ne doit pas changer. La difficulté ici est que dans `un`=u_n, il y a $(n*u_{n-1}+u_{n-1}+1)$ et on doit laisser $n*u_{n-1}$ inchangé alors qu'il faut exprimer $u_{n-1} + 1$ en fonction de `un2`=u_{n-2}.
On tape :

```
un:=(n*un1+un11+1)/n
un11:=(n*un2+1)/(n-1)
simplify(un-un11)
```

On obtient :

```
un1-un2
```

Donc on a :
$u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} = ... = u_1 - u_0 = a + 1$
Remarque
On peut aussi remarquer que $l = -1$ est solution de $n * l = (n + 1) * l + 1$.
Donc si $v_n = u_n + 1$, alors v vérifie :
$v_0 = a + 1$ et $nv_n = (n + 1)v_{n-1}$ ou encore
$v_n = \frac{n+1}{n}v_{n-1} = \frac{n+1}{n-1}v_{n-2} = ... = (n + 1)v_0 = (n + 1)(a + 1)$
donc

$$u_n = (n + 1)(a + 1) - 1 = (n + 1)a + n$$

24.1.8 Un énoncé du même type

Soit la suite définie par :
$u_0 = 5 = a$
$n * u_n = (n + 2) * u_{n-1} + 6$ si $n > 0$
et soit $d_n = u_{n+1} - u_n$.
Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et $d_0, d1, d_2, d_3, d_4$. À votre avis quelle est l'expression de d_n en fonction de n ? Démontrez que cette expression est la bonne. En déduire l'expression de u_n en fonction de n Généraliser lorsque $u_0 = a$ et $n * u_n =$

$(n+1) * u_{n-1} + 1$ si $n > 0$

24.1.9 La solution

On peut suivre les questions et montrer que :
$d_n = 8(n+2)$ et que $u_n = 4n(n+3)$.
On peut aussi remarquer que l'équation en x :
$n * x = (n+2) * x + 6$ a une solution indépendante de n qui est $l = -3$.
On pose alors $v_n = u_n + 3$ et v vérifie :
$v_0 = u_0 + 3$ et $n * v_n = n * (u_n + 3) = (n+2) * (u_{n-1} + 3) = (n+2) * v_{n-1}$, donc
$v_n = \frac{n+2}{n} v_{n-1} = \frac{n+2}{n}\frac{n+1}{n-1} = ...\frac{(n+2)(n+1)}{2} v_0$
Donc

$$u_n = v_n - 3 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}(u_0+3) - 3 = \frac{(a-3)n^2 + (3a-9)n + 2a - 12}{2} =$$

Pour $a = 5$ on trouve :

$$u_n = 4n^2 + 12n + 5$$

24.2 Exercice

Une banque propose un livret d'épargne $L1$ rapportant 5% d'intérêt. Mais les frais de tenue de compte s'élève à 20 euros par an.
Une autre banque propose un livret d'épargne B rapportant 3% d'intérêt. Mais il n'y a pas de frais de tenue de compte.
Un enfant veut placer 100 euros sur le livret $L2$ ou sur le livret B. Pour faire son choix, il veut savoir ce qu'il aura bout de 5 ans.
Son grand frère veut placer 1000 euros sur le livret $L1$ ou sur le livret $L2$. Pour faire son choix, il veut savoir ce qu'il aura bout de 5 ans.
Son père veut placer 10000 euros sur le livret $L1$ ou sur le livret $L2$. Pour faire son choix, il veut savoir ce qu'il aura bout de 5 ans.
Pouvez-vous les aider ?
Donner les formules Livret1(S,n) (resp Livret2(S,n)) donnant ce que l'on obtient après n années en placant une somme S sur le $L1$ (res $L2$).
Écrire un programme `Livret(S,n,t,r)` qui renvoie la liste des sommes obtenues lorsque l'on a placé la somme `S` pendant `j` années (`j=1..n`) aux taux `t` avec des frais de tenue de compte de `r`. La solution avec `Xcas` :
On place 100 euros sur le livret $L1$.
On tape :
`rsolve(u(n+1)=(1.05)*u(n)-20,u(n),u(0)=100)`
On obtient :
`[-300.0*exp(0.0487901641694*n)+400.0]`
On tape :
`[-300.0*exp(0.0487901641694*n)+400.0]$(n=0..5)`
On obtient :
`[100.0],[85.0],[69.25],[52.7125],[35.348125],[17.1155312501]`
On place 100 euros sur le livret $L2$.

On tape :
`rsolve(u(n+1)=(1.03)*u(n),u(n),u(0)=100)`
On obtient :
`[100*exp(0.0295588022415*n)]`
On tape :
`[100*exp(0.0295588022415*n)]$(n=0..5)`
On obtient :
`[100.0],[103.0],[106.09],[109.2727],[112.550881],[115.92740743]`
On place 1000 euros sur le livret $L1$.
On tape :
`rsolve(u(n+1)=(1.05)*u(n)-20,u(n),u(0)=1000)`
On obtient :
`[600.0*exp(0.0487901641694*n)+400.0]`
On tape :
`[600.0*exp(0.0487901641694*n)+400.0]$(n=0..5)`
On obtient :
`[1000.0],[1030.0],[1061.5],[1094.575],[1129.30375],[1165.7689375]`
On place 1000 euros sur le livret $L2$.
On tape :
`rsolve(u(n+1)=(1.03)*u(n),u(n),u(0)=1000)`
On obtient :
`[1000*exp(0.0295588022415*n)]`
On tape :
`[1000*exp(0.0295588022415*n)$(n=0..5)]`
On obtient :
`[1000.0],[1030.0],[1060.9],[1092.727],[1125.50881],[1159.2740743]`
On place 10000 euros sur le livret $L1$.
On tape :
`rsolve(u(n+1)=(1.05)*u(n)-20,u(n),u(0)=10000)`
On obtient :
`[9600.0*exp(0.0487901641694*n)+400.0]`
On tape :
`[9600.0*exp(0.0487901641694*n)+400.0]$(n=0..5)`
On obtient :
`[10000.0],[10480.0],[10984.0],[11513.2],[12068.86],[12652.303]`
On place 10000 euros sur le livret $L2$.
On tape :
`rsolve(u(n+1)=(1.03)*u(n),u(n),u(0)=10000)`
On obtient :
`[10000*exp(0.0295588022415*n)]`
On tape :
`[10000*exp(0.0295588022415*n)]$(n=0..5)`
On obtient :
`[10000.0],[10300.0],[10609.0],[10927.27],[11255.0881],[11592.740743]`
Le programme `Livret(S,n,t,r)` :

```
Livret(S,n,t,r) :={
local L,j;
L:=S;
```

```
pour j de 1 jusque n faire
S:=S*(1+t)-r;
L:=L,S;
fpour;
retourne L;
}:;
```

On tape :
`Livret(1000,5,5/100,20)` On obtient :
`1000,1030,2123/2,43783/40,903443/800,18652303/16000`
`1000.0,1030.0,1061.5,1094.575,1129.30375,1165.7689375`
On tape :
`Livret(1000,5,3/100,0)` On obtient :
`1000,1030,10609/10,1092727/1000,112550881/100000,11592740743/10000000`
`1000.0,1030.0,1060.9,1092.727,1125.50881,1159.2740743`
Les formules et la solution sans `Xcas` On cherche la valeur des u_n (resp v_n) vérifiant la relation de récurrence :
$u_0 = S$ et $u_{n+1}) = u_n*(1+5/100)-20$ (resp $v_0 = S$ et $v_{n+1} = v_n*(1+3/100)$)
La suite v_n est une suite géométrique de raison $103/100$ donc :
$v_n = (103)^n/100^n * v_0 = (103)^n/100^n * S = Livret2(S, n)$ La suite u_n n'est pas géométrique mais $w_0 = u_1 - u_0$ et $w_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique et :
$u_{n+1}) = u_n * (105/100) - 20$ et $u_n) = u_{n-1} * (21/20) - 20$ $(105/100 = 21/20)$
Par soustraction on obtient :
$w_n = u_{n+1} - u_n = (u_n - u_{n-1}) * (21/20) = w_{n-1} * (21/20)$ avec $w_0 = u_1 - u_0$
donc $w_n = (105)^n/100^n * w_0 = (105)^n/100^n * (S * 21/20 - 20)$ et
$u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - u_n + (u_n - u_{n-1}) + ... + (u_1 - u_0) =$
$u_{n+1} - u_0 = w_n + w_{n-1} + ...w_0$
$u_n - u_0 = w_{n-1} + ... + w_0 = w_0 * (r^n - 1)/(r - 1)$ ($r = 21/20$ et $w_0 = S * 21/20 - 20 - S$) $w_0 * (r^n - 1)/(r - 1) = ((21/20)^n - 1) * 20 * w_0$ et $w_0 = S * (21/20) - 20 - S = S/20 - 20$ $u_0 = S$ donc $u_n = S + ((21/20)^n - 1) * 20 * (S/20 - 20) = 400 + (S - 400) * (21/20)^n$ ou bien :
Pour trouver u_n en fonction de n lorsque $u_0 = S$ et $u_n) = u_{n-1} * (21/20) - 20$, on cherche l tel que $l = l * (21/20) - 20$. On trouve $5l = 2000$ donc $l = 400$.
On a alors :_ $t_n = u_n - 400 = (u_{n-1} - 400) * (21/20) = t_{n-1} * (21/20)$ et $t_0 = S - 400$
t_n est une suite géométrique de raison $21/20$ donc
$t_n = u_n - 400 = (S - 400) * (21/20)^n$ donc
$u_n = (S - 400) * (21/20)^n + 400$
On a donc les formules :
`livret1(S,n):=(S-400)*(21/20)^n+400` et
`livret2(S,n):=S*(103/100)^n`
On vérifie :
`livret1(1000,5)` renvoie `18652303/16000` $\simeq 1165.7689375$
`livret2(1000,5)` renvoie `11592740743/10000000` $\simeq 1159.2740743$ On peut reunir les deux formules. Dans le cas général on a :
$u_{n+1} = u_n(1 + t) - t$ et $l = r/t$ est la solution de $l = l(1 + t) - r$ donc lorsque l'on a placé la somme `S` pendant `j` années (`j=1..n`) aux taux `t` avec des frais de tenue de compte de `r` on obtient chaque année :
`livret(S,n,t,r):=seq((S-r/t)*(1+t)^j+r/t,j=0..n)`

On tape :
```
livret(1000,5,5/100,20)
```
On obtient :
```
1000,1030,2123/2,43783/40,903443/800,18652303/16000
1000.0,1030.0,1061.5,1094.575,1129.30375,1165.7689375
```

24.3 Les suites homographiques

24.3.1 L'énoncé

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$.
1/ Résoudre $f(x)=x$.
On notera r_1 la racine positive et r_2 la racine négative.
2/ Soit (u) la suite définie par :
$u_1=1$
$u_n=f(u_{n-1})$ pour $n>1$
Calculer u_n pour $n=1,2,3,4,5$
3/ Soit (v) la suite définie par :
$v_n=\frac{u_n-r_1}{u_n-r_2}=g(u_n)$
a) Démontrer que (v) est une suite géométrique.
b) Expliciter v_n en fonction de n
c) Expliciter u_n en fonction de n
d) Calculer $l=\lim_{n\to+\infty}u_n$
4/ Donner la plus petite valeur de n pour laquelle $|u_n-l|<10^{-1000}$

Partie B

1/ Exprimer u_{2n} en fonction de u_n.
2/ Determiner et étudier la fonction f_2 telle que $u_{2n}=f_2(u_n)$.
3/ Soit (w) la suite définie par :
$w_0=1$ et $w_n=f_2(w_{n-1})$ pour tout $n>0$.
Montrer que (w) a la même limite l que (u).
4/ Donner la plus petite valeur de n pour laquelle $|w_n-l|<10^{-1000}$

Partie C

1/ Exprimer u_{3n} en fonction de u_n.
2/ Determiner et étudier la fonction f_3 telle que $u_{3n}=f_3(u_n)$.
3/ Soit (t) la suite définie par :
$t_0=1$ et $t_n=f_3(t_{n-1})$ pour tout $n>0$.
Montrer que (t) a la même limite l que (u).
4/ Donner la plus petite valeur de n pour laquelle $|t_n-l|<10^{-1000}$

Partie D

Étant donné p entier positif, refaire la même chose à partir de la fonction :
$f(x)=\frac{x+p}{x+1}$

pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{p}$.

24.3.2 La correction

Partie A

1/ On tape :
`f(x):=(x+2)/(x+1)`
puis :
`solve(f(x)=x)`
On obtient :
`[-sqrt(2),sqrt(2)]`
2/ On tape :
`1` puis :
`f(ans())`
puis :
`enter enter enter enter`
On obtient :
$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}$
3/ On a :
$v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$
On tape :
`g(x):=(x-sqrt(2))/(x+sqrt(2))`
Puis, on tape :
`v(n):=g(u(n))`
puis :
`h(x):=solve(g(y)=x,y)[0]` puis :
`h(x)`
On obtient :
`(x*sqrt(2)+sqrt(2))/(-x+1)` donc
$u_n = \sqrt{2}\dfrac{v_n + 1}{-v_n + 1}$ et
$v_{n+1} = g(v_{n+1}) = g(f(u_n)) = g(f(h(v_n)))$
On tape :
`k:=g@f@h` puis :
`normal(k(x))`
On obtient :
`((sqrt(2)-2)*x)/(sqrt(2)+2)`
donc $v_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{2}-2) * v_n}{\sqrt{2}+2}$
la suite (v) est donc une suite géométrique de raison :
`(sqrt(2)-2)/(sqrt(2)+2)=2*sqrt(2)-3`
puis on tape :
`normal(expand(mult_conjugate(g(1))))`
On obtient :
`2*sqrt(2)-3`
Donc :
$v_n = (2 * \sqrt{2} - 3)^n$

Donc on tape $h(v_n)$:
`h((2*sqrt(2)-3)^n)`
On obtient u_n :
`((2*sqrt(2)-3)^n*sqrt(2)+sqrt(2))/(-(2*sqrt(2)-3)^n+1)`
On sait que (v) converge vers 0 car on a :
$v_n = (2 * \sqrt{2} - 3)^n$ et $-1 < 2 * \sqrt{2} - 3 < 0$.
Quand x tend vers 0, $h(x)$ tend vers $h(0) = \sqrt{2}$, donc (u) converge vers $\sqrt{2}$.
On a `normal(h(x)-h(0))=(-(2*sqrt(2))*x)/(x-1)`

4/ On tape :
`normal(diff(h(x)))`
On obtient :
`(2*sqrt(2))/(x^2-2*x+1)`
On a :
pour tout n, $-|v_0| = -3 + 2\sqrt{2} \leq v_n \leq 3 - 2\sqrt{2} = |v_0|$, donc :
$-1.2 < -4 + 2\sqrt{2} \leq v_n - 1 \leq 2 - 2\sqrt{2} < -0.8$, donc :
si $-3 + 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 - 2\sqrt{2}$,
On a
$|h'(x)| < (2 * \sqrt{2})/(2 - 2 * \sqrt{2})^2 = (3 * \sqrt{2} + 4)/2$
et
$|u_n - \sqrt{2}| = |h(v_n) - h(0)| < |v_n| * (3 * \sqrt{2} + 4)/2 < 5 * (0.2)^n$
On tape :
`solve(5*0.2^n<10^-1000,n)`
$\log 10(5) + n * \log 10(0.2) < -1000$
donc
$n >= 1432 > (1000 + \log 10(5))/(1 - \log 10(2)) > 1431$

Partie B

1/ On a :
$v_{2n} = (2\sqrt{2} - 3)^(2n) = v_n^2$,
donc
$u_{2n} = h(v_{2n}) = h(v_n^2) = h((g(u_n))^2$

2/ On tape puisque `sq(x)=x^2` :
`f2(x):=normal((h@sq@g)(x))`
puis
`f2(x)`
On obtient :
`((x^2+2)*1/2)/x`
On reconnait la fonction obtenue par la méthode de Newton et qu'il faut itérer pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$.

3/ On a :
$w_0 = u_1$
$w_1 = f_2(w_0) = f_2(w_1) = u_2$
$w_2 = f_2(w_1) = f_2(u_2) = u_4$
$w_3 = f_2(w_2) = f_2(u_4) = u_8$
....donc
$w_n = u_{2^n}$

4/ Si on prend $2^n \geq 1432$, on aura $|w_n - l| < 10^{-1000}$

On tape :
```
solve(2^n>1432.,n)
```
On obtient :
```
n>10.48...
```
Donc si $n \geq 11$), on aura $|w_n - l| < 10^{-1000}$

Partie C

1/ On a :
$v_{3n} = (2\sqrt{2} - 3)^(3n) = v_n^3$,
donc :
$u_{3n} = h(v_{3n}) = h(v_n^3) = h((g(u_n))^3$
2/ On tape :
```
p3(x):=x^3
f3(x):=normal((h@p3@g)(x))
```
puis
```
f3(x)
```
On obtient :
```
(x^3+6*x)/(3*x^2+2)
```
3/ On a :
$t_0 = u_1$
$t_1 = f_3(t_0) = f_3(u_1) = u_3$
$t_2 = f_3(t_1) = f_3(u_3) = u_9$
$t_3 = f_3(t_2) = f_3(u_9) = u_27$
....donc
$t_n = u_{3^n}$
4/Si on prend $3^n \geq 1432$, on aura $|t_n - l| < 10^{-1000}$ On tape :
```
solve(3^n>1432.,n)
```
On obtient :
```
n>6.61...
```
Donc si $n \geq 7$), on aura $|w_n - l| < 10^{-1000}$

Partie D

1/ Étant donné p entier positif, on peut refaire la même chose pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{p}$ en prenant comme fonction f :
$f(x) = \dfrac{x + p}{x + 1}$
On tape :
```
f(x):=(x+p)/(x+1)
```
On tape :
```
solve(f(x)=x,x)
```
On obtient :
```
[-(sqrt(p)),sqrt(p)]
```
On tape :
```
g(x):=(x-sqrt(p))/(x+sqrt(p))
```
On tape :
```
h(x):=solve(g(y)=x,y)[0]
```
On obtient :

`(x*sqrt(p)+sqrt(p))/(-x+1)`
donc
$u_n = \sqrt{p}\dfrac{v_n+1}{-v_n+1}$ et
$v_{n+1} = g(v_{n+1}) = g(f(u_n)) = g(f(h(v_n)))$
On tape :
`k:=g@f@h` puis :
`normal(k(x))`
On obtient :
`((sqrt(p)-p)*x)/(sqrt(p)+p)`
donc
$v_{n+1} = ((\sqrt{p}-p)*v_n)/(\sqrt{p}+p)$
La suite (v) est donc une suite géométrique de raison :
`(sqrt(p)-p)/(sqrt(p)+p)=-g(1)`
puis on tape :
`normal(expand(mult_conjugate(k(1))))`
On obtient :
`(-p-1+2*sqrt(p))/(p-1)`
la suite (v) est donc une suite géomŕique de raison :
`(-p-1+2*sqrt(p))/(p-1)`
Donc :
$v_n = ((-p-1+2*\sqrt{p})/(p-1))^n$
Donc on tape $h(v_n)$:
`h((((sqrt(p)-p)*x)/(sqrt(p)+p))^n)`
On obtient u_n :
```
((((sqrt(p)-p)*x)/(sqrt(p)+p))^n*sqrt(p)+sqrt(p))/
(-(((sqrt(p)-p)*x)/(sqrt(p)+p))^n+1)
```

2/ On a :
$v_{2n} = v_n^2$, donc $u_{2n} = h(v_{2n}) = h(v_n^2) = h((g(u_n))^2)$ car $v_{2n} = v(n)^2$ et $v(n) = g(u(n))$
On tape puisque `sq(x)=x^2` :
`f2(x):=normal((h@sq@g)(x))`
puis
`f2(x)`
On obtient :
`((x^2+p)*1/2)/x`
On reconnait la fonction obtenue par la méthode de Newton et qu'il faut itérer pour obtenir une approximation de $\sqrt{p}$.

3/ On a :
$v_{3n} = v_n^3$, donc $u_{3n} = h(v_{3n}) = h(v_n^3) = h((g(u_n))^3)$
On tape :
`p3(x):=x^3 f3(x):=normal((h@p3@g)(x))`
puis
`f3(x)`
On obtient :
`(x^3+3*p*x)/(3*x^2+p)`

Avec le tableur

Avec le tableur, on voit les différentes vitesses de convergences des suites `(u)`, `(v)` et `(t)`. Il faut prévoir 6 colonnes : une colonne des valeurs exactes des termes de la suite et une colonne donnant les valeurs approchées des termes de la suite et cela pour chacune des suites.

24.4 Exemple d'une suite instable

24.4.1 L'énoncé

Soient les suites u et v définies par : $u_0 = \frac{11}{2}$
$u_1 = \frac{61}{11}$
$u_n = 111 - \frac{1130}{u_{n-1}} + \frac{3000}{u_{n-1} * u_{n-2}}$
et
$v_0 = 5.5$
$v_1 = evalf(\frac{61}{11})$
$v_n = 111 - \frac{1130}{v_{n-1}} + \frac{3000}{v_{n-1} * v_{n-2}}$
Quelles sont les limites possibles de ces suites ? À l'aide de `Xcas`, calculer la valeur approchée des 30 premiers termes de ces deux suites en utilisant 20 digits.

24.4.2 Le programme

On tape :

```
  instable(n,u0,u1):={
    local j,un;
    if (n==0) return u0;
    if (n==1) return u1;
    for(j:=2;j<=n;j++){
      un:=111-1130/u1+3000/(u0*u1);
      u0:=u1;
      u1:=un;
    }
    return un;
  }
:;
```

On a alors :
$u_n = instable(n, 11/2, 61/11)$
$v_n = instable(n, 5.5, evalf(61/11))$

24.4.3 Les résultats

Soit $f(x, y) = 111 - \frac{1130}{x} + \frac{3000}{x * y}$.
Si une suite w vérifie la relation de récurrence : $w_n = f(w_{n-1} * w_{n-2})$, les limites possibles d'une telle suite sont les solutions de $f(x, x) = x$.
On tape :
`solve(111-1130/x+3000/x^2=x,x)`
On obtient :

```
[100,6,5]
```

Les limites possibles sont donc 5,6 et 100.
Remarque La suite v dépend de la valeur de `evalf(61/11)`, donc dépend du nombre de digits utilisés et du mode de calcul utilisé.
On tape :

```
Digits:=20;
for(n:=0;n<=30;n++){
print(n);
print(instable(n,5.5,evalf(61/11)));
print(evalf(instable(n,11/2,61/11)));}
```

On obtient :

```
n:0
5.5000000000000000000
5.5000000000000000000
n:1
5.5454545454545454456
5.5454545454545454456
n:2
5.5901639344262295768
5.5901639344262295817
n:3
5.6334310850439882614
5.6334310850439882697
n:4
5.6746486205101508149
5.6746486205101509630
n:5
5.7133290523805129396
5.7133290523805155490
n:6
5.7491209197025923893
5.7491209197026380437
n:7
5.7818109204848217447
5.7818109204856155794
n:8
5.8113142382802701595
5.8113142382939957231
n:9
5.8376565487225911058
5.8376565489587119615
n:10
5.8609515184723442052
5.8609515225161319727
n:11
5.8813771468609747413
```

```
5.88137721584141860362
n:12
5.89915273314948416898
5.89915390579006532873
n:13
5.91450507580732900460
5.91452495067898343240
n:14
5.92740541888982367183
5.92774140777679525195
n:15
5.93338276962798092957
5.93905048546111815120
n:16
5.85317477456212541080
5.94868749248041657029
n:17
4.32520225792017284829
5.95687073191822040100
n:18
-0.317580966868753489379e2
5.96379872081940311587
n:19
0.124741088526995943127e3
5.96964914404788717708
n:20
0.101183955312637480034e3
5.97457902866672280000
n:21
0.100069905575441095835e3
5.97872572175269217080
n:22
0.100004176388280681510e3
5.98220835071100136336
n:23
0.100000249822052284540e3
5.98512953056300350037
n:24
0.100000014951746801213e3
5.98757715320858086895
n:25
0.100000000895227729755e3
5.98962614887996719755
n:26
0.100000000053619816097e3
5.99134015140329529141
n:27
0.100000000003212496604e3
```

```
5.99277302875661600204
n:28
0.10000000000192515177e3
5.99397026117232788471
n:29
0.10000000000011539180e3
5.99497016287623956976
n:30
0.10000000000000691764e3
5.99580495232911448068
```

Il semble que la suite u converge vers 6 alors que la suite v semble converger vers 100 alors qu'au début ces 2 suites sont très proches.
Cela ne provient pas d'erreurs d'arrondis car si on ne fait que du calcul formel et que l'on tape :

```
Digits:=20;
for(n:=0;n<=30;n++){
print(n);
print(evalf(instable(n,5.5,554545454545454545454/100000000000000000000
print(evalf(instable(n,11/2,61/11)));}
```

On obtient le même genre de résultat.

24.5 Suites doubles et calcul de $1/k$ pour $k \in]0;2[$

24.5.1 L'énoncé

Soient deux suites a_n et b_n définies par :
$a_0 = 1$, $b_0 = 1 - k$ où k est un réel de $]0;2[$ et
$a_n = a_{n-1}(1 + b_{n-1})$ et $b_n = b_{n-1}^2$

— Montrer que $b_n = b_0^{2^n}$ et que $a_n = (1 - b_n)/k$.
— En utilisant le tableur afficher les valeurs de a_n et b_n pour $k = 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1.25,\ 1.5,\ 1.75$.
En déduire le comportement des suites a_n et b_n
— En déduire un programme qui calcule $1/k$ avec une précision donnée en ne faisant que des additions et des multiplications.

24.5.2 La correction avec Xcas

— Il est facile de montrer par récurrence que $b_n = b_0^{2^n}$, en effet :
$b_0 = b_0^{2^0} = b_0^1$
si $= b_{n-1} = b_0^{2^{n-1}}$ alors $b_n = b_{n-1}^2 = b_0^{2^{n-1}*2} = b_0^{2^n}$.
Montrons par récurrence que $a_n = (1 - b_n)/k$, on a :
$a_0 = (1 - b_0)/x = 1$ et
si $a_{n-1} = (1 - b_{n-1})/k$ alors
$a_n = (1 - b_{n-1})/k * (1 + b_{n-1}) = (1 - b_{n-1}^2)/k = (1 - b_n)/k$.
— On met dans la colonne A les valeurs de a_n :
1 dans $A0$ puis
$= A0 * (1 + B0)$ dans $A1$ puis on remplit vers le bas,

$1 - C0$ dans $B0$ puis
$= B0^2$ dans $B1$ puis on remplit vers le bas,
On met dans $C0$ la valeur de k.
On remarque la suite b_n converge vers 0 et que a_n converge vers $1/k$. On a en effet :
$|b_0| = |1 - k| < 1$ donc $b_n = b_0^{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini,
$a_n = (1 - b_n)/k$ tend donc vers $1/k$ quand n tend vers l'infini et on a :
$a_n - 1/k = -b_n/k < 0$ et $|a_n - 1/k| = abs(b_n)/k < eps$ équivaut à $|b_n| < k * eps$

—
```
Invers(k,eps):={
local a,b;
a:=1;
b:=1-k;
tantque k*eps<=abs(b) faire
a:=a*(1+b);
b:=b^2;
ftantque;
retourne a;
}:;
```
On tape : `Invers(1.75,1e-20)`
On obtient : `0.571428571428571428570`

24.6 Encore des suites !

24.6.1 L'énoncé

Soient $a \in [0;1[$ et $b \in [0;1[$. On considère les suites a_n et b_n qui vérifient $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et la même relation de récurrence :
si $2a_{n-1} < 1$, $a_n = 2a_{n-1}$ et sinon $a_n = 1 - 2a_{n-1}$.

— Écrire un programme qui calcule $a_0, a_1 ... a_n$.
— On considère la suite $u_n = a_n - b_n$ Écrire un programme qui trace le graphe (n, u_n) pour $n \in [0; 100]$.
— On observe que pour $n >= 50$ $u_n = 0$. Qu'en pensez-vous ?

24.6.2 La correction avec `Xcas`

—
```
suite(a,n):={
  local u,u1,j,L;
  u:=a;
  L:=a;
  si a>=1 alors retourne "erreur"; fsi
  pour j de 1 jusque n faire
  u1:=2*u;
  si u1<1 alors
     u:=u1;
  sinon
     u:=u1-1;
  fsi;
```

```
  L:=L,u;
  fpour;
  retourne L;
}:;
```

On tape : `suite(0.4,6)`

On obtient :

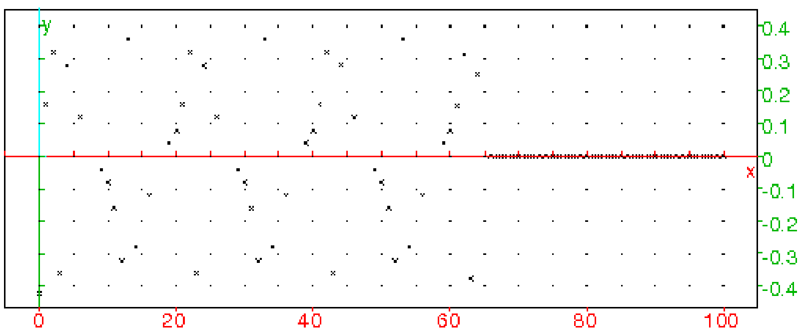
`0.4,0.8,0.6,0.2,0.4,0.8,0.599999999999`

— `diffsuite(a,b,n):={`

```
  local u,u1,v,v1,j,L;
  u:=a;
  v:=b;
  L:=point((a-b)*i);
  si a>=1 ou b>=1 alors retourne "erreur"; fsi
  pour j de 1 jusque n faire
  u1:=2*u;
  v1:=2*v;
  si u1<1 alors
     u:=u1;
  sinon
     u:=u1-1;
  fsi;
  si v1<1 alors
     v:=v1;
  sinon
     v:=v1-1;
  fsi
  L:=L,point(j+(u-v)*i);
  fpour;
  retourne L;
}:;
```

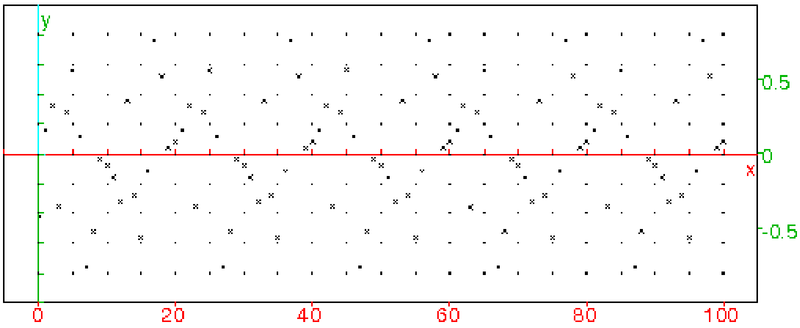
On tape : `diffsuite(0.4,0.82,100)`

On obtient :

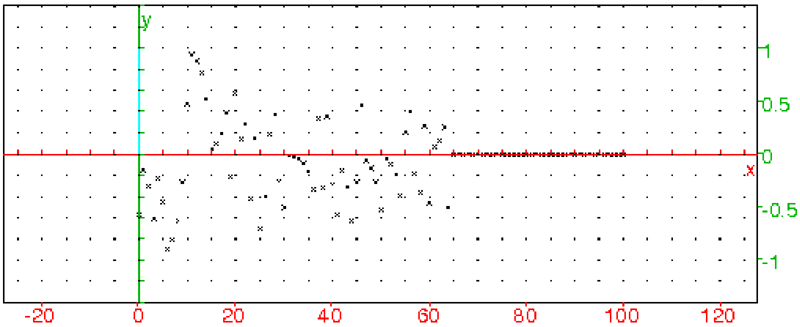


— On tape : `diffsuite(4/10,82/100,100)`

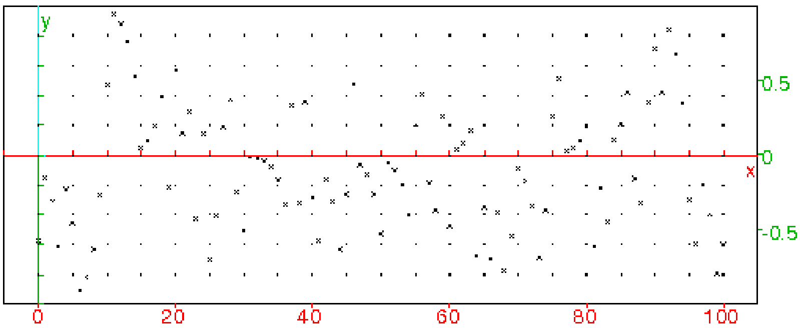
On obtient :



La suite $u_n = a_n + b_n$ semble être périodique quand a et b sont des nombres d'ecimaux et ce sont les erreurs d'arrondis qui font que u_n semble nulle pour $n > 50$.
On tape : `diffsuite(pi-3,e-2,100)`
On obtient avec 20 chiffres significatifs :



— On tape : `diffsuite(pi-3,e-2,100)`
On obtient avec 35 chiffres significatifs :



24.7 Le modèle de Volterra Lotka

L'objectif de l'exercice est de modéliser l'évolution de la population de 2 espèces, avec des hypothèses simples.

— La première espèce est une proie. Elle dispose de ressources en quantité

illimitées
— La seconde espèce est un prédateur. Sa seule ressource est la proie.
— Les espèces sont isolées et n'interagissent qu'entre elles.

Le modèle de Volterra Lotka discret est un modèle d'évolution correspondant à ces hypothèses.
Le temps est discrétisé. À chaque entier n, on associe le nombre d'individus de la proie l_n (pour lapin) et du prédateur r_n (pour renard) à la n ième étape. L'évolution suit les règles suivantes :
l_0 et r_0 sont les populations initiales et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$l_{n+1} - l_n = al_n - bl_n r_n$
$r_{n+1} - r_n = cl_n r_n - dr_n$
a, b, c, d sont des coefficients réels strictement positifs. $1 + a$ (resp $(1 - d)$) représente l'évolution de la reproduction des lapins (resp des renards),
br_n (resp cl_n) représente la proportion de lapins l_n mang'es (resp la proportion de renards sauvés par les proies l_n

1. Que se passe-t-il en l'absence de prédateur ?
2. Que se passe-t-il en l'absence de proie ?
3. Donner en fonction des paramètres une position d'équilibre du système.
4. Ecrire une fonction volterra(N,l0,r0,a,b,c,d) qui affiche à l'écran d'au plus des $N + 2$ premières valeurs des deux suites (r_n) et (l_n). L'affichage des valeurs doit se terminer si l'une des espèces s'éteint.
5. Dessiner les $N + 2$ premières valeurs des deux suites.
   Le couple (l_n, r_n) sera considéré comme un point. Les points seront reliés entre eux par des segments.
   On prendra par exemple :
   $a = 0.05, b = 0.002, c = 0.00004, d = 0.04$
   $a = 0.06, b = 0.001, c = 0.0001, d = 0.08$
   $a = 0.08, b = 0.001, c = 0.0001, d = 0.08$
6. Utilisez la fonction précédente pour explorer le modèle, en jouant sur ses paramètres.
7. Le modèle de Volterra Lotka est un modèle sans saturation (En l'absence de prédateur, la population des proies croit exponentiellement, ce qui traduit l'hypothèse de ressources illimitées). Proposez un modèle avec saturation et simulez le.

