

Xcas au lycée

Renée De Graeve & Bernard Parisse
Université de Grenoble I

Xcas, au départ un logiciel de calcul formel, permet aujourd’hui de faire de l’algorithmique, de la géométrie interactive et analytique dans le plan et l’espace et propose un petit module tableur, d’où son nom de “couteau suisse des mathématiques”. Il s’agit d’un logiciel libre, disponible sous Windows, Mac OS et Linux, la version à jour se récupère en tapant `xcas` sur un moteur de recherche ou directement depuis le site de Xcas (adresse ci-dessous).

Ce fascicule contient des fiches de présentation rapide des différents modules de Xcas, accompagnées d’exemples ou/et de petits exercices corrigés, y compris sur les nouveaux programmes de lycée (proba-stats et spécialité Terminale S). Il est assez condensé pour tenir peu de place, de nombreux autres documents sont disponibles dans la documentation en ligne de Xcas, sur le site web de Xcas (page pédagogique en particulier), le forum de Xcas permet de poser des questions, et aussi de voir ce que des collègues ont pu réaliser en classe.

Site web, page pédagogique et forum de Xcas :

- www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html
- www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/irem.html
- <http://xcas.e.ujf-grenoble.fr/XCAS>

Table des matières

I	Fiche Xcas l’interface	3
1	Exemples d’utilisation	5
1.1	Les différents niveaux	5
1.2	Les signes de ponctuation	5
1.3	Les aides	6
1.4	Les configurations	6
II	Fiche Xcas calcul formel de base	7
2	Exemples d’utilisation	9
2.1	Transformations	9
2.2	Arithmétique	9
III	Fiche Xcas les proba-stats et le tableur	11

3 Exemples d'utilisation	13
3.1 Bézout programmé avec le tableur	13
3.2 Loi binomiale	13
3.3 Simulation	14
3.4 Convergence vers la loi normale	14
3.5 Fluctuations à un seuil donné	14
IV Fiche Xcas Algèbre	15
4 Exemples d'utilisation	17
4.1 Système d'équations linéaires	17
4.2 Matrice et graphe	17
4.3 Interpolation et formule des 3 niveaux	17
V Fiche Xcas pour la spécialité maths Terminale S.	19
5 Exemples d'utilisation	21
5.1 Cryptographie de Hill	21
5.2 Systèmes dynamiques	22
VI Fiche Xcas analyse	23
6 Exercice : Nombre de chiffre de 1000 !	25
VII Fiche Xcas la géométrie	27
7 Exemples d'utilisation	29
7.1 Une démonstration avec Xcas	29
7.1.1 La solution avec Xcas	29
7.1.2 La solution sans Xcas	29
7.2 Maximiser une aire	29
VIII Fiche Xcas la programmation	31
8 Exemples d'utilisation	33
8.1 Programmer un jeu	33
8.2 Des triangles équilatéraux emboîés	34
8.3 Les nombres amiables	34
IX Fiche Xcas la tortue	35
9 Exercices	37
9.1 La toile d'araignée et la trigonométrie	37
9.2 Les carrés magiques	38

Première partie

Fiche Xcas l'interface

Description de l'interface	
Fich Edit Cfg...	est une barre de menu cliquable
session1.xws	est le nom de la session (Unamed si la session n'a pas été sauvée)
?	ouvre l'index de l'aide
Sauve	sauvegarde la session
Config: exact reel...	ouvre la configuration du CAS
STOP	interrompt un calcul trop long
Kbd	fait apparaître un clavier scientifique
X	ferme la session
1	est une ligne de commande

Chaque session est composée de niveaux numérotés qui peuvent être de différentes natures : ligne de commandes pour le calcul formel, écran de géométrie dynamique (2-d et 3-d), tableur formel, dessin tortue, éditeur de programmes etc...Alt+g signifie Alt puis g en laissant Alt enfoncé.

Les différents niveaux possibles	
Alt+c	ouvre une ligne de commentaires
Alt+d	ouvre un niveau de dessin tortue
Alt+e	ouvre un éditeur d'expressions
Alt+g	ouvre un niveau de géométrie 2-d
Alt+h	ouvre un niveau de géométrie 3-d
Alt+n	ouvre une ligne d'entrée de commandes
Alt+p	ouvre un éditeur de programmes
Alt+t	ouvre un tableur

Les commandes sont classées par thème dans les menus, on peut aussi les retrouver par ordre alphabétique dans l'index de l'aide (Aide►Index). Vous avez aussi plusieurs manuels disponibles avec des exercices corrigés (Aide►Manuels►...) et des exemples (Aide►Exemples).

Les aides possibles	
Aide►Manuels►...	ouvre un des manuels dans votre navigateur
F12	recherche d'un mot-clef dans les manuels
Cmds►Reel►Base►ceil	ouvre l'index de l'aide à ceil
Aide►Index	ouvre l'index de l'aide des commandes
?	ouvre l'index de l'aide des commandes
ce ?	ouvre l'index de l'aide sur ceil
ce F1	ouvre l'index de l'aide sur ceil
ce ⇌	ouvre l'index de l'aide sur ceil
?ceil	ouvre l'aide détaillée sur ceil

Xcas manipule différents types de données : les entiers (2), les fractions (3/2), les nombres flottants (2.0, 1.5), les paramètres formels (x, t), les variables (a:=2), les expressions (x^2-1), les fonctions (f(x):=x^2-1), les listes ([1, 2, 3]), les séquences (1, 2, 3) (une matrice est une liste de listes de même longueur, une séquence ne peut pas contenir de séquences), les chaînes de caractères ("na") et les objets géométriques.

Xcas peut faire du calcul formel et du calcul numérique.

