Les séries entières et les séries de Fourier

TP3 Maths MIAS2 janvier 2001

1 Rappel de quelques commandes utiles

1.1 Fonctions et intégrales

1.1.1 Avec MuPAD

On définit par exemple la fonction $f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ en tapant :
$\texttt{f2} := \texttt{x}- > (\texttt{x} - \texttt{x}^3/3!);$
On calcule la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 f_2(x)dx$ en tapant :
$\texttt{float}(\texttt{int}(\texttt{f2}(\texttt{x}), \texttt{x} = 0..1));$
ou si f_2 n'admet pas de primitive continue sur $[0; 1]$:
`float(hold(int(f2(x),x=0..1)));`
Grâce à la commande `hold`, `MuPAD` fait le calcul de l'intégrale par une méthode numèrique (`hold` empêche l'évaluation c'est à dire ici la recherche d'une primitive de f_2).

1.1.2 Avec la HP49G

On définit par exemple la fonction $f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ en tapant :
$\texttt{DEFINE}(\texttt{F2}(\texttt{X}) = \texttt{X} - \texttt{X}^3/3!)$, puis ENTER (DEFINE s'obtient avec `shift-bleu 2 (DEF)`)
On calcule la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 f_2(x)dx$ en tapant dans l'éditeur d'équations (EQW):
$\int_0^1 \texttt{F2}(\texttt{X})\texttt{dX}$, puis ENTER, puis `shift-rouge ENTER (NUM)`.
On peut aussi avec DEFINE définir une fonction par morceaux. Par exemple pour définir $f(x) = x$ pour $x < \pi$ et $f(x) = 2\pi - x$ pour $x \geq \pi$ on tape :
$\texttt{DEFINE}(\texttt{F}(\texttt{X}) = \texttt{IFTE}(\texttt{X} < \pi, \texttt{X}, 2\pi - \texttt{X}))$, puis ENTER.

1.1.3 Avec la TI89/92

On définit par exemple la fonction $f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ en tapant :
$\texttt{Define f2}(\texttt{X}) = \texttt{X} - \texttt{X}^3/3!$, puis ENTER.
On calcule la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 f_2(x)dx$ en tapant $\int(\texttt{f2}(\texttt{X}), \texttt{X}, 0, 1)$, puis ◇ENTER.
On peut aussi avec `definr` définir une fonction par morceaux. Par exemple pour définir $f(x) = x$ pour $x < \pi$ et $f(x) = 2\pi - x$ pour $x \geq \pi$ on tape :
$\texttt{Define f}(\texttt{X}) = \texttt{when}(\texttt{X} < \pi, \texttt{X}, 2\pi - \texttt{X})$, puis ENTER.

1.2 Representation graphique

1.2.1 Avec `MuPAD`

On utilise la commande `plotfunc`.
Par exemple pour avoir le tracé simultané de $y = \sin(x)$ et de $y = x$ on tape:
`plotfunc(sin(x),x,x=0..4`
ou si on veut préciser la fenêtre :
`plotfunc(sin(x),x,x=0..4,YRange=-2..2)`
Attention
- `plotfunc(sin(x),x,x=0..4,y=-2..2)` donne une représentation en 3d.
- il faut fermer la fenêtre graphique pour pouvoir continuer à utiliser `MuPAD`.

1.2.2 Avec la `HP49G`

On régle la dimension de la fenêtre graphique (`shift-bleu F2 (WIN)`), puis on donne l'équation des fonctions à tracer (`shift-bleu F4 (2D/3D)`) en remplissant `EQ` avec par exemple `{sin(x),x}` pour avoir le tracé simultané de $y = \sin(x)$ et de $y = x$.

1.3 Séries de Fourier

1.3.1 Avec la `HP49G`

La commande `FOURIER` a deux paramètres une fonction $f(x)$ et un entier n. `FOURIER` renvoie le coefficient de Fourier c_n de la fonction $f(x)$ considérée comme une fonction sur [0;T] et périodique de période T. (T est le contenu de la variable `PERIOD`). C'est à vous de trouver les valeurs particulières de n pour lesquelles le calcul général de c_n n'est pas valable.

2 Les séries entières

2.1 Rappels du cours

Définition :
On dit qu'une fonction f définie sur $]-\alpha;\alpha[$, est développable en séries entières au voisinage de $x = 0$ si il existe a_n pour $n \in \mathbb{N}$ et $R \leq \alpha$ vérifiant :
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $|x| < R$ $(R > 0)$.
Si f est indéfiniment dérivable alors les a_n sont définis par :
$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
Dans les exercices qui suivent quand on demande d'écrire le développement en séries entières au voisinage de $x = x_0$ de $f(x)$ c'est déterminer a_n pour $n \in \mathbb{N}$ et R vérifiant :
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ pour $|x - x_0| < R$.

2.2 Développement en séries entières en $x = 0$ de $\sin(x)$

Exercice 1

Écrire $S(x)$, le développement en séries entières au voisinage de $x = 0$ de $\sin(x)$.
Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions suivantes :

$f(x) = \sin(x)$

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$

$f_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

$f_4(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$

Graphiquement on voit que $f_4(x)$ approche $\sin(x)$: sur quel intervalle cette approximation vous paraît-elle acceptable ?
Donner une majoration du reste $R_4(x)$ de cette série $S(x)$. De façon plus précise, $f_4(x)$ approche $\sin(x)$ pour $x \in [-1, 1]$ avec quelle erreur ?
En déduire un encadrement de $\sin(1)$.