La solution avec `Xcas`

1. En l'absence de prédateur on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $r_n = 0$ donc :
   $l_{n+1} = (1 + \alpha)l_n$
   l_n est une suite géométrique et $l_n = l_0(1 + \alpha)^n$ avec $1 + \alpha) > 1$.
   Donc en l'absence de prédateur, $l(n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$
2. En l'absence de proie on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $l_n = 0$ donc :
   $r_{n+1} = (1 - \delta)r_n$
   r_n est une suite géométrique et $r_n = r_0(1 - \delta)^n$ avec $1 - \delta) < 1$. Donc en l'absence de proie, $r(n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers 0
3. La position d'équilibre du système se fait lorsque à partir d'un certain rang n, on a : $l_{n+1} = l_n$ et $r_{n+1} = r_n$.

c'est à dire :
$\alpha l_n - \beta l_n r_n = 0$ et
$\gamma l_n r_n - \delta r_n = 0$

,

On tape :
`assume(a>0)`
`assume(b>0)`
`assume(c>0)`
`assume(d>0)`
`normal(solve([x=(a+1)*x-b*x*y, y=c*x*y+(1-d)*y],[x,y]))`
On obtient :
`[[0,0],[d/c,a/b]]`
Donc une position déquilibre du système est pour un rang n :
$l_n = d/c$ et $r_n = a/b$.
On tape :
`factor(solve([(a+1)*x-b*x*y=d/c,y*(1-d)+c*x*y=a/b],[x,y]))`
On obtient :
`[[d/c,a/b],[(d-1)/(c*(a+1)),(-a-1)/((d-1)*b)]]`
ce qui veut dire que si $l_n = d/c$ et $r_n = a/b$ c'est que $l_{n-1} = d/c$ et $r_{n-1} = a/b$ ou que
$l_{n-1} = (d-1)/(c*(a+1))$ et $r_{n-1} = -(a+1)/((d-1)*b)$ mais comme $l_n >= 0$ et $r_n >= 0$ cela entraine $d = 1$ ce qui correspond à l'absence de proie.

4. On tape :

```
volterra0(N,l0,r0,a,b,c,d):={
local l,r,n,la,L,k ;
l:=l0;r:=r0;L:=NULL;
L:=L,[l,r];
pour k de 1 jusque N+1 faire
la:=l;
l:=l*(a+1)-b*l*r;
r:=r*(1-d)+c*la*r;
L:=L,[l,r];
si l<0.01 ou r<0.01 alors return L; fsi;
fpour;
return L;
}:;
```

Ou plus simplement, on tape :

```
volterra(N,l,r,a,b,c,d):={
local L,k ;
L:=NULL;
L:=L,[l,r];
pour k de 1 jusque N+1 faire
l,r:=l*(a+1)-b*l*r,r*(1-d)+c*l*r;
L:=L,[l,r];
si l<0.01 ou r<0.01 alors return L; fsi;
```

```
fpour;
return L;
}:;
```

On tape :

```
res:=volterra(600,1000,50,0.05,0.002,0.00004,0.04):;size(res)
```

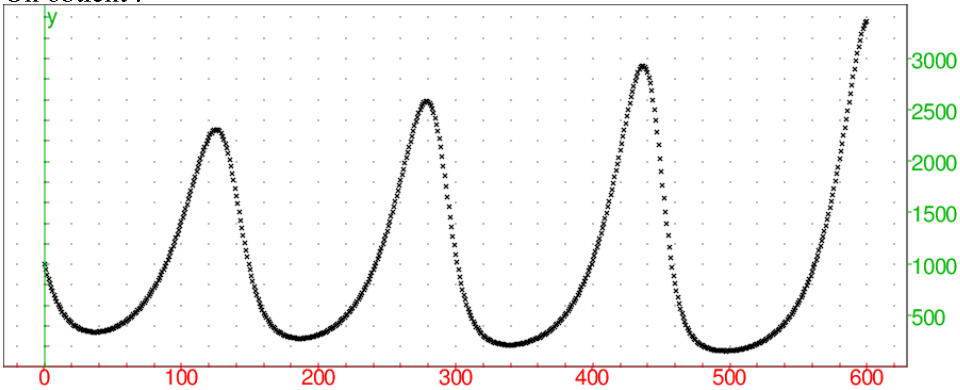
On obtient :

```
Done,602
```

On tape pour dessiner les $N+2$ premières valeurs de la suite l_n :

```
point((k,res[k][0]))$(k=0..600)
```

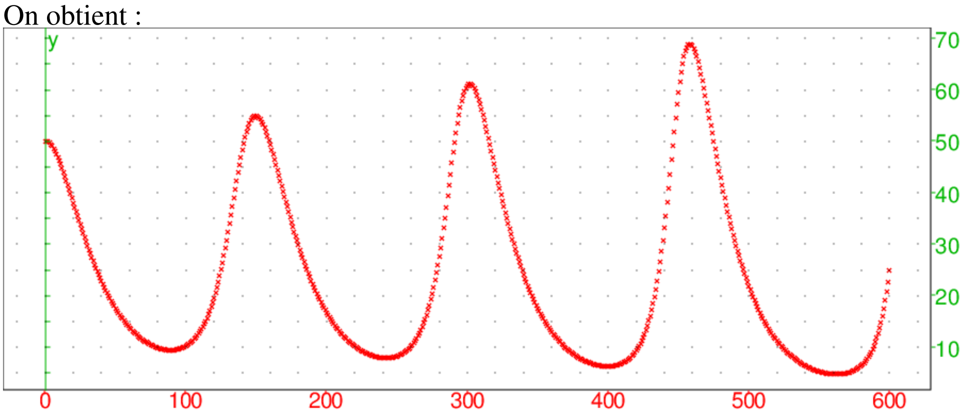
On obtient :



On tape pour dessiner les $N+2$ premières valeurs de la suite r_n

```
affichage(point((k,res[k][1]))$(k=0..600),1)
```

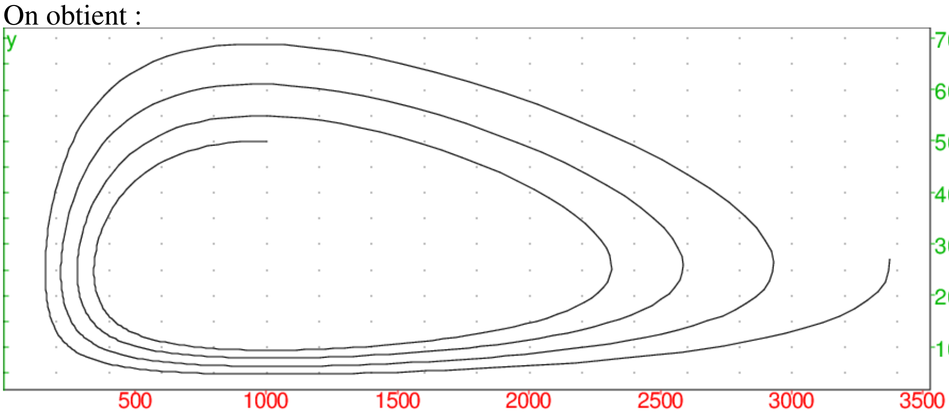
On obtient :



On tape pour dessiner les $N+1$ premiers segments reliants les points l_n, r_n

```
(segment(point(res[k]),point(res[k+1])))$(k=0..600)
```

On obtient :



Chapitre 25

Les complexes

25.1 Module et argument

25.1.1 L'énoncé

Soit $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 + 2i$.
On pose $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
Calculer le module et l'argument de z_1, z_2, Z.
En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
Calculer Z^{2009}

25.1.2 La correction avec `Xcas`

On tape :

```
z1:=sqrt(2)+i*sqrt(6)
z2:=2+2*i
Z:=z1/z2
```

On tape pour avoir les modules :
`simplify(abs(z1,z2,Z))`
On obtient : `2*sqrt(2),2*sqrt(2),1`
On tape pour avoir les arguments :
`simplify(arg(z1,z2,Z)`
On obtient : `[pi/3,pi/4,pi/12]`
On tape :
`simplify(re(Z),im(Z))`
On obtient : `(sqrt(2)+sqrt(6))/4,(-sqrt(2)+sqrt(6))/4`
Donc

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Puisque Z a comme module 1 et comme argument $\pi/12$,, on sait que le module de $P = Z^{2009}$ est 1 et que son argument vaut $2009\pi/12$.
On tape :
`iquorem(2009,24)`
On obtient : `[83,17]` i.e. $2009 = 24 * 83 + 17$.

Donc puisque $2009\pi/12 = 83 * 2\pi + 17\pi/12$, l'argument de P est :
$17\pi/12 \bmod 2\pi$ ou encore pour être dans $]-\pi;\pi]$, l'argument de P est :
$-7\pi/12 = -\pi/2 - \pi/12$.
Pour avoir la partie réelle et la partie imaginaire de P on calcule :
$\cos(-\pi/2 - \pi/12) = -\sin(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et
$\sin(-\pi/2 - \pi/12) = -\cos(\pi/12) = -\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Ou on tape :
`P:=simplify(Z^2009)`
On obtient : `(sqrt(2)+(-i)*sqrt(6))/(2+2*i)`
On tape :
`simplify(re(P),im(P))`
On obtient : `(sqrt(2)-sqrt(6))/4,(-sqrt(2)-sqrt(6))/4`
On tape :
`simplify(abs(P),arg(P))`
On obtient : `1,(-7*pi)/12`

25.1.3 Exercices de calculs avec les complexes

Calculer :

1. $(1+i)^n + (1-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
   On a :
   $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
   donc
   $(1+i)^n+(1-i)^n = (\sqrt{2})^n(e^{in\pi/4}+e^{-in\pi/4} = (\sqrt{2})^n 2\cos(n\pi/4)$ donc :
   $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{1+n/2}\cos(n\pi/4)$ Avec `Xcas`, on tape :
   `assume(n,integer)`
   `normal(exp2trig((1+i)^n+(1-i)^n))`
   On obtient :
   `2*2^(n/2)*cos(n*pi/4)`
2. $(1+i)^n - (1-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
   On a :
   $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
   donc
   $(1+i)^n+(1-i)^n = (\sqrt{2})^n(e^{in\pi/4}+e^{-in\pi/4} = (\sqrt{2})^n 2\cos(n\pi/4)$ donc :
   $(1+i)^n - (1-i)^n = 2^{1+n/2}i\sin(n\pi/4)$ Avec `Xcas`, on tape :
   `assume(n,integer)`
   `normal(exp2trig((1+i)^n-(1-i)^n))`
   On obtient :
   `2*i*2^(n/2)*sin(n*pi/4)`
3. $(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^n + (\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2})^{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}$
   On sait que :
   $\cos(2\pi/3) = -1/2$ et $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ donc
   $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) = \exp(2i\pi/3)$ et
   $\cos(-\pi/3) = 1/2$ et $\sin(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ donc

$\frac{1-i\sqrt{3}}{2}) = \exp(-i\pi/3)$
Donc :
$(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^n + (\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2})^{2n} = \exp(2in\pi/3) + \exp(-2in\pi/3) = 2\cos(2n\pi/3)$
Avec Xcas, on tape :
```
assume(n,integer)
normal(polar_coordinates((-1+i*sqrt(3))/2))
```
On obtient :
```
[1,2/3*pi]
```
On tape :
```
normal(polar_coordinates((1-i*sqrt(3))/2))
```
On obtient :
```
[1,-1/3*pi]
```
On tape :
```
normal(exp2trig(exp(2*n*i*pi/3)+exp(-2*n*i*pi/3)))
```
On obtient :
```
2*cos(2*n*pi/3)
```

25.1.4 Complexes et trigonométrie

1. Calculer :
   $\cos(x)^4 + \sin(x)^4$
   $\cos(x)^4 - \sin(x)^4$
   On a :
   $\cos(x)^4 + \sin(x)^4 = (\cos(x)^2 + \sin(x)^2)^2 - 2\cos(x)^2\sin(x)^2$
   donc puisque $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, on a :
   $\cos(x)^4 + \sin(x)^4 = 1 - 2\cos(x)^2\sin(x)^2 = 1 - \sin(2x)^2/2 =$
   $(cos(2*x)^2 + 1)/2 = 1 - 2\cos(x) + 2\cos(x)^4$
   On a :
   $\cos(x)^4 - \sin(x)^4 = (\cos(x)^2 - \sin(x)^2)(\cos(x)^2 + \sin(x)^2$
   donc puisque $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, on a :
   $\cos(x)^4 - \sin(x)^4 = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$
   Avec Xcas, on tape :
   ```
   simplify(cos(x)^4+sin(x)^4)
   ```
   On obtient :
   ```
   1-2*cos(x)^2+2*cos(x^4
   ```
   On tape :
   ```
   simplify(cos(x)^4-sin(x)^4)
   ```
   On obtient :
   ```
   -1+2*cos(x)^2
   ```
2. Résoudre l'équation $z^6 = (2+i)^6$.
   On commence par résoudre $z^6 = 1$ On obtient $z = a[k]$ où $a[k]$ sont les racines 6ième de l'unité :
   $a_k = e^{ik\pi/3}$ pour $k = 0..5$
   On tape :
   ```
   a:=[exp(i*k*pi/3) $(k=0..5)]
   ```
   On obtient a et on a a_k=a[k] :
   ```
   [1,1/2+(i)*sqrt(3)/2,-1/2+(i)*sqrt(3)/2,-1,-1/2+(i)*(-(sqrt(3)))/2,1/2+(
   ```

Résoudre $z^6 = (2+i)^6$ revient à résoudre :
$Z^6 = (\frac{z}{2+i})^6 = 1$.
Donc en posant $z = Z * (2+i)$ on a $Z_k = a_k$ et $z_k = Z_k * (2+i) = a[k] * (2+i)$ Avec `Xcas`, on tape :
`csolve(z^6=(2+i)^6,z)`
On obtient :
`[(2+i)*(1/2+(i)*(-(sqrt(3)))/2),(2+i)*(-1/2+(i)*(-(sqrt(3)))/2), -2-i,(2+i)*(-1/2+(i)*sqrt(3)/2),(2+i)*(1/2+(i)*sqrt(3)/2),2+i]`

25.2 Une transformation

25.2.1 L'énoncé

Soit $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.
On note M le point d'affixe z et N le point d'affixe $Z = f(z)$.
On note A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1.

— Calculer $f(-i)$ et résoudre l'équation $f(z) = 2$.
— Résoudre l'équation $f(z) = z$
— Calculer pour $Z \neq 1$, $\frac{Z+1}{Z-1}$ et en déduire que si $N \neq B$:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{MA^2}{MB^2}$$

.
— Trouver le lieu de N lorsque M se déplace sur la médiatrice du segment AB.
— Trouver le lieu de N lorsque M se déplace sur le cercle de diamètre AB.

25.2.2 La correction avec `Xcas`

On coche `Complexe` dans la configuration du CAS et si on coche `Variables_complexes` on est obligé de mettre `assume Y,real)` si on veut que la variable `Y` soit réelle.
Dans ce qui suit on suppose que l'on a coché `Variables_complexes` (si ce n'est pas le cas on peut enlever toutes les commandes `assume`).
On tape :
`f(z):=1/2*(z+1/z)`

— Calcul de $f(-i)$ et résolution de l'équation $f(z) = 2$. On tape :
`f(-i)`
On obtient : `0`
On tape :
`csolve(f(z)=2,z)`
On obtient : `[-sqrt(3)+2,sqrt(3)+2]`
donc le point d'affixe 2 a deux antécédents : les points d'affixe $-\sqrt{3}+2$ et $\sqrt{3}+2$
— Réslution de l'équation $f(z) = z$ On tape :
`csolve(f(z)=z,z)`
On obtient : `[-1,1]`
donc les points doubles de f sont les points A et B.

— Calcul pour $Z! = 1$ de $\frac{Z+1}{Z-1}$ On tape :
`factor((f(z)+1)/(f(z)-1))`
On obtient : `((z+1)^2)/((z-1)^2)`
donc $\frac{NA}{NB} = (\frac{MA}{MB})^2$

— Lorsque M se déplace sur la médiatrice du segment AB on a $MA = MB$ ou encore $|z+1| = |z-1|$.
Donc d'aprés ce qui précéde on a $|Z+1|/|Z-1| = 1$ donc N se déplace sur la médiatrice du segment AB.
Réciproquement, si $|Z+1| = |Z-1|$ on en déduit que $|z+1|^2 = |z-1|^2$ donc que M se déplace sur la médiatrice du segment AB.
On tape puisque la médiatrice de AB est l'axe des y :
```
assume(y,real)
simplify(f(i*y))
```
On obtient : `((i)*y^2-i)/(2*y)`
On tape :
`re(f(i*y))`
On obtient : `0`
On tape :
`re(f(i*y))`
On obtient : `0`
Pour la réciproque , on tape :
```
assume(Y,real)
sol:=simplify(csolve(f(z)=i*Y,z))
```
On obtient : `[(i)*Y+sqrt(-Y^2-1),(i)*Y-sqrt(-Y^2-1)]`
On tape :
`real(sol)`
On obtient : `[0,0]`
On tape :
`simplify(im(sol))`
On obtient : `[Y+sqrt(Y^2+1),Y-sqrt(Y^2+1)]`

— M se déplace sur le cercle de diamètre AB qui est aussi le cercle de centre O et de rayon 1. Donc $z = e^{it}$ avec $0 \leq t \leq 2 * \pi$.
Donc d'aprés ce qui précéde on a :
$\dfrac{Z+1}{Z-1} = (\dfrac{z+1}{z-1})^2$ donc `arg((Z+1)/(Z-1))=2*arg((z+1)/(z-1))`.
On a `arg((z+1)/(z-1))=arg(z+1)-arg(z-1)` et cela est la mesure de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ qui vaut $+/-\frac{\pi}{2}$ car M se déplace sur le cercle de diamètre AB. Donc `arg((Z+1)/(Z-1))=pi` et N se déplace sur la droite AB. On sait d'après la question 1 que le point d'affixe 2 ne fait pas partie du lieu, donc on fait une réciproque. Pour cela on résout $f(z) = X$ i.e. $z^2 - 2Xz + 1 = 0$ le discriminant vaut $X^2 - 1$ donc si $X < 1$ ou si $X > -1$ les solutions sont réelles et l'anrécédent de N ne se trouve pas sur le cercle de diamètre AB. Si $-1 \leq X \leq 1$ les solutions sont : $z = X + i\sqrt{1-X^2}$ et $z = X - i\sqrt{1-X^2}$ qui sont les affixes de 2 points du cercle de centre O et de rayon 1 ($|z|^2 = X^2 + (1-X^2) = 1$). On tape avec `Xcas` :
`assume(t,real)`

`simplify(exp2trig(f(exp(i*t))))`
On obtient : `cos(t)`
donc N se déplace sur le segment AB on a $Z = cos(t)$ avec $0 \leq t \leq 2 * \pi$.
Pour la réciproque, N se déplace sur le segment AB donc $Z = cos(t)$ avec $0 \leq t \leq 2 * \pi$.
On tape :
`sol:=csolve(f(z)=cos(t),z)`
On obtient : `[sqrt(cos(t)^2-1)+cos(t),-sqrt(cos(t)^2-1)+cos(t)]`
On tape :
`simplify(trig2exp(sol))`
On obtient :
`[exp((i)*t),1/(exp((i)*t))]`
Donc M se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 1.

25.3 Exercices divers

25.3.1 Résolution d'équations

1. Résoudre :
$$iz^2 - 2\overline{z} + 2 - i = 0$$
On pose $z = a + ib$.
Donc :
$iz^2 - 2\overline{z} + 2 - i = 2 - 2a - 2ab + i(-1 + 2b - b^2 + a^2) = 0$ Donc on a le système d'inconnues a et b :
$2 - 2a - 2a * b = 0, -1 + 2 * b - b^2 + a^2 = 0$
On en déduit :
$a = 1/(b + 1)$ et
$a^2 = b^2 - 2 * b + 1 = (b - 1)^2 = 1/(b + 1)^2$
On obtient l'équation d'inconnue b :
$(b + 1)^2(b - 1)^2 = ((b + 1)(b - 1))^2 = 1$
donc $(b + 1)(b - 1) = b^2 - 1 = 1$ ou $(b + 1)(b - 1) = b^2 - 1 = -1$ donc $b^2 = 2$ ou $b^2 = 0$
Les solutions sont donc :
$b = \sqrt{2}$ et $a = 1/(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$,
$b = -\sqrt{2}$ et $a = 1/(1 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2} - 1$
$b = 0$ et $a = 1$
Donc : $z = \sqrt{2} - 1 + i * \sqrt{2}$, $z = -\sqrt{2} - 1 - i * \sqrt{2}$, $z = 1$ Avec `Xcas`, on tape :
`csolve(i*z^2-2*conj(z)+2-i=0,z)`
On obtient :
`[1,-1+(1+i)*sqrt(2),-1+(-1-i)*sqrt(2)]`

2. Résoudre :
$$z^7 = \overline{z}$$
Il y a une solution évidente qui est 0 : On a soit $z = 0$ soit $z = r * \exp(i * t)$ avec r réel strictement positif.
On égale les modules et les arguments donc : $r^7 = r$ donc $r = 1$ puisque r est un réel positif et, $\exp(7it) = \exp(-it)$ donc $7t = -t + 2k\pi$ donc

$8t = 2k\pi$
donc $t = k * pi/4$
Les solutions sont donc :
$z = \exp(it)$ avec $t \in [pi/4, pi/2, 3*pi/4, pi, 5*pi/4, 3*pi/2 : 7*pi/4]$
C'est à dire :

$$z \in [-1, 0, 1, i, -i, (1+i)\sqrt{2}/2, (1-i)\sqrt{2}/2, (-1+i)\sqrt{2}/2, (-1-i)\sqrt{2}/2]$$

Avec `Xcas`, on tape :
`csolve(z^7-conj(z)=0,z)`
On obtient :
`[-1,0,1,i,-i,(sqrt(2))/(1-i),(-i)*sqrt(2)/(1-i),i*sqrt(2)/(1-i),-(sqrt(2`

3. Résoudre :
$$\cos(a) + \cos(3a) + \cos(5a) = 0$$
On remplace a par $3a - 2a$ et $5a$ par $3a + 2a$ et on obtient :
$\cos(a) = \cos(3a - 2a) = \cos(3a)\cos(2a) + \sin(3a)\sin(2a)$ $\cos(5a) = \cos(3a + 2a) = \cos(3a)\cos(2a) sin(3a)\sin(2a)$ donc :
$\cos(a) + \cos(3a) + \cos(5a) = \cos(3a)(1 + 2\cos(2a)) = 0$ donc :
$\cos(3a) = 0$ ou $\cos(2a) = -1/2$ donc $3a = (+/-)\pi/2 + 2k\pi$ soit $a = \pi/6 + 2k\pi/3$ ou $a = -\pi/6 + 2k\pi/3$ ou $2a = (+/-)2\pi/3 + 2k\pi$ soit $a = \pi/3 + k\pi$ ou $a = -\pi/3 + k\pi$ Donc :
$$a \in [-5\pi/6, -2\pi/3, -\pi/2, -\pi/3, -\pi/6, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6]$$
Avec `Xcas`, on tape :
`solve(cos(a)+cos(3a)+cos(5a)=0,a)`
On obtient :
`[-5*pi/6,-2*pi/3,-pi/2,-pi/3,-pi/6,pi/6,pi/3,pi/2,2*pi/3,5*pi/6]`

25.3.2 Module et argument d'une expression complexe

Mettre les expressions suivantes,sous la forme re^{i*t} (r réel positif).

1. A=$\sin(a) - i\cos(a)$
A=$\sin(a) - i\cos(a) = -i\exp(ia)$
A=$exp(-i\pi/2) * \exp(ia) =$
$\exp(i(a - \pi/2))$ Donc :
$$A = \exp(i * a - \pi/2))$$
Avec `Xcas`, on tape :
`simplify(trig2exp(sin(a)-i*cos(a))`
On obtient :
`-i*exp(i*a)` Comme $-i = \exp(-i\pi/2)$ on a :
$$A = \exp(i(a - \pi/2))$$

2. B=$\dfrac{1 + i\tan(\pi/5)}{1 - i\tan(\pi/5)}$
Puisque $\tan(\pi/5) = \sin(\pi/5)/\cos(\pi/5)$ on a :

$B=(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))/(\cos(\pi/5)-i\sin(\pi/5))$
$B=\exp(i\pi/5)/(\cos(-\pi/5)+i\sin(-\pi/5))=\exp(i*\pi/5)/\exp(-i*\pi/5)$
Donc :

$$B=\exp(2*i\frac{\pi}{5})$$

Avec `Xcas`, on tape :
`B:=(1+i*tan(pi/5))/(1-i*tan(pi/5));`
`simplify(abs(B)),arg(B)` On obtient :
`1,2*pi/5`
Donc `B=exp(2*i*pi/5)`

3. C=$\dfrac{\exp(9i\pi/10)+\exp(6i\pi/10}{\exp(i\pi/10)-\exp(6i\pi/10}$
On pose :
$N=\exp(9i\pi/10)+\exp(6i\pi/10)$ et $D=\exp(i\pi/10)-\exp(6i\pi/10)$.
Si on est bon en géométrie, pour le calcul de N il suffit de faire un dessin pour voir le résultat :
on trace le cercle trigonométrique de centre O d'affixe 0 et on note les points P d'affixe $\exp(i\pi/10)$
Q d'affixe $\exp(6i\pi/10)$
R d'affixe $\exp(9i\pi/10)$
On trace le losange $OQMR$:
M a comme affixe $\exp(9i\pi/10)+\exp(6i\pi/10)$ et on a :
$(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR})=9i\pi/10-6i\pi/10=3i\pi/10$ et
$(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OM})=3i\pi/20$
Donc :
$(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})=6i\pi/10+3i\pi/20=15i\pi/20=3i\pi/4$
$N=\exp(9i\pi/10)+\exp(6i\pi/10)=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\cos(3\pi/20)\exp(3*i\pi/4)$ Pour le calcul de D, il est plus simple de mettre $\exp(i\pi/10)$ en facteur car $\exp(6i\pi/10)=\exp(i\pi/10)*\exp(5i\pi/10)=\exp(i\pi/2)$ On a donc :
$D=\exp(i\pi/10)(1-\exp(i\pi/2))=\exp(i\pi/10)(1-i)=\sqrt{2}\exp(i*\pi/10)\exp(-i\pi/4)$
donc
$N/D=2\cos(3\pi/20)\exp(3i\pi/4+i*\pi/4-i\pi/10)=2\cos(3\pi/20)\exp(9i\pi/10)$
Comme $\cos(3\pi/20)>0$ puisque $0<3\pi/20<\pi/2$, on a :

$$N/D=2\cos(3\pi/20)\exp(9i\pi/10)$$

OU BIEN
On utilise les formules : $\cos(p)+\cos(q)=2\cos((p+q)/2)\cos((p-q)/2)$
$\sin(p)+\sin(q)=2\sin((p+q)/2)\cos((p-q)/2)$
ce qui donne la formule :
$\exp(ip)+\exp(iq)=2\cos((p-q)/2)\exp(i(p+q)/2)$
et aussi :
$\exp(ip)-\exp(iq)=\exp(ip)+\exp(i*(\pi+q))=2\cos((p-q-\pi)/2)\exp(i(p+q+\pi)/2)$
On a alors directement N :
$N=\exp(9i\pi/10)+\exp(6i\pi/10)=2\cos((9-6)\pi/20)\exp(i(9+6)\pi/20)=$

$2\cos(3\pi/20)\exp(3i\pi/4)$
Pour D on peut faire la même chose mais c'est plus simple de mettre $\exp(i\pi/10)$ en facteur.
On fait quand même le calcul en appliquant la formule :
$D = \exp(i\pi/10) - \exp(6i\pi/10) = 2\cos(3\pi/4)\exp(i(\pi/2 + 7\pi/20))$
$D = 2\cos(3*\pi/4)*\exp(17i\pi/20) = -\sqrt{2}\exp(17i\pi/20)$ On a $-1 = \exp(-i*pi)$ donc :

$$D = \sqrt{2}\exp(i\pi(-1 + 17/20)) = \sqrt{2}\exp(-3i\pi/20)$$

Finallement :
$N/D = \sqrt{2}\cos(3\pi/20)\exp(i\pi(3/4{+}3/20)) = \sqrt{2}\cos(3\pi/20)\exp(9i\pi/10)$
Donc :

$$C = \sqrt{2}*\cos(3*pi/20)*\exp(i*pi*9/10)$$

OU BIEN
Si on ne connait pas les formules et si on n'est pas bon en géométrie pour mettre $\exp(i*a)+\exp(i*b)$ sous la forme $r\exp(i*t)$ on écrit :
$a = (a+b)/2 + (a-b)/2$ et $b = (a+b)/2 - (a-b)/2$ et on développe.
On a donc : $\exp(i*a)+\exp(i*b) = \exp(i*(a+b)/2)*(\exp(i*(a-b)/2) - \exp(i*(a-b)/2))$ ce qui donne la formule :
$\exp(i*a)+\exp(i*b) = 2\exp(i*(a+b)/2)*\cos((a-b)/2))$.

Avec `Xcas`, on tape :
`N:=exp(9*i*pi/10)+exp(6*i*pi/10)`
`simplify(abs(N)^2),arg(N)` On obtient :
`(4+sqrt(2*(5-(sqrt(5)))))/2,3*pi/4` Donc $abs(N) = \sqrt{4+sqrt2*(5-\sqrt{5})}/\sqrt{2}$
On tape :
`D:=exp(i*pi/10)*(1-exp(5*i*pi/10))`
`D1:=1-exp(5*i*pi/10)`
`abs(D1),arg(D1)`
On obtient :
`sqrt(2),-pi/4` Donc :
`C=sqrt(4+sqrt(2*(5-(sqrt(5)))))/2*exp(3*i*pi/4)*exp(-i*pi/10)*exp(i*pi/4`
On tape :
`arg(exp(3*i*pi/4)*exp(-i*pi/10)*exp(i*pi/4))` On obtient :
`9*pi/10`
Donc

$$C = \sqrt{4+sqrt(2*(5-(\sqrt{5})))}/2*\exp(9*i*pi/10)$$

On vérifie que : `simplify(cos(3*pi/20)*sqrt(2)-sqrt(4+sqrt(2*(5-(sqrt(5)))))/2`
On obtient :
`0`

25.3.3 Les imaginaires purs

Soient 2 nombres complexes différents a et b de module 1.
Montrer que $A = (z + ab\overline{z} - a - b)/(a-b)$ est imaginaire pur.