Pour faire du calcul formel, on utilise les nombres exacts. Les nombres exacts sont les constantes prédéfinies comme pi, e, i, infinity, +infinity, -infinity, les entiers comme 2, les fractions d'entiers comme 1/2 et toute expression ne contenant que des entiers et des constantes comme sqrt(2)*e^(i*pi/3). Les calculs sont effectués en mode exact si tous les nombres qui interviennent sont exacts, (3/2+1 renvoie 5/2). La commande evalf renvoie la valeur approchée d'une valeur exacte (evalf(1/2) renvoie 0.5).

Pour faire du calcul numérique, on utilise les nombres approchés. Les nombres approchés sont notés avec la notation scientifique standard : partie entière suivie du point de séparation et partie fractionnaire (éventuellement suivie de e et d'un exposant) : 0.5 ou 5e-1 est la version approchée du rationnel 1/2.

Les calculs sont effectués en mode approché si un des nombres de l'expression est approché, (1.5+1 renvoie 2.5). Pour les nombres réels approchés, la précision par défaut est d'environ 15 chiffres significatifs. Elle peut être changée, en donnant le nombre de décimales désiré comme second argument de evalf, par exemple evalf(sqrt(2), 50) ou en modifiant la variable Digits. par exemple, Digits:=50; evalf(sqrt(2))

Il ne faut pas confondre expression et fonction. Une expression est une combinaison de nombres et de variables reliés entre eux par des opérations alors qu'une fonction associée à une variable est une expression. Par exemple, a:=x^2+2*x+1 définit une expression et b(x):=x^2+2*x+1 définit une fonction. On obtient la valeur de l'expression a en 0, avec subst(a, x=0) et la valeur de la fonction b en 0, avec b(0).

Signification des signes de ponctuation	
.	sépare la partie entière de la partie décimale
,	sépare les éléments d'une liste ou d'une séquence
;	termine chaque instruction d'un programme
;;	termine les instructions lorsqu'on ne veut pas l'affichage de la réponse
!	n! est la factorielle de n (4!=1·2·3·4=24)
:=	a:=2 instruction d'affectation qui stocke 2 dans la variable a
[]	délimiteurs d'une liste (L:=[0, 2, 4] et L[1] renvoie 2)
" "	délimiteurs d'une chaîne de caractères (C:="ba" et C[1] renvoie "a")

Les différentes configurations pour définir les paramètres de votre environnement	
►	désigne un sous-menu à choisir
Cfg►Configuration du CAS	ouvre la configuration du CAS
Cfg►Configuration graphique	ouvre la configuration graphique par défaut
Cfg►Configuration generale	ouvre la configuration générale
bouton cfg (Graphe)	ouvre la configuration du niveau graphique
bouton Config : exact...	ouvre la configuration du CAS
bouton Config tableur :	ouvre la configuration du tableur

1 Exemples d'utilisation

1.1 Les différents niveaux

Dans une ligne d'**entrée de commande** (Alt+n ou CAS►Nouvelle entree), on tape : `simplify(f(2)+f(3))` et on obtient : `ln(108)`. Certaines commandes ont un résultat graphique affiché juste en-dessous, par exemple

```
plot(sin(x), x=0..pi)
```

trace le graphe de la fonction sinus sur $[0, \pi]$.

Dans un éditeur de **programmes** (Alt+p ou Prg►Nouveau programme), on tape

```
f(a,b,c) := {
  local d; d:=b^2-4*a*c;
  si d<0 alors []; sinon
  d:=sqrt(d); [(-b-d)/(2*a), (-b+d)/(2*a)];
  fsi;
} ;;
```

on appuie sur OK (ou F9). Sur une ligne de commande, on tape `f(1,1,1)` ou `f(1,-5,6)`, on obtient `[]` ou `[2,3]`.

Dans un niveau de **géométrie 2d** (Alt+g ou Geo►Nouvellefigure 2d), on choisit Mode►point et on clique 3 points dans l'écran. On obtient A, B, C et leurs définitions dans les lignes de commandes à gauche de l'écran.

On tape à gauche de l'écran `triangle(A,B,C); mediane(A,B,C);`, on choisit Mode►Pointeur et on peut déplacer A avec la souris.

Dans un **tableur** (Alt+t ou Tableur►Nouveau tableur), on remplit la fenêtre de configuration qui s'ouvre automatiquement et on la valide avec OK.

On clique sur A0 et on tape `1 Enter` et 1 s'inscrit dans la ligne de commande située sous la barre de menu du tableur. On clique sur A1 et on tape `=A0+1 Enter`, on clique sur B0 et on tape `=A0^2 Enter`.

Puis on recopie ces 2 formules vers le bas : on clique sur A1 (resp B0) puis Ctrl+d (ou menu du tableur Edit►Remplir►Copier vers le bas).

On obtient : dans A la liste des entiers et dans B la liste de leurs carrés.

Dans un **dessin tortue** (Alt+d ou Tortue►Dessin tortue), on a la tortue sous la forme d'une flèche dans un écran de dessin avec une ligne de commande à gauche, un éditeur à droite et en bas des boutons qui inscrivent les principales commandes là où se trouve le curseur (soit dans l'éditeur, soit dans une ligne de commande). **Attention** Tout ce que l'on valide à gauche s'inscrit à droite. On peut modifier l'éditeur pour corriger une erreur puis l'exécuter avec OK

1.2 Les signes de ponctuation

Si on tape `sqrt(2)`, on obtient `sqrt(2)`

Si on tape `sqrt(2.)`, on obtient `1.41421356237`. En effet, dans le deuxième cas le point après le 2 désigne un nombre approché.

