1 Intégration numérique.

Formule des rectangles et des trapèzes. Approximation par interpolation polynomiale de Lagrange (Newton-Cotes). Existence d'autres méthodes de quadrature.

Exemple: calculer numériquement quelques intégrales qui se calculent exactement et observer les erreurs.

Comparaison intégrale/série. Exemples d'applications: encadrement de ln(2): Il s'agit ici d'obtenir un encadrement de ln(2) en utilisant des méthodes numériques approchées de calcul de l'intégrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$$

1. Tracer le graphe de la fonction f définie par $f(x) = 1/(1+x)$ entre 0 et 1.

2. On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en n parties où on applique la méthode des rectangles au milieu de chacun des n intervalles et la méthode des trapèzes. On obtient ainsi deux suites u_n et v_n. Montrez que:

   $$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+j+0.5}$$

   Déterminez v_n.

3. Vérifiez que la fonction f est convexe en montrant que $f'' > 0$. On admettra les propriétés suivantes des fonction convexe:

   - le segment reliant $(x_1, f(x_1))$ à $(x_2, f(x_2)$ $(x_1 < x_2)$ est au-dessus de la courbe représentative de f entre x_1 et x_2.
   - la tangente en un point de la courbe est en-dessous de la courbe représentative de f.

4. En comparant graphiquement des aires, montrez que $v_n \geq \int_0^1 f(x)\, dx$.

5. On considère une subdivision $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$. Tracer sur cet intervalle la courbe de f et la tangeante de f au point milieu de l'intervalle. Par une comparaison graphique d'aires montrez que:

   $$u_n \leq \int_0^1 f(x)\, dx$$

6. Calculer pour $n = 10, 100$ et 1000 u_n et v_n, indiquez le nombre de décimales exactes.

7. Montrez qu'en général u_n et v_n donnent un encadrement d'ordre $1/n^2$ de ln(2).

Sur la HP49, pour calculer u_n, on entre la somme dans `EQW` et on stocke l'équation dans la variable `UN` (`STO> UN`) puis pour chaque valeur de n on stocke la valeur de n (par exemple `10 STO> N` et on tape `->NUM(UN)`. On peut également tracer le graphe de f en utilisant le menu shift-`2D/3D`. Sélectionner le type `Function` avec `CHOOSE`, entrer la fonction et les bornes puis taper sur les touches menu `ERASE` et `DRAW`. Il est ensuite possible de tracer la tangente en un point en déplacant le curseur en ce point et en choisissant `TANL` dans le menu `FCN`.

2 Équations différentielles $y' = f(x, y)$.

- champ des tangentes
- écriture sous forme intégrale, méthode d'Euler et méthode du point milieu.

Quelques exemples d'equations différentielles sous la forme $y' = f(x, y)$ (d'après Postel-Zimmermann):

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{y\ln(y) + x} \\
y' &= e^x y + e^{e^x} \\
y' &= y^3 \sin(x) - y \\
y' &= \frac{3x^2 - y^2 - 7}{e^y + 2xy + 1} \\
y' &= \frac{2x^3 y - y^4}{x^4 - 2xy^3} \\
y' &= \frac{x}{x^2 y^2 + y^5} \\
y' &= e^x y^2 - y + e^{-x} \\
y' &= \frac{9x^8 + 1}{y^2 + 1}
\end{aligned}$$

Tracer des portrait de phase, essayez les méthodes numériques et exacte d'intégration sur ces exemples.

3 Fonctions de MuPAD et de la HP49 relatives à l'intégration et aux équations différentielles.

Pour l'intégration numérique:

- avec `MuPAD`, utiliser `numeric::fint` ou `numeric::quadrature` pour controler précisément la méthode utilisée.
- sur la 49, entrer l'intégrale dans l'éditeur d'équation, sélectionnez-la et tapez `->NUM`.

Pour trouver les formules de Newton-Cotes à un ordre donné, on peut utiliser la fonction `lagrange` de MuPAD (`LAGRANGE` sur la 49), on peut vérifier ensuite avec l'instruction `numeric::ncdata` de MuPAD.

Pour les équations différentielles:

- Sur la HP49, on peut tracer le champ des tangentes en sélectionnant le type de tracé `Slopefield` dans `2D/3D`, puis pour tracer une solution particulière, choisir le type `Diff Eq`. Evitez d'utiliser `ERASE` entre les 2 tracés, cela permet de voir sur la même figure le champ des tangentes et quelques courbes intégrales.

- Pour les résolutions de type numérique, utiliser par exemple `numeric::odesolve` avec MuPAD. Sur la HP49, shift-rouge 7 (`NUM.SLV`) puis `Differential equation`.

- Certaines équations différentielles peuvent être résolues de manière exacte:

  - avec `MuPAD` utilisez la fonction `ode` pour définir une équation différentielle puis `solve` pour la résoudre.

  - Sur la HP49, il y a deux commandes `LDEC` pour les équations et systèmes linéaires à coefficients constants et `DESOLVE` pour les équations différentielles (essentiellement du 1er ordre). `LDEC` prend deux arguments: le second membre et l'équation caractéristique pour une équation linéaire ou le vecteur second membre et la matrice pour un système linéaire du 1er ordre, par exemple `LDEC(SIN(X),X^2+1)` permet de résoudre l'équation linéaire $y''(x) + y(x) = sin(x)$. On peut aussi résoudre cette équation avec:
    `DESOLVE(d1d1Y(X)+Y(X)=SIN(X),Y(X))`
    Si on souhaite rajouter des conditions initiales, on remplace le premier argument de `DESOLVE` par un vecteur dont la première composante est l'équation différentielle et les composantes suivantes sont les conditions initiales.