Pour montrer que A est imaginaire pur, il suffit de montrer que $A = -\overline{A}$ ou encore que $A + \overline{A}) = 0$
On sait par hypothèse que :
$|a| = 1$ et $|b| = 1$ donc $a\overline{a} = 1$ et $b\overline{b} = 1$ On réduit $A + \overline{A}$ au même dénominateur D et on montre que le numérateur N de la fraction obtenue est nulle.
On note :
$A = N/D$ donc $A + \overline{A} = (N * \overline{D} + \overline{N}D)/(D\overline{D})$ Calculons $E = N * \overline{D}$ (on a $A + \overline{A} = (E + \overline{E})/(D\overline{D})$)
$N = (z + ab\overline{z} - a - b)(\overline{a} - \overline{b})$ On développe, le calcul est facile car on a par hypothèse :
$a\overline{a} = |a|^2 = 1$ et $b\overline{b} = |b|^2 = 1$
$E = z\overline{a} - z\overline{b} - a\overline{z} + b\overline{z} - 1 - b\overline{a} + a\overline{b} + 1$
$E = (z\overline{a} - a\overline{z}) + (-z\overline{b} + b\overline{z}) + (-b\overline{a} + a\overline{b})$
Donc on a :
$E + \overline{E} = 0$ car tout se simplifie
Donc A est imaginaire pjur.
Avec `Xcas` :
On tape :

```
assume(z,complex)
assume(a,complex)
assume(b,complex)
A:=(z+a*b*conj(z)-a-b)/(a-b)
simplify(subst(subst(A+conj(A),conj(a),1/a),conj(b),1/b))
```

On obtient :

```
0
```

Chapitre 26

Exemples d'intégrales

26.1 Des calculs d'intégrales

On tape :

```
integrate(1/(x^4-1)^10,x);
integrate((x^4+4*x^2+6*x+4)/(x+1)^2,x);
integrate(x/((x-1)*(x+1)^2),x);
integrate(x/((x+1)*(x^4-1)),x);
integrate(1/(3*x*(x^2+x+1)*(x-1)^3),x);
integrate(1/(x^4-1)^2,x);
integrate(1/(x^4+1)^2,x);
integrate(1/(x^4+1)^4,x);
integrate(x^7/((x^4-1)*(x^2+3)),x);
integrate(((1+x)/(1-x))^(1/3),x);
integrate((sin(2*x)+1)/(cos(2*x)),x);
integrate((2*sin(x)+1)/(2*sin(x)-1),x);
integrate(exp(x)/(3+2*exp(x)),x);
integrate(sin(x)^2*cos(x)^4,x);
integrate(sin(x)/(sin(x)^3+cos(x)^3),x);
integrate(1/sqrt(2*x*t)*exp(-t^2/2),x);
integrate(sin(3*x)^4/exp((3*x+1)/cos(t)),x);
integrate(2*x/sqrt(x^2-1),x);
integrate((sin(x)+cos(x))/(sin(x)-cos(x)),x);
integrate(sin(pi/2-2*x),x);
integrate(tan(x)+tan(x)^3,x);
integrate((exp(x)-exp(-x))/(exp(x)+exp(-x)),x);
integrate(1/cos(x)^25,x);
integrate(1/(sin(x)-1)^3,x);
integrate(1/(sin(x)+1)^3,x);
integrate(ln(x+sqrt(1+x^2)),x);
integrate(atan(2*x/(1+x^2)),x);
integrate(x*sqrt(1+x^2),x);
integrate(sin(x)/cos(x)^2,x);
integrate(exp(x)/(1+exp(2*x)),x);
integrate(cos(x/2)^2/(x+sin(x)),x);
```

```
integrate(x/sqrt(x+1),x);
integrate(exp(x)/((3+exp(x))*sqrt(exp(x)-1)),x);
integrate(sqrt(x)/sqrt(a^3-x^3),x);
integrate(sqrt(a-x)/sqrt(x),x);
integrate(sqrt(x^2+a^2),x);
integrate(sin(2*x)*cos(x),x);
integrate(x*atan(x),x);
integrate(sinh(x)*cos(x),x);
integrate(atan(x)/x,x);
integrate(1/(sin(x)-2)^3,x);
integrate((2*x^2+1)*exp(x^2),x);
integrate(1/(1+sqrt(1-x^2)),x);
integrate(sin(3*x)/sin(x),x);
integrate(1/(t*ln(t)^2),t,2,x);
integrate(ln(1+2/(n*(n+3))),n,1,+infinity);
integrate((pi*t-t^2)*sin(n*t),t,0,pi);
integrate(exp(t)*cos(n*t),t,-pi,pi);
integrate(exp(x)*sin(x),x,0,t);
integrate(cos(x)/exp(x),x,0,+infinity);
integrate((t^4+t+1)/(t^6+t^3+2),t,1,+infinity);
integrate(1/(t^4+t^2),t,2,+infinity);
integrate(x*exp(1/2*abs(ln(x^2))),x,2,t);
integrate(1/sqrt(2*x*t)*exp(-t^2/2),x,a,b);
integrate((x^2*(1-x))^(1/3),x,0,1);
integrate((a*t+5)/((t-1)^3*(t-2)^2),t,3,x);
integrate(atan(sqrt(1-x^2)),x,0,1);
integrate(ln(x^2+t^2)/(1+t^2),t,0,+infinity);
```

26.2 Intégrale de $\exp(x)*$polynôme

On tape :
`integrate(e^x*sin(2*x),x,0,pi)`
On obtient :
`-2/5*exp(pi)-2/5`
On tape :
`integrate(x^2*e^(i*x))`
On obtient :
`(-x^2-(2*i)*x+2)/(-i)*exp((i)*x)`
On obtient avec `normal` :
`(-i)*x^2*exp((i)*x)+2*x*exp((i)*x)+(2*i)*exp((i)*x)`
On tape :
`integrate((1+x)*cos(x)*e^x)`
On obtient :
`exp(x)*((-((x+1)/-2))*cos(x)-(x*sin(x))/-2)`

26.3 Changements de variables

On tape :
`integrate(x*exp(x^2))`
On obtient (à la main on pose $u = x^2$) :
`(exp(x^2))/2`
On tape :
`integrate(ln(x)/x,x,e,e^2)`
On obtient (à la main on pose $u = ln(x)$) :
`3/2`
On tape :
`integrate((2*x+1)/sqrt(x^2+x+1))`
On obtient (à la main on pose $u = sqrt(x^2 + x + 1)$) :
`2*sqrt(x^2+x+1)`
On tape :
`integrate(sqrt(1+x),x,1,2)`
On obtient (à la main on pose $u = 1 + x$) et
`diff(2/3*u^(3/2)=u^(1/2))`:
`2*sqrt(3)-(4*sqrt(2))/3`

26.4 Intégration par parties

1. Calculer : $\int \ln(x)dx$
   Avec `Xcas`
   On tape :
   `integrate(ln(x))`
   On obtient :
   `x*ln(x)-x`
   Donc $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$
2. Calculer : $\int \ln(x)^2 dx$
   Avec `Xcas`
   On tape :
   `integrate(ln(x)^2)`
   On obtient :
   `(ln(x))^2*x+(-(2*ln(x)))*x+2*x`
   Donc $\int \ln(x)^2 dx = (\ln(x))^2 * x + (-(2 * \ln(x))) * x + 2 * x$
3. Calculer : $\int \cos(x) * \ln(1 + \cos(x))dx$
   Avec `Xcas`
   On tape :
   `integrate(cos(x)*ln(1+cos(x)))`
   On obtient une expression en termes d'exponentielles complexes qu'il est possible mais difficile de simplifier.
   On tape :
   `ibpu(cos(x)*log(1+cos(x)),log(1+cos(x)))`
   On obtient :
   `[sin(x)*log(1+cos(x)),((sin(x))^2)/(cos(x)+1)]`
   On tape :

`ibpu([sin(x)*log(1+cos(x)),((sin(x))^2)/(cos(x)+1)],0)`
On obtient :
`2*((tan(x/2))/(-tan(x/2)^2-1)+x/2)+sin(x)*ln(1+cos(x))`
On peut encore simplifier en sélectionnant la partie en `tan(x/2)` en utilisant la fonction `tan2sincos2` puis `simplify`, au final on obtient :
`2*(-1/2*sin(x)+x/2)+sin(x)*ln(1+cos(x))`
Ou encore on tape pour intégrer $sin(x)^2/(cos(x)+1)$:
`integrate(trigcos(sin(x)2̂/(cos(x)+1)))`
On obtient :
`-sin(x)+x`
Donc $\int \cos(x) * \ln(1+\cos(x))dx = \sin(x) * \ln(1+\cos(x)) - \sin(x) + x$

26.5 Intégrale de fractions rationnelles

Calculer :

$$\int \frac{2x+1}{x^2-9}dx$$

Avec `Xcas`
On tape :
`partfrac((2x+1)/(x^2-9))`
On obtient :
`5/(6*(x+3))+7/(6*(x-3))`
On tape :
`int((2x+1)/(x^2-9))`
On obtient :
`(7*log(abs(x-3)))/6+(5*log(abs(x+3)))/6`

26.6 Intégrale de polnômes en $\sin$ et $\cos$

On linéarise, on tape :
`int(sin(x)^3+cos(x)^3)`
On obtient :
`-cos(x)-(cos(x)^3)/-3+sin(x)-(sin(x)^3)/3`
On tape :
`int(sin(x)^4+cos(x)^2)`
On obtient :
`(3*x)/8-(sin(2*x))/4-(sin(4*x))/-32+x/2-(sin(2*x))/-4`

26.7 Intégrale de fractions rationnelles en $\sin$, $\cos$ ou $\sinh$, $\cosh$

Théoriquement, on pose $t = \tan(x/2)$ et on obtient une fraction rationnelle en t. Pratiquement, on applique les règles de Bioche.

— si lorsqu'on change x en $-x$ et dx en $-dx$, l'expression totale à intéger ne change pas, on pose $\cos(x) = t$
— si lorsqu'on change x en $\pi - x$ et dx en $-dx$, l'expression totale à intéger ne change pas, on pose $\sin(x) = t$
— si lorsqu'on change x en $\pi + x$ et dx en dx, l'expression totale à intéger ne change pas, on pose $\tan(x) = t$

On tape :
`int(sin(x)^3/cos(x)^4)`
On obtient :
`(3*cos(x)^2-1)*(-(1/(cos(x)^3*3)))`
On tape :
`int(1/(5+3*cos(x)))`
On obtient :
`(2*(atan((tan(x/2))/2)+pi*floor(x/(pi*2)+1/2)))/4`
On tape :
`normal(int(1/(sin(x)+cos(x)),x,0,pi/2))`
On obtient :
`(sqrt(2))/2*ln(2*sqrt(2)+3)`
On a $2 * \sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} + 1)^2$ donc
`(sqrt(2))/2*ln(2*sqrt(2)+3)=sqrt(2)*ln(sqrt(2)+1)`

26.8 Intégrale d'expressions trigonométriques

On essaye de poser $t = \tan(x/2)$ et on obtient une fonction de t.
Deux exemples différents :

1. Calculer :
   $I = \int_0^\pi \sqrt(1 + \sin(x))dx$
   Avec `Xcas` on transforme l'expression en $\tan(x/2)$ avec la commande `halftan`.
   On tape :
   `int(halftan(sqrt(1+sin(x))),x,0,pi)`
   On peut taper directement :
   `int(sqrt(1+sin(x)),x,0,pi)`
   On obtient :
   `4`
   En effet en posant $t = \tan(x/2)$, on a $t > 0$ si $x \in [0; \pi]$ et :
   $\sqrt(1+\sin(x)) = \sqrt(\dfrac{1 + t^2 + 2t}{(1 + t^2)})$ et $dt = (1+t^2)dx/2$ donc $I = 2\int_0^\infty \frac{2(1+t)dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} =$
   $2\int_0^\infty \frac{2dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^\infty \frac{2tdt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ on pose pour $u > 0$ $t = \tan(u)$ donc $dt = \frac{du}{\cos(u)^2}$ et
   $(1+t^2)^{\frac{3}{2}} = 1/\cos(u)^3$ $2\int_0^\infty \frac{2dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)^3du}{\cos(u)^2} = 4\int_0^{\pi/2} \cos(u)du =$
   $4\int_0^\infty \frac{2tdt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} =$
   $[-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}]_{t=0}^{+\infty} = 2$ Donc $I = 2 + 2 = 4$
   Meilleur changement de variable ! On a posé $t = tan(x/2$ puis $t = \tan(u)$, il suffit donc de poser $u = x/2$.

On a :
si $0 \leq x \leq \pi$ alors $0 \leq u \leq \pi/2$
$dx = 2du$, $\sin(x) = \sin(2u) = 2\cos(u)\sin(u)$ et $1 = \sin(u)^2 + \cos(u)^2$
donc
$I = \int_0^{\pi} \sqrt(1 + \sin(x))dx$
$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt(\sin(u)^2 + \cos(u)^2 + 2\cos(u)\sin(u))du$
$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(u) + \cos(u)|du$
$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) + \cos(u)du = 2 * [-cos(u) + sin(u)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 * (1 + 1) = 4$
On tape :
`factor((int(sqrt(1+sin(x))))`
On obtient :
`2*sqrt(2)*sign(cos(-pi/4+x/2))*sin(-pi/4+x/2)`

2. Calculer :
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}}dx$
On pose :
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}}dx$
et
$J := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}}dx$
On a :
$I = J$ car $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ et $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$
Donc $I = \frac{\pi}{4}$

26.9 Intégrale de la racine carrée de trinômes de degré 2

On met le trinôme de degré 2 sous sa forme canonique sous la forme :
u^2+1 ou u^2-1 ou $1-u^2$. Puis, on pose $u = \cos(t)$ ou $u = \sin(t)$ ou $u = \cosh(t)$ ou $u = \sinh(t)$
On tape :
`int(sqrt(x^2+x+1),x,-2,2)`
On obtient :
`3/8*ln(2*sqrt(3)+3)+(-3)/8*ln(2*sqrt(7)-5)+(12*sqrt(3)+20*sqrt(7))/16`

26.10 Exercices

Calculer une primitive de

1. $I = \displaystyle\int x \operatorname{asin}(x)dx$
On tape :
`int(x*asin(x))`
On obtient :
`asin(x)/4+x*sqrt(1-x^2)/4-asin(x)*(1-x^2)/2`
Ou on fait une intégration par parties et on tape :
`ibpu(x*asin(x),asin(x))`
On obtient :
`[x^2*asin(x)/2,x^2*sqrt(1-x^2)/(-2+2*x^2)]`

On tape :
`ibpu([x^2*asin(x)/2,x^2*sqrt(1-x^2)/(-2+2*x^2)],0)`
On obtient :
`-asin(x)/4+x*sqrt(1-x^2)/4+x^2*asin(x)/2`

2. $I = \int \text{atan}(x) dx$
On tape :
`int(atan(x))`
On obtient :
`-ln(1+x^2)/2+x*atan(x)`
Ou on fait une intégration par parties et on tape :
`ibpu(atan(x),atan(x))`
On obtient :
`[x*atan(x),-x/(1+x^2)]`
On tape :
`ibpu([x*atan(x),-x/(1+x^2)],0)`
On obtient :
`-ln(1+x^2)/2+x*atan(x)`

3. $I = \int x \text{ atan}(x) dx$
On tape :
`int(x*atan(x))`
On obtient :
`atan(x)/2+x^2*atan(x)/2-x/2`
Ou on fait une intégration par parties et on tape :
`ibpu(x*atan(x),atan(x))`
On obtient :
`[x^2*atan(x)/2,-x^2/(2+2*x^2)]`
On tape :
`ibpu([x^2*atan(x)/2,-x^2/(2+2*x^2)],0)`
On obtient :
`atan(x)/2+x^2*atan(x)/2-x/2`

4. $I = \int x^2 \text{ atan}(x) dx$
On tape :
`int(x^2*atan(x))`
On obtient :
`-x^2/6+ln(1+x^2)/6+x^3*atan(x)/3`
Ou on fait une intégration par parties et on tape :
`ibpu(x^2*atan(x),atan(x))`
On obtient :
`[x^3*atan(x)/3,-x^3/(3+3*x^2)]`
On tape :
`ibpu([x^3*atan(x)/3,-x^3/(3+3*x^2)],0)`
On obtient :
`-x^2/6+ln(1+x^2)/6+x^3*atan(x)/3`

5. $I = \int x \text{ atan}(x)^2 dx$

On tape :
`int(x*atan(x)^2)`
On obtient :
`-ln(-(i+x)/(-i+x))^2/8+ln(1+x^2)/2+(-i)*x*ln(-(i+x)/(-i+x))/2+x^`
Ou on fait une intégration par parties et on tape :
`ibpu(x*atan(x)^2,atan(x)^2)`
On obtient :
`[x^2*atan(x)^2/2,-x^2*atan(x)/(1+x^2)]`
On tape :
`int([x^2*atan(x)^2/2,-x^2*atan(x)/(1+x^2)],atan(x))`
On obtient :
`[x^2*atan(x)^2/2+atan(x)*(atan(x)-x),(-atan(x)+x)/(1+x^2)]`
On tape :
`int(-atan(x)/(1+x^2)+x/(1+x^2))`
On obtient :
`-atan(x)^2/2+ln(1+x^2)/2`
Donc :
`int(x*atan(x)^2)` vaut :
`x^2*atan(x)^2/2+atan(x)*(atan(x)-x)-atan(x)^2/2+ln(1+x^2)/2`
On a `atrig2(ln(-atan(x)^2/2))` renvoie `ln(-(i+x)/(-i+x))^/8`

6. $I = \int \frac{1}{\cos(x)} dx$
On tape :
`int(1/cos(x))`
On obtient après `simplify(lnexpand(simplify(int(1/cos(x)))))`
`ln((1+sin(x))/(1-sin(x)))/2`
Ou bien on fait un changement de variable, on tape :
`subst('integration(1/cos(x),x)',x=atan(t)/2)`
On obtient :
`integration(1/cos(atan(t)*2)*1/(1+t^2)*2,t)`
On calcule $\cos($ atan $(t) * 2)$, on tape :
`simplify(trigexpand(cos(atan(t)*2)))`
et on obtient :
`(1-t^2)/(1+t^2)`
On tape :
`integration((1+t^2)/(1-t^2)*1/(1+t^2)*2,t)`
On obtient :
`2*(ln(abs(1+t))/2-ln(abs(-1+t))/2)`
On réunit les log :
`lncollect(simplify(2*(ln(abs(1+t))/2-ln(abs(-1+t))/2)))`
On obtient :
`ln(abs(1+t)/abs(-1+t))`
On revient à la variable x, on tape :
`subst(ln(abs(1+t))/abs(-1+t),t=tan(x/2))`
On obtient :
`ln(abs(tan(x/2)+1))/abs(tan(x/2)-1)`
On retrouve le résultat précédent car :
`halftan((1+sin(x))/(1-sin(x)))` renvoie :

`(1+tan(x/2))^2/(-1+tan(x/2))^2`
Ou bien on fait le changement de variable $x = \pi/2 - u$ pour se ramener à $\int 1/\sin(x)dx$ qui est le calcul de la primitive suivante.
On tape :
`subst('integration(1/cos(x),x)',x=pi/2-u)`
On obtient :
`integration(-1/sin(u),u)`
et après simplification :
`-ln(abs(tan(u/2)))`
On revient avec la variable x , on tape :
`subst(-ln(abs(tan(u/2))),u=pi/2-x)`
On obtient :
`-ln(abs(tan((pi/2-x)/2)))`

7. $I = \int \frac{1}{\sin(x)} dx$
On tape :
`int(1/sin(x))`
On obtient :
`ln(abs(tan(x/2)))`
Ou bien on fait un changement de variable, on tape :
`subst('integration(1/sin(x),x)',x=atan(t)*2)`
On obtient :
`integration(1/sin(atan(t)*2)*1/(1+t^2)*2,t)`
On calcule $\sin($ atan $(t) * 2$, on tape :
`normal(trigexpand(sin(atan(t)*2)))`
et on obtient :
`2t/(t^2+1)`
On tape :
`integration((t^2+1)/(2t)*1/(1+t^2)*2,t)`
On obtient :
`ln(abs(t))`
On revient à la variable x, on tape :
`subst(ln(abs(t)),t=tan(x/2))`
On obtient :
`ln(abs(tan(x/2)))`

8. $I = \int \frac{1}{1+\cos(x)} dx$
On tape :
`int(1/(1+cos(x))`
On obtient :
`tan(x/2)`
Ou bien on fait un changement de variable, on tape :
`subst('integration(1/(1+cos(x)),x)',x=atan(t)*2)`
On obtient :
`integration(1/(1+cos(atan(t)*2))*1/(1+t^2)*2,t)`
On calcule $\cos($ atan $(t) * 2$, on tape :
`simplify(trigexpand(1/(1+cos(atan(t)*2))))`
et on obtient :

`(1+t^2)/2`
On tape :
`integration((1+t^2)/2*1/(1+t^2)*2,t)`
On obtient :
`t`
On revient avec la variable x , on tape :
`subst(t,tan(x/2))`
On obtient :
`tan(x)/2)`

9. $I = \displaystyle\int \frac{1}{1+\sin(x)}dx$
   On tape :
   `int(1/(1+sin(x)))`
   On obtient :
   `-2/(tan(x/2)+1))`
   On peut ici aussi se ramener à l'intégrale précédente par un changement de variable, on tape :
   `subst('integrate(1/(1+sin(x)),x)',x=pi/2-t)`
   On obtient :
   `integration(-1/(1+cos(t)),t)` et après simplification :
   `-tan(t/2)`
   On revient avec la variable x , on tape :
   `subst(-tan(t/2),t=pi/2-x)`
   On obtient :
   `-tan((pi/2-x)/2)`
10. $I = \displaystyle\int \frac{x}{\cos(x)^2}dx$
   On tape :
   `int(x/cos(x)^2)`
   On obtient après un `lnexpand` :
   `(ln(4)-ln(1+tan(x)^2)+2*x*tan(x))/2`
   Ou on fait une intégration par parties et on tape :
   `ibpu(x/cos(x)^2,x)`
   On obtient :
   `[x*tan(x),-tan(x)]`
   On tape :
   `ibpu([x*tan(x),-tan(x)],0)`
   On obtient :
   `ln(abs(cos(x)))+x*tan(x)`
   Les 2 réponses diffèrent de la constante $\ln(2)$
11. $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sin(x)^2}dx$
   On tape :
   `int(x/sin(x)^2)`
   On obtient après un `lnexpand` :
   `((ln(4)+2*ln(tan(x))-ln(1+tan(x)^2))*tan(x)-2*x)*1/2/tan(x)`
12. $I = \displaystyle\int \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}dx$

On tape :
`int(sin(x)^2/cos(x))`
On obtient :
`-ln(-sin(x)+1)/2+ln(sin(x)+1)/2-sin(x)`
Ou bien on se raméne au calcul vu précédement de $int(\frac{1}{\cos(x)})$ en écrivant
t $\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)} - \cos(x)$.

13. $I = \displaystyle\int \frac{\sin(3x)}{\cos(x)^2} dx$
On tape :
`int(sin(3x)/cos(x)^2)`
On obtient :
`(-1-5*cos(x)-4*cos(x)^2)/cos(x)` Ou bien on transforme $\sin(3x)$, on tape :
`trigexpand(sin(3*x)/cos(x)^2)` et on obtient :
`4*sin(x)-sin(x)/cos(x)^2`
Il faut donc intégrer $4\sin(x) - \sin(x)/\cos(x)^2$ ce qui donne :
`-4*cos(x)-1/cos(x)` Les 2 résultats diffèrent de la constante 5

14. $I = \displaystyle\int \frac{\sin(3x)^2}{\cos(x)^2} dx$
On tape :
`int(sin(3x)^2/cos(x)^2)`
On obtient :
`2*(tan(x)/2+(3*tan(x)^3+tan(x))/(1+tan(x)^2)^2-3*x/2)`
Ou bien on transforme $\sin(3x)$, on tape :
`trigexpand(sin(3*x)^2/cos(x)^2)` et on obtient :
`(-sin(x))^2/cos(x)^2-8*sin(x)^2+16*cos(x)^2*sin(x)^2`
On tape :
`normal(int(trigexpand(sin(3x)^2/cos(x)^2)))`
On obtient :
`tan(x)-1/2*sin(4*x)+2*sin(2*x)-3*x`
À la main il faut donc intégrer :
$\tan(x)^2 + 4(\cos(2x) - 1) + 4\sin(2x)^2 = \tan(x)^2 + 4(\cos(2x) - 1) + 2(1-\cos(4x))$ ce qui donne : $-3+(1+\tan(x)^2)+4\cos(2x)-2\cos(4x)$
Une primitive est donc :
`-3x+tan(x)+2*sin(2x)-sin(4x)/2`

15. $I = \displaystyle\int \frac{\cos(x)}{2-\cos(x)^2} dx$
On tape :
`int(cos(x)/(2-cos(x)^2))`
On obtient :
`atan(sin(x))`
On peut ici aussi faire un changement de variable, on tape :
`subst('integrate(cos(x)/(2-cos(x)^2),x)',x=asin(t))`
On obtient :
`integration((sqrt(1-t^2))/(sqrt(1-t^2)*(2-1+t^2)),t)`
et après simplification :
`atan(t)`
On revient avec la variable x , on tape :

`subst(atan(t),t=sin(x))`
On obtient :
`atan(sin(x))`

16. $I = \int \frac{x}{\tan(x)^2} dx$
On tape :
`int(x/tan(x)^2)`
On obtient :
`(-x^2*tan(x)+ln(4*tan(x)^2/(1+tan(x)^2))*tan(x)-2*x)/(2*tan(x))`
et après simplification :
`-x^2/2+(ln(4)+2*ln(sin(x)))/2-x/tan(x)`
Ou bien on écrit $\frac{x}{\tan(x)^2}$ en fonction du sinus, on tape :
`expand(trigsin(x/tan(x)^2))`
On obtient :
`x/sin(x)^2-x`
On fait une intégration par partie pour intégrer $x/\sin(x)^2$, on tape :
`ibpu(x/sin(x)^2,x)`
On obtient :
`[-2*x/(2*tan(x)),1/tan(x)]`
Il reste à intégrer :
$\frac{1}{\tan(x)} - x = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - x$, d'où le résultat :
`-x/tan(x)+ln(abs(sin(x)))-x^2/2`
On peut taper directement :
`ibpu(ibpu(x/sin(x)^2,x),0)-int(x)`
Mais **Attention** il ne faut pas taper :
`ibpu(x/sin(x)^2,x)-int(x)` qui renvoie les coefficients d'un polynôme.
Les 2 résultats obtenus diffèrent de $\ln(2)$.

17. $I = \int \frac{x^4 \text{ atan}(x)}{x^2+1)} dx$
On tape :
`int(x^4*atan(x))/(x^2+1))`
On obtient :
`(-ln(1+x^2)/10-(-10*x^2+5*x^4)/100+x^5*atan(x)/5)/(1+x^2)`

18. $I = \int \cos(\ln(x)) dx$
On tape :
`int(cos(ln(x)))`
On obtient :
`x*cos(ln(x))/2+x*sin(ln(x))/2`
Ou bien on fait une intégration par partie, on tape :
`ibpu(cos(ln(x)),cos(ln(x)))`
On obtient :
`[x*cos(ln(x)),sin(ln(x))]`
On tape :
`ibpu([x*cos(ln(x)),sin(ln(x))],sin(ln(x)))`

On obtient :
`[x*cos(ln(x))+x*sin(ln(x)),-cos(ln(x))]`
On a donc :
$2\int \cos(\ln(x)) = x * \cos(\ln(x)) + x * \sin(\ln(x))$
On obtient bien :
`x*cos(ln(x))/2+x*sin(ln(x))/2`

19. $I = \displaystyle\int \frac{3}{x^3 - 1} dx$
On tape :
`int(3/(x^3-1))`
On obtient :
`3*(ln(abs(-1+x))/3-ln(1+x+x^2)/6-`
`atan(sqrt(3)*(1+2*x)/3)/(sqrt(3)))`
Ou bien on décompose la fraction rationnelle $\frac{3}{x^3-1}$, on tape :
`partfrac(1/(x^3-1))`
On obtient :
`1/((-1+x)*3)+(-2-x)/((1+x+x^2)*3)`
Pour intégrer, on transforme $(-2-x)/((1+x+x^2)*3)$ en (-2=-1/2-3/2) :
$(-1/2 - x)/((1 + x + x^2) * 3) + -1/2/(1 + x + x^2)$.
On écrit $1 + x + x^2$ sous la forme canonique, on tape :
`canonical_form(1+x+x^2)`
On obtient :
`(x+1/2)^2+3/4`
On sait maintenant intégrer tous les termes de :
$1/((-1+x)*3)+(-1/2-x)/((1+x+x^2)*3)-1/2/((x+1/2)^2+3/4)$
On obtient (la primitive de $1/(u^2 + a^2)$ est $1/a *$ atan (u/a)) :
$\ln(abs(-1+x))/3-\ln(abs(1+x+x^2))/6-1/\sqrt{3}*$ atan $((x+1/2)*2/\sqrt{3})$

20. $I = \displaystyle\int \frac{(1 + x^3)^{\frac{1}{4}}}{x} dx$
Cette fonction est définie pour $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
On tape :
`int((1+x^3)^(1/4)/x)`
On obtient :
`4*((1+x^3)^(1/4)+ln(abs(-1+(1+x^3)^(1/4)))/4`
`-ln(1+(1+x^3)^(1/4))/4-atan((1+x^3)^(1/4))/2)/3` À la main, on fait le changement de variable : $u = (1 + x^3)^{\frac{1}{4}}$ donc $u \geq 0$ et $x = (u^4 - 1)^{\frac{1}{3}}$.
On tape :
`subst('int((1+x^3)^(1/4)/x,x)',`
`x=(u^4-1)^(1/3))`
On obtient :
`integration(4*u^3*abs(u)/(-3+3*u^4),u)`
Pour intégrer on peut supposer $u >= 0$ et supprimer facteur $abs(u)$:
On tape :
`assume(u>=0)`
`integration(4*u^3*abs(u)/(-3+3*u^4),u)`
On simplifie la partie à intégrer, on obtient :
`integration(4*u^3*abs(u)/(-3+3*u^4),u)`

`4*(ln(abs(-1+u))/12-ln(1+u)/12-atan(u)/6+u/3)`

On revient à la variable x, on tape :

On tape :

```
subst(4*(ln(abs(-1+u))/12-ln(1+u)/12-atan(u)/6+u/3),
u=(1+x^3)^(1/4))
```

On obtient :

```
4*((1+x^3)^(1/4)/3-ln(1+(1+x^3)^(1/4))/12+
ln(abs(1-(1+x^3)^(1/4)))/12-atan((1+x^3)^(1/4))/6)
```

Donc :

$$\int \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{4}}}{x}dx =$$

$$\frac{4(1+x^3)^{\frac{1}{4}}}{3} + \frac{1}{3}\ln(|\frac{(1+x^3)^{\frac{1}{4}}-1}{(1+x^3)^{\frac{1}{4}}+1}|) - \frac{2}{3}\text{ atan}((1+x^3)^{\frac{1}{4}}) + cste$$

21. Calculer $I = \displaystyle\int \frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}dx$

On tape :

`int((1+x^4)^(1/4)/x)`

On obtient :

```
(1+x^4)^(1/4)+ln(abs(-1+(1+x^4)^(1/4)))/4-
ln(1+(1+x^4)^(1/4))/4-atan((1+x^4)^(1/4))/2
```

On fait le changement de variable : $u = (1+x^4)^{\frac{1}{4}}$.

On a $u^4 = 1 + x^4$ donc :

$4u^3du = 4x^3dx$, $x^4 = u^4 - 1$ et $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^3dx}{x^4} = \dfrac{u^3du}{u^4-1}$

$I = \displaystyle\int \frac{u^4du}{u^4-1} = \int du + \int \frac{du}{u^4-1}du.$

On décompose $\dfrac{1}{u^4-1}$:

$\dfrac{1}{u^4-1} = \dfrac{1}{4(u-1)} - \dfrac{1}{4(u+1)} - \dfrac{1}{2(u^2+1)}.$

Donc :

$I = u + \dfrac{1}{4}\ln(|\dfrac{u-1}{u+1}|) - \dfrac{1}{2}\text{ atan}(u) + cste$ avec $u = (1+x^4)^{\frac{1}{4}}$

Prolongement

Calculer :

$I_1 = \displaystyle\int \frac{(1+x^5)^{\frac{1}{4}}}{x}dx$

$I_2 = \displaystyle\int \frac{(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}}{x}dx$

$I_3 = \displaystyle\int \frac{(1+\exp(\sqrt{2}*\ln(x)))^{\frac{1}{4}}}{x}dx$

Puis calculer pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$I = \displaystyle\int \frac{(1+x^{\alpha})^{\frac{1}{4}}}{x}dx$

On tape :

`int((1+x^5)^(1/4)/x)`

On obtient I_1 :

```
4*((1+x^5)^(1/4)+ln(abs(-1+(1+x^5)^(1/4)))/4-
ln(1+(1+x^5)^(1/4))/4-atan((1+x^5)^(1/4))/2)/3
```

On tape :
```
int((1+x^(2/3))^(1/4)/x)
```
On obtient I_2 :
```
4*((1+x^(2/3))^(1/4)+ln(abs(-1+(1+x^(2/3))^(1/4)))/4-
ln(1+(1+x^(2/3))^(1/4))/4-atan((1+x^(2/3))^(1/4))/2)/3
```
On tape :
```
int((1+exp(sqrt(2)*ln(x)))^(1/4)/x)
```
On obtient I_3 :
```
1/(sqrt(2))*4*((1+exp(sqrt(2)*ln(x)))^(1/4)+
ln(abs(-1+(1+exp(sqrt(2)*ln(x)))^(1/4)))/4-
ln(1+(1+exp(sqrt(2)*ln(x)))^(1/4))/4-
atan((1+exp(sqrt(2)*ln(x)))^(1/4))/2)
```
Ces intégrales se calculent en posant $u = (1 + x^\alpha)^{\frac{1}{4}}$.
et on obtient :
$x^\alpha = u^4 - 1$ et $4u^3du = \alpha x^\alpha dx/x = \alpha(u^4 - 1)dx/x$ donc :
$dx/x = \frac{4u^3du}{\alpha(u^4-1}$

$$I = \int \frac{(1 + x^\alpha)^{\frac{1}{4}}}{x} dx = \int \frac{4u * u^3du}{\alpha(u^4 - 1)}$$

Donc on obtient : $I = \int \frac{4u^4}{\alpha(u^4 - 1)} du = \frac{4}{\alpha}(\int du + \int \frac{du}{(u^4 - 1)} du)$.

$$I = \frac{4u}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\ln(|\frac{u-1}{u+1}|) - \frac{2}{\alpha} \text{ atan}(u) + cste \text{ avec } u = (1 + x^\alpha)^{\frac{1}{4}}$$

22. Calculer pour $x > 0$, $I = \int \frac{(1 + x^4)^{\frac{1}{4}}}{x^2} dx$

On tape :
```
int((1+x^4)^(1/4)/x^2)
```
On obtient :
```
ln((1+x^4)^(1/4)/x+1)/4-ln((1+x^4)^(1/4)/x-1)/4+
atan((1+x^4)^(1/4)/x)/2-(1+x^4)^(1/4)/x
```
On fait un changement de variable, on pose :
$x = 1/t$ donc $dt = -dx/x^2$.

$$I = -\int \frac{(1 + \frac{1}{t^4})^{\frac{1}{4}}}{d} t = -\int \frac{t^4 + 1}{t^4})^{\frac{1}{4}} dt = -\int \frac{(t^4 + 1)^{\frac{1}{4}}}{t} dt.$$

On retrouve l'intégrale précédente on pose $u = (1 + t^4)^{\frac{1}{4}}$ et on obtient :

$$I = -u + \frac{1}{4}\ln(|\frac{u-1}{u+1}|) - \frac{1}{2} \text{ atan}(u) + cste \text{ avec } u = \frac{(1 + x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}$$

On vérifie, on tape :
```
u(x):=(1+x^4)^(1/4)/x
simplify(-diff(u(x)+ln(abs((u(x)-1)/(u(x)+1)))/4-atan(u(x))/2))
```
On obtient :
```
(1+x^4)^(1/4)/x^2
```

23. Calculer pour k entier :

$$I = \int (4 * x^k + 3)^(1/k) * x^(k - 1)dx$$

On tape :
```
assume(k,integer);additionally(k>0)
simplify(integration((4*x^k+3)^(1/k)*x^(k-1),x))
```

On obtient :
`(3+4*x^k)^((1+k)/k)/(4+4*k)`
À la main on pose $u = x^k$ donc $du = kx^(k-1)dx$ et on a :
$I = \int -(4u+3)^(1/k)/kdu$
$I = \frac{(3+4u)^(\frac{1}{k}+1)}{4(k+1)} = \frac{(3+4x^k)^{\frac{1+k}{k}}}{4+4k}$

24. Calculer pour k entier :
$I = \int (4*x^k+3)^(1/k)/x^(k+2)dx$
On tape :
`assume(k,integer);additionally(k>0)`
`subst('integration((4*x^k+3)^(1/k)/x^(k+2),x)',x=1/t)`
On obtient :
`-(4+3*t^k)^(1/k)/t^(1-k),t)`
On tape :
`simplify(integration(-(4+3*t^k)^(1/k)*t^(k-1),t)`
On obtient :
`-(4+3*t^k)^((1+k)/k)/(3+3*k)`
Donc $I = -(4+3/x^k)^((1+k)/k)/(3+3k)$