On tape pour avoir la valeur approchée avec 20 décimales :

```
evalf(sqrt(2), 20)
```

On obtient :

```
1.41421356237309504880
```

On tape :

```
a:=20!;b:=string(a);dim(b)
```

On obtient factorielle 20, sa valeur convertie en chaîne de caractères et la longueur de cette chaîne c'est à dire le nombre de chiffres de 20! :

```
2432902008176640000, "2432902008176640000", 19
```

On tape :

```
a:=20!;;b:=string(a);dim(b)
```

On obtient car `;` ; indique qu'il ne faut pas afficher le résultat :

```
"Done", "Done", 19
```

On tape :

```
v1:=[1, 2, 3];v2:=[-1, 2, -3];v1*v2
```

On obtient le produit scalaire de v1 et v2 (-1+4-9 :

```
[1, 2, 3], [-1, 2, -3], -6
```

On tape :

```
M1:=[[1, 2], [3, 4]];M2:=[[1, 3], [2, 4]];M1*M2
```

On obtient le produit des matrices M1 et M2 :

```
[[1, 2], [3, 4]], [[1, 3], [2, 4]], [[5, 11], [11, 25]]
```

1.3 Les aides

Si on connaît le nom de la commande, on clique : Aide►Index

On obtient : la liste des commandes par ordre alphabétique, un curseur permet de parcourir cette liste et une ligne d'entrée permet d'ouvrir l'index à la demande

Ou bien, on tape :

le début d'un nom puis sur le point d'interrogation (sur fond cyan) ou sur la touche de tabulation

On obtient :

l'ouverture de l'index à l'endroit indiqué

Ou bien on utilise les menus qui classent les commandes par thème, par exemple, on clique : Cmds►Entier►iegcd

On obtient si dans Cfg►Configuration générale on n'a pas coché Aide automatique :

l'aide sur cette commande dans la fenêtre des messages

(►) et si on a coché Aide automatique, on obtient en plus :

l'ouverture de l'index à iegcd

1.4 Les configurations

En plus des différentes configurations, il faut penser à utiliser :

- dans un niveau de géométrie ou un graphe 2d (resp 3d) :

le menu M situé dans le pavé des boutons à droite de l'écran. Il permet de gérer des animations ou des traces (resp de gérer les vues d'une figure 3d).

de cocher ou décocher la case selon que l'on veut des points à coordonnées flottantes ou exactes.

- dans un niveau de dessin tortue, utiliser le menu M situé sous l'écran de dessin, à droite : vous pouvez ainsi faire apparaître (ou non) un maillage et cacher le carré jaune en haut à droite qui donne la position de la tortue.

Deuxième partie

Fiche Xcas calcul formel de base

L'exécution d'une ligne de commandes se fait par la touche "Entrée". Les nombres peuvent être exacts ou approchés (flottants). Les nombres exacts sont les constantes prédéfinies, les entiers, les fractions d'entiers et toutes expressions ne contenant que des entiers et des constantes. Les nombres approchés sont notés avec la notation scientifique standard : partie entière suivie du point de séparation et partie fractionnaire optionnellement suivie de e et d'un exposant.

Opérations	
+	addition
-	soustraction
*	mutiplication
/	division
^	puissance

Constantes prédéfinies	
pi	$\pi \simeq 3.14159265359$
e	$e \simeq 2.71828182846$
i	$i = \sqrt{-1}$
infinity	∞
+infinity ou inf	$+\infty$
-infinity ou -inf	$-\infty$
euler_gamma	constante d'Euler

Séquences et listes ou vecteurs	
S:=a, b, c	S est une séquence de 3 éléments
S:=[a, b, c]	S est une liste de 3 éléments
op([a, b, c])	renvoie la séquence (a, b, c)
S:=NULL	S est une séquence de 0 élément
S:=[]	S est une liste de 0 élément
dim(S)	renvoie le nombre d'éléments de S
S[0]	renvoie le premier élément de S
S[n]	renvoie le n + 1 unième élément de S
S[dim(S)-1]	renvoie le dernier élément de S
S:=S, d	ajoute l'élément d à la fin de la séquence S
S:=append(S, d)	ajoute l'élément d à la fin de la liste S

Chaînes de caractères	
S:="abc"	S est une chaîne de 3 caractères
dim(S)	renvoie le nombre de caractères de S
S[0]	renvoie le premier caractère de S (par ex "a")
S[n]	renvoie le n + 1 unième caractère de S
S[dim(S)-1]	renvoie le dernier caractère de S
S:=""	S est une chaîne de 0 caractère
"ab"+"def"	concatène les deux chaînes et renvoie "abdef"

Fractions	
propfrac	partie entière + partie fractionnaire
getNum [numer]	numérateur de la fraction [simplifiée]
getDenom [denom]	dénominateur de la fraction [simplifiée]
f2nd	[numer, denom] de la fraction simplifiée
simp2	simplification d'un couple
dfc	développe en fraction continue un réel
dfc2f	transforme une fraction continue en réel

Fonctions classiques			
evalf(t, n)	évalue t avec n décimales	sign	signe (-1,0,+1)
max	maximum	min	minimum
round	arrondi	frac	partie fractionnaire
floor	plus grand entier \leq	ceil	plus petit entier \geq
re	partie réelle	im	partie imaginaire
abs	module ou valeur absolue	arg	argument
conj	conjugué	affixe	affixe
factorial	! factorielle	binomial	coefficients binomiaux
exp	exponentielle	sqrt	racine carrée
ln log	logarithme naturel	log10	logarithme en base 10
sin	sinus	cos	cosinus
tan	tangente	cot	cotangente
asin	arc sinus	acos	arc cosinus
atan	arc tangente	acot	arc cotangente
sinh	sinus hyperbolique	cosh	cosinus hyperbolique
asinh	arc sinus hyperbolique	acosh	arc cosinus hyperbolique
tanh	tangente hyperbolique	atanh	arc tangente hyperbolique

Fonctions d'arithmétique	
a%p	a modulo p est un élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
smod(a, b)	$(a \% b) \% 0$ reste symétrique de la division euclidienne
powmod(a, n, p)	est l'entier égal à a^n modulo p
irem	reste de la division euclidienne
iquo	quotient de la division euclidienne
iquorem	quotient et reste
ifactor	décomposition en facteurs premiers
ifactors	liste des facteurs premiers
idivis	liste des diviseurs
gcd	plus grand diviseur commun
lcm	plus petit multiple commun
iegcd	identité de Bezout
iabcuv	renvoie $[u, v]$ tels que $au + bv = c$
ichinrem	restes chinois
is_prime	teste si l'entier est premier
nextprime	prochain entier pseudo-premier
previousprime	entier pseudo-premier précédent