Exercice 2

On veut approcher sur l'intervalle $[0; \pi]$ $\sin(x)$ à 10^{-6} près par son développement en séries entières au voisinage de $x = 0$. Déterminer le plus petit k pour que :

$f_k(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!}$ réalise cette approximation.

Calculer avec cette méthode $\sin(3)$, puis calculer $\sin(\pi - 3)$ en utilisant une valeur approchée de π à 10^{-10} près.
Comparez les approximations obtenues.

Exercice 3

On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Écrire le développement en séries entières au voisinage de $x = 0$ de :

$g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Écrire I sous la forme d'une série de terme général v_j.

Soit R_n le reste de cette série ($R_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} v_j$), trouver une majoration de $|R_n|$.

Quelle est l'aproximation obtenue pour la valeur de I lorsqu'on utilise comme approximation de I, $\sum_{j=0}^{k} v_j$, (k étant la valeur trouvée dans l'exercice 2).

2.3 D'autres applications

Exercice 4

On veut calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$.
Écrire le développement en séries entières au voisinage de $x = 0$ de :
$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$
Écrire I sous la forme d'une série de terme général v_n.
En déduire une valeur de I à 10^{-6} près.

Exercice 5
Écrire le développement en séries entières au voisinage de $x = 0$ de :
$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$
En déduire une valeur de $\theta(1)$ à 10^{-3} près.

3 Les séries de Fourier

3.1 Rappels du cours

On sait que les coefficients de Fourier d'une fonction, 2π-périodique et intégrable sur tout intervalle fermé borné, sont définis pour $n \in \mathbb{Z}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

et que la série de Fourier associée à f est :

$$SF(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$$

On peut aussi définir les coefficients de Fourier réels pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

On a alors :

$$SF(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

Théorème de Dirichlet
Si au point x_0, f admet une limite à droite et une limite à gauche (que l'on note $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$), ainsi qu' une dérivée à droite et une dérivée à gauche, alors la série $SF(f)(x_0)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$.

En particulier si f est dérivable pour tout x, $SF(f)(x)$ converge vers $f(x)$.

Exercice 6

Trouver le développement $SF(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$ en séries de Fourier de la fonction f périodique de période 2π définie par :
$f(x) = x$ sur $]-\pi;\ \pi[$
$f(\pi) = 0$.
On note $SF(f)_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$.
Tracer sur un même graphique et pour $x \in [-4; 4]$ les graphes des fonctions suivantes :
$f(x)$
$SF(f)_1(x) =$
$SF(f)_2(x) =$
$SF(f)_3(x) =$
$SF(f)_4(x) =$
$SF(f)_5(x) =$
$SF(f)_6(x) =$

3.2 Phénomène de Gibbs

Les graphes des fonctions $SF(f)_n$ possède un maximum ayant comme coordonnées x_n, y_n.
Pour la fonction f de l'exercice 6, quand n tend vers $+\infty$, on va montrer que :
x_n tend vers π et
y_n tend vers $\alpha = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
Le calcul approché de α (cf exercice 3) montre que $\alpha > 3.7 > \pi$.
Ces "bosses" au voisinage du point de discontinuité s'appellent le phénomène de Gibbs.

Exercice 7

Observation et démonstration de ce phénomène :
On cherche la limite de $y_n = SF(f)_n(x_n)$ quand n tend vers $+\infty$
1/ de façon empirique
Déterminer les coordonnées x_n, y_n du maximum de :
$SF(f)_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$ pour n=1, 2, 3, 4, 5, 6
2/ de façon théorique
a/ Déterminer la valeur de x_n
b/ Montrer que :
$SF(f)_n(x) = 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$
En utilisant l'égalité :

$2\sin(\dfrac{x+\pi}{2})\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cos(kx) = -2\sin(\dfrac{x+\pi}{2})\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x+\pi)) =$
$\sin(\dfrac{x+\pi}{2}) - \sin(\dfrac{(x+\pi)(2n+1)}{2})$.
montrer que :

$$SF(f)'_n(x) = \frac{\sin(\frac{x+\pi}{2}) - \sin(\frac{(x+\pi)(2n+1)}{2})}{\sin(\frac{x+\pi}{2})}$$

En déduire que :

$$SF(f)_n(x) = x - \pi - \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(\frac{(t+\pi)(2n+1)}{2})}{\sin(\frac{t+\pi}{2})}dt$$

Et après changement de variables on a :

$$SF(f)_n(x) = x - \pi + 2\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt$$

Donc

$$y_n = SF(f)_n(x_n) = -\frac{\pi}{n+1} + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2n+2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt$$

En utilisant la continuité de la fonction g définie par :
$g(0) = 0$, $g(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$
montrer que
$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2n+2}} \sin((2n+1)t)(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t})dt$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$
En déduire que y_n tend vers $\alpha = 2\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt$ quand n tend vers $+\infty$.

3.3 Utilisation de la moyenne de Césaro

Définition
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, on pose $S_k = \sum_{i=0}^{k} u_i$.
On dit que la série $\sum u_n$ converge vers σ au sens de Césaro si la suite :
$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k$ tend vers σ.
On pose :
$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} SF_k(f)$
Théorème :
$\sigma_n(f)(x)$ converge vers $f(x)$ en tous les points de continuité de f.

Exercice 8
On observe que la convergence au sens de Césaro permet de régulariser la convergence, donc d'éliminer le phénomène de Gibbs.
Calculer $\sigma_n(f)(x)$ pour la fonction f périodique de période 2π définie par :
$f(x) = x$ sur $]-\pi;\ \pi[$

$f(\pi) = 0$.
Tracer sur un même graphique $SF_6(f)(x)$ et $\sigma_7(f)(x)$.