Calculer les intégrales définies :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\ln(\cos(x))dx$
On tape :
`int(cos(x)*ln(cos(x)),x,0,pi/4)`
On obtient après simplification :
`(2*ln(2+sqrt(2))-2*ln(-(-2+sqrt(2)))-2*sqrt(2)-sqrt(2)*ln(2))/4`
Ou bien on fait une intégration par partie, on tape :
`ibpu(cos(x)*ln(cos(x)),ln(cos(x)),x,0,pi/4)`
On obtient :
`[-ln(2)/(2*sqrt(2)),sin(x)^2/cos(x)]`
Pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)^2/\cos(x)dx$, on fait le changement de variable $u = sin(x)$ soit $x = \operatorname{asin}(u)$, on tape :
`subs('int(sin(x)^2/cos(x),x)',x,asin(u))`
On obtient après simplification :
`integration(-u^2/(-1+u^2),u,0,1/sqrt(2)))`
Ce qui donne :
`(ln(2+sqrt(2))-ln(-(-2+sqrt(2)))-(sqrt(2)))/2`
Donc en tout cela fait :
`-ln(2)/(2*sqrt(2))+`
`(ln(2+sqrt(2))-ln(-(-2+sqrt(2)))-(sqrt(2)))/2`
On obtient après simplification :
`(2*ln(2+sqrt(2))-2*ln(2-sqrt(2))-2*sqrt(2)-sqrt(2)*ln(2))/4`

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2-5\sin(x)+6}dx$
On tape :
`int(cos(x)/(sin(x)^2-5*sin(x)+6),x,0,pi/2)`
On obtient :

`2*ln(2)-ln(3)` ou bien on fait un changement de variable en posant $u = \sin(x)$ i.e. $x = \operatorname{asin}(u)$, on tape :
`subst('int(cos(x)/(sin(x)^2-5*sin(x)+6),x,0,pi/2)',x=asin(u))`
On obtient :
`integration(1/(6-5*u+u^2),u,0,1)`
On décompose la fraction rationnelle, on tape :
`partfrac(1/(6-5*u+u^2))`
On obtient :
`1/(-3+u)-1/(-2+u)`
On intègre et on trouve évalue la primitive entre 0 et 1, on tape :
`preval(ln(abs(-3+u))-ln(abs(-2+u)),0,1,u)`
On obtient :
`2*ln(2)-ln(3)`

3. $\int_0^1 x \operatorname{atan}(x)^2 dx$
On tape :
`int(x*atan(x)^2,x,0,1)`
On obtient :
`-pi/4+pi^2/16+ln(2)/2`
Ou bien on intègre par partie, on tape :
On tape :
`ibpu(x*atan(x)^2,atan(x)^2,x,0,1)`
On obtient :
`[pi^2/32,-x^2*atan(x)/(1+x^2)]`
On tape :
`ibpu([pi^2/32,-x^2*atan(x)/(1+x^2)],atan(x),x,0,1)`
On obtient :
`[pi^2/32+(-4*pi+pi^2)/16,(-atan(x)+x)/(1+x^2)]`
Le dernier morceau $-\operatorname{atan}(x)^2/2 + \ln(1+x^2)/2)$ s'intègre facilement.
On tape :
`ibpu([pi^2/32+(-4*pi+pi^2)/16,(-atan(x)+x)/(1+x^2)],0,x,0,1)`
On obtient :
`ln(2)/2+(-4*pi+pi^2)/16`

4. $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)^{2n} dx$
La suite I_n est-elle convergente ?
On calcule les valeurs de I_0 et I_1 :
$I_0 = \int_0^\pi dx = \pi$ et
$I_1 = \int_0^\pi \sin(x)^2 dx = \int_0^\pi (1-\cos(2x))/2dx = \pi/2 = I_0/2$
On cherche une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, on a :
$I_{n+1} = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)^{2n-1} \sin(x) dx$
On fait une intégration par partie pour $n > 0$, on tape :
`ibpu(sin(x)^(2*n-1)*sin(x),sin(x)^(2*n-1))`
On obtient :
`[-cos(x)*sin(x)^(-1+2*n),`
`-cos(x)^2*sin(x)^(-2+2*n)+2*n*cos(x)^2*sin(x)^(-2+2*n)]`
On a $-\cos(\pi)*\sin(\pi)^(-1+2*n) = 0 = -\cos(0)*\sin(0)^(-1+2*n)$
On a donc pour $n > 0$: $I_{n+1} = (2(n+1)-1)*I_n/(2+2n)$

et pour $n = 0$, on a $I_1 = I_0/2 =$ donc la relation est valable pour $n \geq 0$.
On a :
$I_n = 2n * (2n-1)/(4n^2) * I_{n-1}$
$I_{n-1} = (2n-2) * (2n-3)/(4(n-1)^2) * I_{n-1}$
...
$I_2 = 4 * 3/4 * 1^2 * I_1$
$I_1 = I_0/2$ $I_0 = \pi$
Donc :
$I_n = (2n)!/2/(4^{n-1} * (n!)^2)I_0/2 = (2n)!\pi/(4^n * (n!)^2)$
Donc :

$$I_n = \frac{(2n)!\pi}{4^n * (n!)^2}$$

On vérifie, on tape :
`int(sin(x)^(2k),x,0,pi)$(k=0..6)`
On obtient :
`pi,pi/2,3*pi/8,5*pi/16,35*pi/128,63*pi/256,231*pi/1024`
On tape :
`((2n)!*pi/(4^n*(n!)^2))$(n=0..6)`
On obtient bien :
`pi,pi/2,3*pi/8,5*pi/16,35*pi/128,63*pi/256,231*pi/1024`
On tape :
`limit((2n)!*pi/4^n/(n!)^2,n,inf)`
On obtient :
`0`
On tape en multipliant par $\sqrt{n}$:
`limit(sqrt(n)*(2n)!*pi/4^n/(n!)^2,n,inf)`
On obtient :
`sqrt(pi)`
Ou on utilise la formule de Stirling :
$n!/(\sqrt{2 * pi * n} * (n/e)^n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$
`limit(sqrt(2*pi*n)*(n/e)^n/n!,n,inf)` renvoie `1`
Donc I_n est équivalent à :
$\sqrt{4 * \pi * n} * (2n/e)^{2n} * \pi/4^n/(2 * \pi * n * (n/e)^{2n}$ On tape :
`simplify(sqrt(4*pi*n)*(2n/e)^(2n)*pi/4^n/(2*pi*n*(n/e)^(2n)))`
On obtient :
`sqrt(pi)/sqrt(n)`
La suite I_n converge vers 0 et on a I_n est équivalent à :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

5. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{sin(x)} dx$
La suite I_n est-elle convergente ?
On calcule les valeurs de I_0 et I_1 :
$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx = 0$ et
$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi/2$
On cherche une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, on a :

On tape :
`sin((n+1)*x)/sin(x)-sin((n-1)*x)/sin(x)`
On tape :
`trigexpand(sin((n+1)*x)/sin(x))`
On obtient :
`cos(n*x)+cos(x)*sin(n*x)/sin(x)`
On obtient :
`cos(n*x)+cos(x)*sin(n*x)/sin(x)`
On continue en développant $\sin(nx)$, on a :
$\cos(nx)+\cos(x)\sin(nx)/\sin(x) = \cos(nx)+\sin((n-1)x)\cos(x)^2/\sin(x)+\cos((n-1)x)\cos(x)$
On obtient :
$\cos(nx)+\sin((n-1)x)/\sin(x)-\sin((n-1)x)\sin(x)+\cos((n-1)x)\cos(x)$
On peut aussi taper directement :
`trigexpand((sin(x*(1+n))-sin(x*(-1+n)))/sin(x))`
On obtient :
`2*cos(n*x)`
c'est à dire :
$I_{n+1} = I_{n-1} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)dx$
Ou encore :
$I_n = I_{n-2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n-1)x)dx$
Si $n = 2p$ avec $p > 0$ on a :
$I_{2p} = I_{2(p-1)}+2\sin((2p-1)\pi/2)/(2p-1) = I_{2(p-1)}+2(-1)^{p-1}/(2p-1)$
Si $n = 2p+1$ avec $p > 0$ on a :
$I_{2p+1} = I_{2p-1} + \sin(p\pi)/p = I_{2p-1}$
Donc :
Si $n = 2p$ on a :
$I_{2p} = 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}/(2k-1)$
Si $n = 2p+1$ on a :
$I_{2p+1} = I_1 = \pi/2$
On vérifie, on tape :
`int(sin(n*x)/sin(x),x,0,pi/2)$(n=0..12)`
On obtient :
`0,pi/2,2,pi/2,4/3,pi/2,26/15,pi/2,152/105,pi/2,`
`526/315,pi/2,5156/3465`
On tape :
`sum(2*(-1)^(k-1)/(2k-1),k,1,p)$(p=1..6)`
On obtient bien :
`2,4/3,26/15,152/105,526/315,5156/3465`
Cherchons la limite de :
$2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}/(2k-1)$ quand p tend vers $+\infty$
On tape :
`2*sum((-1)^(k-1)/(2k-1),k,1,inf)`
On obtient :
`pi/2`
Donc I_{2p} et I_{2p-1} converge vers $\pi/2$, donc la suite I_n converge vers $\pi/2$.

6. Calculer $\displaystyle\lim_{t->0}\int_{x=t}^{3t}\frac{xdx}{\tan(x)^2}$

On tape :
`limit(int(x/tan(x)^2,x,t,3t),t,0)`
On obtient :
`ln(9)/2`
L'intégrale est définie pour $0 < |x| < \pi/6$.
On a :
$\dfrac{x}{\tan(x)^2} = \dfrac{x\cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \dfrac{x}{\sin(x)^2} - x.$
Cherchons une primitive de $\dfrac{x}{\sin(x)^2}$ en faisant une intégration par parties.
On pose :
$u = x\ dv = \dfrac{dx}{\sin(x)^2}$ donc $du = dx$ et $v = -1/\tan(x)$
$\int udv = -\dfrac{x}{\tan(x)} + \dfrac{1}{tan(x)}dx$
Donc une primitive de $\dfrac{x}{\sin(x)^2}$ est $-\dfrac{x}{\tan(x)} + \ln(|\sin(x)|$
On a donc :
$\displaystyle\int_t^{3t} \frac{xdx}{\tan(x)^2} = -\frac{3t}{\tan(3t)} + \ln(|\sin(3t)|) + \frac{t}{\tan(t)} - \ln(|\sin(t)|)$
$\displaystyle\int_t^{3t} \frac{xdx}{\tan(x)^2} = \frac{t}{\tan(t)} - \frac{3t}{\tan(3t)} + \ln(\frac{|\sin(3t)|}{|\sin(t)|})$
Quand $t- > 0$ on a $\dfrac{t}{\tan(t)} - > 1$, $\dfrac{3t}{\tan(3t)} - > 1$ et $\dfrac{|\sin(3t)|}{|\sin(t)|} - > 3$
donc
$\displaystyle\lim_{t->0} \int_{x=t}^{3t} \frac{xdx}{\tan(x)^2} = \ln(3)$

Chapitre 27

Des calculs de différentes sommes

27.1 La fonction `sum` de `Xcas`

Cette fonction permet de calculer :

— la somme d'une liste ou d'une séquence
`sum(n$(n=1..5))=sum(n$(n=5..1))=15`,

— une somme ayant une primitive discréte. Par exemple
`sum(n,n=1..5)=15` mais `sum(n,n=5..1)=-9=-sum(n,n=2..4)`
et
`sum(n,n)=(n^2-n)/2=F(n)` qui est la primitive discréte de `n` (`sum(n,n=1..5)=F(5+1)-F(1)`),

— d'autres sommes en particulier de sommes avec un pas (quand il y a un pas
le pas est le 5ième argument et il n'y a pas de différence entre `sum(xpr,n,a,b,2)=sum(xpr,n,b,a,`
Par exemple
`sum(n,n,1,5,2)=sum(n,n,5,1,2)=sum(n,n,1,5,-2)=sum(n,n,5,1,-2)=9`

Voici quelques exercices...

27.2 Calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $p = 1, 2, 3$

27.2.1 Calcul de $s_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k)$

On a :
$2 * s_1 = \sum_{k=1}^{n} k) + \sum_{k=1}^{n} n + 1 - k) = \sum_{k=1}^{n} n + 1) = n(n + 1)$
Donc :

$$s_0(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

On peut aussi remarquer que :
$p(p + 1)/2 - (p - 1)p/2 = p$
On dit que le polynôme $x(x - 1)/2$ est la primitive discrète du polynôme x On a donc :
$2s_1 = \sum_{p=1}^{n} 2p = \sum_{p=1}^{n}(p(p + 1) - (p - 1)p) = n(n + 1)$
Avec `Xcas`, on tape :
`sum(k,k=1..n)`
On obtient :
`(n*(n+1))/2` **Remarque**
On peut en déduire le calcul de $s = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1))$.
On a en effet :

$s = 2\sum_{k=1}^{n} k - n = n*(n+1) - n = n^2$
On aurait aussi pu remarquer que :
$2p - 1 = (p+1)(p-1) - p(p-2)$
Donc que la primitive discète du polynôme $2x - 1$ est le polynôme $x(x-2)$.
On a donc :
$s = \sum_{p=1}^{n} 2p - 1 = \sum_{p=1}^{n}(p^2 - (p-1)^2) = n^2$
Avec `Xcas`, on tape :
`normal(sum(2k-1,k=1..n))`
On obtient :
`n^2`

27.2.2 Calcul de $s_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

On a :
$1^3 = 1$
$2^3 = 1^3 + 3*1^2 + 3*1 + 1$
....
$k^3 = (k-1)^3 + 3*(k-1)^2 + 3*(k-1) + 1$
$(k+1)^2 = k^3 + 3*k^2 + 3*k + 1$
....
$n^3 = (n-1)^3 + 3*(n-1)^2 + 3*(n-1) + 1$
$(n+1)^3 = n^3 + 3*n^2 + 3*n + 1$
En sommant tous les termes :
$(n+1)^3 = 3*\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n = 3s_2 + 3n(n+1)/2 + n + 1$
Donc :
$3s_2(n) = (n+1)((n+1)^2 - 3n/2 - n - 1) = (n+1)(2n^2+n)/2$

$$s_2(n) = \frac{n(n+1)(2*n+1)}{6}$$

On peut aussi remarquer que :
$p(p+1)*(2p+1)/6 - (p-1)*p*(2p-1)/6 = p^2$
Donc que la primitive discète du polynôme x^2 est le polynôme $x(x-1)(2x-1)/6$.
On a donc :
$6s_2 = \sum_{p=1}^{n} 6p^2 = \sum_{p=1}^{n}(p(p+1)(2p+1) - (p-1)p(2p-1)) = n(n+1)(2*n+1)$
Avec `Xcas`, on tape :
`factor(sum(k^2,k=1..n))`
On obtient :
`n*(n+1)*(2*n+1)/6`

27.2.3 Calcul de $s_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$

On a :
$1^4 = 1$
$2^4 = 1^4 + 4*1^3 + 6*1^2 + 4 + 1$
....
$k^4 = (k-1)^4 + 4*(k-1)^3 + 6*(k-1)^2 + 4*(k-1) + 1$
$(k+1)^4 = k^4 + 4*k^3 + 6*k^2 + 4*k + 1$
....

$(n+1)^4 = n^4 + 4*n^3 + 6n^2 + 4*n + 1$
Donc :
$(n+1)^4 = n^4 + 4s_3(n) + 6s_2(n) + 4s_1(n) + n$ Donc : $4s_3(n) = (n+1)^4 - n*(n+1)*(2*n+1) - 2n(n+1) - n - 1 = (n+1)((n+1)^3 - n(2*n+1) - 2n - 1)$
$4s_3(n) = (n+1)^2((n+1)^2 - (2*n+1)) = (n+1)^2n^2$

$$s_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On peut aussi remarquer que :
$p^2*(p+1)^2/4 - (p-1)^2*p^2/4 = p^3$
Donc la primitive discète du polynôme x^3 est le polynôme $(x-1)^2x^2/4$.
On a donc :
$4s_3 = \sum_{p=1}^n 4p^3 = \sum_{p=1}^n (p^2(p+1)^2 - (p-1)^2p^2) = n^2(n+1)^2$
Avec `Xcas`, on tape :
`factor(sum(k^3,k=1..n))`
On obtient :
`(n^2*(n+1)^2)/4`

27.3 Primitive discrète d'un polynôme

27.3.1 Comment trouver la primitive discrète d'un polynôme

Soit P un polynôme de degré d.

On veut calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les sommes : $\sum_{k=0}^{n} P(k)$
On cherche donc une primitive discrète de P c'est à dire une fonction f telle qu'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x+1) - f(x) = P(x)$.
Cela entraine que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :
$f(n+1) - f(0) = \sum_{k=p}^{n} P(k)$.
Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on doit avoir $f(n+1) - f(n) = P(n)$ On cherche si P a comme primitive discrète un polynôme Q. Si c'est le cas le polynôme Q doit vérifier : $Q(x+1) - Q(x) = P(x)$ avec P un polynôme de degré d donc Q est défini à une constante près et est de degré $d+1$. Donc Q est entièrement défini par $d+2$ valeurs qui sont par exemple :
$Q(0) = 0 = q_0$ $Q(1) = P(0) = q_1$
$Q(2) = P(0) + P(1) = q_2$
$Q(3) = P(0) + P(1) + P(2) = q_3$
.....
$Q(d+1) = P(0) + P(1) + ... + P(d) = q_{d+1}$
On calcule $q_0, q_1..., q_{d+1}$ et on définit Q comme étant le polynôme d'interpolation de Lagrange des points (k, p_k) pour $k = 0..d+1$.
Soit R le polynôme définit par $R(x) = Q(x+1) - Q(x)$.
Puisque Q est de degré $d+1$, on en déduit que R est de degré d.
Comme $Q(k+1) - Q(k) = P(k)$ pour $k = 0..d$, on a :
$R(k) = P(k)$ pour $k = 0..d$.
R et P ont même degré d et ils sont égaux en $d+1$ valeurs donc :

pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) = R(x) = Q(x+1) - Q(x)$.
Donc Q est bien une primitive discrète de P.

27.3.2 Reprenons les exemples précédents

Cherchons la primitive discrète de $P(x) = x$
La primitive discrète de $P(x) = x$ est égale au polynôme de d'interpolation de Lagrange des points :
$(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$.
On tape :
`factor(lagrange([0,1,2],[0,0,1]))`
On obtient :
`(x*(x-1))/2x`
Cherchons la primitive discrète de $P(x) = 2*x-1$
La primitive discrète de $P(x) = x^2$ est égale au polynôme de d'interpolation de Lagrange des points :
$(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$.
On tape :
`factor(lagrange([0,1,2],[0,-1,0]))`
On obtient :
`x*(x-2)`
Cherchons la primitive discrète de $P(x) = x^2$.
La primitive discrète de $P(x) = x^2$ est égale au polynôme de d'interpolation de Lagrange des points :
$(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,5)$.
On tape :
`factor(lagrange([0,1,2,3],[0,0,1,5]))`
On obtient :
`(x*(x-1)*(2*x-1))/6`
Cherchons la primitive discrète de $P(x) = x^3$.
La primitive discrète de $P(x) = x^3$ est égale au polynôme de d'interpolation de Lagrange des points :
$(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,9)$, $(4,36)$.
On tape :
`factor(lagrange([0,1,2,3,4],[0,0,1,9,36]))`
On obtient :
`(x^2*(x-1)^2)/4` Cherchons la primitive discrète de $P(x) = x^4$.
La primitive discrète de $P(x) = x^4$ est égale au polynôme de d'interpolation de Lagrange des points :
$(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,17)$, $(4,98)$, $(5,354)$.
On tape :
`factor(lagrange([0,1,2,3,4,5],[0,0,1,17,98,354]))`
On obtient :
`(x*(x-1)*(2*x-1)*(3*x^2-3*x-1))/30`
On en déduit le calcul de $s_4(n) = \sum_{k=1}^{n} k^4$:
On tape :
`factor(subst((x*(x-1)*(2*x-1)*(3*x^2-3*x-1))/30,x=n+1))`
On obtient :

```
(n*(n+1)*(2*n+1)*(3*n^2+3*n-1))/30
```
$s_4(n) = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)*(3*n^2+3*n-1)}{30}$
Ou on tape :
```
factor(sum(k^4,k=1..n))
```
On obtient :
```
(n*(n+1)*(2*n+1)*(3*n^2+3*n-1))/30
```

27.3.3 Exercice

Calculer $\sum_{k=4}^{10} k^2 + 2*k - 1$ et $\sum_{k=4+\sqrt{2}}^{10+\sqrt{2}} k^2 + 2*k - 1$
Cherchons la primitive discrète de $P(x) = x^2 + 2x - 1$.
La primitive discrète de $P(x) = x^2 + 2x - 1$ est égale au polynôme de d'interpolation de Lagrange des points :
$(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(3, 8)$.
On tape :
```
factor(lagrange([0,1,2,3],[0,-1,1,8]))
```
On obtient :
```
(x*(2*x^2+3*x-11))/6
```
On tape :
```
f(x):=(x*(2*x^2+3*x-11))/6
```
Ou on tape directement pour définir `f` :
```
f:=unapply(factor(lagrange([0,1,2,3],[0,-1,1,8])),x)
```
On tape :
```
f(11)-f(4)
```
On obtient :
```
462
```
On vérifie :
On tape :
```
sum(k^2+2*k-1,k=4..10)
```
On obtient :
```
462
```
On tape :
```
normal(f(11+sqrt(2))-f(4+sqrt(2)))
```
On obtient :
```
112*sqrt(2)+476
```
On vérifie :
On tape :
```
normal(sum(k^2+2*k-1,k=4+sqrt(2)..10+sqrt(2)))
```
On obtient :
```
112*sqrt(2)+476
```

27.4 Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^p$comb(n,k) pour $p=0,1,2,3$

27.4.1 Calcul de $s_0(n)=\sum_{k=0}^{n}$ comb(n,k)

On sait que :
$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{comb}(n,k)a^kb^{n-k}$
donc
$s_0(n)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{comb}(n,k)=(1+1)^n=2^n$
Donc :

$$s_0(n)=2^n$$

Avec `Xcas`, on tape :
`sum(comb(n,k),k=0..n)`
On obtient :
`2^n`

27.4.2 Calcul de $s_1(n)=\sum_{k=0}^{n} k*$ comb(n,k)

On sait que :
$\mathrm{comb}(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Donc :
$k*\mathrm{comb}(n,k)=n*\mathrm{comb}(n-1,k-1)$
On a :
$s_1(n)=\sum_{k=0}^{n}k*\mathrm{comb}(n,k)=\sum_{k=1}^{n}k*\mathrm{comb}(n,k)=$
$n*\sum_{k=1}^{n}\mathrm{comb}(n-1,k-1)=n*\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{comb}(n-1,k)=n*2^{n-1}$
Donc :

$$s_1(n)=n*2^{n-1}$$

Avec `Xcas`, on tape :
`sum(k*comb(n,k),k=0..n)`
On obtient :
`n*2^(n-1)`

27.4.3 Calcul de $s_2(n)=\sum_{k=0}^{n} k^2*$ comb(n,k)

On sait que :
$\mathrm{comb}(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et
$\sum_{k=0}^{n}k*\mathrm{comb}(n,k)=n*2^{n-1}$
Donc :
$k^2*\mathrm{comb}(n,k)=n*k*\mathrm{comb}(n-1,k-1)$ On a :
$s_2(n)=\sum_{k=0}^{n}k^2*\mathrm{comb}(n,k)=\sum_{k=1}^{n}k^2*\mathrm{comb}(n,k)=$
$n*\sum_{k=1}^{n}k*\mathrm{comb}(n-1,k-1)=n*\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)*\mathrm{comb}(n-1,k)=$
$n*\sum_{k=0}^{n-1}k*\mathrm{comb}(n-1,k)+n*\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{comb}(n-1,k)=$
$n*(n-1)*2^{n-2}+n*2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}=n(s_(n-1)+s_0(n-1))$
Donc :

$$s_2(n)=n(n+1)2^{n-2}$$

Avec `Xcas`, on tape :
`s2:=sum(k^2*comb(n,k),k=0..n)`
`factor(subst(s2,2^(n-1),2*2^(n-2)))` On obtient :
`n*(n+1)*2^(n-2)`

27.4.4 Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^3 * \textbf{comb}(n,k)$

On sait que :
$\text{comb}(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et
$\sum_{k=0}^{n} k^2 * \text{comb}(n,k) = n(n+1)2^{n-2}$
Donc :
$s_3(n) = k^3 * \text{comb}(n,k) = n * k^2 * \text{comb}(n-1,k-1)$ On a :
$\sum_{k=0}^{n} k^3 * \text{comb}(n,k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 * \text{comb}(n,k) =$
$n * \sum_{k=1}^{n} k^2 * \text{comb}(n-1,k-1) = n * \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 * \text{comb}(n-1,k) =$
$n(s_2(n-1) + 2 * s_1(n-1) + s_0(n-1)) =$
$n(n(n-1) * 2^{n-3} + 2(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}) = n(n(n-1) + 4(n-1) + 4)2^{n-3} =$
$n^2(n+3)2^{n-3}$
Donc :

$$s_3(n) = n^2(n+3)2^{n-3}$$

Avec `Xcas`, on tape :

```
s3:=sum(k^3*comb(n,k),k=0..n)
factor(subst(subst(s3,2^(n-2),2^(n-3)*2),2^(n-1),2^(n-3)*4))
```

On obtient :

```
n^2*(n+3)*2^(n-3)
```

27.5 Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$

27.5.1 Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

On remarque que :
$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
Donc que :
$s = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$
Avec `Xcas`, on tape :

```
normal(sum(1/(k*(k+1)),k=1..n))
```

On obtient :

```
n/(n+1)
```

27.5.2 Calcul de $s = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

On remarque que :
$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$
Donc que :
$2s = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$
Donc :

$$s = \frac{n}{2n+1}$$

Avec `Xcas`, on tape :

```
normal(sum(1/((2k-1)*(2k+1)),k=1..n))
```

On obtient :

```
n/(2n+1)
```

27.5.3 Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$

On remarque que :
$\frac{2}{(k)(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$
Donc que :
$2s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{n+2} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3*n^2+5*n}{2*n^2+6*n+4}$
Donc :

$$s = \frac{3*n^2+5*n}{4*n^2+12*n+8}$$

Avec `Xcas`, on tape :
`normal(sum(1/(k*(k+2)),k=1..n))`
On obtient :
`(3*n^2+5*n)/(4*n^2+12*n+8)`

27.5.4 Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

On tape : `partfrac(1/(k*(k+1)*(k+2)),k)`
On obtient :
`1/(k*2)-1/(k+1)+1/((k+2)*2)`
Donc :
$2*s = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} - (\frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{(k+2)}) =$
$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)} =$
$2s = 1 - 1/2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)} = (n^2+3*n)/(2*n^2+6*n+4)$ Donc :

$$s = \frac{n^2+3*n}{4*n^2+12*n+8}$$

Avec `Xcas`, on tape :
`normal(sum(1/(k*(k+2)),k=1..n))`
On obtient :
`(n^2+3*n)/(4*n^2+12*n+8))`

27.6 Des calculs de sommes avec un programme

On veut savoir si la convergence d'une série est lente ou rapide, par exemple savoir combien il faut de termes pour que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 10$.
On peut taper :
`sum(1./n,n=1..20000)`
On obtient :
`0.10480728217229327572814 44e2`
ou faire un calcul exact plus long :
`s:=sum(1/n,n=1..20000)`
On obtient :
`Integer_too_large_for_display/Integer_too_large_for_display`
On tape alors :

`evalf(s)`
On obtient :
`0.104807282172293275728144e2` On veut voir l'incidence qu'il y a sur la précision et sur le temmps d'exécution selon que l'on commence à faire la somme par le plus petit indice ou par le plus grand indice ou faire la somme avec une procédure récursive.
On suppose $a \leq b$ sinon on échange a et b.

```
//som1 fait la somme de a jusque b
som1(u,a,b):={
local k,c,s;
si b<a alors c:=b;b:=a;a:=c;fsi;
s:=0;
pour k de a jusque b faire
s:=s+u(k);
fpour;
return s;
}
:;
//som2 fait la somme de b jusque a
som2(u,a,b):={
local k,c,s;
si b<a alors c:=b;b:=a;a:=c;fsi;
s:=0;
pour k de b jusque a pas -1 faire
s:=s+u(k);
fpour;
return s;
}
:;
//som3 fait la somme recusivement en partageant en 2
som3(u,a,b):={
local k,c,s;
si a>b alors return som3(u,b,a); fsi;
si a==b alors return u(a); fsi;
si b==a+1 alors return u(a)+u(b); fsi;
c:=floor((a+b)/2);
return som3(u,a,c)+som3(u,c+1,b);
}:;
```

On pose :
`u(n):=1/n`
et
`v(n):=1./n`

Pour faire des calculs exacts, on tape :
`evalf(som1(u,1,100000))` (Evaluation time : 22.6)
`evalf(som2(u,1,100000))` (Evaluation time : 33.24)
`evalf(som3(u,1,100000))` (Evaluation time : 29.92)
On obtient avec 24 digits :

`0.1209014612986342794736320e2`

Le résultat est bien sûr le même car les calculs sont faits de façon exacte et seule la réponse est donnée de façon approchée. `som1` est plus rapide car on ajoute au début des fractions qui ont un petit dénominateur, `som2` est plus lente car on ajoute au toujours des fractions qui ont un grand dénominateur et `som3` est intermédiaire mais plutot plus lente car on fait appel à `som3(u,c+1,b)` où on ajoute des fractions qui ont un grand dénominateur à `som3(u,a,c)` qui elle aussi comporte des termes ayant un grand dénominateur.

Pour faire des calculs approchés, on tape :
`som1(v,1,100000)`
On obtient avec 24 digits (Evaluation time : 7.14) :
`0.1209014612986342794736311e2`
`som2(v,1,100000)`
On obtient avec 24 digits (Evaluation time : 7.16) :
`0.1209014612986342794736294e2`
`som3(v,1,100000)`
On obtient avec 24 digits (Evaluation time : 30.74) :
`0.1209014612986342794736320e2`
La procédure récursive est nettement plus longue à exécuter mais par contre elle donne un meilleur résultat.

Chapitre 28

Exercices sur les suites

La commande `limite` de `Xcas` donne la limite d'une suite lorsqu'elle existe !
La commande `rsolve` de `Xcas` donne la valeur d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n, n)$ ou $u_{n+2} = f(, u_n, u_{n+1}, ...)$ ou d'un système de suites récurrentes.
La commande `seqsolve` de `Xcas` donne la valeur d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n, n)$ ou $u_{n+2} = f(, u_n, u_{n+1}, ...)$ ou d'un système de suites récurrentes.
Contrairement à `seqsolve`, `rsolve` est plus malléable.
En effet, avec `rsolve` la suite ne débute pas forcément par `u(0)` on peut donner plusieurs valeurs de départ par exemple `u(0)^2=1` (c'est pourquoi la réponse est une liste) et on écrit la relation de récurrence comme en mathématiques.
Par exemple :
Pour trouver la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite u_n définie par :
$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p}$, on tape :
`limite(sum(1/((n+p)),p=1..n),n,inf)`
On obtient :
`ln(2)`
Pour trouver la valeur de la suite u_n définie par :
$u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1} + n + 1$ $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, on tape :
`rsolve(u(n+2)=u(n)+2*u(n+1)+n+1,u(n),[u(0)=0,u(1)=1])`
On obtient :
```
[-1/2-(-2-3*sqrt(2))/8*(sqrt(2)+1)^n-
(-2+3*sqrt(2))/8*(-(sqrt(2))+1)^n-1/2*n]
```
ou on tape :
`seqsolve(x+2*y+n+1,[x,y,n],[0,1])`
On obtient :
```
(-4*n-(sqrt(2)+1)^n*(-sqrt(2)*3-2)-
(-(sqrt(2))+1)^n*(sqrt(2)*3-2)-4)/8
```
Pour trouver la valeur des suites u_n et v_n définies par :
$u_{n+1} = u_n + 2v_n, v_{n+1} = u_n + n + 1$ $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, on tape :
```
rsolve([u(n+1)=u(n)+2*v(n),v(n+1)=u(n)+n+1],[u(n),v(n)],
[u(0)=0,v(0)=1])
```
On obtient :
`[[-3/2+2*2^n-1/2*(-1)^n-n,-1/2+2^n+1/2*(-1)^n]]`
ou on tape :

`seqsolve([x+2*y,n+1+x],[x,y,n],[0,1])`
On obtient :
`[(-2*n-(-1)^n+2^n*4-3)/2,((-1)^n+2*2^n-1)/2]`

Exercices

1. Soit la suite u_n définie par :
$u_0 = 0$ et
pour $k \in \mathbb{N}^*$ par $u_{n+1} = \sqrt{k + u_n}$
Montrer que cette suite est convergente vers l.
Donner l'expression de l.
Calculer l pour $k = 1$ et $k = 2$.
Déterminer les entiers k pour lesquels $l \in \mathbb{N}$.
Solution
Avec `Xcas`, on tape :
`rsolve(u(n+1)=sqrt(k+u(n)),u(n),u(0)=sqrt(k))`
On obtient :
`Unable to isolate rsolve_x0 in seqsolve(...)`
`Xcas` ne sait pas faire ! ! !
On a $u_n > 0$ pour $n > 0$.
La suite u_n est croissante en effet :
$u_{n+1} - u_n = \sqrt{k + u_n} - \sqrt{k + u_{n-1}} = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{k + u_n} + \sqrt{k + u_{n-1}}}$
Donc $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_n - u_{n-1}$.
Le signe de $u_1 - u_0 = u_1 = \sqrt{k}$ est positif donc $u_n - u_{n-1}$ est positif pour tout n donc la suite u_n est croissante.
Si elle est majorée u_n sera convergente vers $l > 0$.
La fonction $\sqrt{k + x}$ est continue sur $[0, +\infty$ donc quand $n- > +\infty$ la relation $u_{n+1} = \sqrt{k + u_n}$ devient :
$l = \sqrt{k + l}$ c'est à dire $l^2 = l + k$ et $l > 0$, soit : $l = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(u_n - l) < 0$.
$u_{n+1} - l = \sqrt{k + u_n} - l = \dfrac{k + u_n - l^2}{\sqrt{k + u_n} + l}$
$l^2 = l + k$ donc :
$u_{n+1} - l = \dfrac{u_n - l}{\sqrt{k + u_n} + l}$
Donc $u_{n+1} - l$ a le même signe que $u_n - l$.
Le signe de $u_0 - l = -l$ est négatif donc $u_n - l$ est négatif donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < l$.
La suite u_n est croissante et majorée elle est donc convergente.
On a vu précédemment que si u_n est convergnte sa limite est :
$l = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$
On tape :
`solve(l^2=l+1,l)`
On obtient :
`[(1-(sqrt(5)))/2,(1+sqrt(5))/2]`
Donc pour $k = 1$ on a $l = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ qui est le

nombre d'or.
On tape :
`solve(l^2=l+2,l)`
On obtient :
`[-1,2]`
donc pour $k=2$ on a $l=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}=2$.
Comment choisir $k \in \mathbb{N}^*$ pour que l soit un nombre entier ?
Si $l=p\in\mathbb{N}$, on a $k=l^2-l=p(p-1)>0$ donc k est le produit de 2 entiers consécutifs, comme 1*2=2,2*3=6..et alors on a :
$\sqrt{1+4k}=\sqrt{1-4p+4p^2}=2p-1$ et on a bien : $=\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}=p$
On tape :
`[p*(p-1),p]$(p=1..10)`
On obtient les premières valeurs de [k,l] pour avoir $l\in\mathbb{N}$:
`[2,2],[6,3],[12,4],[20,5],[30,6],[42,7],[56,8],[72,9],[90,10]`

2. Soient a_n, et b_n les suites définies par :
a_0, b_0 $((a_0,b_0)\neq(0,0))$,
$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+b_n^2}$,
$b_{n+1}=\frac{b_n}{a_n^2+b_n^2}$,
Calculer les 4 premiers termes de ces suites pour $a_0=a$, $b_0=b$,
On utilise le tableur pour avoir les valeurs des termes de ces suites.
On tape pour :
`A0 1` (ou `a`)
`B0 3` (ou `b`)
`A1 =simplfy(A0/(A0^2+B0^2))`
`B1 =simplfy(B0/(A0^2+B0^2))`
Puis on remplit vers le bas. On obtient commes valeurs dans la colonne `A` :
`a, a/(a^2+b^2), a, a/(a^2+b^2) ...`
On obtient commes valeurs dans la colonne `B` :
`b, b/(a^2+b^2), b, b/(a^2+b^2) ...`
Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:
$g(x,y)=(x/(x^2+y^2),y/(x^2+y^2))$ Montrons avec `Xcas` que $g\circ g=id$
On tape :
```
g(x,y):=(x/(x^2+y^2),y/(x^2+y^2))
simplify((g@g)(x,y))
```
On obtient :
`(x,y)`
La fonction g transforme un vecteur V de $\mathbb{R}^2$ en $W=V/\mathrm{norm}(V)^2$.
On a :
$\mathrm{norm}(W)=1/\mathrm{norm}(V)$ donc g transforme W en $W/\mathrm{norm}(W)^2=V$.