Transformations			
simplify	simplifie	tsimplify	simplifie (- puissant)
normal	forme normale	ratnormal	forme normale (- puissant)
expand	développe	partfrac	décompose en éléments simples
factor	factorise	convert	transforme en le format spécifié
Transformations en trigonométrie			
tlin	linéarise	tcollect	linéarise et regroupe
texpand	développe exp, ln et trig	trig2exp	trig vers exp
hyp2exp	hyperbolique vers exp	exp2trig	exp vers trig

2 Exemples d'utilisation

2.1 Transformations

Développer

On tape : `expand((1+2x)^2)`

on obtient : $4x^2+4x+1$

On tape : `expand((x+1+i)*(x+i))`

on obtient : $x^2+(1+2i)x-1+i$

Factoriser

Des entiers : `ifactor(10^10+1)`

renvoie : $101*3541*27961$,

Des polynômes : `factor(x^5+9*x^4+30*x^3+46*x^2+33*x+9)`

renvoie : $(x+1)^3*(x+3)^2$

Simplifier

Des fractions : `normal(1/(2-x)+2/(5-2x))`

renvoie : $(-4x+9)/(2x^2-9x+10)$,

ou `simplify(1/(2-x)+1/(2+x))` qui renvoie $(-4)/(x^2-4)$

Des racines carrées :

`simplify(2*sqrt(45)+3*sqrt(12)-sqrt(20)-sqrt(3))`

renvoie : $5\sqrt{3}+4\sqrt{5}$

Trigonométrie

Linéariser : `tlin(2*cos(x)*cos(y))`

renvoie : $\cos(x-y)+\cos(x+y)$,

Développer : `texpand(sin(x+y))`

renvoie : $\sin(y+x)$

Convertir en exponentielles : `normal(trig2exp(3*(cos(x)-i*sin(x))))`

renvoie : $3/\exp(i*x)$

ou : `simplify(trig2exp(-sin(2x)+2i*cos(x)^2))`

renvoie : $(i)*\exp((i)*x)^2+i$

Conversion inverse : `exp2trig(exp(i*x))`

renvoie : $\cos(x)+(i)*\sin(x)$

Regrouper sin et cos : `tcollect(sqrt(3)*sin(x)+cos(x))`

renvoie : $2*\cos(x-1/3\pi)$

Exponentielle et Logarithme

Linéariser : `lin(1/exp(i*x))`

renvoie : $\exp(-i*x)$

Regrouper les logs : `lncollect(ln(2)+ln(3))`

renvoie : $\ln(6)$

Développer les logs : `lnexpand(ln((x+2)^2))`

renvoie : $2*\ln(x+2)$

2.2 Arithmétique

Un exercice sur des nombres de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Trouver les 2 derniers chiffres de 19969^{19969} .

On tape : `powmod(19969, 19969, 100)`

On obtient : 29

Un exercice sur le nombre de diviseurs d'un entier

Quel est, parmi les entiers naturels de 1 à 2012, celui qui admet le plus de diviseurs ? Quel est ce nombre de diviseurs ?

On tape : $2 * 3 * 5 * 7$

On obtient : 210

On tape : $2 * 3 * 5 * 7 * 11$

On obtient : 2310

Cela nous dit que le nombre est de la forme :

$n = 2^a * 3^b * 5^c * 7^d$ avec $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$

et alors son nombre de diviseurs est : $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)$

On fait une recherche systématique en tapant `size(idivis(n))` et on trouve :

$2^{10} = 1024$ a 11 diviseurs, $2^9 * 3 = 1536$ a 20 diviseurs,

$2^7 * 3^2 = 1116$ a 24 diviseurs, $2^6 * 3^3 = 1728$ a 28 diviseurs,

$2^4 * 3^4 = 1296$ a 25 diviseurs, $2^7 * 3 * 5 = 1920$ a 32 diviseurs,

$2^5 * 3^2 * 5 = 1440$ a 36 diviseurs, $2^4 * 3 * 5 * 7 = 1680$ a 40 diviseurs.

$2^4 * 3 * 5 * 7 = 1680$ a 40 diviseurs.

Un exercice sur l'identité de Bézout

Quel est le plus petit nombre entier avec lequel il faut multiplier 49 pour obtenir un nombre se terminant par 99999999 (9 neufs) ?

On a : $99999999 + 1 = 10^9$.

Donc un nombre se terminant par 99999999 (9 neufs) s'écrit : $k * 10^n + 10^9 - 1$ avec $n > 9$ c'est à dire $10^9(k * 10^{n-9}) - 1 = a * 10^9 - 1$.

On cherche p pour avoir : $p * 49 = a * 10^9 - 1$ c'est à dire $1 = a * 10^9 - p * 49$.

Réponse niveau primaire

On peut faire une multiplication à trous : $49 * \dots = ..99999999$

On trouve : $49 * 693877551 = 3399999999$

Réponse niveau TS

Avec Xcas on tape : `bezout_entiers(49, 10^9)`

On obtient : `[306122449, -15, 1]`

Donc : $49 * 306122449 - 15 * 10^9 = 1$ et puisque $49 * 10^9 - 49 * 10^9 = 0$, on a : $49 * (10^9 - 306122449) + (15 - 49) * 10^9 = -1$.

Puisque $10^9 - 306122449 = 693877551$ et $(49 - 15) = 34$, on a :

$49 * 693877551 = 34 * 10^9 - 1 = 3399999999$

Un exercice sur les congruences et les restes chinois

Trouver un nombre entier n , $4 < n < 10000$ vérifiant :

n est divisible par 2, $n - 1$ est divisible par 3, $n - 2$ est divisible par 5, $n - 3$ est divisible par 7, $n - 4$ est divisible par 11.

