Les isométries

July 2, 2001

1 Les commandes utiles

1.1 Avec MuPAD

Taper au début de votre session `MuPAD` :
`export(linalg);`
Taper `?linalg` pour avoir la liste des commandes d'algébre linéaire.
Voici quelques instructions d'algébre linéaire utiles ici :
`M:=Dom::Matrix()(2,2,[[1,2],[3,4]]);` définit la matrice `M`.
`det(M);` calcule le déterminant de `M`.
`transpose(M);` est égal à la transposée de `M`.
`f:=(i,j)->(if (i=j) then 1; else 0; end_if);`
`I:=Dom::Matrix()(2,2,f);` crée la matrice identité `I` de dimension 2.
`u:=Dom::Matrix()(2,1,[1,2]);` définit le vecteur `u`.
`v:=Dom::Matrix()(2,1,[3,4]);` définit le vecteur `v`.
`scalarProduct(u,v);` calcule le produit scalaire des deux vecteurs `u` et `v`.
`crossProduct(u,v);` calcule le produit vectoriel des deux vecteurs `u` et `v`.

1.2 Avec la HP49G

`ISOM` a comme argument M une matrice orthogonale carrée d'ordre 2 ou 3 et renvoie les élements caractéristiques de l'isométrie de matrice M.
`MKISOM` a comme argument les élements caractéristiques d'une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et renvoie M une matrice orthogonale carrée d'ordre 2 ou 3 représentant cette isométrie.

2 Rappel du cours

Notations : E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$,
f désigne un endomorphisme de E,
$< u, v >$ désigne le produit scalaire des vecteurs u et v de E,
$||u||^2 =< u, u >$.
Définitions : On dit qu'un endomorphisme f de E est orthogonal ou encore est une isométrie si f conserve le produit scalaire, c'est à dire si on a :

$< f(u), f(v) >=< u, v >$ pour tous les vecteurs u et v de E.
On dit qu'une matrice M est orthogonale si ${}^tMM = I$.
On en déduit que $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$.
Les matrices orthogonales M vérifiant $\det(M) = 1$ sont appelées directes ou positives.
Les matrices orthogonales M vérifiant $\det(M) = -1$ sont appelées indirectes ou négatives.
Propositon 1 : f est une isométrie si et seulement si f conserve la norme $(||f(u)|| = ||u||)$.
On en déduit que les valeurs propres λ de f vérifient $|\lambda| = 1$
Propositon 2 : f est une isométrie si et seulement si f transforme une base orthonormée en une base orthonormée.
Propositon 3 : f est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est orthogonale.

Exercice 1
Écrire un programme permettant de dire si un endomorphisme est une isométrie positive ou négative ou si ce n'est pas une isométrie.

3 Les isométries du plan

Les isométries positives du plan sont les rotations.
Les isométries négatives du plan sont les symètries.

Exercice 2
Écrire la matrice $R(\theta)$ de la rotation du plan d'angle $\theta \pmod{2\pi}$.
Écrire la matrice de la symétrie $S(\theta)$ du plan par rapport à la droite d'angle polaire $\theta \pmod{\pi}$.
Calculer : $R(\alpha) \circ R(\beta)$ et $S(\alpha) \circ S(\beta)$.

Exercice 3
a/ Trouver les éléments caractéristiques de l'isométrie dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b/ Trouver les éléments caractéristiques de l'isométrie dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c/ Écrire la matrice de la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 2x$.
d/ Écrire la matrice de la rotation plane d'angle $\frac{5\pi}{6}$

4 Les isométries de l'espace $\mathbb{R}^3$

Les isométries de l'espace $\mathbb{R}^3$ sont :
- les symétries par rapport à un plan
- les rotations d'axe Δ et d'angle θ
- une symétrie par rapport à un plan suivie d'une rotation d'axe Δ, Δ etant perpendiculaire au plan de la symétrie.

Exercice 4

a/ Trouver les éléments caractéristiques de l'isométrie dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b/ Trouver les éléments caractéristiques de l'isométrie dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

c/ Écrire la matrice de la symétrie par rapport au plan d'équation
$ax + by + cz = 0$, (par ex $a = 1, b = -2, c = 1$).
d/ Écrire la matrice de la rotation d'axe $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et d'angle θ (par ex $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$)
e/ Écrire la matrice de l'isométrie produit d'une symétrie plan définie en c/ et de la rotation définie en d/
On traitera l'exemple et on donnera les éléments caractéristiques de l'isométrie obtenue.

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de matrice relativement à cette base :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1/ Comment vèrifiez-vous que f est une isométrie ?
2/ Déterminer le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants par f.
Prouver que $F^\perp$ est un plan vectoriel. Trouver une base orthonormale (u, v) de ce plan.
3/ Donner w un vecteur directeur de F pour que (u, v, w) soit une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.
4/ Évaluer les produits scalaires :
$f(u).u$, $f(u).v$, $f(u).w$ et en déduire les composantes de $f(u)$ dans la base (u, v, w).
Déterminer la matrice de f dans la base (u, v, w).
Quelle est la nature de l'isométrie f ?