3. Soient a_n, b_n, et c_n les suites définies par :
$a_0=1$, $b_0=3$ et $c_0=8$,
$a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n)$,
$b_{n+1}=\frac{1}{2}(c_n+a_n)$,
$c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$,
Calculer les 4 premiers termes de ces suites,
Montrer que $a_n+b_n+c_n$ est constant.

Exprimer $a_{n+1} - b_{n+1}$ en fonction de $a_n - b_n$,
Montrer que pour $n \geq 1$, $2a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.
En déduire une expression de a_n, b_n, et c_n en fonction de n.
Étudier la convergence de a_n, b_n, et c_n.

On peut faire le calcul des 4 premiers termes avec le tableur, on obtient :
`A:=(1,11/2,13/4,35/8,61/16)` pour les premiers termes de a_n,
`B:=(3,9/2,15/4,33/8,63/16)` pour les premiers termes de b_n,
`C:=(8,2,5,7/2,17/4)` pour les premiers termes de c_n,
On tape :
```
[A]+[B]+[C]
```
On obtient :
```
[12,12,12,12,12]
```
On a :
$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n + c_n + a_n + a_n + b_n) = a_n + b_n + c_n$
Donc on montre par récurrence que $a_n + b_n + c_n = 12$ On a :
$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{-1}{2}(a_n - b_n)$
$2a_{n+1} = b_n + c_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}(b_{n-1} + c_{n-1}) = a_{n-1} + a_n$
Donc on peut définir a_n par :
$a_0 = 1, a_1 = 11/2$ et la relation de récurrence $2a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.
L'ensemble E des suites réelles u qui vérifient la relation de récurrence :
$2u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n > 0$
forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.
En effet E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application :
f de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à $u \in E$ fait correspondre (u_0, u_1) est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On cherche les progressions géométriques $u_n = u_0 r^n$ qui vérifient :
$2u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ont pour raison $r = 1$ ou $r = \frac{-1}{2}$ donc
$a_n = \alpha + \beta(\frac{-1}{2})^n$ avec :
$\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta/2 = 11/2$
On tape :
```
solve([x+y=1,x-y/2=11/2],[x,y])
```
On obtient :
```
[[4,-3]]
```
Donc $a_n = 4 - 3(\frac{-1}{2})^n$ De même :
$b_n = \alpha + \beta(\frac{-1}{2})^n$ avec :
$\alpha + \beta = 3$ et $\alpha - \beta/2 = 19/2$
On tape :
```
solve([x+y=3,x-y/2=9/2],[x,y])
```
On obtient :
```
[[4,-1]]
```
Donc $b_n = 4 - (\frac{-1}{2})^n$ et,
$c_n = \alpha + \beta(\frac{-1}{2})^n$ avec :
$\alpha + \beta = 8$ et $\alpha - \beta/2 = 2$
On tape :
```
solve([x+y=8,x-y/2=2],[x,y])
```
On obtient :
```
[[4,4]]
```

Donc $c_n = 4 + 4(\frac{-1}{2})^n$
On vérifie, on tape :
`seqsolve([(b+c)/2,(c+a)/2,(a+b)/2],[a,b,c,n],[1,3,8])`
On obtient :
`[-3*(-1/2)^n+4,-(-1/2)^n+4,4*(-1/2)^n+4]`
Quand n tend vers $+\infty$ on a $(-1/2)^n$ tend vers 0 donc :
a_n tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$
b_n tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$
c_n tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$
Prolongement : cas général
Soient a_n, b_n, et c_n les suites définies par :
a_0, b_0 et c_0,
$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$,
$b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n)$,
$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$,
On a toujours :
$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n + c_n + a_n + a_n + b_n) = a_n + b_n + c_n$
Donc :
$a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0$
On a toujours :
$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{-1}{2}(a_n - b_n)$
$2a_{n+1} = b_n + c_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}(b_{n-1} + c_{n-1}) = a_{n-1} + a_n$
Donc a_n est définie par :
$2a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ et a_0 et $a_1 = \frac{1}{2}(b_0 + c_0)$
Donc :
$a_n = \alpha + \beta(\frac{-1}{2})^n$ avec :
$\alpha + \beta = a_0$ et $\alpha - \beta/2 = \frac{1}{2}(b_0 + c_0)$
On tape :
`solve([x+y=a0,x-y/2=1/2*(b0+c0)],[x,y])`
On obtient :
`[[a0/3+b0/3+c0/3,2*a0/3-b0/3-c0/3]]`
Donc :
$a_n = \frac{-1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) + (2a_0 - b_0 - c_0)(\frac{-1}{2})^n$
$b_n = \frac{-1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) + (2b_0 - c_0 - ca_0)(\frac{-1}{2})^n$
$c_n = \frac{-1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) + (2c_0 - a_0 - b_0)(\frac{-1}{2})^n$
On vérifie, on tape :
`seqsolve([(b+c)/2,(c+a)/2,(a+b)/2],[a,b,c,n],[a0,b0,c0])`
On obtient :
```
[(2*(-1/2)^n*a0+a0-(-1/2)^n*b0+b0-(-1/2)^n*c0+c0)/3,
(-(-1/2)^n*a0+a0+2*(-1/2)^n*b0+b0-(-1/2)^n*c0+c0)/3,
(-(-1/2)^n*a0+a0-(-1/2)^n*b0+b0+2*(-1/2)^n*c0+c0)/3]
```
On applique la commande `factor` et on obtient :
```
[((2*a0-b0-c0)*(-1/2)^n+a0+b0+c0)/3,
((-a0+2*b0-c0)*(-1/2)^n+a0+b0+c0)/3,
((-a0-b0+2*c0)*(-1/2)^n+a0+b0+c0)/3]
```

4. Soient a_n, b_n, et c_n les suites définies par :
$a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$,
$a_{n+1} = b_n + c_n$,

$b_{n+1} = c_n + a_n$,
$c_{n+1} = a_n + b_n$,
Calculer les 4 premiers termes de ces suites,
Montrer que pour tout n $b_n = c_n$
Calculer $a_n + b_n + c_n$.
On a :
$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = (b_n + c_n + c_n + a_n + a_n + b_n) = 2(a_n + b_n + c_n)$
donc :
$a_1 + b_1 + c_1 = 2(a_0 + b_0 + c_0)$
$a_2 + b_2 + c_2 = 2(a_1 + b_1 + c_1) = 2^2(a_0 + b_0 + c_0)$
etc...
$a_n + b_n + c_n = 2^n(a_0 + b_0 + c_0)$
On en déduit que :
$a_n = 2^n$
$b_{n+1} = b_n + 2^n$
donc
$b_n = 2^{n-1} + b_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + b_{n-2} = .. = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$
Prolongement : cas général
Soient a_n, b_n, et c_n les suites définies par :
a_0, b_0 et c_0,
$a_{n+1} = b_n + c_n$,
$b_{n+1} = c_n + a_n$,
$c_{n+1} = a_n + b_n$,
On a toujours :
$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = b_n + c_n + c_n + a_n + a_n + b_n = 2(a_n + b_n + c_n)$
Donc :
$a_n + b_n + c_n = 2^n(a_0 + b_0 + c_0)$
On n'a plus $b_n = c_n$ mais
$a_{n+1} - b_{n+1} = b_n - a_n = -(a_n - b_n)$,
Donc :
$a_n - b_n = (-1)^n(a_0 - b_0)$,
De même :
$a_n - c_n = (-1)^n(a_0 - c_0)$,
On a :
$a_n = \frac{1}{3}((a_n + b_n + c_n) + a_n - b_n + a_n - c_n)$
$a_n = \frac{1}{3}(2^n(a_0 + b_0 + c_0) + (-1)^n(a_0 - b_0) + (-1)^n(a_0 - c_0)$
Donc :
$a_n = \frac{1}{3}(2^n(a_0 + b_0 + c_0) + (-1)^n(2a_0 - b_0 - c_0)$
De même :
$b_n = \frac{1}{3}(2^n(a_0 + b_0 + c_0) + (-1)^n(2b_0 - c_0 - a_0)$
$c_n = \frac{1}{3}(2^n(a_0 + b_0 + c_0) + (-1)^n(2c_0 - b_0 - a_0)$
On vérifie, on tape :
`seqsolve([b+c,c+a,a+b],[a,b,c,n],[a0,b0,c0])`
On obtient après avoir fait agir la commande `factor` :
```
[((-b0-c0+2*a0)*(-1)^n+2^n*(b0+c0+a0))/3,
((-a0-c0+2*b0)*(-1)^n+2^n*(a0+c0+b0))/3,
((-a0-b0+2*c0)*(-1)^n+2^n(a0+b0+c0))/3]
```

5. Explicitez a_n, b_n, et c_n les suites définies par :

a_0, b_0 et c_0,
$a_{n+1} = a_n + c_n$,
$b_{n+1} = b_n + a_n$,
$c_{n+1} = c_n + b_n$,

On a toujours :
$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + c_n + b_n + a_n + c_n + b_n = 2(a_n + b_n + c_n)$
Donc :
$a_n + b_n + c_n = 2^n(a_0 + b_0 + c_0)$
On a :
$a_{n+1} - c_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n$
$b_{n+1} - a_{n+1} + c_{n+1} = 2b_n$
$c_{n+1} - b_{n+1} + a_{n+1} = 2c_n$
Malheureusement, on a moins de chances que dans l'exercice précédent...
On va donc utiliser une solution matricielle.
Soit :
```
A:=[[1,0,1],[1,1,0],[0,1,1]]
```
On a :
$[a_n, b_n, c_n] = A^n * [a_0, b_0, c_0]$
Il faut donc calculer A^n.
On tape :
```
P,B:=jordan(A)
```
On obtient :
```
[[1,sqrt(3)*(-i)-1,sqrt(3)*(i)-1],[1,sqrt(3)*(i)-1,sqrt(3)*(-i)-1],
[1,2,2]],[[2,0,0],[0,(sqrt(3)*(i)+1)/2,0],[0,0,(sqrt(3)*(-i)+1)/2]]
```
On tape :
```
P1:=simplify(inv(P))
```
On obtient :
```
[[1/3,1/3,1/3],[((i)*sqrt(3)-1)/12,((-i)*sqrt(3)-1)/12,1/6],
[((-i)*sqrt(3)-1)/12,((i)*sqrt(3)-1)/12,1/6]]
```
On tape :
```
An:=factor(simplify(exp2trig(pow2exp(P*Bn*P1))))
```
On obtient :
```
[[(2^n+2*cos(n*pi/3))/3,(2^n-cos(n*pi/3)-sqrt(3)*sin(n*pi/3))/3,
(2^(n+1)-2*cos(n*pi/3)+sin(n*pi/3)*2*sqrt(3))/6],
[(2^n-cos(n*pi/3)+sqrt(3)*sin(n*pi/3))/3,(2^n+2*cos(n*pi/3))/3,
(2^(n+1)-2*cos(n*pi/3)-2*sqrt(3)*sin(n*pi/3))/6],
[(2^n-cos(n*pi/3)-sqrt(3)*sin(n*pi/3))/3,
(2^n-cos(n*pi/3)+sqrt(3)*sin(n*pi/3))/3,(2^(n+1)+4*cos(n*pi/3))/6]]
```
On tape en mode complexe :
```
simplify(exp2trig(pow2exp(seqsolve([x+z,y+x,z+y],[x,y,z,n],[a0,b0,c0]))))
```
On obtient après avoir utilisé `factor` :
```
((a0+b0+c0)*2^n+cos(n*pi/3)*(2*a0-b0-c0)+
   sqrt(3)*sin(n*pi/3)*(-b0+c0))/3,
((a0+b0+c0)*2^n-cos(n*pi/3)*(a0-2*b0+c0)+
   sqrt(3)*(a0-c0)*sin(n*pi/3))/3
((a0+b0+c0)*2^n-cos(n*pi/3)*(a0+b0-2*c0)+
   sqrt(3)*(-a0+b0)*sin(n*pi/3))/3
```

Si on pose :
$j = (i\sqrt{3} - 1)/2$ on a $j^2 = (-i\sqrt{3} - 1)/2$.
Donc :
$B = [[2, 0, 0], [0, -j^2, 0], [0, 0, -j]]$
$P = [[1, 2j^2, 2j], [1, 2j, 2j^2], [1, 2, 2]]$
$P1 = P^{-1}$
On peux faire les calculs à la main.... :

```
B:=[[2,0,0],[0,-j^2,0],[0,0,-j]]
Bn:=matpow(B,n)
Bn:=[[2^n,0,0],[0,(-j^2)^n,0],[0,0,(-j)^n]]
P:=[[1,2j^2,2j],[1,2j,2j^2],[1,2,2]]
P1:=[[1/3,1/3,1/3],[j/6,j^2/6,1/6],[j^2/6,j/6,1/6]]
An:=P*Bn*P1
```

On obtient pour `An` après simplification à la main :

```
[[u(n),w(n),v(n)],[v(n),u(n),w(n)],[w(n),v(n),u(n)]]
```

avec :

```
u(n):=1/3*(2^n+(-j)^n+(-j^2)^n])
v(n):=1/3*(2^n+j*(-j)^n+j^2*(-j^2)^n)
w(n):=1/3*(2^n+j^2*(-j)^n+j*(-j^2)^n)
```

Donc on a :
$a_n = a0 * u(n) + b0 * w(n) + c0 * v(n)$
$b_n = a0 * v(n) + b0 * u(n) + c0 * w(n)$
$c_n = a0 * w(n) + b0 * v(n) + c0 * u(n)$

Prolongements
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Soit a_n le nombre de parties de E de cardinal congru à $0 \bmod 3$,
Soit b_n le nombre de parties de E de cardinal congru à $1 \bmod 3$,
Soit c_n le nombre de parties de E de cardinal congru à $2 \bmod 3$,

1. Montrer que :
   $a_n + b_n + c_n = 2^n$.
2. Montrer que :
   $a_n = 1 + comb(n, 3) + comb(n, 6) + ...$ $b_n = comb(n, 1) + comb(n, 4) + comb(n, 7) + ...$ $c_n = 1 + comb(n, 2) + comb(n, 5) + comb(n, 8) + ...$
3. En développant $(1 + X)^n$ successivement pour $X = 1$, $X = j$, $X = j^2$, calculer a_n, b_n, c_n.
4. Donner la valeur de a_0, b_0 et c_0. Calculer :
   a_{n+1} en fonction de a_n et c_n,
   b_{n+1} en fonction de b_n et a_n,
   c_{n+1} en fonction de c_n et b_n Et faire le lien avec l'exercice précédent.

Solution On pose :
$n = 3q + r$ avec $0 \leq r < 3$.

1. Le nombre de parties de E est 2^n donc $a_n + b_n + c_n = 2^n$.
2. Les parties de E de cardinal congru à $0 \bmod 3$ sont de cardinal p lorsque $p \in (0, 3, 6..3q)$.

Les parties de E de cardinal congru à $1 \bmod 3$ sont de cardinal p :
lorsque $p \in (1, 4, 7..3q-2)$ si $n = 3q$ i.e. si $r = 0$ ou
lorsque $p \in (1, 4, 7..3q+1)$ si $n = 3q+r$ avec $0 < r < 3$.
Les parties de E de cardinal congru à $2 \bmod 3$ sont de cardinal p :
lorsque $p \in (2, 5, 8..3q-1)$ si $n = 3q+r$ avec $r = 0$ ou $r = 1$ ou
lorsque $p \in (2, 5, 8..3q+2)$ si $n = 3q+2$ i.e. si $r = 2$.
Donc :
$a_n = 1 + comb(n, 3) + comb(n, 6) + ...comb(n, 3q)$
$b_n = comb(n, 1) + comb(n, 4) + comb(n, 7) + ... + comb(n, 3q-2) + comb(n, 3q+1)$
$c_n = 1 + comb(n, 2) + comb(n, 5) + comb(n, 8) + ... + comb(n, 3q-1) + comb(n, 3q+2)$

3. On a :
$(1+1)^n) = 1 + comb(n, 1) + comb(n, 2) + comb(n, 3) + ... + comb(n, n)$
$(1+j)^n) = 1 + j * comb(n, 1) + j^2 * comb(n, 2) + comb(n, 3) + ... + j^n * comb(n, n)$
$(1+j^2)^n) = 1 + j^2 * comb(n, 1) + j * comb(n, 2) + comb(n, 3) + ... + j^{2n} comb(n, n)$
On additionne ces égalités après les avoir mulltiplié successivement par : (1,1,1) puis par (1,j^2,j) puis par (1,j,j^2). On obtient (puisque $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$) :
$3a_n = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$
$3b_n = 2^n + j^2(1+j)^n + j(1+j^2)^n$
$3c_n = 2^n + j(1+j)^n + j^2(1+j^2)^n$

4. On a :
$a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$
Quand on rajoute un élément α à E :
parmi les sous-ensembles de cardinal congru à $0 \bmod 3$, il y en a a_n qui ne contiennent pas α et c_n qui contiennent α donc
$a_{n+1} = a_n + c_n$,
parmi les sous-ensembles de cardinal congru à $1 \bmod 3$ il y en a b_n qui ne contiennent pas α et a_n qui contiennent α donc
$b_{n+1} = b_n + a_n$,
parmi les sous-ensembles de cardinal congru à $2 \bmod 3$ il y en a c_n qui ne contiennent pas α et b_n qui contiennent α donc
$c_{n+1} = c_n + b_n$,
Donc a_n, b_n, c_n sont définies par :
$a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$
$a_{n+1} = a_n + c_n$,
$b_{n+1} = b_n + a_n$,
$c_{n+1} = c_n + b_n$
On tape :
```
simplify(exp2trig(pow2exp(seqsolve([x+z,y+x,z+y],[x,y,z,n],[1,0,0]))))
```
On obtient :
```
[(2^n+2*cos(n*pi/3))/3,
(2^n-cos(n*pi/3)+(sqrt(3))*sin(n*pi/3))/3),
(2^n-cos(n*pi/3)+(-(sqrt(3))*sin(n*pi/3))/3]
```

28.1 Exercices sur les séries

La commande `sum` de `Xcas` calcule les sommes de certaines séries.
Voici queques exemples :
On tape :
`sum(1/2^n,n=0..inf)`
On obtient :
`2`
On tape :
`sum(n/2^n,n=0..inf)`
On obtient :
`2`
On tape :
`sum(1/(n*(n+1)),n=1..inf)`
On obtient :
`1`
On tape :
`sum(1/((2n+1)*(2n-1)),n=1..inf)`
On obtient :
`1/2`
On tape :
`sum(1/n^2,n=1..inf)`
On obtient :
`pi^2/6`
On tape :
`sum((-1)^(n+1)/n,n=1..inf)`
On obtient :
`ln(2)`
On tape :
`sum((-1)^n/(2n+1),n=0..inf)`
On obtient :
`pi/4`
Exercices

1. Montrer que :
   $(1-x) * \sum k = 0^n x^k = 1 - x^{n+1}$ En déduire que :
   $$\sum k = p^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$
   Montrer que :
   $$\sum k = p^{inf} x^k = x^p \frac{1}{1-x}$$
   Application :
   Calculer : $\sum k = 0^{inf} 2^{-k}$,$\sum k = 0^{inf} 3 - k$
2. Soit $u_n = \frac{n}{2^n}$. Monter que :
   $4u_{n+1} < 3u_n$ lorsque $n > 2$
   En déduire que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. pour ceux qui connaissent le critére de d'Alembert sur les séries à termes positifs,

Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (pour ceux qui connaissent le critére de d'Alembert sur les séries à termes positifs).
En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

4. pour ceux qui ne connaissent pas le critére de d'Alembert,
Montrer que $\lim_{N->\infty} \sum_{k=0}^{N} u_n$ existe et calculer sa valeur.

5. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{N} u_n$.

On tape :
```
u(n):=n/2^n
factor(simplify(4u(n+1)-3u(n)))
```
On obtient :
```
(-n+2)/2^n
```
On a donc :
$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n}$
Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
On tape :
```
limit(u(n+1)/u(n),n,inf)
```
On obtient :
```
1/2
```
Calcul de $S_N = \sum n = 0^N u_n$
$S_N = 0 + \sum n = 1^N 1/2^n + \sum n = 2^N 1/2^n + ... \sum n = k^N 1/2^n + .. \sum n = N^N 1/2^n$.
Donc
$S_N = 1 + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^N} + .. \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N}$
$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} + \frac{N}{2^N}$
Comme $\frac{N}{2^N}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que :
S_N tend vers $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

Chapitre 29

Utilisation des sommes de Riemann avec `Xcas`

29.1 Sommes de Riemann et définition de l'intégrale

29.1.1 Deux théorèmes

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

`Rappel` : Intégrale d'une fonction en escalier ϕ sur $[a, b]$
L'intégrale d'une fonction en escalier ϕ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\sum(1./n, n = 1..20000) mathbbC$ notée $\int_a^b \phi_n$ est égale à :
$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) * \lambda_j$
où λ_j est la valeur constante prise par ϕ_j sur $]a_{j-1}, a_j[$.

Soit f une application continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

`Théorème 1`
f est la limite uniforme d'une suite ϕ_n de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

`Théorème 2 et définition de l'intégrale`
Si ϕ_n est une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors la suite $\int_a^b \phi_n$ converge et cette limite ne depend pas de la suite ϕ_n choisie pourvu que cette suite ϕ_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Cette limite est appelée `intégrale de` f `sur [a,b]` et est notée $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)dt$.

29.1.2 Sommes de Riemann

Soit $(a_j)_{j \in [0,n]}$ une subdivision de $[a, b]$.

`Définition`
On appelle `sommes de Riemann` de f associée à la subdivision $(a_j)_{j \in [0,n]}$ toutes les sommes de la forme :
$\sum_{j=1}^{n} f(t_j) * (a_j - a_{j-1})$
où t_j est un élément de $[a_{j-1}, a_j]$ pour tout $j \in [1, n]$.

Soit $(a_j)_{j\in[0,n]}$ une subdivision régulière de $[a,b]$ c'est à dire $a_j = a+j*\dfrac{b-a}{n}$ pour $j \in [0,n]$.

`Propriété`

On a :

$a_j - a_{j-1} = \dfrac{b-a}{n}$ pour $j \in [1,n]$.

et donc

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_j) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n-1} f(t_j)$$

où t_j est un élément de $[a_{j-1}, a_j]$ pour tout $j \in [1,n]$ (par ex $t_j = a_{j-1}$ ou $t_j = a_j$).

29.2 Les fonctions de Xcas utilisées

Voici les fonctions de Xcas qui vous seront utiles dans ces exercices.

`sum_riemann(xpr(n,k),[n,k])` renvoie au voisinage de $\mathtt{n} = +\infty$ un équivalent de $\sum_{\mathtt{k=1}}^{\mathtt{n}} \mathtt{xpr(n,k)}$ ou de $\sum_{\mathtt{k=0}}^{\mathtt{n-1}} \mathtt{xpr(n,k)}$ ou de $\sum_{\mathtt{k=1}}^{\mathtt{n-1}} \mathtt{xpr(n,k)}$ lorsque la somme considérée est une somme de Riemann associée à une fonction continue sur [0,1] ou répond "`ce n'est probablement pas une somme de Riemann`" quand la recherche a été infructueuse.

Remarque : lorsque la fonction f est seulement continue sur $]0,1]$ (resp sur $[0,1[$ ou sur $]0,1[$) et que $int_0^1 f(x)dx$ converge on a encore $\sum_{k=1}^{n} 1/n * f(k/n)$ (resp $\sum_{k=0}^{n-1} 1/n * f(k/n)$ ou $\sum_{k=1}^{n-1} 1/n * f(k/n)$) tend vers $int_0^1 f(x)dx$ quand $n->+\infty$.

`integrate(xpr(x),x,a,b)` calcule l'intégrale de l'expression `xpr(x)` entre `a` et `b`.

`partfrac(n(x)/d(x))` décompose en éléments simples la fraction rationnelle `n(x)/d(x)`.

29.3 Exercices

1. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

2. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4}$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n})$.
   Déterminer un équivalent de $S_n == \sum_{k=n+1}^{2*n} \frac{1}{k^p}$ lorsque $p \in \mathbb{R} - \{1\}$

4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + ... + \frac{n}{n^2+n^2})$.

5. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

6. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{32n^3}{16n^4 - k^4}$.
   Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

29.4 Corrections des exercices

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k/n)^2$
   S_n est une somme de Riemann de la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$.
   On a :
   $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 x^2 dx$
   On tape :
   `sum_riemann(k^2/n^3, [n, k])`
   On obtient :
   $\frac{1}{3}$
   Donc
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$$
   Pour vérifier on tape :
   `integrate(x^2, x, 0, 1)`
   On obtient :
   $\frac{1}{3}$

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k/n)^3$.
   S_n est une somme de Riemann de la fonction $f(x) = x^3$ sur $[0, 1]$.
   On a :
   $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 x^3 dx$
   On tape :
   `sum_riemann(k^3/n^4, [n, k])`
   On obtient :
   $\frac{1}{4}$
   Donc
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}$$
   Pour vérifier on tape :
   `integrate(x^3, x, 0, 1)`
   On obtient :
   $\frac{1}{4}$

3. Soit $U_n = (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}) = \sum_{k=n+1}^{2*n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$

U_n est une somme de Riemann de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$ (ou de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1,2]$).
On a :
$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx.$
On tape :
`sum_riemann(1/(n+k),[n,k])`
On obtient :
`log(2)`
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ln(2)$$

Pour vérifier on tape :
`integrate(1/(1+x),x,0,1)` ou `integrate(1/x,x,1,2)`
On obtient :
`log(2)`
Pour avoir un équivalent de $S_n = \sum_{k=n+1}^{2*n} \frac{1}{k^p}$ on tape :
`sum_riemann(1/(n+k)^p,[n,k])`
on obtient `"ce n'est probablement pas une somme de riemann"`
car le paramètre `p` n'est pas bien géré.
On tape alors :
`sum_riemann(1/(n+k)^2,[n,k])`
on obtient `1/2/n`
`sum_riemann(1/(n+k)^3,[n,k])`
on obtient `3*1/8/n^2` (ou encore $3/4/(2*n^2)$)
`sum_riemann(1/(n+k)^4,[n,k])`
on obtient `7*1/24/n^3` (ou encore $7/8/(3*n^3)$)
L'équivalent de $S_n = \sum_{k=n+1}^{2*n} \frac{1}{k^p}$ semble donc être $\frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1}*(p-1)*n^{p-1}}$

4. Soit $S_n = (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + ... + \frac{n}{n^2+n^2}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2}$

   S_n est une somme de Riemann de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$.
   On a :
   $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$
   On tape :
   `sum_riemann(n/(n^2+k^2),[n,k])`
   On obtient :
   $\frac{\pi}{4}$
   Donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$$

Pour vérifier on tape :
`integrate(1/(1+x^2),x,0,1)`
On obtient :
$\frac{\pi}{4}$

5. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2}$.
S_n est une somme de Riemann de la fonction $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ sur $[0,1]$.
On a :
$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx$.
On tape :
`sum_riemann((n+k)/(n^2+k^2),[n,k])`
On obtient :
$\frac{2*\mathtt{log}(2)+\pi}{4}$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2*\ln(2)+\pi}{4}$$
Pour vérifier on tape :
`integrate((1+x)/(1+x^2),x,0,1)`
On obtient :
$\frac{2*\mathtt{log}(2)+\pi}{4}$

6. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{32n^3}{16n^4-k^4} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{32}{16-(k/n)^4}$.
S_n est une somme de Riemann de la fonction $f(x) = \frac{32}{16-x^4}$ sur $[0,1]$.
On a :
$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{32}{16-x^4}dx$.
On tape :
`sum_riemann(32*n^3/(16*n^4-k^4),[n,k])`
On obtient :
`2*atan(1/2)+log(3)`
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2*\arctan(1/2)+\ln(3)$$
Pour vérifier on tape :
`integrate(32/(16-x^4),x,0,1)`
On obtient :
`2*atan(1/2)+log(3)`
Si on veut savoir comment cette intégrale a été calculée on décompose en éléments simples $\frac{32}{16-X^2}$ en posant $X=x^2$, on tape :
`partfrac(32/(16-X^2))`
On obtient :
`4/(X+4)+4/(-X+4)`
Puis on tape : `integrate(4/(x^2+4),x,0,1)` et on obtient : `2*atan(1/2)`

Puis on tape : `integrate(4/(-x^2+4),x,0,1)` et on obtient : `log(3)`

29.5 Autres exercices

1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin(\frac{k\pi}{n})$.
   Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
   On tape :

   `sum_riemann(k/n^2*sin(k*pi/n),[n,k])`

   On obtient :

   $$\frac{1}{\pi}$$

   En effet l'intégrale $\int_0^1 x\sin(\pi x)dx$ vaut $\frac{1}{\pi}$.
   On tape :

   `int(x*sin(pi*x),x,0,1)`

   On obtient :

   $$\frac{1}{\pi}$$

2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin(\frac{k*x}{n})$.
   Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
   On tape :

   `sum_riemann(1/n*sin(k*x/n),[n,k])`

   On obtient :

   $$\frac{-\cos(x)+1}{x}$$

   En effet $\int_0^1 \sin(t*x)dt = -\frac{\cos(t*x)}{x}|_{t=1} + \frac{\cos(t*x)}{x}|_{t=0} = \frac{-\cos(x)+1}{x}$.
   On tape :

   `int(sin(t*x),t,0,1)`

   On obtient :

   $$\frac{-\cos(x)}{x} + \frac{1}{x}$$

3. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \sin(\frac{k\pi}{n})$.
   Trouver un equivalent de S_n quand $n \to +\infty$.
   On tape :

   `sum_riemann(k^2/n^2*sin(k*pi/n),[n,k])`

   On obtient :

   $$\frac{pi^2*n-4*n}{pi^3}$$

En effet l'intégrale $\int_0^1 x^2\sin(\pi x)dx$ vaut $\frac{\pi^2-4}{\pi^3}$ et S_n est le produit de n par une somme de Riemann de cette intégrale.
On tape :

$$\texttt{normal(int(x}^2*\texttt{sin(pi}*\texttt{x),x,0,1))}$$

On obtient :

$$\frac{\pi^2-4}{\pi^3}$$

S_n est donc équivalente à $n*\frac{\pi^2-4}{\pi^3}$ quand $n\to+\infty$.

4. Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{2+\cos(\frac{k\pi}{n})}$.
Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
On tape :

$$\texttt{sum\_riemann}(\sin(\texttt{pi/n})/(2+\cos(\texttt{k}*\pi/\texttt{n})),[\texttt{n},\texttt{k}])$$

On obtient :

$$0$$

En effet l'intégrale $\int_0^1\frac{1}{2+\cos(\pi x)}dx$ vaut $\frac{1}{\pi}$ et S_n est le produit de $n\sin(\pi/n)$ par une somme de Riemann de cette intégrale.
On tape :

$$\texttt{int}(1/(2+\cos(\pi*\texttt{x})),\texttt{x},0,1)$$

On obtient :

$$0$$

On tape :

$$\texttt{limit}(\texttt{n}*\sin(\texttt{pi/n}),\texttt{n}=+\texttt{infinity})$$

On obtient :

$$\texttt{pi}$$

La limite de S_n est donc 0 ($0*\pi=0$) quand $n\to+\infty$.

5. Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$.
Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
On tape :

$$\texttt{sum\_riemann(1/sqrt(k}^2+\texttt{n}^2),[\texttt{n},\texttt{k}])$$

On obtient :

$$-\texttt{log}(\sqrt{2}-1)$$

En effet l'intégrale $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ vaut $-(\ln(\sqrt{2}-1))\pi$.
On tape :

$$\texttt{int(1/sqrt(1}+\texttt{x}^2),\texttt{x},0,1)$$

On obtient :

$$-(\texttt{log}(\sqrt{2}-1))$$

6. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2 t^2}$.
   Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.
   On tape :
   $$\texttt{sum\_riemann}(\texttt{n}/(\texttt{k}^2 * \texttt{t}^2 + \texttt{n}^2), [\texttt{n}, \texttt{k}])$$
   On obtient :
   $$\texttt{atan}(\texttt{t}^2/\texttt{abs}(\texttt{t}))/\texttt{abs}(\texttt{t})$$
   En effet l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 * t^2 + 1}$ vaut $\frac{\arctan(|t|)}{|t|}$.
   On tape :
   $$\texttt{int}(1/(\texttt{x}^2 * \texttt{t}^2 + 1), \texttt{x}, 0, 1)$$
   On obtient :
   $$\frac{\texttt{atan}(\frac{\texttt{t}^2}{\texttt{abs}(\texttt{t})})}{\texttt{abs}(\texttt{t})}$$

29.6 Somme et produit se ramenant à des sommes de Riemann

1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.
   Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.
   On tape :
   $$\texttt{sum\_riemann}(1/\texttt{sqrt}(\texttt{k} * (\texttt{n} - \texttt{k})), [\texttt{n}, \texttt{k}])$$
   On obtient :
   $$\texttt{pi}$$
   En effet l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x * (1-x)}}$ est convergente vers π.
   On tape :
   $$\texttt{int}(1/(\texttt{sqrt}(\texttt{x} * (1 - \texttt{x}))), \texttt{x}, 0, 1)$$
   On obtient :
   $$\frac{\texttt{pi}}{2} + \frac{\texttt{pi}}{2}$$

2. Soit $P_n = \frac{1}{n}(\prod_{k=1}^{n}(k+n))^{\frac{1}{n}}$.
   Calculer $\lim_{n \to +\infty} P_n$.
   On a :
   $\ln(P_n) = -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k+n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + k/n)$
   On tape :
   $$\texttt{sum\_riemann}(1/\texttt{n} * \ln(1 + \texttt{k}/\texttt{n}), [\texttt{n}, \texttt{k}])$$
   On obtient :
   $$2 * \texttt{log}(2) - 1$$
   Donc $\lim_{n \to +\infty} P_n = \exp(2 * \ln(2) - 1) = \frac{4}{e}$

29.7 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une somme de Riemann

Soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \sin(\frac{k\pi}{2n})$.
1/ Montrer que :
$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \cos(\frac{k*\pi}{n})) = \frac{n}{2^{n-1}}$.
2/ En déduire que :
$\prod_{k=1}^{n-1}(\sin(\frac{k*\pi}{2n})) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.
3/ Dèterminer la limite de $\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(\sin(\frac{k*\pi}{2n}))$ quand n tend vers $+\infty$.
4/ Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$ est convergente et calculer sa valeur à l'aide des sommes de Riemann.
5/ Retrouver ce résultat en considérant $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx$ et en montrant que $I = J = \frac{I+J}{2}$

1/ On a :
$\prod_{k=0}^{2n-1}(z - \exp(\frac{i*k*\pi}{n})) = z^{2n} - 1 =$
$(z-1)(z-\exp(i*\pi))\prod_{k=1}^{n-1}(z - \exp(\frac{i*k*\pi}{n}))(z - \exp(\frac{i*(2*n-k)*\pi}{n}))$
donc
$\prod_{k=1}^{n-1}(z - \exp(\frac{i*k*\pi}{n}))(z - \exp(\frac{i*(2*n-k)*\pi}{n})) =$
$\frac{z^{2n}-1}{(z-1)(z-\exp(i*\pi))} = \frac{(z^2)^n - 1}{(z^2-1)} = 1 + z + z^2 + ...z^{2n-2}$

En faisant tendre z vers 1 on en déduit que :
$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \exp(\frac{i*k*\pi}{n}))(1 - \exp(\frac{i*(2*n-k)*\pi}{n})) = n$
On a $1 - \exp(\frac{i*(2*n-k)*\pi}{n}) = 1 - \exp(\frac{-i*k*\pi}{n})$ et :
$(1 - \exp(\frac{i*k*\pi}{n}))(1 - \exp(\frac{-i*k*\pi}{n})) = 2 - 2\cos(\frac{k*\pi}{n})$
Donc :
$\prod_{k=1}^{n-1} 2 - 2\cos(\frac{k*\pi}{n}) = n$
ou encore :
$\prod_{k=1}^{n-1} 1 - \cos(\frac{k*\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$
On a :
$(\sin(\frac{k*\pi}{2n}))^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{k*\pi}{n}))$

Donc :
$$\prod_{k=1}^{n-1}(\sin(\frac{k*\pi}{2n}))^2 = \frac{1}{2^{n-1}} * \frac{n}{2^{n-1}}$$
Ou encore puisque $\sin(\frac{k*\pi}{2n}) > 0$ pour tout $k = 1..(n-1)$:
$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k*\pi}{2n}) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$
On a :
$$\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(\sin(\frac{k*\pi}{2n})) = \frac{\pi}{2n}\ln(\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k*\pi}{2n})) = \frac{\pi}{2n}\ln(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}})$$
On tape
$$\mathtt{limit(pi/2/n*ln(sqrt(n)/2^{n-1}),n=+infinity)}$$
On obtient :
$$-(\frac{\mathtt{pi*log(2)}}{\mathtt{2}})$$
4/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(x))dx$ est convergente en 0 car :
$0 < -\ln(\sin(x)) < 1/\sqrt{x}$ au voisinage de 0 ($\lim_{x->0}\sqrt{x}*\ln(\sin(x)) = 0$) et $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$ est convergente en 0.
Or $\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(\sin(\frac{k*\pi}{2n}))$ est la somme de Riemann associée à I donc :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(x))dx = -(\frac{\pi*\ln(2)}{2})$$
5/ J est convergente en $\pi/2$ car, avec le changement de variables $x = \pi/2 - u$, on a :
$$\int_0^a\ln(\cos(x))dx = \int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(x))dx$$
donc
$$I = J = (I+J)/2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(x)*\cos(x))dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\sin(2*x)) - \ln(2))dx =$$
$$\frac{I}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2)dx = \frac{I}{2} - \pi*\frac{\ln(2)}{4}$$
en effet
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2*x))dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin(u))du = \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(u))du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin(u))du) =$$
$$\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(u))du - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin(\pi-t))dt) = \frac{1}{2}(I+I) = I$$
Donc
$$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$$

Chapitre 30

Les équations différentielles résolubles

30.1 Équation linéaire à coefficients constant du 2ième ordre

Ce sont les équations de la forme $ay'' + by' + cy = f(x)$

30.2 Équation linéaire en y et y' du 1ier ordre

La solution générale de l'équation complète est égale à la somme solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière.

— Résoudre :
  $2xy' + y - 3x^2 = 0$
  Avec `Xcas`
  On tape :
  `normal(desolve(2*x*y'+y-3*x^2))`
  On obtient :
  `((5*sqrt(x)*c_0+3*x^3)*1/5)/x`

— Résoudre :
  $y' * \sqrt{1+x^2} - y = x + \sqrt{1+x^2}$
  On résoud l'équation sans second membre :
  $y'/y = 1/\sqrt{1+x^2}$
  On trouve :
  $y = c*\exp(\operatorname{asinh}(x)) = c*(\sqrt{1+x^2}+x)$ Puis on fait varier la constante c :
  $y' = c' * \exp(\operatorname{asinh}(x)) + c * \exp(\operatorname{asinh}(x)) * 1/\sqrt{1+x^2}$
  donc :
  $y' * \sqrt{1+x^2} - y = c' * \exp(\operatorname{asinh}(x)) * \sqrt{1+x^2} = c' * (x + \sqrt{1+x^2}) * \sqrt{1+x^2}$
  On obtient c' : $c' = (x+\sqrt{1+x^2})*\exp(-\operatorname{asinh}(x))/\sqrt{1+x^2} = 1/\sqrt{1+x^2}$
  donc :
  $c' = 1/\sqrt{1+x^2}$
  On intègre :
  $c = \operatorname{asinh}(x) + k = -(\ln(\sqrt{1+x^2} - x)) + k$

On a donc :
$y = (\,\text{asinh}\,(x) + k) * (\sqrt{x^2+1} + x) = (-\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + k) * (\sqrt{x^2+1} + x)$
Avec `Xcas`
On tape :
`normal(desolve(y'*sqrt(1+x^2)-y=x+sqrt(1+x^2),y))`
On obtient :
```
(sqrt(x^2+1)+x)*c_0+(-sqrt(x^2+1)-x)*
ln(abs(sqrt(x^2+1)-x))
```

30.3 Équation du 1ier ordre avec facteur intégrant

Ce sont les équations différentielles qui peuvent être multipliées par $f(x)$ de façon à obtenir une différentielle totale.

— Résoudre :
$xy' - y = 0$ soit $xdy - ydx = 0$
On multiplie par $f(x) = 1/x^2$ pour que l'équation différentielle soit la différentielle totale de la fonction $F(x, y) = y/x$.
Donc $y = kx$.
Avec `Xcas`
On tape :
`normal(desolve(x*y'-y))`
On obtient :
`c_0*x`

— Résoudre :
$2xyy' + x^2 - y^2 + a^2 = 0$
On multiplie par $f(x)$ pour que l'équation différentielle soit la différentielle totale de la fonction F. La fonction $f(x)$ doit vérifier pour cela :
$d(2xyf(x))/dx = d((x^2 - y^2 + a^2)f(x))/dy$
cela donne :
$2yf(x) + 2xyf'(x) = f(x)(-2y)$
ou encore :
$xf'(x) + 2f(x) = 0$
donc $f(x) = 1/x^2$ est un facteur integrant et l'équation différentielle est la differentielle totale de F qui vérifie :
$dF(x, y)/dy = 2y/x$.
Donc $F(x, y) = y^2/x + g(x)$ et
$-y^2/x^2 + g'(x) = (x^2 - y^2 + a^2)/x^2$
donc $g'(x) = 1 + a^2/x^2$ soit $g(x) = x - a^2/x$
Puisque $dF = 0$, on en déduit que :
$F(x, y) = y^2/x + x - a^2/x = (y^2 + x^2 - a^2)/x = c\_0$
Donc les solutions sont :
$y = \sqrt{(} - x^2 + a^2 + c\_0 * x)$ et $y = -\sqrt{(} - x^2 + a^2 + c\_0 * x)$
Avec `Xcas`
On tape :
`normal(exp2pow(desolve(2*x*y*y'+x^2-y^2+a^2)))`

On obtient :
`[sqrt(a^2-c_1*x-x^2),-(sqrt(a^2-c_1*x-x^2))]`

30.4 Équation homogène du premier ordre résoluble en y'

Pour les équations homogènes du premier ordre non résoluble en y voir 30.7.
Les équations homogènes du premier ordre résoluble en y sont de la forme $a(x,y)*y' = b(x,y)$ où $a(x,y)$ et $b(x,y)$ sont des fonctions homogènes de même degré p $(a(t*x,t*y) = t^p*a(x,y)$ et $b(t*x,t*y) = t^p*b(x,y))$.
Pour résoudre les équations homogènes on pose $y/x = t$.

— Résoudre :
$2xyy' + x^2 - y^2 = 0$
On pose $y = t*x$.
On a : $dy/dx = x*dt/dx + t$ donc :
$2*t*(x*dt/dx + t) + 1 - t^2 = 0$ soit à résoudre :
$2*t*x*dt + (1+t^2)dx = 0$
On obtient une équation à variables séparées :
$2*t*dt/(1+t^2) = -dx/x$.
Donc $x = k/(t^2+1)$ et $y = k*t/(t^2+1)$.
Avec `Xcas`
On tape :
`normal(desolve(2*x*y*y'+x^2-y^2))`
On obtient :
`[(-i)*x,(i)*x,pnt[c_0/(` t`^2+1),(` t`*c_0)/(` t`^2+1)]]`
où ‘ t‘ est le paramétrage.

— Résoudre :
$xy' - y - \sqrt{x^2+y^2} = 0$ On pose $y = t*x$. On a : $dy/dx = x*dt/dx + t$ donc :
$x^2*dt/dx + x*t - x*t - \sqrt{x^2+t^2*x^2} = 0$
$\sqrt{x^2+t^2*x^2} = |x|*\sqrt{1+t^2}$ soit à résoudre :
$x*dt - \sqrt{1+t^2}*dx = 0$ si $x > 0$
$x*dt + \sqrt{1+t^2}*dx = 0$ si $x < 0$
ou encore
$|x|t' = \sqrt{1+t^2}$
donc $= dx/|x| = signe(x)*dx/x = dt/\sqrt(1+t^2)$
Donc :
Si $x > 0$ on a : $x = k*(t+\sqrt(1+t^2)); y = k*t*(t+\sqrt(1+t^2))$ avec $k > 0$
Si $x < 0$ on a : $x = k/(t+\sqrt(1+t^2)); y = k*t/(t+\sqrt(1+t^2))$ avec $k < 0$
Si $x > 0$ on a : $(x/k - t)^2 = 1+t^2$
$2kxt = k^2*x^2 - 1$ ou encore
$y = kx^2/2 - 1/(2k)$ Si $x < 0$ on a : $(k/x - t)^2 = 1+t^2$
$2kt/x = k^2/x^2 - 1$ ou encore
$y = k/2 - x^2/(2k)$
Avec `Xcas`

On tape :
`normal(desolve(x*y'-y-sqrt(x^2+y^2)))`
On obtient :
`[(-i)*x,(i)*x,pnt[(sqrt(` t`^2+1)+` t`)*c_0,(` t`*sqrt(` t`^2+1)+` t`^2)*c_0]]`
où ‘ t‘ est le paramétrage.

— Résoudre :
$3x^3y' - (3x^2 - y^2)y = 0$
On pose $t = y/x$ et on obtient :
$y' = t - t^3/3 = dy/dx = t + x * dt/dx$ donc :
$dx/x = -3 * dt/(t^3)$ et $y = t * x$ $x = k * \exp(3/(2 * t^2)) et y = k * t * \exp(3/(2 * t^2))$
Avec `Xcas`
On tape :
`normal(desolve(3*x^3*diff(y)=((3*x^2-y^2)*y),y))`
On obtient :
`[0,pnt[c_0*exp(3/(` t`^2*2)),` t`*c_0*exp(3/(` t`^2*2))]]`
où ‘ t‘ est le paramétrage.

— Résoudre :
$x + y * y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ On pose :
$t = x^2 + y^2$
On a :
$dt/dx = 2x + 2ydy/dx$ donc
$dt/dx = 2\sqrt{t}$
donc $dx = dt/(2\sqrt{t})$
$x + k = \sqrt{t}$, $y = s * \sqrt{t - x^2} = s * \sqrt{2 * k * \sqrt{t} - k^2}$ avec $s = \pm 1$.
On a donc :
$y = s * \sqrt{2 * k * (x + k) - k^2} = s * \sqrt{2 * k * x + k^2}$ avec $s = \pm 1$, $k + 2x > 0$ et $k + x > 0$,

Ou bien on pose $y/x = t$ donc $dy/dx = t + x * dt/dx$
On a $x + y * y' = \sqrt{x^2 + y^2}$:
$x + tx(t + x * dt/dx) = |x| * \sqrt{1 + t^2}$
Après simplification par x :
$t * x * dt/dx = s * \sqrt{1 + t^2} - 1 - t^2$
$tdt/(s * \sqrt{1 + t^2} - (1 + t^2)) = dx/x$
Pour $x > 0$, $s = 1$ et on a
$\ln((-4t^2 - 8 - 8\sqrt{t^2 + 1})/(2t^2)) = \ln(x/k)$
Donc :
$x = k(-4t^2 - 8 - 8\sqrt{t^2 + 1})/(2t^2)$
$y = k(-4t^2 - 8 - 8\sqrt{t^2 + 1})/(2t)$
Pour $x < 0$, $s = -1$ et on a
$\ln((-4t^2 - 8 + 8\sqrt{t^2 + 1})/(2t^2)) = \ln(x/k)$
Donc :
$x = k(-4t^2 - 8 + 8\sqrt{t^2 + 1})/(2t^2)$
$y = k(-4t^2 - 8 + 8\sqrt{t^2 + 1})/(2t)$

Avec `Xcas`

On tape :
`desolve(x+y*y'=sqrt(x^2+y^2),y)`
On obtient :
`[(i)*x,(-i)*x,0,pnt[c_0/(sqrt(` t`^2+1)-1),(` t`*c_0)/(sqrt(` t`^2+1)-1)]]`
où ‘ t‘ est le paramétrage.

30.5 Équation de Bernoulli

Les équations de Bernoulli sont de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)y^n$ et se résolvent en posant $u = 1/y^{n-1}$

— Résoudre :
$xy' + 2y + xy^2$
Avec `Xcas`
On tape :
`simplify(desolve(x*y'+2*y+x*y^2,y))`
On obtient :
`[1/(x^2*c_0-x)]`

— Résoudre :
$xy' - 2y = xy^3$
Avec `Xcas`
On tape :
`simplify(desolve(x*diff(y)-2*y=(x*y^3),y))`
On obtient :
`[(-(x^2*sqrt(-10*x^5+25*c_0)))/(2*x^5-5*c_0)]`

30.6 Équation à variables séparées

Les équations à variables séparées sont de la forme $a(y)dy = b(x)dx$ et se résolvent en intégrant chaque membre.

— Résoudre :
$x * y' * \ln(x) - (3 * \ln(x) + 1) * y$
On a :
$dy/y = (3 * \ln(x) + 1)dx/(\ln(x) * x) = 3/x + 1/(\ln(x) * x)$ et
$\ln(y/k) = 3 * \ln(x) + \ln(\ln(x)) = \ln(x^3 * \ln(x))$
donc
$y = k * x^3 * \ln(x)$
Avec `Xcas`
On tape :
`normal(desolve(x*y'*log(x)-(3*log(x)+1)*y,y))`
On obtient :
`c_0*x^3*ln(x)`

— Résoudre :
$y' = 2 * \sqrt{y}$
On a :
$dy/(2\sqrt{})y = dx$

donc
$\sqrt{y} = x + k$
ou encore :
$y = (x + k)^2$
Avec `Xcas`
On tape :
`desolve(y'=2*sqrt(y),y)`
On obtient :
`[((2*x-c_0)^2)/4]`

30.7 Équation non résoluble en y'

On sait résoudre si l'équation est :

- incomplète en x
  c'est à dire l'équation est de la forme $F(y, y') = 0$
- incomplète en y
  c'est à dire l'équation est de la forme $F(x, y') = 0$
- homogéne en x et y et non résoluble en y'
  c'est à dire l'équation est de la forme $F(y/x, y') = 0$ aprés division par une puissance convenable de x.
- de la forme $y = x * y' + f(y')$ c'est une équation de Clairaut : pour la résolution voir 30.8
- de la forme $y = x * a(y') + b(y')$ c'est une équation de Lagrange : pour la résolution voir 30.9

On sait résoudre ces équations à condition de trouver un paramétrage de de la courbe $F(X, Y) = 0$ par $X = f(t), Y = g(t)$.
On pose alors :

- Équation incomplète en x
  $y = f(t), dy/dx = g(t)$
- Équation incomplète en y
  $x = f(t), dy/dx = g(t)$
- Équation homogéne en x et y et non résoluble en y'
  $y/x = f(t), dy/dx = g(t)$
- Résoudre :
  $y^2 + y'^2 = 1$
  On pose :
  $y' = tety = \sqrt{1-t^2}$ ou $y = -\sqrt{1-t^2}$
  $dy = -s * t * dt/\sqrt{1-t^2}$ avec $s = \pm 1$
  $dx = dy/t = -s * dt/\sqrt{1-t^2}$
  $x = -s * \text{ asin}(t) + k$ avec $k = cste$ donc
  $s * x + k = \text{ asin}(t)$ et $\sin(s * x + k) = t$
  $y = s * \sqrt{1-t^2}$ donc $y = s * \sqrt{1 - \sin(s * x + k)^2} = \pm\cos(s * x + k)^2)$
  les solutions sont donc :
  $[\cos(x + k_1), -\cos(x + k_2)]$
- Résoudre :
  $y^2 + y'^2 = 1, y(0) = 1/2$
  si $y(0) = 1/2$ on a $k = pi/3$ et $\cos(x + pi/3) = \sin(pi/6 - x)$

les solutions sont donc :
$[\cos(x + pi/3) = \sin(pi/6 - x), -\cos(x + 2 * pi/3) = \sin(pi/6 + x)]$
Avec `Xcas`
On tape :
`desolve(y^2+y'^2=1,y)`
On obtient :
`[sin(-c_0+x),sin(-c_0-x)]`
On tape :
`desolve([y^2+y'^2=1,y(0)=1/2],y)`
On obtient :
`[sin(pi/6+x),sin(pi/6-x)]`

— Résoudre :
$(y + y')^4 + y' + 3 * y$
On pose :
$y + y' = 2t$ ce qui donne :
$y = -t - 8t^4$ et $dy/dx = 2t - y = 3t + 8t^4$ soit $dx = dy/(3t + 8t^4)$
on a donc :
$dy/dt = -1 - 32t^3$ et $dx = (-1 - 32t^3)/(3t + 8t^4)dt$
On tape :
`int((-1-32*t^3)/(3*t+8*t^4),t)`
On obtient :
`(ln(1/(abs(t)^3*abs(8*t^3+3)^11)))/9`
donc
$x = -(ln(abs(t)^3 * abs(8 * t^3 + 3)^1 1))/9 + k$ et
$y = -t - 8 * t^4$
Avec `Xcas`
On tape :
`desolve((y+diff(y))^4+diff(y)+3*y,y)`
Mais on n'obtient pas de résultat.

— Résoudre :
$y'^2 = 4 * sqrt(y)$
On a :
$y' = 2 * y^{\frac{1}{4}}$
$2 * y^{(3/4)}/3 = x + k$ Donc :
$y = (3(x + k)/2)^{(4/3)} = \exp(4/3 * \ln(3(x + k)/2))$
Avec `Xcas`
On tape :
`desolve((diff(y))^2=(4*sqrt(y)),y)`
On obtient :
`[exp(4*ln(((-48*c_0+96*x)^(1/3))/4)),...]`

30.8 Équation de Clairaut

30.8.1 Résolution

C'est une équation de la forme $y = x * y' + f(y')$ que l'on résout en posant $y' = dy/dx = t$. On a donc $y = t * x + f(t), (x + f'(t)) * dt = 0$.

Donc l'intégrale générale est $t = m = cste \in \mathbb{R}$ et $x(t) = -f'(t), y(t) = -tf'(t) + f(t)$.
Cela définit une infinité de droites D_m d'équation $y = mx + f(m)$ ($m \in \mathbb{R}$) et la courbe C définie par $x(t) = -f'(t), y(t) = -tf'(t) + f(t)$ et qui est l'enveloppe des droites D_m.
En effet la tangente à C au point $x(t_0), y(t_0)$ a pour équation :
$y - y(t_0) = t_0(x - x(t_0))$ donc si $m = t_0$
$y = t_0x + y(t_0) - t_0x(t_0) = t_0x + f(t_0) = mx + f(m)$
Remarque
Une équation de Clairaut est une équation de la forme $y = x * y' + b(y')$.
C'est une équation de Lagrange particulière puisque une équation de Lagrange est une équation de la forme $y = x * a(y') + b(y')$ (cf 30.9).

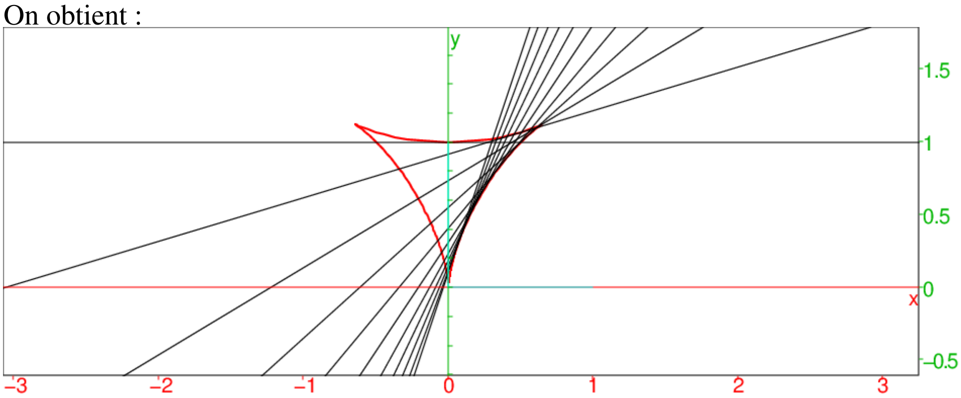
30.8.2 Exercices

Exercice 0
Résoudre :
$y - xy' = y'^2$
On pose $y' = dy/dx = t$ et $f(t) = t^2$.
On a :
$f'(t) = 2t$ et donc comme solution les droites : $y = m * x + m^2$
et comme courbe intégrale :
$x = -2t, y = -2t^2 + t^2 = -t^2$
Les solutions sont donc $y = m * x + m^2$ pour $m \in \mathbb{R}$ et $y = -x^2/4$ **Avec** `Xcas`
On tape :
`desolve(y-x*y'=y'^2)`
On obtient :
`[c_0*x+c_0^2,[-2*` t`,-` t`^2]]`
Exercice 1
Résoudre :
$y - xy' = \sqrt{a^2 + b^2 * y'^2}$
On pose $y' = dy/dx = t$ et $f(t) = \sqrt{a^2 + b^2 * t^2}$.
On a :
$f'(t) = b^2 * t/\sqrt{a^2 + b^2 * t^2}$ et donc comme solution les droites : $y = m * x + \sqrt{a^2 + b^2 * m^2}$
et comme courbe intégrale :
$x = -b^2 * t/\sqrt{a^2 + b^2 * t^2}, y = -b^2 * t^2/\sqrt{a^2 + b^2 * t^2} + \sqrt{a^2 + b^2 * t^2}$
Avec `Xcas`
On tape :
`desolve(y-x*diff(y)=sqrt(a^2+b^2*diff(y)^2),y)`
On obtient :
`[c_0*x+sqrt(a^2+b^2*c_0^2), [-((sqrt(a^2+b^2*` t`^2)*` t`*b^2)/(` t`^2*b^2+a^2)), (sqrt(a^2+b^2*` t`^2)*a^2)/(` t`^2*b^2+a^2)]]`
On peut dessiner les solutions avec `Xcas`, on tape :

```
assume(a=[1,0,5]);
assume(b=[1,0,5]);
assume(m=[1,-5,5]);
droite(y=m*x+sqrt(a^2+b^2*m^2));
```

```
plotparam(-b^2*t/sqrt(a^2+b^2*t^2)+
  i*(-b^2*t^2/sqrt(a^2+b^2*t^2)+sqrt(a^2+b^2*t^2)),t);
```

Exercice 2
Résoudre :
$y - xy' = \frac{1}{1+y'^2}$
On pose $y' = dy/dx = t$ et $f(t) = \frac{1}{1+y'^2}$.
On a :
$f'(t) = \frac{-1}{(1+y'^2)^2}$ et donc comme solution les droites : $y = m * x + \frac{1}{1+m^2}$
et comme courbe intégrale : $x = \frac{2t}{(1+t^2)^2}, y = \frac{3t^2+1}{(1+t^2)^2}$
Avec `Xcas`
On tape :
`desolve(y-x*y'=1/(1+y'^2))`
On obtient :
`[1/(1+c_0^2)+c_0*x,[2*` t`/(1+` t`^2)^2,(1+3` t`^2)/(1+` t`^2)^2]]`
On dessine les solutions avec `Xcas`, on tape :
```
affichage(plotparam((2t+i*(3t^2+1))/(1+t^2)^2),1+epaisseur_ligne_2)
droite(y=m*x+1/(1+m^2))$(m=(0..3)$0.3)
```
On obtient :

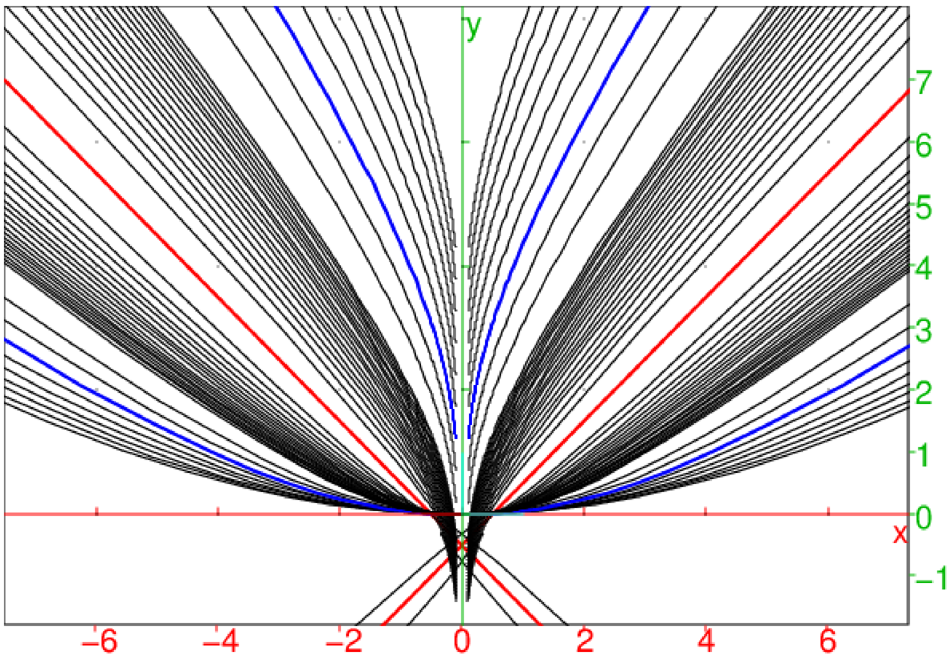


30.9 Équation de Lagrange

C'est une équation de la forme $y = x * a(y') + b(y')$.
On regarde si $y' = c_0 = cste$ est solution. On a dans ce cas :
$y = c_0x + c_1 = x * a(c_0) + b(c_0)$
c'est à dire $y' = c_0 = cste$ est solution si $a(c_0) = c_0$
Si $y' = cste$ n'est pas solution i.e. si on suppose $(a(t) - t)\neg 0$, on résout cette équation en posant :
$y' = dy/dx = t$.
On a donc $y = a(t) * x + b(t)$ et $dy/dt = (dy/dx)(dx/dt) = tdx/dt$ donc :
$dy/dt = a(t)(dx/dt) + (a'(t)x + b'(t)) = dy/dx * dx/dt = tdx/dt$
ou encore :
$(t - a(t))dx/dt = a'(t)xb'(t) + t$
$(t - a(t))dx = (a'(t)x + b'(t))dt$
$dx/dt = (a'(t)x + b'(t))/(t - a(t))$ car on a supposé $(a(t) - t)\neg 0$
On doit donc intégrer :

$dx/dt = (a'(t)x + b'(t))/(t - a(t))$ par rapport à t.
On obtient $x(t) = f(t)$ et donc :
$y(t) = a(t) * x(t) + b(t) = a(t) * f(t) + b(t)$.
Donc l'intégrale générale est :
si $a(c_0) = c_0$ alors $y(t) = x(t) * c_0 + b(c_0)$ et
si $a(t) \neq t$ alors $x(t) = f(t), y(t) = a(t) * f(t) + b(t)$
Exercice
Résoudre $2y - x(y' + y'^3) + y'^2 = 0$ soit $2y = x(y' + y'^3) - y'^2$
Ici, on a : $a(t) = (t + t^3)/2$ donc $t - a(t) = (t - t^3)/2$ et $a'(t) = 1/2 + 3t^2/2$ et
$b(t) = -t^2/2$ donc $b'(t) = -t$ et $t - a(t) = (t - t^3)/2$.
Solution
Avec `Xcas`, on tape :
`desolve(2y-x*(y'-y'^3)+y'^2=0)`
On obtient :
```
[0,1/2+(-i)*x,1/2+(i)*x,[(` t`*c_1-` t`^3-` t`*ln(` t`^2))/(1+2*`
t`^2+` t`^4),` t`^2/2-(-` t`+` t`^3)*(` t`*c_1-` t`^3-`
t`*ln(` t`^2))/(2*(1+2*` t`^2+` t`^4))]]
```
Ou bien, on regarde si $y' = cste = c_0$ est solution :
alors $y = c_0x + c_1$ donc on doit avoir pour tout x :
$2c_0x + 2c_1 - x(c_0 + c_0^3) + c_0^2 = (c_0 - c_0^3)x + 2c_1 + c_0^2 = 0$
ce qui entraine : $c_0 = 0$ ou $c_0 = 1$ ou $c_0 = -1$ et $c_1 = -c_0^2/2$
et donc :
$y = 0$, $y = x - 1/2$ et $y = -x - 1/2$ sont des solutions.
Pour $t \notin \{-1, 0, 1\}$, on pose : $t = y' = dy/dx$.
On a :
$2dy/dt = (t + t^3)dx/dt + x(1 + 3t^2) - 2t = 2(dy/dx)(dx/dt) = 2tdx/dt$
$2tdx/dt - (t + t^3)dx/dt = x(1 + 3t^2) - 2t$
Il faut donc résoudre, si $(t - t^3) \neq 0$, l'équation (1) :
$dx/dt = (x(1 + 3t^2) - 2t)/(t - t^3) = x(1 + 3t^2)/(t - t^3) - 2/(1 - t^2)$
On a comme solution de l'équation sans second membre de l'équation (1) :
$x = C\exp(\int(1 + 3t^2)/(t - t^3)dt) = C\exp(\int 1/t - 2/(-1 + t) - 2/(1 + t))dt$
Soit $x = C\exp(\ln(|t|) - 2\ln(|t^2 - 1|)) = C * t/(-1 + t^2)^2$
On a donc :
$x = Ct/(t^2 - 1)$ est solution de l'équation sans second membre.
On fait une variation de la constante :
$x(t)' = C(t)' * t/(-1 + t^2)^2 + C(t) * (t/(-1 + t^2)^2)'$
Les terme en C(t) s'annule et il reste :
$C(t)' * t/(-1 + t^2)^2 = -2/(1 - t^2)$
ce qui donne :
$C(t)' = 2/t$ soit $C(t) = ln(t^2) + C$
Donc
$x(t) = (t^2 - ln(t^2) + C) * t/(-1 + t^2)^2$
$y(t) = (t + t^3) * x(t)/2 - t^2/2$ soit
$y(t) = (-t^2 + c*t^2 + 3*t^4 + c*t^4 - t^2*ln(t^2) - t^4*ln(t^2))/(2 - 4*t^2 + 2*t^4)$
On tape :
`assume (t>1);desolve(x'=x*(1+3t^2)/(t-t^3)-2/(1-t^2),t,x)`
On obtient $x(t)$:
`(c_0*t+t^3-2*t*ln(t))/(1-2*t^2+t^4)`

