Réduction des formes quadratiques et application aux fonctions de deux variables

1 Programmation de la décomposition de formes quadratiques

1.1 Écriture de la matrice d'une forme quadratique

Exercice
Écrire un programme (`MuPAD`) qui vérifie qu'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique.
Écrire un programme (`MuPAD`) qui donne la matrice d'une forme quadratique q.
Indication On remarquera qu'une expression est quadratique en x=[x1,...,xn] si elle vaut zéro en x=0, si sa différentielle vaut zéro en x=0 et si les dérivées partielles d'ordre 2 sont des constantes (i.e. les dérivées partielles d'ordre 3 sont nulles)
Les paramètres de la fonction seront :
une expression `q` et la liste `x` des variables.
La fonction `subs(q,op(x,1)=0)` permet de remplacer `x1` par 0 dans `q`.
La fonction `diff(q,op(x,1))` permet de dériver `q` par rapport à `x1`.
Application
On considère dans $\mathbb{R}^4$ la forme quadratique :
$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_4^2 + 5x_1x_2 - 3x_1x_4 + 2x_2x_4 - 7x_3x_4$
Écrire la forme bilinéaire symétrique f forme polaire de q .
Écrire la matrice associée à f dans la base canonique.
Tester votre programme

1.2 Noyau et vecteurs isotropes

Exercice
On considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique :
$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
Déterminer tous les vecteurs x isotrope relativement à q (ie vérifiant $q(x) = 0$) et en donner une représentation.
Déterminer le noyau de q (ie $\{x \in \mathbb{R}^3 \ \forall y \in \mathbb{R}^3 \ f(x,y) = 0\}$)

1.3 Méthode de Gauss

Exercice
Soit $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} a_{ij}x_ix_j$
Écrire une fonction mettant en œuvre la méthode de Gauss qui construit une base orthogonale relativement à q :

- en dimension 2 puis en dimension 3, ou
- en dimension n en utilisant la récursivité.

Rappel de la méthode de Gauss :
Si $a_{11} \neq 0$, en considérant $q(x)$ comme un trinôme du second degré en x_1 on écrit :
$q(x) = \dfrac{1}{a_{11}} u_1(x)^2 + q_1(x)$.
où $u_1(x)$ est une forme linéaire et $q_1(x)$ une forme quadratique qui ne dépend pas de x_1.
On peut remarquer que $2u_1(x) = \dfrac{\partial q(x)}{\partial x_1}$.
Si tous les $a_{ii} = 0$ et si $a_{12} \neq 0$ on isole les termes contenant x_1 et les termes contenant x_2 et on utilise la formule :
$a_{12}^2 x_1 x_2 + a_{12} c x_1 + a_{12} b x_2 = (a_{12} x_1 + b)(a_{12} x_2 + c) - bc$:
$q(x) = \dfrac{2}{a_{12}} l_1(x) l_2(x) + q_1(x)$
où $l_1(x)$ et $l_2(x)$ sont des formes linéaires et $q_1(x)$ une forme quadratique qui ne dépend ni de x_1 ni de x_2.
On pourra exprimer $l_1(x)$ et $l_2(x)$ en fonction de $\dfrac{\partial q(x)}{\partial x_1}$ et de $\dfrac{\partial q(x)}{\partial x_2}$.
Puis on termine la construction, en remarquant que :
$4 l_1(x) l_2(x) = (l_1(x) + l_2(x))^2 - (l_1(x) - l_2(x))^2$
on pose
$u_1(x) = l_1(x) + l_2(x)$ et $u_2(x) = l_1(x) - l_2(x)$....

Voici la méthode en dimension 3
• lorsqu'il existe des termes carrés.
Supposons $a_{11} \neq 0$ (sinon on permute x_1 avec x_2 ou x_3) on a :
$u_1(x) = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$
$q_1(x) = (a_{22} - \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}}) x_2^2 + (a_{33} - \dfrac{a_{13}^2}{a_{11}}) x_3^2 + 2(a_{23} - \dfrac{a_{12} * a_{13}}{a_{11}}) x_2 x_3$
donc on continue en changeant a_{22}, a_{33}, a_{23} :
on stocke $a_{22} - \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}}$ dans a_{22}
on stocke $a_{33} - \dfrac{a_{13}^2}{a_{11}}$ dans a_{33}
on stocke $a_{23} - \dfrac{a_{12} * a_{13}}{a_{11}}$ dans a_{23}
puis
- si $a_{22} \neq 0$ (ou si $a_{22} = 0$ et $a_{33} \neq 0$ on permute alors x_2 et x_3) on pose :
$u_2(x) = a_{22} x_2 + a_{23} x_3$
donc on continue en changeant a_{33}
on stocke $a_{33} - \dfrac{a_{23}^2}{a_{22}}$ dans a_{33}
$u_3(x) = x_3$
on a alors $q(x) = a_{11} u_1(x)^2 + a_{22} u_2(x)^2 + a_{33} u_3(x)^2$