On tape : `ichinrem([0%2, 1%3, 2%5, 3%7, 4%11])`

On obtient : `-788 % 2310`

On veut que $4 < n < 10000$ donc :

$n = (2310 - 788) + 2310 * k = 1522 + 2310 * k$ avec $k \leq \text{iquo}((10000 - 1522), 2310)$ donc on tape : `iquo((10000-1522), 2310)` qui renvoie 3

On tape : `(1522+2310*k) $(k=0..3)`

On obtient : `1522, 3832, 6142, 8452`

Décomposition en facteurs premiers

Exposant de 17 dans la décomposition en facteurs premiers de 500 !

On tape : `iquo(500, 17), iquo(500, 17^2), iquo(500, 17^3)`

On obtient : `29, 1, 0`

L'exposant de 17 dans la décomposition en facteurs premiers de 500 ! est $29+1=30$.

Troisième partie

Fiche Xcas les proba-stats et le tableur

Probabilités	
<code>comb(n, k)</code>	nombre de combinaisons de p objets pris parmi n
<code>perm(n, p)</code>	nombre d'arrangements de p objets pris parmi n
<code>factorial(n), n!</code>	$n!$
<code>rand(n) ou alea(n)</code>	entier aléatoire uniformément distribué dans $0.. n - 1$
<code>rand(p, q) ou alea(p, q)</code>	réel aléatoire uniformément distribué dans $[p, q]$
<code>randnorm(mu, sigma)</code>	réel aléatoirement distribué selon la loi normale $N(\mu, \sigma)$
<code>randexp(a)</code>	renvoie un réel aléatoire selon la loi exponentielle

Statistiques 1-d	
<code>moyenne</code>	moyenne d'une liste pondérée par le second argument
<code>median</code>	médiane d'une liste pondérée par le second argument
<code>quartiles</code>	[min,quartile1, médiane,quartile3,max]
<code>moustache</code>	boite à moustache d'une série statistique
<code>variance</code>	variance d'une liste pondérée par le second argument
<code>ecart_type</code>	écart-type d'une liste pondérée par le second argument
<code>histogramme</code>	trace l'histogramme de l'argument

Distributiions	
<code>binomial(n, k, p)</code>	probabilité d'obtenir k succès avec n tirages (où p est la probabilité de succès par tirage)
<code>binomial_cdf(n, p, n1, n2)</code>	probabilité d'obtenir entre $n1$ et $n2$ succès
<code>binomial_cdf(n, p, n1)</code>	probabilité d'obtenir au plus $n1$ succès
<code>binomial_icdf(n, p, t)</code>	renvoie le plus grand entier k tel que la probabilité d'obtenir au plus k succès soit $\leq t$
<code>normald(x)</code>	densité de la loi normale de moyenne 0 et écart-type 1
<code>normald(mu, sigma, x)</code>	densité de la loi normale de moyenne μ et écart-type σ
<code>normald_cdf(mu, sigma, x1)</code>	probabilité que x soit $\leq x1$
<code>normald_cdf(mu, sigma, x1, x2)</code>	probabilité que x soit entre $x1$ et $x2$
<code>normald_icdf(mu, sigma, t)</code>	selon la loi normale de moyenne μ et écart-type σ renvoie x tel que la probabilité d'être $\leq x$ soit $\leq t$ (selon la loi normale de moyenne μ et écart-type σ)

Les commandes de statistiques s'utilisent :

- dans le tableur avec le menu Maths : le tableur se remplit automatiquement grâce à une boite de dialogue qui demande de préciser les paramètres de la commande choisie (le curseur doit être dans un niveau de type tableur qui s'obtient avec Alt+t).
- dans des lignes de commandes : soit on les tape, soit on les sélectionne dans le menu Cmds►Proba_stats, soit on utilise le menu Graphic►Stats et ses boites de dialogues.

Statistiques 2-d

polygonplot	ligne polygonale
scatterplot	nuage de points
polygonscatterplot	ligne polygonale pointée
covariance	covariance des éléments de l'argument
correlation	corrélation des éléments de l'argument
exponential_regression	(m, b) où $y = be^{mx}$ approche l'argument
exponential_regression_plot	graphe de $y = be^{mx}$ approchant l'argument
linear_regression	(a, b) où $y = ax + b$ approche l'argument
linear_regression_plot	graphe de $y = ax + b$ approchant l'argument
logarithmic_regression	(m, b) où $y = m \ln(x) + b$ approche l'argument
logarithmic_regression_plot	graphe de $y = m \ln(x) + b$, approchant l'argument
polynomial_regression	$(a_n, ..a_0)$ où $y = a_n x^n + ..a_0$ approche l'argument
polynomial_regression_plot	graphe de $y = a_n x^n + ..a_0$ approchant l'argument
power_regression	(m, b) où $y = bx^m$ approche l'argument
power_regression_plot	graphe de $y = bx^m$ approchant l'argument

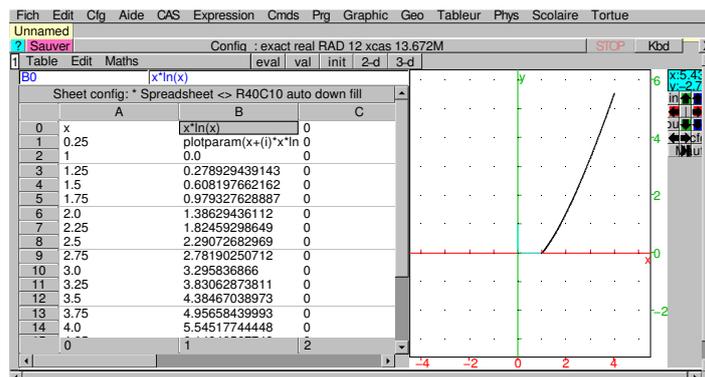
Le tableur de Xcas est un tableur formel dans lequel on peut utiliser toutes les commandes de Xcas ainsi que les variables définies auparavant. Il a :

- ses menus Table Edit Maths (un click droit et on obtient ses menus),
- ses boutons eval val init 2-d 3-d,
- sa case de sélection qui est une case interactive : soit on sélectionne à la souris une cellule ou une plage et son nom s'y inscrit (par exemple A0 : B3), soit on y tape le nom des cellules à sélectionner, (par exemple A0 . . 3, C),
- sa ligne de commande qui permet de remplir les cellules,
- un bouton pour configurer le tableur et qui rappelle cette configuration.