On tape :
```
assume (t<1 and t>0);desolve(x'=x*(1+3t^2)/(t-t^3)-2/(1-t^2),t,x)
```
On obtient $x(t)$:
```
(c_0*t+t^3-2*t*ln(t))/(1-2*t^2+t^4)
```
On tape :
```
assume (t<-1);desolve(x'=x*(1+3t^2)/(t-t^3)-2/(1-t^2),t,x)
```
On obtient $x(t)$:
```
(-c_0*t+t^3-t*ln(t^2))/(1-2*t^2+t^4)
```
On tape :
```
assume (t>-1 and t<0);desolve(x'=x*(1+3t^2)/(t-t^3)-2/(1-t^2),t,x)
```
On obtient $x(t)$:
```
(-c_0*t+t^3-t*ln(t^2))/(1-2*t^2+t^4)
```
Sur chacun des 4 intervalles, les solutions sont donc fonction de t (c est une constante qui peut être différente sur chacun des 4 intervalles) :
$x(t) = (c * t + t^3 - t * ln(t^2))/(1 - 2 * t^2 + t^4)$ et
$y(t) = (-t^2 + c * t^2 + 3 * t^4 + c * t^4 - t^2 * ln(t^2) - t^4 * ln(t^2))/(2 - 4 * t^2 + 2 * t^4)$
Les solutions sont donc :
$y = 0, y = x - 1/2, y = -x - 1/2$ et
pour $t \notin \{-1, 0, 1\}$, pour $c = cste$ et $k = cste$ on a :
$x(t) = (c * t + t^3 - t * ln(t^2))/(1 - 2 * t^2 + t^4)$ et
$y(t) = (-t^2 + c * t^2 + 3 * t^4 + c * t^4 - t^2 * ln(t^2) - t^4 * ln(t^2))/(2 - 4 * t^2 + 2 * t^4)$
On peut dessiner le graphe des solutions, on tape :
```
x(t,c):=(c*t+t^3-t*ln(t^2))/(1-2*t^2+t^4)
y(t,c):=(-t^2+c*t^2+3*t^4+c*t^4-t^2*ln(t^2)-t^4*ln(t^2))/(2-4*t^2+2*t^4)
z(t,c):=x(t,c)+i*y(t,c)
plotparam(z(t,c),t)$(c=(2..10))
plotparam(z(t,c),t)$(c=(-1.1..0.9)$0.1)
affichage([droite(y=x-1/2),droite(y=-x-1/2)],1+epaisseur_ligne_2)
affichage(plotparam(z(t,4),t),4+epaisseur_ligne_2)
```
On obtient :



30.10 Exercices

1. Résoudre :
   $y(y'^2-1)+2xy'=0$
   On remarque que si on multiplie par y l'équation devient :
   $y^2y'^2-y^2+2xy'y=0$ donc l'équation devient :
   $(x+yy')^2=x^2+y^2$
   On tape :
   `desolve((x+y*y')^2=x^2+y^2)`
   On obtient (c'est une équation homogéne) :
   `[0,abs(x)*sqrt(2*c_0*x+c_0^2)/x,0,abs(x)*sqrt(-2*c_0*x+c_0^2)/x]`
   Ou bien puisque $y'^2-1\neq 0$ car sinon cela entraine $x=0$, on a :
   $y=2xy'/(1-y'^2)$
   Si on pose $y'=t$ on a une équation différentielle de Lagrange.
   On pose $y'=t$:
   $dy/dt = tdx/dt = 2t/(1-t^2)dx/dt+x(2/(1-t^2)+4t^2/(1-t^2)^2)$
   donc :
   $(t-2t/(1-t^2))dx/dt=x(2+2t^2)/(1-t^2)^2$
   On tape :
   `desolve((t-2t/(1-t^2))*diff(x,t)=x*(2+2t^2)/(1-t^2)^2,t,x)`
   On obtient $x(t)$:
   `(-c_0+c_0*t^2)/t^2`
   On tape :
   `2t*(-c_0+c_0*t^2)/t^2/(1-t^2)`
   On obtient $y(t)$:
   `-2*c_0/t`
   Donc $x(t)=c_0-c_0/t^2=c_0(t^2-1)/t^2$ et $y(t)=-c_0/t$
   Ou on tape directement :

`normal(desolve(y*(y'^2-1)+2x*y'=0))`
On obtient :
```
[0,(-i)*x,(i)*x,[(-c_1+` t`^2*c_1)/` t`^2,-2*c_1/`
t`]]
```

2. Résoudre :
$y = xy'^2 + y'^3$
On tape :
`desolve(y=x*y'^2+y'^3)`
On obtient (c'est une équation de Lagrange) :
```
[0,1+x,[(2*c_1+3*` t`^2-2*` t`^3)/(2-4*` t`+2*` t`^2),-`
t`^3+` t`^2*(2*c_1+3*` t`^2-2*` t`^3)/(2-4*` t`+2*`
t`^2)]]
```

3. Résoudre :
$x^2y'^3 + y^2(y' - 1) = 0$
On tape :
`desolve((x+y*y')^2=x^2+y^2)`
ou bien puisque $y'^2 - 1 \neq 0$ car sinon cela entraine $x = 0$, on a :
$y = 2xy'/(1 - y'^2)$
Si on pose $y' = t$ on a une équation différentielle de Lagrange.
On pose $y' = t$:
$dy/dt = tdx/dt = 2t/(1 - t^2)dx/dt + x(2/(1 - t^2) + 4t^2/(1 - t^2)^2)$
donc :
$(t - 2t/(1 - t^2))dx/dt = x(2 + 2t^2)/(1 - t^2)^2$
On tape :
`desolve((t-2t/(1-t^2))*diff(x,t)=x*(2+2t^2)/(1-t^2)^2)`
On obtient :
`(-c_0+c_0*t^2)/t^2`

4. Résoudre :
$(1 - x^2) * y' - y = 1 - x^2$
et trouver le lieu des points d'inflexion et das tangentes horizontales.
Avec `Xcas`
On tape :
`assume(x<-1);desolve((1-x^2)*y'-y=1-x^2)`
On obtient après avoir factoriser le numérateur :
`(1+x)*(sqrt(-1+x^2)+ln(sqrt(-1+x^2)-x)+c_0)/(sqrt(-1+x^2))`
On tape :
`assume(x>-1 and x<1);desolve((1-x^2)*y'-y=1-x^2)`
On obtient après avoir factoriser le numérateur :
`(1+x)*(sqrt(1-x^2)+asin(x)+c_0)/(sqrt(1-x^2))`
On tape :
`assume(x>1);desolve((1-x^2)*y'-y=1-x^2)`
On obtient après avoir factoriser le numérateur :
`(1+x)*(sqrt(-1+x^2)+ln(sqrt(-1+x^2)-x)+c_0)/(sqrt(-1+x^2))`
À la main on cherche tout d'abord à résoudre :
$(1 - x^2) * y' - y = 0$
On obtient :

$y = c\sqrt{\dfrac{abs(1+x)}{abs(1-x)}}$.
puis pour résoudre $(1-x^2)*y' - y = 1-x^2$, on fait varier la constante en posant :
$y = z\sqrt{\dfrac{abs(1+x)}{abs(1-x)}}$.
Il faut donc résoudre :
$z'\sqrt{\dfrac{abs(1+x)}{abs(1-x)}} = 1$.
c'est à dire
$z' = \sqrt{\dfrac{abs(1-x)}{abs(1+x)}} = \dfrac{abs(1-x)}{\sqrt{abs(1-x^2)}}$
Si $x < -1$ $z' = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
Si $-1 < x < 1$ $z' = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
Si $x > 1$ $z' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Donc :
Si $x < -1$ $z = \ln(-x-\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1} + K$
Si $-1 < x < 1$ $z = \operatorname{asin}(x) + \sqrt{1-x^2} + K$
Si $x > 1$ $z = \sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + K$
et $y = z\sqrt{\dfrac{abs(1+x)}{abs(1-x)}}$.
Quand $y'(x_0) = 0$, on a $y(x_0) = x_0^2 - 1$.
Le lieu des tangentes horizontales est donc la courbe d'équation $y = x^2 - 1$.
En dérivant on a :
$(1-x^2)*y'' - 2xy' - y' = -2x)$
Quand $y''(x_0) = 0$, on a $y'(x_0) = 2x_0/(1+2x_0) = 1 - 1/(1+2x_0)$ donc $y(x_0) = (1-x_0^2)(y'(x_0)-1) = (x_0^2-1)/(1+2x_0)$.
Le lieu des tangentes points d'inflexion est donc la courbe d'équation $y = (x^2-1)/(1+2x)$.

5. Résoudre :
$(1+x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$
C'est une équation de Ricatti.
On trouve que $y = -x$ est une solution particulière.
On fait donc le changement de variables :
$y = -x + z$ donc $y' = -1 + z'$.
Il faut donc résoudre :
$-(1+x^3) + (1+x^3)z' + 2x(x^2+z^2-2xz) + x^2(-x+z) + 1 = 0$ ou encore
$(1+x^3)z' + 2xz^2 - 3x^2z = 0$
Si $z \neq 0$ (i.e. $y \neq -x$) on a :
$z'/z^2 + x^3z'/z^2 - 3x^2/z = -2x$ ou encore
$-(1/z)' - (x^3/z)' = -2x$
Donc :
$(1+x^3)/z = x^2 + c$

Les solurions sont donc :
$y = -x$ et $y = -x + (1 + x^3)/(x + c$ pour c constante arbitraire.
On tape :
`desolve((1+x^3)*y'+2x*y^2+x^2*y+1=0,x,y=-x)`
On obtient :
`[-x,(1+x^3)/(c_1+x^2)-x]`

30.11 Problème

On veut résoudre l'équation différentielle (E_n) pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n + 1)y = 0$$

— Résoudre (E_0) en cherchant une solution polynômiale.
— Résoudre (E_1) en cherchant une solution polynômiale.
— Chercher une solution polynômiale de (E_n).
— Résoudre (E_5).
— Résoudre (E_6).

Solution

— Résolution de (E_0).
Il faut résoudre $(x^2 - 1)y'' + 2xy' = 0$
Donc $y'' = \dfrac{2x}{1 - x^2} y'$
$y' = C \exp(\int (\dfrac{2x}{1 - x^2)} dx) = C \exp(-\ln(|1 - x^2|)) = \dfrac{C}{|1 - x^2|}$
$y = C \int (\dfrac{1}{2|1 - x|} + \dfrac{1}{2|1 + x|}) dx = \dfrac{C}{2} (\ln(|1 + x|) - \ln(|1 - x|)) + K$
où C et K sont des constantes différentes sur chacun des intervalles :
$]-\infty, -1[;]-1, 1[,]1, +\infty[$.
On tape :
`desolve((x^2-1)*y''+2*x*y'=0)`
On obtient :
`c_0*(-ln(abs(1+x))/2+ln(abs(-1+x))/2)+c_1`
c_0 et c_1 étant des constantes différentes sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[;]-1, 1[,]1, +\infty[$.

— Résoudre (E_1) en cherchant une solution polynômiale.
(E_1) a comme solution le polynôme $P1(x) = a * x$ avec $a \in R$.
On fait une variation de la constante :
On pose : $y = a(x) * x$
On a :
$y' = a(x)' * x + a(x)$ et $y'' = a(x)'' * x + 2 * a(x)'$
Donc :
$(x^2 - 1) * (a(x)'' * x + 2 * a(x)') + 2x * (a(x)' * x + a(x)) - 2a(x) * x =$
$(x^2 - 1) * (a(x)'' * x + 2 * a(x)') + 2x * a(x)'$
les termes en $a(x)$ se simplifient car $a(x) = cste$ est solution.
Il reste donc à résoudre l'équation différentielle :
$x(x^2 - 1) * a(x)'' + (2x^2 + 2x^2 - 2) * a'(x) = 0$.
En posant $z(x) = a(x)'$ on a une équation différentielle du premier ordre :
$x(x^2 - 1) * z(x)' + (4x^2 - 2)z(x) = 0$

donc :
$z(x) = K\exp(\int -(4x^2-2)/(x(x^2-1))dx)$
On a :
$\int -(4x^2-2)/(x(x^2-1))dx = \int -2/x - 1/(-1+x) - 1/(1+x)dx = -\ln(|x^2(-1+x)(1+x)|)$
Donc $a'(x) = z(x) = K/(-x^2+x^4)$
On a :
$1/(-x^2+x^4) = -1/x^2 + 1/(2(-1+x)) - 1/(2(1+x))$
Donc :
$a(x) = K*(1/x - \ln(|1+x|)/2 + \ln(|-1+x|)/2) + C$
donc
$y(x) = K*(1 - x*\ln(|1+x-)/2 + x\ln(|-1+x|)/2) + C*x$
On tape :
`desolve((x^2-1)*y''+2*x*y'-2y=0)`
On obtient :
`x*(c_0*(1/x-ln(abs(1+x))/2+ln(abs(-1+x))/2)+c_1)`

— Résoudre (E_n)
On cherche les a_j pour que $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j j x^j$ soit solution de E_n.
On a comme relation de récurrence :
$a_{j-2} = \dfrac{j*(j-1)a_j}{(j-2-n)(j-1+n)}$
ou encore
$a_j = \dfrac{(j+2)*(j+1)a_{j+2}}{(j-n)(j+1+n)}$
On trouve comme polynômes solution pour :
$n = 2$ on a $x^2 - 1/3$
$n = 3$ on a $x^3 - 3x/5$
$n = 4$ on a $x^4 - 6x^2/7 + 6/70$
$n = 5$ on a $x^5 - 10x^3/9 + 5x/21$
$n = 6$ on a $x^6 - 15x^4/11 + 5/11*x^2 - 5/231$
$n = 7$ on a $x^7 - 21x^5/13 + 105/143*x^3 - 35x/429$
Calcul des a_n en fonction de n
Si $n = 2p$
$a_{2p} = 1$
$a_{2p-2} = -\dfrac{2p(2p-1)}{2(4p-1)}$
$a_{2p-4} = \dfrac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)}{2*4(4p-1)(4p-3)}$
$a_{2p-6} = \dfrac{2p(2p-1)...(2p-5)}{-2*4*6(4p-1)(4p-3)(4p-5)}$
...
$a_{2p-2k} = \dfrac{2p(2p-1)...(2p-2k+1)}{(-2)^k k!(4p-1)(4p-3)...(4p-2k+1)}$
Si $n = 2p+1$
$a_{2p+1} = 1$
$a_{2p+1-2} = -\dfrac{(2p+1)(2p)}{2(4p+1)}$
$a_{2p+1-4} = -\dfrac{(2p+1)2p(2p-1)(2p-2)}{8(4p+1)(4p-1)}$
...

$$a_{2p+1-2k} = \frac{(2p+1)2p(2p-1)...(2p-(2k-2))}{(-2)^k(k)!(4p+1)(4p-1)...(4p-2k+3)}$$

On tape :

```
desolve((x^2-1)*y''+2*x*y'-6y=0)
```

On obtient :

```
Polynomial solution found x^2-1/3
(-1/3+x^2)*(c_0*(-ln(abs(1+x))/8+ln(abs(-1+x))/8+
3*x/(4*(-1+3*x^2)))+c_1)
```

On tape :

```
desolve((x^2-1)*y''+2*x*y'-12*y=0)
```

On obtient :

```
Polynomial solution found x^3+(-3*x)/5
(-3*x/5+x^3)*(c_0*(-ln(abs(1+x))/8+ln(abs(-1+x))/8-
(4-15*x^2)/(12*(-3*x+5*x^3)))+c_1)
```

On tape :

```
desolve((x^2-1)*y''+2*x*y'-20y=0)
```

On obtient :

```
Polynomial solution found x^4+(-6*x^2)/7+3/35
(c_0*(-ln(abs(1+x))/128+ln(abs(-1+x))/128+(-55*x+
105*x^3)/(192*(3-30*x^2+35*x^4)))+
c_1)*(-6*x^2/7+x^4+3/35)
```

On tape :

```
desolve((x^2-1)*y''+2*x*y'-30y=0)
```

On obtient :

```
Polynomial solution found x^5+(-10*x^3)/9+(5*x)/21
(c_0*(-ln(abs(1+x))/128+ln(abs(-1+x))/128+(64-735*x^2+
945*x^4)/(960*(15*x-70*x^3+63*x^5)))+
c_1)*(5*x/21-10*x^3/9+x^5)
```

On tape :

```
desolve((x^2-1)*y''+2*x*y'-42y=0)
```

On obtient :

```
Polynomial solution found x^6+(-15*x^4)/11+(5*x^2)/11-5/231
(c_0*(-ln(abs(1+x))/512+ln(abs(-1+x))/512-(-231*x+1190*x^3-
(1155*x^5)/(1280*(-5+105*x^2-315*x^4+ 231*x^6)))+
c_1)*(5*x^2/11-15*x^4/11+x^6-5/231)
```

On tape :

```
desolve((x^2-1)*y''+2*x*y'-56y=0)
```

On obtient :

```
Polynomial solution found x^7+(-21*x^5)/13+(105*x^3)/143+
(-35*x)/429
(c_0*(-ln(abs(1+x))/512+ln(abs(-1+x))/512-(256-5943*x^2+
19250*x^4-15015*x^6)/(8960*(-35*x+315*x^3-
693*x^5+429*x^7)))+c_1)*(-35*x/429+105*x^3/143-
21*x^5/13+x^7)
```

Chapitre 31

Équations fonctionnelles

31.1 f continue vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
Montrer que $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Solution
On a $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$
Montrons que $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $f(2x) = f(x+x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On montre par récurrence que si $n \in \mathbb{N}$ alors :
$f(nx) = nf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On suppose que $f((n-1)x) = (n-1)f(x)$ on a alors :
$f(nx) = f((n-1)x+x) = f((n-1)x) + f(x) = (n-1)f(x) + f(x) = nf(x)$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc pour $x = 1$ on a :
$f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrons que $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
On a :
$f(x-x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$f(-nx) = nf(-x) = -nf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $f(nx) = nf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc pour $x = 1$ on a :
$f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Montrons que $f(r) = rf(1)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a $f(p/q) = f(p(1/q) = pf(1/q)$
donc $f(1/q) = 1/q * f(1)$ puisque $f(q/q) = f(1) = qf(1/q)$ et
$f(p/q) = (p/q)f(1)$ donc
Donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a $f(r) = rf(1)$.
Montrons que $f(a) = af(1)$ pour tout $n \in \mathbb{R}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ il existe une suite $a_n \in \mathbb{Q}$ convergente vers a On a $f - a_n) = a_n f(1)$
donc quand n tend vers l'infini $a_n f(1)$ tend vers $af(1)$ et $f(a_n$ tend vers f(a)
puisque f est continue en $x = a$ donc :
$f(a) = af(1)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

31.2 f continue vérifiant $f(\dfrac{x+y}{2}) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f((x+y)/2) = (f(x)+f(y))/2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
Montrer que $f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Solution
Si f est 2 fois dérivable c'est facile car en dérivant la relation par rapport à x, on a :
$f'((x+y)/2) = f'(x)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
en dérivant cette nouvelle relation par rapport à y, on a :
$f''((x+y)/2) = 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
$f''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc $f(x) = ax + b$ qui vérifie bien :
$f((x+y)/2 = ax/2 + ay/2 + b = (ax+b)/2 + (ay+b)/2 = (f(x)+f(y))/2$
Si f est seulement continue c'est lus compliqué !
Faisons le dessin du graphe G de f.
Soient $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ deux points de G.
Le milieu $C(a+b)/2, (f(a)+f(b))/2$ de AB est aussi sur le graphe de f puisque $f((a+b)/2) = (f(a)+f(b))/2$
Donc le milieu D (resp(E) de AC (resp CB) est aussi sur le graphe de f et l'abscisse de D (resp E) est $a/2 + (a+b)/4 = (3a+b)/4$ (resp $(a+3b)/4$
De même tous les barycentres $pA + qB$ de A avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $p + q = 2^n$ sont sur le graphe G de f.(on le montre par récurrence.
L'ensemble E de ces barycentres est contenu dans le segment AB qui est une portion de la droite d'équation $y = d(x) = ((f(b) - f(a))x + bf(a) - af(b))/(b-a)$
L'ensemble E_x des abscisses de ces barycentres sont :
$(pa + (2^n - p)b)/2^n$ pour $p, n \in \mathbb{N}$ et $p \leq 2^n$.
L'adhérence de E_x est $[a, b]$ et $f = d$ supur $x \in E_x$ Comme f et d sont continues on a $f(x) = d(x)$ pour $x \in [a, b]$ donc $f(x) = ((f(b) - f(a))x + bf(a) - af(b))/(b-a)$
Si $a = 0$ et $b = 1$, on a $f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ si $a < 0$ et $b > 1$ le segment AB a donc pour équation :
$y = d(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$.

31.3 Trois exercices du même genre

31.3.1 f dérivable vérifiant $f'(x) = f(-x)$

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f'(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $f(x) = f(0)(\cos(x) + \sin(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Solution
Puisque f est dérivable, la fonction g définit par $g(x) = f(-x)$ est aussi dérivable donc f' est dérivable.
On en déduit par récurrence que f est indéfiniment dérivable.
En dérivant la relation $f'(x) = f(-x)$, on a : $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est solution de l'équation différentielle :
$y'' + y = 0$
On tape :
`desolve(y''+y=0,y)`
On obtient :
`c_0*cos(x)+c_1*sin(x)`
Cherchons les valeurs de $c_0 = a$ et $c_1 = b$ pour lesquelles f vérifie $f'(x) = f(-x)$.
On tape :
```
f(x):=a*cos(x)+b*sin(x)
normal(solve(f(x)'-f(-x)=0,b)),f(0)
```
On obtient :
`[a],a`
Donc $b = a = f(0)$ et
$f(x) = f(0)(\cos(x) + \sin(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

31.3.2 f dérivable vérifiant $f'(x) = f(1 - x)$

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f'(x) = f(1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $f(x) = f(0)(\cos(x) + \sin(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Solution
Puisque f est dérivable, la fonction g définit par $g(x) = f(1 - x)$ est aussi dérivable donc f' est dérivable.
On en déduit par récurrence que f est indéfiniment dérivable.
En dérivant la relation $f'(x) = f(1 - x)$, on a : $f''(x) = -f'(1 - x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc f est solution de l'équation différentielle :
$y'' + y = 0$
On tape :
`desolve(y''+y=0,y)`
On obtient :
`c_0*cos(x)+c_1*sin(x)`
Cherchons les valeurs de $c_0 = a$ et $c_1 = b$ pour lesquelles f vérifie $f'(x) = f(1 - x)$. On tape :
```
f(x):=a*cos(x)+b*sin(x)
simplify(texpand(solve(f(x)'-f(1-x)=0,b))),f(0)
```
On obtient :
`[-a*cos(1)/(-1+sin(1))],a`
Donc $b = a * \cos(1)/(1 - \sin(1))$ et $a = f(0)$
$f(x) = f(0)(\cos(x)+\sin(x)\cos(1)/(1-\sin(1)))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos(1)/(1-\sin(1)) = \cos(1)/(\sin(\pi/2) - \sin(1))$.
On tape :
```
f(x):=a*(cos(x)+sin(x)*cos(1)/(1-sin(1)))
simplify(f'(x)-f(1-x))
```
On obtient :
`0`

31.3.3 f dérivable vérifiant $f'(x) = f(1/x)$

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f'(x) = f(1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $f(x) = f(0)(\cos(x) + \sin(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Solution
Puisque f est dérivable, la fonction g définit par $g(x) = f(1/x)$ est aussi dérivable donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On en déduit par récurrence que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
En dérivant la relation $f'(x) = f(1/x)$, on a : $f''(x) = -f'(1/x)/x^2 = -f(x)/x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc f est solution de l'équation différentielle :
$x^2y'' + y = 0$
On pose $t(x) = \ln(|x|$ ou encore $x(t) = \epsilon \exp(t)$ avec $\epsilon = \pm 1$.
On a :
$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ et $\frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$
Donc on a :
$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$
$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}(\frac{1}{x})^2 - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2}$
Donc si $z(t) = y(x(t))$, on a $\frac{dy}{dt} = z'(t)$ et $\frac{d^2y}{dt^2} = z''(t)$:
$x^2y''(x) + y(x) = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y(x(t) = z'' - z' + z = 0$
On tape :
```
desolve(z''-z'+z=0,t,z)
```
On obtient :
```
exp(t/2)*(c_0*cos(sqrt(3)*t/2)+c_1*sin(sqrt(3)*t/2))
```
Comme $t(x) = \ln|x|)$, on obtient :
```
exp(ln(abs(x))/2)*(c_0*cos(sqrt(3)*ln(abs(x))/2)+
c_1*sin(sqrt(3)*ln(abs(x))/2))
```
Cherchons les valeurs de $c_0 = a$ et $c_1 = b$ pour lesquelles f vérifie $f'(x) = f(\frac{1}{x})$.
On tape :
```
f(x):=exp(ln(abs(x))/2)*(a*cos(sqrt(3)*ln(abs(x))/2)+
b*sin(sqrt(3)*ln(abs(x))/2))
assume(x>0);h(x):=function_diff(f)(x)-f(1/x)
assume(x<0);k(x):=function_diff(f)(x)-f(1/x)
```
On tape :
```
simplify(texpand(solve(h(x)=0,a)))
```
On obtient :
```
[b*sqrt(3)]
```
On tape :
```
simplify(texpand(solve(k(x)=0,a)))
```
On obtient :
```
[-b*sqrt(3)/3]
```
On tape :
```
assume(x>0);a:=b*sqrt(3);simplify(f(x)'-f(1/x))
```
On obtient :
```
x,(sqrt(3))*b,0
```
On tape :

```
assume(x<0);a:=-b*sqrt(3)/3;simplify(f(x)'-f(1/x))
```

On obtient :

```
x,-b/(sqrt(3)),0
```

Donc :
On a comme solution la fonction définit par :
Si $x>0$, $f(x)=b\exp(\frac{\ln(x)}{2})(\sqrt{3}*\cos(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2})+\sin(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2})$
Si $x<0$, $f(x)=b\exp(\frac{\ln(-x)}{2})(-\sqrt{3}/3*\cos(\frac{\sqrt{3}\ln(-x)}{2})+\sin(\frac{\sqrt{3}\ln(-x)}{2}))$

31.4 f dérivable vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont indéfiniment dérivables et qui vérifient $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$.
Solution On remarque que si $y=0$ on a :
$f(x)=f(x)+f(0)$ donc $f(0)=0$
Dérivons la relation par rapport à x, on a :
$f'(x+y)=f'(x)+2y$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$
Dérivons cettex=exp(t) nouvelle relation par rapport à x, on a :
$f''(x+y)=f''(x)$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$
Dérivons cette nouvelle relation par rapport à y, on a :
$f'''(x+y)=0$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$
Donc $f'''(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=a$ avec a constante.
Donc en intégrant, on a :
pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=ax+b$ avec a et b constantes.
On a aussi la relation :
$f'(x+y)=f'(x)+2y$ soit $a(x+y)+b=ax+b+2y$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$
ce qui implique $a=2$.
Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x+b$.
Donc en intégrant, on a :
pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+bx+c$ avec b et c constantes.
Comme $f(0)=0$ on en déduit que $c=0$.
Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+bx$ avec b constante.
Vérifions, on a bien :
$f(x+y)=(x+y)^2+b(x+y)=x^2+y^2+2xy+bx+by=x^2+bx+y^2+by+2xy=f(x)+f(y)+2xy$

Chapitre 32

Les fonctions de Bessel

32.1 Équations et fonctions de Bessel

Les équations différentielles de Bessel (E_p) sont de la forme :
$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ pour $p \in \mathbb{R}$.
Les fonctions de Bessel d'ordre p ou première espèce, $J_p(x)$, sont des solutions de ces équations différentielles pour $p \in \mathbb{R}$.
$J_p(x)$ est définie par la série entière.
Pour $p \in \mathbb{Z}$ on a :

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{p+2n}}{2^{p+2n} n!(n+p)!}$$

Pour $p \in \mathbb{R}$ on a :

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{p+2n}}{2^{p+2n} n!\Gamma(n+p+1)}$$

Si $p \notin \mathbb{Z}$, J_p et J_{-p} forment une base de solutions de l'équation (E_p).
Si $p \in \mathbb{Z}$, $J_{-p} = (-1)^p J_p$ et il faut trouver une autre solution.
Pour $p \in \mathbb{Z}$, on appelle fonction de Bessel de seconde espèce la fonction définie par :

$$Y_p(x) = \lim_{\lambda -> p} \frac{J_\lambda(x)\cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)}$$

Donc :
Pour $p \in \mathbb{Z}$, J_p et Y_p forment une base de solutions de (E_p).
Pour $p \notin \mathbb{Z}$, J_p et J_{-p} forment une base de solutions de l'équation (E_p).

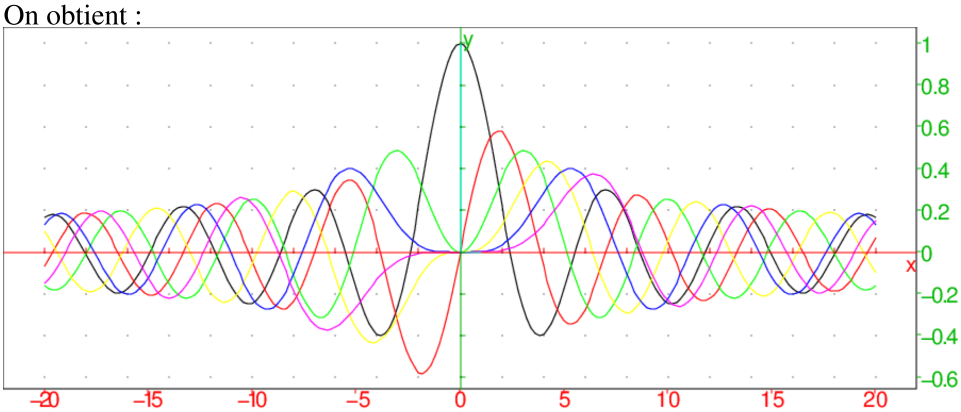
32.1.1 Propriétés des fonctions de Bessel

La série entière définissant la fonction de Bessel converge pour tout x et est de plus absolument et uniformément convergente dans tout intervalle fini.
On applique le critère de d'Alembert sur $[-a, a]$ on a :
$|\frac{(-1)^{n+1}x^{p+2n+2}}{(2^{p+2n+2}(n+1)!(n+p+1)!)}| * |\frac{2^{p+2n}n!(n+p)!)}{(-1)^n x^{p+2n}}| = \frac{|x|^2}{4(n+1)(n+p+1)}$
et on a
$\frac{|x|^2}{4(n+1)(n+p+1)} < \frac{a^2}{4(n+1)(n+p+1)}$
On a pour $p \in \mathbb{Z}$:

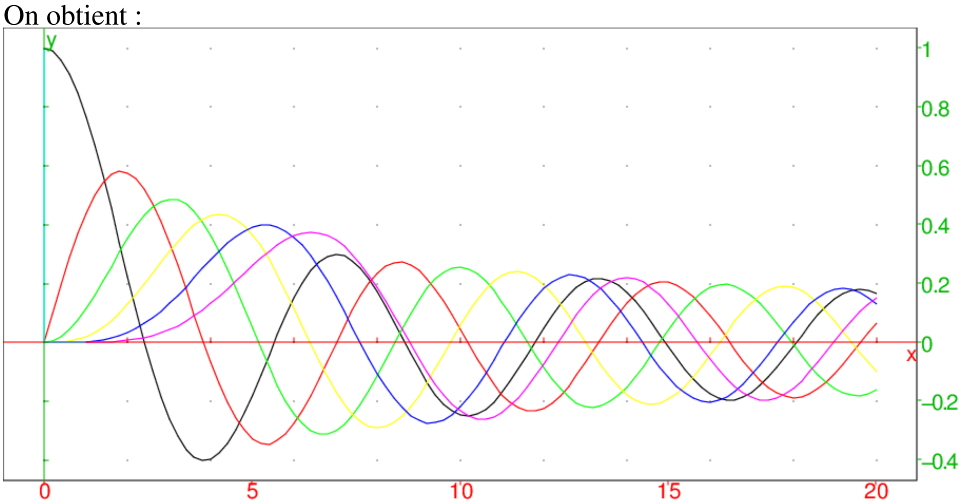
$J_0(x)' = -J_1(x)$
$(x^p J_p(x))' = x^p J_{p-1}(x)$
$J_{p+1}(x) = 2pJ_p(x)/x - J_{p-1}(x)$
$J_{p+1}(x) = pJ_p(x)/x - J_p(x)'$
$J_{-1}(x)' = -J_1(x)$
$J_{-p}(x)' = (-1)^p J_p(x)$
$(x^p J_p(x))' = x^p J_{p-1}(x)$
$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x)t^p$=$\exp(xt/2)\exp(-x/(2t))$
Pour un réel x donné, les $J_p(x)$ pour $p \in \mathbb{Z}$, sont les coeffcients de Fourier de la fonction $t- > \exp(ix\sin(t))$:

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ J_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(x\sin(t) - nt))dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t) - nt)dt$$

On tape :
```
J(x,p):=sum((-1)^n*x^(p+2n)/(2^(p+2n)*n!*(n+p)!),n,0,50);
plotfunc([J(x,0),J(x,1),J(x,2),J(x,3),J(x,4),J(x,5)],
x=-20..20,color=[0,1,2,3,4,5],xstep=0.2)
```
On obtient :



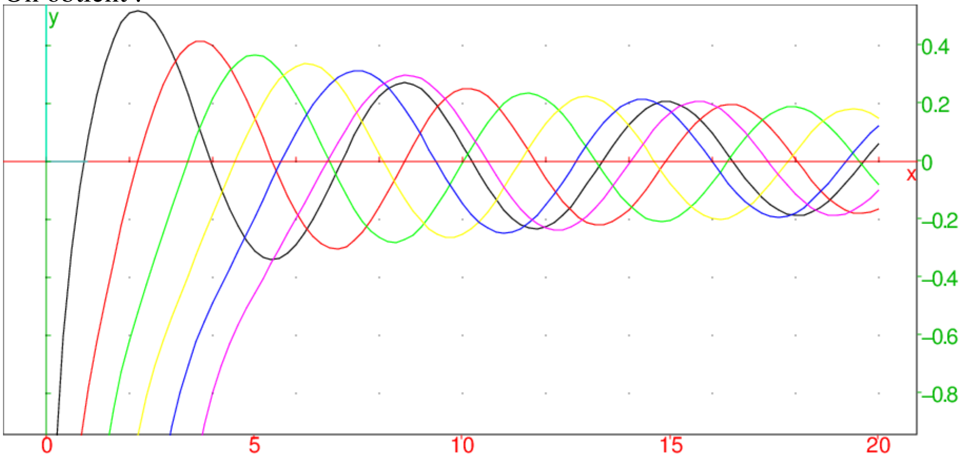
Avec `Xcas` la fonction `J(x,p)` s'appelle `BesselJ(p,x)` et la fonction `Y(x,p)` s'appelle `BesselY(p,x)`.
On tape :
```
plotfunc([BesselJ(k,x)$(k=0..5)],x=0..20,color=[0,1,2,3,4,5],xstep=0.
```
On obtient :



On tape :

```
plotfunc([BesselY(k,x)$(k=0..5)],x=0..20,color=[0,1,2,3,4,5],xstep=0.2)
```

On obtient :



Les fonctions de Bessel sont aussi connues sous le nom de fonctions cylindriques, ou d'harmoniques cylindriques, parce qu'elles font partie des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (intervenant, par exemple, dans la propagation de la chaleur dans un cylindre).
Les fonctions de Bessel ont les formes asymptotiques suivantes pour $\alpha > 0$:

— Près de 0 (et plus précisément pour $0 < x \ll \sqrt{\alpha+1}$), on a :

$$J_\alpha(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha$$

$$Y_\alpha(x) \approx \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right] & \text{si } \alpha = 0 \\ -\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\alpha & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

où γ est la constante d'Euler (`evalf(euler_gamma)`=0.577215664902) et Γ est la fonction gamma.