- si $a_{22} = 0$ et $a_{33} = 0$ on a
$4x_2x_3 = (x_2+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2$, on pose alors :
$u_2(x) = \frac{x_2+x_3}{2}$ et $u_3(x) = \frac{x_2-x_3}{2}$ $q(x) = a_{11}u_1(x)^2 + a_{23}u_2(x)^2 + a_{23}u_3(x)^2$
• lorsqu'il n'existe pas de termes carrés.
Si $a_{12} \neq 0$ on pose :
$l_1(x) = a_{12}x_1 + a_{23}x_3$
$l_2(x) = a_{12}x_2 + a_{13}x_3$
$q_1(x) = -\dfrac{2}{a_{12}}a_{13}a_{23}x_3^2$ d'où
$u_1(x) = a_{12}x_1 + a_{23}x_3 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$
$u_2(x) = a_{12}x_1 + a_{23}x_3 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$
$u_3(x) = x_3$
on a alors $q(x) = \dfrac{1}{2a_{12}}u_1(x)^2 - \dfrac{1}{2a_{12}}u_2(x)^2 + \dfrac{a_{23}a_{13}}{2a_{12}}u_3(x)^2$

Exercice
Tester le programme précédent pour trouver une base orthogonale relativement à q lorsque :
$q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_3$ pour $x \in \mathbb{R}^3$

Exercice
Soit pour $a \in \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :
$q_a(x) = -x_1^2 + 3x_2^1 + ax_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ pour $x \in \mathbb{R}^3$
a/ Écrire la matrice M_a de q_a relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
b/ Utiliser le programme précédent pour décomposer q_a en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
Expliciter les formes linéaires trouvées.
Pour quelles valeurs de a, q_a est-elle : non dégénérée ? définie positive ?
c/ Dans le cas où q_a est définie positive, montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3 S_a telle que : $M_a = {}^tS_aS_a$

2 Extrema des fonctions de deux variables.

2.1 Commandes utiles

2.1.1 Avec MuPAD

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction de 2 variables, utiliser la commande `plot3d` avec l'option `Surface` ou encore utiliser la commande `plotfunc`.
Par exemple:

```
plot3d(Axes = None, Ticks = 0,
  Title = "Plot of sin(u^2 + v^2)", TitlePosition = Below,
  CameraPoint = [13.0, -24.0, 20.0],
  [Mode = Surface, [u, v, 1/2*sin(u*u + v*v)],
   u = [-float(PI), float(PI)], v =  [-float(PI), float(PI)],
```

```
  Grid = [30, 30], Style = [HiddenLine, Mesh]
 ]);
```

dans ce cas le résultat est sauvegardé automatiquement dans le fichier `save.mp`. Pour visualiser la surface il faut alors taper la commande `vcam save.mp` dans la fenêtre `Konsole`.
ou

```
plotfunc(1/2*sin(u*u+v*v),u=-float(PI)..float(PI),
                          v=-float(PI)..float(PI));
```

dans ce cas la fenêtre `vcam` s'ouvre automatiquement mais pour pouvoir continuer à utiliser `MuPAD` il faudra fermer cette fenêtre!

Recherche de points critiques :
la fonction `linalg::grad` calcule le gradient d'une fonction par rapport a un vecteur de variables.
On peut alors utiliser `solve` pour trouver les points critiques (exacts lorsque le système est polynomial, sinon il faut utiliser `fsolve`).
La fonction `linalg::hessian` permet alors de déterminer la matrice hessienne, et la fonction `subs` permet de remplacer les variables par leurs valeurs au(x) point(s) critique(s).
On peut utiliser `linalg::cholesky` pour déterminer si on a affaire à une matrice définie positive (ou `linalg::cholesky(-M)` pour une matrice définie négative). Si la matrice n'est pas définie `eigenValues` permet de déterminer la signature, il ne semble pas y avoir de fonctions pour calculer la décomposition ${}^tPDP$ d'une matrice symétrique.
Attention : Dans la décomposition $A = {}^tPDP$, P n'est pas "une matrice de passage", en fait les colonnes de P^{-1} forment une base orthogonale pour la forme quadratique de matrice $A = {}^tPDP$.
La matrice de passage est $Q = P^{-1}$, on a donc $D = {}^tQAQ$ et comme D est diagonale cela signifie que les vecteurs colonnes V_i de Q sont ortogonaux pour la forme quadratique de matrice A puisque ${}^tV_jAV_i = 0$.
ou encore
$< P^{-1}e_i, AP^{-1}e_j > = < P^{-1}e_i, {}^tPDPP^{-1}e_j > = < PP^{-1}e_i, De_j > = < e_i, De_j >$