Au tableur est associé un écran graphique 2D visible si on a coché Graphe dans la configuration du tableur (visible en dessous du tableur ou à droite selon que Paysage est coché ou non). On peut aussi utiliser le bouton 2-d (ou 3-d).

Le tableur est une matrice dont on numérote les lignes par des nombres (0,1...) et les colonnes par une ou plusieurs lettres (A,B...). Le nom d'une cellule se fait par référence relative (C2) ou absolue ($\$C\2) ou mixte ($\$C2$ ou $C\$2$). Dans une cellule, on met soit une liste ou une formule de calcul commençant par =, soit une constante, soit une chaîne de caractères entourées de guillemets ("essai").

Exemple : tableau de valeurs d'une fonction Dans le tableur, on ouvre une boîte de dialogue avec le menu Maths►Function. On met : expression $x * \ln(x)$, variable x de 1 à 4, xstep= 0.25, colonne A. On obtient, si Paysage est décoché :



3 Exemples d'utilisation

3.1 Bézout programmé avec le tableur

- Dans une ligne de commande, on met $a := 78 ; b := 6$ on valide puis on ouvre un niveau tableur.
- La colonne A est "la suites des restes" r_n . On met $=a$ dans A0, $=b$ dans A1, $=\text{irem}(A0, A1)$ dans A2 et on remplit vers le bas (Ctrl+d),
- La colonne E est "la suites des quotients" q_n . On met $=\text{iquo}(A0, A1)$ dans E2 et on remplit vers le bas,
- Les colonnes B et C, sont les deux suites u_n et v_n de façon qu'à chaque étape on ait : $r_n = u_n a + v_n b$. On met 1 dans B0, 0 dans C0, 0 dans B1, 1 dans C1, $B0 - E2 * B1$ dans B2, $C0 - E2 * C1$ dans C2 et on remplit vers le bas,
- La colonne D est $u_n a + v_n b$ ($D = A$). On met $=B0 * \$A\$0 + C0 * \$A\1 dans D0 et on remplit vers le bas
- La colonne F est la réponse $[u, v, \text{pgcd}(a, b)]$. On met $=\text{si } A0 == 0 \text{ alors } [B0, C0, D0]; \text{ sinon } 0; \text{ fsi}$ dans F0 et on remplit vers le bas.

On vérifie avec $\text{iegcd}(78, 56)$ et on obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	78	1	0	78	0	0	0	0	0
1	56	0	1	56	0	0	0	0	0
2	22	1	-1	22	1	0	0	0	0
3	12	-2	3	12	2	0	0	0	0
4	10	3	-4	10	1	0	0	0	0
5	2	-5	7	2	1	[-5,7,2]	0	0	0
6	0	28	-39	0	5	0	0	0	0
7	2	-5	7	2	0	[-5,7,2]	0	0	0
8	0	28	-39	0	0	0	0	0	0
9	2	-5	7	2	0	[-5,7,2]	0	0	0
10	0	28	-39	0	0	0	0	0	0
11	2	-5	7	2	0	[-5,7,2]	0	0	0
12	0	28	-39	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Formula bar: $\text{iegcd}(78,56)$ [-5, 7, 2]

3.2 Loi binomiale

On tire une pièce à pile ou face 100 fois de suite. La probabilité d'obtenir 40 piles si la pièce est bien équilibrée est de $\text{binomial}(100, 40, 0.5)$ (valeur approchée) ou $\text{binomial}(100, 40, 1/2)$ (valeur exacte).

La probabilité que le nombre de piles soit inférieure ou égal à 40 vaut :

$\text{binomial_cdf}(100, 0.5, 40)$ (attention l'ordre des paramètres est inversé par rapport à binomial).

On a une probabilité d'être dans l'intervalle de confiance $[50 - 1/\sqrt{100}, 50 + 1/\sqrt{100}]$ valant $\text{binomial_cdf}(100, 0.5, 40, 60)$ (ici environ 0.965).

Pour avoir un intervalle de confiance de 99% centré, on calcule

$\text{binomial_icdf}(100, 0.5, 0.995)$ qui renvoie 63 et

$\text{binomial_icdf}(100, 0.5, 0.005)$ qui renvoie 37 (symétrique de 63).

Si la pièce n'est pas équilibrée, remplacer 0.5 par la probabilité d'obtenir pile.

3.3 Simulation

On peut simuler un pile ou face par `alea(2)`, une série de 100 par `seq(alea(2), j, 1, 100)`, sa somme par `sum(alea(2), j, 1, 100)` et l'histogramme de 1000 séries de 100 tirs par

```
histogram(seq(sum(alea(2), j, 1, 100), k, 1, 1000));
```

On superpose la loi binomiale au graphe en rajoutant à la commande précédente

```
plotlist(seq(binomial(100, k, 0.5), k, 0, 100), couleur=rouge)
```

On simule 100 lancers d'une pièce non équilibrée où la probabilité d'obtenir pile est p , par `seq(alea(0, 1) < p, j, 1, 100)`, (le résultat du test `alea(0, 1) < p` est de probabilité p car il vaut 1 si le nombre généré est plus petit que p et 0 sinon).