— Pour x tendant vers l'infini (et plus précisément pour $x \gg |\alpha^2 - 1/4|$), ces développements deviennent :

$$J_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

32.1.2 Les fonctions de Bessel modifiées

Les fonctions de Bessel modifiées $I_n(x)$ et $K_n(x)$ génèrent l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (x^2+n^2)y = 0$$

Elles sont reliées à la fonction de Bessel de première espèce J_n par :

$$I_n(x) = i^{-n}\, J_n(ix)$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{i^n J_{-n}(ix) - i^{-n} J_n(ix)}{\sin(nx)}$$

Propriétés des Kn

$$K_n(z) = \frac{2^n\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}} z^n \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(z^2+x^2)^{n+1/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\Gamma(n-1/2)} z^n \int_1^{+\infty} (x^2-1)^{n-1/2} \exp(-zx)\,\mathrm{d}x \text{ (pour } n > -1/2)$$

Chapitre 33

Groupes de permutations

33.1 Les théorèmes

Soit $\mathtt{J_n} = [\mathtt{0}, \mathtt{1}..\mathtt{n} - \mathtt{1}]$. Une permutation $\mathtt{p}$ de $\mathtt{n}$ éléments est une application bijective de $\mathtt{J_n}$ dans lui même et induit une application $\pi_\mathtt{p}$ de $\mathbb{Z}^\mathtt{n}$ dans lui même ($\pi_\mathtt{p}(\mathtt{x_i}) = \mathtt{x_{p(i)}}$).
Les permutations forment un groupe pour la composition des applications.
Un cycle $\mathtt{c}$ est une permutation telle qu'il existe un entier k ($0 \leq k \leq n-1$) vérifiant :
pour $j = 0...k-1$ $c(a_j) = a_{j+1}$ et $c(a_k) = a_0$
pour $j = k+1...n-1$ $c(a_j) = a_j$
k est appelé l'ordre du cycle c ($c^k = id$).
Un cycle d'ordre k est aussi appelé une permutation circulaire d'ordre k.
Une transposition t est un cycle d'ordre 2 ($t^2 = id$).

Théorème 1
Toute permutation peut s'exprimer comme produit de cycles disjoints.
L'ordre d'une permutation p est le plus petit commun multiple k des ordres des cycles disjoints obtenus ($p^k = id$).

Théorème 2
Toute permutation peut s'exprimer comme produit de transpositions.

33.2 Notations

Une permutation $\mathtt{p}$ sera notée :
`[p(0),p(1),...,p(n-1)]`
Un cycle $\mathtt{c}$ d'ordre k sera noté :
$[\mathtt{a_0}, \mathtt{a_1}, ..., \mathtt{a_k}]$ si $\mathtt{c}(\mathtt{a_0}) = \mathtt{a_1}...\mathtt{c}(\mathtt{a_k}) = \mathtt{a_0}$
Attention :
`[0,2,1]` représente la permutation $\mathtt{p}$ telle que :
`p(0)=0, p(1)=2, p(2)=1`
mais représente aussi le cycle $\mathtt{c}$ tel que :
`c(0)=2, c(2)=1, c(1)=0`

33.3 Exercices

Exercice 1
Exprimer les permutations suivantes comme produit de cycles disjoints et déterminer leurs signatures, leurs ordres et leurs inverses :
`[1,2,0]`
`[2,0,1]`
`[2,1,0]`
`[1,2,0,3]`
`[1,0,3,2]`
`[2,1,3,0]`
`[2,4,5,0,1,3]`
`[5,0,4,2,3,1]`
`[5,3,4,6,2,0,1]`

Exercice 2
Ecrire les produits de cycles suivants sous la forme :
1/ d'une permutation
2/ d'un produit de cycles disjoints
`[[0,1,2,3,4],[0,4,5],[1,3,5]]`
`[[0,1,2,3],[1,2,3,4],[2,3,4,0]]`
`[[0,1],[1,2],[2,3],[3,4],[4,0]]`
`[[1,5][4,5],[5,6]]`

Exercice 3
Calculer p^{1000} pour les permutations p suivantes :
`[2,5,7,8,3,4,1,0,6]`
`[2,5,0,3,1,4]`

Exercice 4
Déterminer le groupe engendré par les permutations suivantes :
`[2,1,0,3]` et `[3,1,2,0]`

33.4 Corrections des exercices

Exercice 1
On tape :
`p:=[1,2,0]`
On tape :
`permu2cycles(p)`
On obtient :
`[[0,1,2]]`
On tape :
`signature(p)`
On obtient :
`1`
On tape :
`permuorder(p)`

On obtient :
`3`
On tape :
`perminv(p)`
On obtient :
`[2,0,1]`

Exercice 2
On tape :
`cl:=[[0,1,2,3,4],[0,4,5],[1,3,5]]`
On tape :
`cycles2permu(cl)`
On obtient :
`[0,4,3,1,5,2]`

Exercice 3
On tape :
`permu2cycles([2,5,7,8,3,4,1,0,6])`
On obtient :
`[[0,2,7],[1,5,4,3,8,6]]`
On tape :
`p:=[2,5,7,8,3,4,1,0,6]`
p est décomposable en un cycle d''orde 3 et un cycle d'ordre 6, p est donc d'ordre 6 puisque $ppcm(3,6) = 6$ (`lcm(3,6)=6`).
Donc $p^6 = id$. On a `irem(1000,6)=4` donc :
$p^{1000} = p^4$
On tape :
`p2:=p1op2(p,p)`
`p4:=p1op2(p2,p2)`
On obtient :
`[2,8,7,5,1,6,3,0,4]`
Donc $p^{1000} = p^4 = [2, 8, 7, 5, 1, 6, 3, 0, 4]$
On vérifie que $p^6 = id$:
`p6:=p1op2(p2,p4)`
On obtient bien :
`[0,1,2,3,4,5,6,7,8]`

On procède de la même façon pour l'autre permutation, on tape :
`p:=[2,5,0,3,1,4]`
On tape :
`permu2cycles(p)`
On obtient :
`[[0,2],[1,5,4]]`
p est décomposable en un cycle d''orde 2 et un cycle d'ordre 3, p est donc d'ordre 6 puisque `lcm(2,3)=6`.
Donc $p^6 = id$. On a `irem(1000,6)=4` donc :
$p^{1000} = p^4$
On tape :

```
p2:=p1op2(p,p)
p4:=p1op2(p2,p2)
```
On obtient :
```
[0,5,2,3,1,4]
```
Donc $p^{1000} = p^4 = [0, 5, 2, 3, 1, 4]$
On vérifie que $p^6 = id$:
```
p6:=p1op2(p2,p4)
```
On obtient bien :
```
[0,1,2,3,4,5]
```

Exercice 4
On tape :
```
groupermu([2,1,0,3],[3,1,2,0])
```
On obtient :
```
[[2,1,0,3],[3,1,2,0],[0,1,2,3],[2,1,3,0],[3,1,0,2],[0,1,3,2]]
```
qui sont :
$\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{a} \circ \mathtt{a}, \mathtt{b} \circ \mathtt{a}, \mathtt{a} \circ \mathtt{b}, \mathtt{a} \circ \mathtt{b} \circ \mathtt{a}$ avec `a:=[2,1,0,3]` et `b:=[3,1,2,0]`
On peut vérifier par exemple que :
$\mathtt{a} \circ \mathtt{a} = \mathtt{p1op2}(\mathtt{a}, \mathtt{a}) = \mathtt{b} \circ \mathtt{b} = \mathtt{p1op2}(\mathtt{b}, \mathtt{b}) = [0, 1, 2, 3] = \mathtt{id}$ et que
$\mathtt{a} \circ \mathtt{b} \circ \mathtt{a} = \mathtt{p1op2}(\mathtt{a}, \mathtt{p1op2}(\mathtt{b}, \mathtt{a})) = \mathtt{b} \circ \mathtt{a} \circ \mathtt{b} = \mathtt{p1op2}(\mathtt{b}, \mathtt{p1op2}(\mathtt{a}, \mathtt{b})) = [0, 1, 3, 2]$

Chapitre 34

Exercices de probabilités

34.1 Loi géométrique

34.1.1 Exercice

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules rouges. On les tire une à une avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule blanche. Soit X la variable aléatoire "rang de la première boule blanche". Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
On a :
$Proba(X = n) = (1 - p)^{n-1} * p = \frac{1}{2^n}$
On a bien :
$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} * \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} * 2 = 1$
La fonction de répartition de X est :
$F(n) = Proba(X \leq n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$
On sait que : $E(X) = 1/p = 2$
$\sigma^2(X) = 1/p = 2$
On vérifie avec `Xcas` :
`sum(k/2^k,k=0..inf)` renvoie 2
$E(X^2) = 1/p = 2$
On vérifie avec `Xcas` :
`sum(k^2/2^k,k=0..inf)` renvoie 6
donc $\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2$

34.1.2 Exercice variante non géométrique

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules rouges. On les tire une à une sans remise jusqu'à ce que l'urne soit vide.
Soit X la variable aléatoire "rang de la première boule blanche". Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

La loi de Bernouilli que l'on repète n'est pas la même car on ne remet pas les boules dans l'urne : ce n'est donc pas une loi géométrique. Trouver la loi de X c'est trouver : $Proba(X = n)$ puis sa fonction de repartition F.

X ne peut prendre que les valeurs 1,2,3,4,5,6.
On a (on fait les calculs avec **Xcas**) :
$Proba(X = 1)$=5/10=1/2 (car on a 10 boules dont 5 blanches)
$Proba(X = 2)$=1/2*5/9=5/18=comb(5,1)/comb(10,1)*5/9 (car au 2ième tirage il reste 9 boules dont 5 blanches)
$Proba(X = 3)$=1/2*4/9*5/8=5/36=comb(5,2)/comb(10,2)*5/8 (car au 3ième tirage il reste 8 boules dont 5 blanches)
$Proba(X = 4)$=1/2*4/9*3/8*5/7=5/84=comb(5,3)/comb(10,3)*5/7
$Proba(X = 5)$=1/2*4/9*3/8*2/7*5/6=5/252=comb(5,4)/comb(10,4)*5/6
$Proba(X = 6)$=1/2*4/9*3/8*2/7*1/6*5/5=1/252=comb(5,5)/comb(10,5)*5/5
On a la formule : $Proba(X = n) = comb(5, n-1)/comb(10, n-1) * 5/(11-n)$
Donc :
$F(1)$=1/2
$F(2)$=1/2+5/18=7/9
$F(3)$=7/9+5/36 =11/12
$F(4)$=11/12+5/84=41/42
$F(5)$=41/42+5/252=251/252
$F(6)$=251/252+1/252=1
On vérifie avec **Xcas** par exemple :
`sum(comb(5,n-1)/comb(10,n-1)*5/(11-n),n=1..2)` renvoie `7/9`
`sum(comb(5,n-1)/comb(10,n-1)*5/(11-n),n=1..2)` renvoie `41/42`
$E(X)$=1/2+5/9+5/12+4/21+25/252+6/252=25/14
$E(X^2)$=1/2+10/9+15/12+16/21+125/252+36/252=179/42
$\sigma^2(X)$=179/42-25*25/14/14=631/588

34.2 La loi binomiale

34.2.1 Définition

La loi binomiale est une loi de probabilité d'une série d'épreuves répétées vérifiant :

— Chaque épreuve donne lieu a 2 éventualités exclusives succès ou échec de probabilités p et $q = 1 - p$,
— Les épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres,
— La variable aléatoire X égale au nombre de succès dans une suite de n épreuves. On a Prob($X = k$)=$C_n^k p^k q^{n-k}$

Notation on note cette loi : $\mathcal{B}\ (n, p)$.

34.2.2 Exercice

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face.
Chaque joueur lance une pièce n fois.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de faces obtenu par le joueur A et Y la variable aléatoire égale au nombre de face obtenue par le joueur B.

— Déterminer les lois de X, Y et de $Z = X + Y$.
— Calculer de 2 façons Prob($Z = n$) et en déduire la valeur de :
$S = \sum_{j=0}^{n} C_n^j C_n^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2$.
— Application pour $n = 10$.

Solution

— X et Y suivent une loi binomiale de probabilité : $\mathcal{B}(n, 1/2)$ ($p = 1/2$ et $q = 1/2$). $Z = X + Y$ revient à une série de $2n$ épreuves de probabilité $p = 1/2$ donc Z suit une loi binomiale de probabilité $\mathcal{B}(2n, 1/2)$.

— On a donc Prob($Z = m$)=$C_{2n}^m(1/2)^{2n}$, donc lorsque $m = n$ on a :
Prob($Z = n$)=$C_{2n}^n(1/2)^{2n}$
Si $Z = m$ c'est que $(X, Y) = (0, m)$ ou $(X, Y) = (1, m-1)$ ou ...$(X, Y) = (m, 0)$
On a donc aussi :
Prob($Z = m$)=$(1/2)^{2n}(C_n^0 C_n^m + C_n^1 C_n^{m-1} + .. + C_n^m C_n^0$
Donc lorsque $m = n$ on a :
Prob($Z = m$)=$(1/2)^{2n}(C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + .. + C_n^n C_n^0$ i.e.
Prob($Z = m$)=$(1/2)^{2n} \sum_{j=0}^n C_n^j C_n^{n-j}$ On en déduit que :

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j C_n^{n-j} = C_{2n}^n = \frac{2n!}{n!^2}$$

— On tape pour avoir Prob($Z = 10$) :
`comb(20,10)/2^20)`
On obtient :
`46189/262144`$\simeq$ `0.176197052002`
On tape :
`2n!/n!^2,sum(comb(n,j)*comb(n,n-j),j=0..n)`
On obtient :
`184756,184756`

34.3 La loi négbinomiale

34.3.1 Définition

La loi binomiale négative est une distribution de probabilité discrète. Elle dépend de 2 paramètres : un entier n (le nombre de succès attendus) et un réel p de $]0, 1[$ (la probabilité d'un succés).
On la note $\mathcal{N}eg\mathcal{B}in(n, p)$.
Elle permet de décrire la situation suivante : on fait une suite de tirages indépendants (avec pour chaque tirage, la probabilité p d'avoir un succès) jusqu'à obtenir n succès.
La variable aléatoire représentant le nombre d'échecs qu'il a fallut avant d'avoir n succès, suit alors une loi binomiale négative.
Si on définit `comb(n,k)` pour $n < 0$ par `comb(n,k)=n*(n-1)*..*(n-k-1)/k!`,
alors Si $X \in \mathcal{N}eg\mathcal{B}in(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0; 1[$) alors $\mathtt{Proba(X = k)} = \mathtt{p^n} * (\mathtt{p} - 1)^{\mathtt{k}} * \mathtt{comb(-n, k)}$ ce qui justifie le nom de loi binomiale négative et qui facilite le calcul de l'espérance (égale à $n(1-p)/p$) et de la variance (égale à $n(1-p)/p^2$).

34.3.2 Exercice

Dans un pays imaginaire on impose aux familles d'avoir des enfants jusquà la naissance d'un garçon et de ne plus avoir d'enfants après la naissance de ce garçon.

Est-ce que cette loi favorise la naissance des filles ? On répondra à cette question en supposant que dans ce pays :

— la probabilité d'avoir un garçon est égale à 0.5 et qu'une famille peut avoir un nombre infini d'enfants.
— la probabilité d'avoir un garçon est égale à 0.5 et qu'une famille ne peut pas avoir plus de 10 enfants.
— la probabilité d'avoir un garçon est égale à p (par exemple $p = 105/205 = 21/41$) et qu'une famille ne peut pas avoir plus de n enfants (par exemple $n = 10$).

Une solution

— Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles d'une famille. X suit une loi négbinomiale $\mathcal{N}eg\mathcal{B}in(1, 0.5)$ Donc $E(X) = (1 - 0.5)/0.5 = 1$.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de garçons d'une famille. Y est constant et on a $Y = 1$ donc $E(Y) = 1$ Donc cette loi ne favorise pas la naissance des filles ni celle des garçons.
— Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles d'une famille. Notons $p = 1/2$.
On a $p = 1 - p$ donc :
$Proba(X = 0) = p$
$Proba(X = 1) = p^2$
....
$Proba(X = k) = p^{k+1}$ pour $k = 0..9$
$Proba(X = 10) = p^{10}$
Donc :
$E(X) = \sum_{k=0}^{9} kp^{k+1} + 10 * p^{10}$
On peut faire en exercice le calcul de $\sum_{k=1}^{n}(ka^{k-1}$ en dérivant $\sum_{k=0}^{n} a^k = (a^(n + 1) - 1)/(a - 1)$.
On obtient :
$\sum_{k=1}^{n}(ka^{k-1} = (n * a^{n+1} - (n + 1) * a^n + 1)/(a - 1)^2$
Calculons avec `Xcas` $\sum_{k=0}^{9} kp^{k+1} + 10 * p^{10}$, on tape :
`p:=1/2`
`sum(k*p^(k+1),k=0..9)+10*p^10`
On obtient :
`1023/1024`
On a bien :
$p^2 \sum_{k=0}^{n}(kp^{k-1} = p^2(9p^{10} - 10p^9 + 1)/p^2 + 10 * p^{10} = 19 * p^{10} - 10 * p^9 + 1 = p^{10} * (19 - 20) + 1 = 1 - p^{10} = 1023/1024$ Avec `evalf` on obtient :
`0.990234375`
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de garçons d'une famille.
On a :
$Proba(Y = 0) = p^{10}$
$Proba(Y = 1) = 1 - p^{10}$
Donc :
$E(Y) = 1 - p^{10}$ On tape :
`1-p^10`
On obtient :
`1023/1024`

Avec `evalf` on obtient :
`0.990234375`
Donc cette loi ne favorise pas la naissance des filles ni celle des garçons.

— Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles d'une famille. Notons p la probabilité d'avoir un garçon.
On a :
$Proba(X = 0) = p$
$Proba(X = 1) = p(1 - p)$
....
$Proba(X = k) = p(1 - p)^k$ pour $k = 0..n - 1$
$Proba(X = n) = (1 - p)^n$
Donc :
$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1}(kp(1 - p)^k) + n(1 - p)^n$
Calculons $\sum_{k=0}^{n-1}(kp(1 - p)^k) + n(1 - p)^n$, on tape :
`EX:=simplify(sum(k*p*(1-p)^k,k=0..n-1)+1n*(1-p)^n)`
On obtient :
`(p*(1-p)^n-p-(1-p)^n+1)/p`
Donc :
$E(X) = \frac{1-p}{p}(1 - (1 - p)\hat{}n)$
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de garçons d'une famille.
On a :
$Proba(Y = 0) = (1 - p)^n$
$Proba(Y = 1) = 1 - (1 - p)^n$
Donc :
$E(Y) = 1 - (1 - p)^n$
On a donc : $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1-(1-p)^n)}{p}$
Donc :
$E(X)/E(X + Y) = 1 - p$ et $E(Y)/E(X + Y) = p$
Donc cette loi ne change pas rien quant aux nombres de naissances de filles et de garçons.
Application numérique
On tape :
`p:=21/41`
`(1-p)*(1-(1-p)^10)/p`
On obtient $E(X)$:
`12773732676335620/13422659310152401`
Avec `evalf` on obtient $E(X)$:
`0.951654391367`
`1-(1-p)^10`
On obtient $E(Y)$:
`13412419310152401/13422659310152401`
Avec `evalf` on obtient $E(Y)$:
`0.999237110936`
On tape (calcul de $E(X) + E(Y)$) :
`12773732676335620/13422659310152401+13412419310152401/13422659310152401`
On obtient :
`638686633816781/327381934393961`
On tape (calcul de $E(X)/(E(X) + E(Y))$) :

```
12773732676335620/13422659310152401/(638686633816781/32738193439
```
On obtient :
```
20/41
```
On retrouve la probabilité $1-p$. On tape (calcul de $E(Y)/(E(X)+E(Y))$) :
```
13412419310152401/13422659310152401/(638686633816781/32738193439
```
On obtient :
```
21/41
```
On retrouve la probabilité p.
Donc cette loi ne change pas rien quant aux nombres de naissances de filles et de garçons.

34.4 La loi uniforme

34.4.1 Définition

34.4.2 Exercice1

On considère un point aléatoire M uniformément réparti sur le disque de centre O et de rayon R c'est à dire que la probabilité pour que M appartienne à un domaine G du disque est proportionnelle à l'aire de G.

On a donc $Proba(x \in G)$ =(aire de G)$/(\pi * R^2)$.
Étude de la variable aléatoire $X = OM$

X varie de 0 à R et la fonction de répartition de X est donc :
$F(x) = 0$ si $x \leq 0$
$F(x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2} =$ si $0 < x \leq R$
$F(x) = 1$ si $x > R$
La densité de probabilité est donc :
$f(x) = 0$ si $x \leq 0$ ou $x > R$
$f(x) = \frac{2x}{R^2}$ si $0 < x \leq R$
L'éspérance de X est :
$E(X) = \int_0^R xf(x)dx = \int_0^R \frac{2x^2}{R^2}dx = \frac{2R}{3}$ On calcule $E(X^2)$: $E(X^2) = \int_0^R x^2 f(x)dx = \int_0^R \frac{2x^3}{R^2}dx = \frac{R^2}{2}$ La variance de X est :
$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{4R^2}{9} = \frac{R^2}{18}$

34.4.3 Exercice2

Soit la variable aléatoire à 2 dimensions (X, Y) uniformément distribué sur le quart de disque D de centre O, de rayon R situé dans le quart de plan $x > 0$ et $y > 0$.
On demande la fonction de répartition de (X, Y).
La probabilité pour que $M = (x, y)$ appartienne à un domaine G du quart de disque D est proportionnelle à l'aire de G.

Pour calculer la fonction de répartition, on va calculer : l'aire A du quart de disque : $A = \frac{\pi R^2}{4}$ et
l'aire AS_a du secteur : $S_a = \{(x, y) \in D : a < x < R\}$ qui est aussi l'aire du secteur $\{(x, y) \in D : a < y < R\}$.

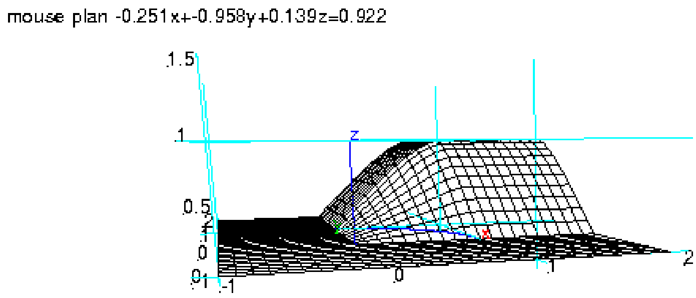
Soit α l'angle OxM où M est le point du quart de cercle d'abscisse x. On a :
$\alpha =$ acos $(\frac{x}{R})$ aire de $S_a = AS_a = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{x\sqrt{(R^2-ax^2)}}{2}$ X et Y varient de 0 à R et la fonction de répartition de X,Y est donc :
$F(x,y) = 0$ si $x \leq 0$ ou $y \leq 0$
$F(x,y) = 1$ si $x \geq R$ et $y \geq R$
$F(x,y) = \frac{4xy}{\pi R^2}/A$ si $x^2+y^2 \leq R^2$
$F(x,y) = (\frac{\pi R^2}{4} - AS_x)/A$ si $x^2+y^2 > R^2$ et $x \leq R$ et $y \geq R$
$F(x,y) = (\frac{\pi R^2}{4} - AS_y)/A$ si $x^2+y^2 > R^2$ et $x \geq R$ et $y \leq R$
$F(x,y) = (\frac{4xy}{\pi R^2} - AS_x - AS_y)/A$ si $x^2+y^2 > R^2$ et $x < R$ et $y < R$

```
F(x,y,R):={
  local a,b,AS,BS,A;
  si type(x)!=DOM_FLOAT ou  type(y)!=DOM_FLOAT alors
    retourne 'F'(x,y,R);
  fsi;
  si x<=0 ou y<=0 alors retourne 0; fsi;
  si x>=R et y>=R alors retourne 1; fsi;
  A:=pi*R^2/4;
  si (x^2+y^2<=R^2) alors retourne x*y/A; fsi;
  si x^2+y^2>R^2 et x<R et y>R alors
    a:=acos(x/R);
    AS:=a*R^2/2-x*sqrt(R^2-x^2)/2;
    retourne (pi*R^2/4-AS)/A;
  fsi;
  si x^2+y^2>R^2 et y<R et x>R alors
    a:=acos(y/R);
    AS:=a*R^2/2-y*sqrt(R^2-y^2)/2;
    retourne (pi*R^2/4-AS)/A;
  fsi;
  si x^2+y^2>R^2 et x<R et y<R alors
    a:=acos(x/R); b:=acos(y/R);
    AS:=a*R^2/2-x*sqrt(R^2-x^2)/2;
    BS:=b*R^2/2-y*sqrt(R^2-y^2)/2;
    retourne (pi*R^2/4-AS-BS)/A;
  fsi;
}:;
```

On tape :

```
plotfunc(F(x,y,1),[x=-1..2,y=-1..2]);
affichage(plotparam([x,sqrt(1-x^2),0],x=0..1), 4+epaisseur_ligne_2)
```

On obtient :


mouse plan -0.251x+-0.958y+0.139z=0.922
1.5
1
0.5
0
-1
0
1
2
z

Chapitre 35

Exercices de physique atomique

35.1 Structure de la matière

35.1.1 L'énoncé 1

En supposant qu'un observateur puisse compter 100000 molécules par seconde, quel délai lui est-il nécessaire pour dénombrer les molécules contenues dans 1mg d'hydrogène ?

35.1.2 La correction de 1

plotfunc(F(x,y,1),[x=-1..2,y=-1..2]) **Rappels** La loi d'Avogadro dit que un volume donné de gaz contient toujours le même nombre de molécules, pour une température donnée et une pression donnée.
Le volume unité qui est de 22.414 litres contient $N = (6.0221367e + 23)10^{23}$ molécules (N est le nombre d'Avogadro). La molécules gramme d'hydrogène molécule symbolique correspondant à N molécules réelles, pèse 2.016 g (masse moléculaire de l'hydrogène).
La constante `_NA_=6.0221367e+23_(1/mol)` l'unité est `_(1/mol)` car c'est le nombre de particules par mole.

Donc dans 2016 mg d'hydrogène il y a $N = 6.0248 * 10^{23}$ molécules.
Dans 1 mg il y an aura $n = \frac{6.0248*10^{23}}{2016}$.
Il faut 1 s pour compter 10^5 molécules, donc pour compter n molécules, il faut :
$t = n/10^5\ s$.
Calcul de t :
On tape pour avoir n :
```
n:=mksa(_NA_/2.016 _(g/mol)*1_mg)
```
On obtient :
```
2.98717098214e+20
```
On tape pour avoir t :
```
mksa(n/10^5*1_s)
```
On obtient :
```
2.98717098214e+15 _s
```
On tape pour avoir t en années :
```
convert(2.98717098214e+15 _s,_yr)
```
On obtient :

```
94659758.1949 _yr
```

35.1.3 L'énoncé 2

Quel est le nombre de molécules contenues dans 1 cm^3 d'oxygène dans les conditions normales de température et de pression ?
Quelle est la distance qui sépare ces molécules entre elles ?

35.1.4 La correction de 2

Dans les conditions normales de température et de pression, N molécules occupent un volume de 22.414 litres, soit $22.414 * 10^3$ cm^3. Dans un cm^3 il y aura donc :
$n = \frac{N}{22.414*10^3} = 2.68677464977e + 19$ molécules.
On tape pour avoir n :

```
n:=mksa(_NA_/_Vm_*1_cm^3)
```

On obtient :

```
2.68676266279e+19
```

Si on suppose que les molécules sont situées sur les sommets de cubes de dimenson d cm, le long d'1 cm il y aura alors $1/d + 1$ molécules, donc il y aura $(1/d + 1)^3$ molécules dans un cube de dimenson 1 cm.
Donc on a $n = (1/d + 1)^3$, soit :
$d = 1/(n^{1/3} - 1) = 3.33879481972e - 07$ cm
On tape pour avoir d :

```
1_cm/(n^(1/3)-1))
```

On obtient :

```
3.33879978505e-07 _(cm)
```

35.1.5 L'énoncé 3

Exprimer en eV l'énergie cinétique d'un neutron dont la vitesse est 20000 km/s

35.1.6 La correction de 3

L'énergie cinétique d'un neutron de masse m et de vitesse v est :
$E = \frac{1}{2}mv^2$.
On a $v = 20000$ km/s=$2 * 10^9$ cm/s
Un électron pèse $9.1 * 10^{-27}$ g, et un neutron a une masse égale à 1840 fois celle de l'électron, donc $m = 1840 * 9.1 * 10^{-27}$ g.
Donc :
$E = 1840 * 9.1 * 10^{-27} * 4 * 10^{18}/2 = 3.3488e - 05$ ergs
On tape :

```
convert(3.3488*10^-05_erg,_MeV)
```

On obtient :

```
2.1_MeV
```

35.2 La radioactivité et le temps

35.2.1 L'énoncé 4

Le radium Ra 226 est un émetteur alpha de période 1617 ans.
a) Quelle est sa constante radioactive ?
b) On en prend 1 gramme, combien en subsistera-t-il au bout d'un an, dix ans ?

35.2.2 La correction de 4

La période T d'un corps radioactif est liée par sa constante radioactive λ par :
$T = 0.693/\lambda$ Le radium Ra 226 est un émetteur alpha de période 1617 ans.
On tape pour convertir les années en secondes :
`convert(1617_yr,_s)`
On obtient :
`51027549301.1_s`
Donc :
$\lambda = 0.693/1617\_yr = 0.000428571428571\_(1/yr) = 0.693/(51027549301.1\_s) = 1.35808991318e - 11\_(1/s)$
À l'instant initial, on a N atomes.
Pendant l'intervalle de temps Δt, il disparait :
$\Delta N = \lambda N \Delta t$ atomes.
donc il reste :
$N - \Delta N = N(1 - \lambda\Delta t)$ atomes.
ou encore si P est le poids en grammes de N atomes et si ΔP est la variation de poids pendant l'intervalle de temps Δt :
$P - \Delta P = P(1 - \lambda\Delta t)$ Une mole de Ra 226 pèse 226 grammes.
Donc dans 1g de Ra 226 il y a N=mksa(1/226*_NA_*1 _mol)= 2.66466225664e+21 atomes.
Soit en poids, il restera au bout d'un an :
`1_g*(1-0.693/1617_yr*1_yr)=0.999571428571_g`
il restera au bout de 10 ans :
`1_g*(1-0.693/1617_yr*10_yr)=0.995714285714_g`

35.2.3 L'énoncé 5

Une particule alpha émise par $^{210}P_0$ a une énergie de 5.3 _MeV et elle provoque l'ionisation du gaz qu'elle traverse et on collecte tous les électrons libérés sur un fil chargé positivement.
Quelle est la valeur de la charge électrique recueillie sur ce fil en sachant que l'énergie nécessaire pour créer une paire d'ions est de 30 _eV ?

35.2.4 La correction de 5

Puisqu'il faut 30 _eV pour créer une paire d'ions, une particule alpha émise par $^{210}P_0$ dénergie de 5.3 _MeV va créer :
`mksa(5.3 _MeV/30 _eV)=176666.666667` paire d'ions.
La charge élémentaire d'un électron est de $1.6 * 10^{-19}$ Coulomb, donc, la valeur de la charge électrique recueillie sur ce fil est :

`176666.666667*1.6*10^-19_C`
On obtient :
`2.82666666667e-14_C`

35.2.5 L'énoncé 6

Calculer l'activité de 1g de Th 232 sachant que $\lambda = 1.58 * 10^{18}\ s^-1$

35.2.6 La correction de 6

Une mole de Th 232 pèse 232 grammes.
Dans un gramme de Th 232 il y a $1/232$ moles, donc le nombre de noyaux est :
`_NA_*1/232_mol`
soit : `2.59574857759e+21`
L'activité est le nombre de désintégration par seconde :
$\frac{\Delta N}{\Delta t} = N\lambda$ avec $\lambda = 1.58 * 10^{-18}\ s^{-1}$
Donc l'activité de 1g de Th 232 est de :
`mksa(_NA_/232*1_mol*1.58*10^-18_s^-1)=4101.28275259_s^-1`
On tape :
`convert(4101.28275259_s^-1,1_Ci)`
On obtient :
`1.108454798e-07_Ci`

35.2.7 L'énoncé 7

Quelle est l'énergie qui serait libérée par la fission complète de 1 kg de U 235 ?

35.2.8 La correction de 7

La réaction de fission d'un noyau d'U 235 s'écrit :
$^{235}H + ^1_0n- > ^{94}_{32}Sr + ^{140}_{54}Xe + 2^1_0n$
et libère 200_MeV.
Une mole ou encore `_NA_*1_mol` atomes de U 235 pèse $235\_g = 235*10^{-3}\_kg$.
Dans un kilogramme de U 235 il y a donc `_NA_*1_mol/235*10^3` atomes.
La fission d'un kilogramme de U 235 libère donc :
`_NA_*1_mol/235*10^3*200_MeV`
On obtient :
`5.1252227234e+26_((mol*MeV)/mol)` soit `5.1252227234e+26_MeV`.

35.2.9 L'énoncé 8

La réaction :
$^2_1H + ^2_1H- > ^1_0n + ^3_2He$
est une réaction de fussion.
On donne :
masse de $^2_1H = 2.014741\_u$
masse de $^3_2He = 3.016977\_u$
masse de $^1_0n = 1.008987\_u$

Au cours de cette réaction, une partie de la masse disparait.
Calculez cette perte de masse ainsi que l'énergie en MeV liberée par la réaction.

35.2.10 La correction de 8

On a la réaction :
${}_1^2H + {}_1^2H- > {}_0^1n + {}_2^3He$
Calculons la masse de l'état initial, on tape :
`2*2.014741_u`
Calculons la masse de l'état final, on tape :
`1.008987_u+3.016977_u`
Il disparait donc :
`2*2.014741_u-(1.008987_u+3.016977_u)`
On obtient donc une perte de masse de :
`0.003518_u`
On tape :
`mksa( 0.003518_u)`
On obtient donc une perte de masse de :
`5.8417804236e-30_kg`
L'énergie liberée par cette réaction est donc ($E = mc^2$) :
`5.8417804236e-30_kg*_c_^2`
On obtient :
`5.25033040875e-13_(kg*(m/s)^2)`
Pour convertir en _Mev, on tape :
`convert(5.25033040875e-13_(kg*(m/s)^2),_MeV)`
On obtient l'énergie en MeV liberée par la réaction :
`3.27699706546_MeV`.

Table des matières