2.1.2 Avec la HP49G

Tracé : utiliser `shift-bleu F4 (2D/3D)` puis `CHOOSE` pour choisir le type de tracé, sélectionnez alors `Fast3d`
Gradient : on utilise la commande `DERIV` en mettant un vecteur de variables, par exemple `DERIV(X^2-Y^2,[X,Y])`.
Hessienne : la commande `HESS` prend les même arguments que la commande `DERIV` et renvoie la matrice hessienne, le gradient et la liste des variables.
Pour chercher le type des points critiques on tape :
`HESS(X^2-Y^2,[X,Y]) STO> H` puis, `SOLVE(H[2],H[3]) STO> CRIT`

qui renvoie la liste des points critiques (si le système est polynomial).
Pour `X^2-Y^2` il n'y a qu'un point critique et la hessienne est constante, on peut conclure directement, sinon on lance la commande :
`SUBST(H[1],CRIT)` pour évaluer la hessienne aux points critiques.
On utilise enfin : `SYLVESTER(ANS(1))` pour connaitre la signature de la forme quadratique (la commande `SYLVESTER` renvoie la décomposition $A = {}^tPDP$ d'une matrice symétrique).
Pour l'étude des formes quadratiques il y les commandes :
`QXA` qui a comme arguments une forme quadratique q et le vecteur de composantes le nom des variables utilisées. `QXA` renvoie la matrice A associée à q et le vecteur de composantes le nom des variables utilisées.
`AXQ` qui a comme arguments une matrice symétrique A et le vecteur de composantes le nom des variables utilisées. `QXA` renvoie la forme quadratique q associée à A et le vecteur de composantes le nom des variables utilisées.
`GAUSS` qui a comme arguments une forme quadratique q et le vecteur de composantes le nom des variables utilisées. `GAUSS` renvoie une liste de 4 termes : les termes diagonaux d'une matrice diagonale, la matrice Q de changement de base, l'écriture de q sous la forme de sommes ou différences de carrés et enfin le vecteur de composantes le nom des variables utilisées.
`SYLVESTER` qui a comme argument une matrice symétrique A. `SYLVESTER` renvoie les termes diagonaux d'une matrice diagonale B, la matrice Q de changement de base tel que $A = {}^tQBQ$.

2.2 Exercices

1/ Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

a/ Calculer le gradient de f
b/ Déterminer les extremums de f et vérifier vos résultats en traçant le graphe de f

2/ Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = x^2 + (y^3 - y)^2$$

a/ Calculer le gradient de g
b/ Déterminer les extremums de g et vérifier vos résultats en traçant le graphe de g

3/ Soit h la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x,y) = (y+1)(x+y-1)(y-x+1)$$

a/ Calculer le gradient de h
b/ Déterminer les extremums de h et vérifier vos résultats en traçant le graphe

de h

4/ Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{2} + xyz - z + y$$

a/ Calculer le gradient de f
b/ Déterminer les extremums de f

2.3 Autres exercices (optionnels)

Déterminer les extremums des fonctions f suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y^2 + x^3 - x^2 \\
f(x,y) &= xy \\
f(x,y) &= x^4 + y^4 - (x-y)^2 - \frac{1}{2}(x-y)^3 \\
f(x,y) &= \frac{1}{2}x^2 - \cos(y) \\
f(x,y) &= \ln(1+x^2+y^2) + x - \ln(1+x) \\
f(x,y,z) &= (x+2z)^4 + 4(y-1)^2 - 2(y-z+x+1)^2 \\
f(x,y,z) &= (x+2z)^4 + 4y^2 + 4z^2 - 2(y-z+x)^2 \\
f(x,y,z) &= x^4 + z^4 + 4y^2 - 4z^2 - 4(y-z+x)
\end{aligned}$$