Pour simuler par exemple 100 tirages selon la loi normale, faire

```
seq(randnorm(0, 1), j, 1, 100).
```

3.4 Convergence vers la loi normale

On peut tracer le diagramme en batons de la loi binomiale de paramètres par exemple $n = 100$ et $p = 0.4$ en tapant : `n:=100; p:=0.4;`

```
diagramme_batons(seq(binomial(n, k, p), k, 0, n));
```

Cliquer plusieurs fois sur le bouton bleu flèche vers le bas pour voir tout le diagramme. Pour superposer la loi normale qui approche ce diagramme, ajouter la commande `graphe(normald(n*p, sqrt(n*p*(1-p)), x), x=0..100)`

Pour faire observer le théorème de Moivre-Laplace tel qu'il est énoncé, les commandes sont plus complexes. Il faut générer un histogramme avec en abscisse des intervalles de valeurs succesives (ici centrés) que prend $(X_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ et en ordonnée la loi binomiale, on tapera les commandes

```
S:=seq([(k-n*p)/sqrt(n*p*(1-p)), binomial(n, k, p)], k, 0, n);
```

```
H:=histogram(S, affichage=nom_cache);
```

```
graphe(normald(x), x=-10..10, couleur=rouge)
```

On calcule l'aire d'une partie de l'histogramme avec : `aire(H[a..b-1])` (rectangles d'indices a à b) ou `binomial_cdf(n, p, a, b-1)`, que l'on peut comparer avec l'aire sous la courbe `int(normald(x), x=a..b)`. On peut reprendre les commandes précédentes en faisant varier n et p de manière interactive en définissant les paramètres n et p (menu Edit->New parameter, prendre garde de décocher la case `symb` pour avoir un curseur numérique et définir la plage de n et p ainsi que le pas).

3.5 Fluctuations à un seuil donné

- Visualisation de la partie hors de l'intervalle de confiance. Commencer par tracer la loi normale

```
graphe(normald(x), x=-10..10);
```

puis valider, puis ajouter à la fin de la commande

```
plotarea(normald(x), x=-6..-2);
```

```
plotarea(normald(x), x=2..6)
```

Faire de même en remplaçant 2 et -2 par 3 et -3.

- Calcul de l'intervalle de confiance centré au seuil de 1% pour la loi normale centrée réduite :

```
[normal_icdf(0, 1, 0.005), normal_icdf(0, 1, 0.995)]
```

Quatrième partie

Fiche Xcas Algèbre

Polynômes	
normal	forme normale (développée et réduite)
expand	forme développée
ptayl	changement d'origine
peval horner	évaluation en un point par l'algorithme de Horner
genpoly	polynôme défini par sa valeur en un point
canonical_form	trinôme sous forme canonique
coeff	coefficient ou liste des coefficients
poly2symb	du polynôme au format Xcas à la forme symbolique
symb2poly	de la forme symbolique à un polynôme au format Xcas
pcoeff	polynôme décrit par ses racines
degree	degré
lcoeff	coefficient du terme de plus haut degré
valuation	degré du monôme de plus bas degré
tcoeff	coefficient du monôme de plus bas degré
factor	décomposition en facteurs irréductibles sur \mathbb{Q}
cfactor	décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}[i]$
factors	liste des facteurs irréductibles
divis	liste des diviseurs
collect	factorisation sur le corps des coefficients
froot	racines avec leurs multiplicités
proot	valeurs approchées des racines
sturmab	nombre de racines dans un intervalle
getNum	numérateur d'une fraction rationnelle non simplifiée
getDenom	dénominateur d'une fraction rationnelle non simplifiée
propfrac	isole partie entière et fraction propre
partfrac	décomposition en éléments simples
quo	quotient de la division euclidienne
rem	reste de la division euclidienne
gcd	plus grand diviseur commun
lcm	plus petit multiple commun
egcd	identité de Bezout
chinrem	restes chinois
randpoly	polynôme aléatoire
cyclotomic	polynômes cyclotomiques
lagrange	polynômes de Lagrange
hermite	polynômes de Hermite
laguerre	polynômes de Laguerre
tchebyshev1	polynômes de Tchebyshev 1ère espèce
tchebyshev2	polynômes de Tchebyshev 2nde espèce

Matrices	
<code>M:=[[a,b,c], [f,g,h]]</code>	M est une matrice de 2 lignes et 3 colonnes
<code>dim(M)</code>	est la liste [nbre_lignes, nbre_colonnes]
<code>nrows(M), ncols(M)</code>	nombre de lignes, colonnes
<code>M[0]</code>	renvoie la première ligne de M
<code>M[n] ou row(M,n)</code>	renvoie la n + 1 unième ligne de M
<code>col(M,n)</code>	renvoie la n + 1 unième colonne de M
<code>M[nrows(M)-1]</code>	renvoie la dernière ligne de M
<code>M[n..p]</code>	renvoie la sous matrice de M de lignes [n..p]
<code>M:=append(M, [d,k,l])</code>	ajoute la ligne [d,k,l] à la fin de M
<code>M[nrows(M)]:= [d,k,l]</code>	ajoute la ligne [d,k,l] à la fin de M
<code>M:=border(M, [d,k])</code>	ajoute la colonne [d,k] à la fin de M

Opérations sur les vecteurs et matrices	
<code>v*w</code>	produit scalaire
<code>cross(v,w)</code>	produit vectoriel
<code>A*B</code>	produit matriciel
<code>A.*B</code>	produit terme à terme
<code>1/A</code>	inverse
<code>tran</code>	transposée
<code>rank</code>	rang
<code>det</code>	déterminant
<code>ker</code>	base du noyau
<code>image</code>	base de l'image
<code>idn</code>	matrice identité
<code>ranm</code>	matrice à coefficients aléatoires

Systèmes linéaires	
<code>linsolve</code>	résolution d'un système
<code>rref</code>	réduction de Gauss-Jordan
<code>rank</code>	rang
<code>det</code>	déterminant du système

Réduction des matrices	
<code>jordan</code>	diagonalisation ou réduction de Jordan
<code>pcar</code>	coefficients du polynôme caractéristique
<code>pmin</code>	coefficients du polynôme minimal
<code>eigenvals</code>	valeurs propres
<code>eigenvects</code>	vecteurs propres

4 Exemples d'utilisation

4.1 Système d'équations linéaires

Résoudre le système linéaire en x, y, z de paramètre a :

$$\begin{cases} a * x + y + z = 1 \\ x + a * y - z = 2 \\ 2 * x - z = 3 \end{cases}$$

On tape : `linsolve([a*x+y+z=1, x+a*y-z=2, 2*x-z=3], [x, y, z])`

On obtient :

$$\left[\frac{4a+1}{a^2+2a+1}, \frac{-a+2}{a^2+2a+1}, \frac{-3a^2+2a-1}{a^2+2a+1} \right]$$

Pour déterminer les valeurs de a qui donnent 0 ou une infinité de solutions :

`solve(a^2+2*a+1, a)`, on obtient : `[-1]`

Si $a = -1$, on tape : `linsolve([-x+y+z=1, x-y-z=2, 2*x-z=3], [x, y, z])`

On n'obtient pas de solutions : `[]`

4.2 Matrice et graphe

Dans une ville les lignes de bus vont : de la Gare au Centre, du Centre à la Gare, de la Gare au Lycée, du Lycée à la Gare, de la Gare à la Mairie, de la Mairie à la Gare, du Lycée au Centre, du Centre au Lycée, et de la Mairie au Centre.

Donner la matrice A associée au graphe GLCM.

Un voyageur a pris un billet de 5 trajets.

Combien y-a-t-il de possibilités pour faire ces 5 trajets : si il part de la Gare et retourne à la Gare ou si il part du Lycée et doit arriver à la Gare.

On tape :

`A:=[[0, 1, 1, 1], [1, 0, 1, 0], [1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0]] ; B:=A^5`

On obtient :

$$\left[[21, 23, 22, 12], [19, 14, 19, 7], [19, 15, 18, 7], [19, 14, 19, 7] \right]$$

Lorsqu'il part de la Gare et retourne à la Gare, il y a $B[0, 0]=21$ possibilités et lorsqu'il part du Lycée et doit arriver à la Gare il y a $B[1, 0]=14$ possibilités.

4.3 Interpolation et formule des 3 niveaux

Polynôme d'interpolation (de Lagrange) en 3 points :

On considère 3 couples de réels ou complexes $(x_j, y_j)_{j=0..2}$, les x_j étant 2 à 2 distincts. On montre qu'il existe un polynôme P unique de degré inférieur ou égal à 2 tel que pour $j = 0..2$ on ait $P(x_j) = y_j$. Trouver P lorsque $x_1 = (x_0 + x_2)/2$.

Solution : On pose $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, il faut résoudre :

$$\begin{cases} P(x_0) = Ax_0^2 + Bx_0 + C = y_0 \\ P(x_1) = Ax_1^2 + Bx_1 + C = y_1 \\ P(x_2) = Ax_2^2 + Bx_2 + C = y_2 \end{cases}$$

On tape : `N:=[[x0^2, x0, 1], [x1^2, x1, 1], [x2^2, x2, 1]] ;`

`x1:=(x0+x2)/2`

factor(linsolve([N*[A, B, C]-[y0, y1, y2]], [A, B, C]))

Ou directement lagrange([x0, x1, x2], [y0, y1, y2]), lagrange renvoie le polynôme construit degré par degré dans la base 1, $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ (méthode des différences divisées), les algébristes utilisent fréquemment :

$$y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Calcul d'une intégrale par la méthode de Simpson :

On approche une fonction continue f sur l'intervalle $I = [x_0, x_2]$ par une parabole qui coïncide avec la fonction en $x_0, x_1 = (x_0+x_2)/2, x_2$. On cherche donc comme précédemment $P(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $P(x_i) = f(x_i) = y_i$ pour $j = 0, 1, 2$. Calculons la valeur approchée de l'intégrale de f sur I obtenue en remplaçant f par le polynôme P . On tape :

x1 := (x0+x2) / 2;

factor(int(lagrange([x0, x1, x2], [y0, y1, y2]), x=x0..x2))

On obtient : $((-y_2-y_0-4*y_1) * (x_0-x_2)) / 6$

Donc

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{x_2-x_0}{6} (f(x_2) + 4f(\frac{x_2+x_0}{2}) + f(x_0))$$

Si f est un polynôme de degré 0, 1 ou 2, alors bien sûr $P = f$ et la formule obtenue n'est pas seulement approchée mais est exacte. Il se trouve que c'est encore vrai si f est un polynôme de degré 3, en effet, on peut se ramener à $f(x) = x^3$ (puisque la formule est exacte en degré plus petit que 2), on calcule alors :

r := int(x^3-lagrange([x0, x1, x2], [x0^3, x1^3, x2^3]), x, x0, x2)
puis normal(r) qui donne 0.

La formule des 3 niveaux :

Soit un solide de volume : $V = \int_a^b S(z)dz$ où $S(z)$ est la surface de la section par le plan de cote z . Si $S(z)$ est un polynôme en z de degré au plus 3 alors :

$$V = \frac{(b-a)}{6} (S(a) + 4S(\frac{a+b}{2}) + S(b))$$

Ceci résulte du résultat précédent en prenant comme fonction f la fonction S .

Cette formule est en fait la formule de Simpson pour le calcul de l'aire sous une courbe, formule qui est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et sinon donne une bonne approximation de l'intégrale lorsque f est suffisamment régulière (pour améliorer on découpe l'intervalle $[a, b]$ en plusieurs subdivisions et on applique la formule de Simpson sur chaque subdivision).

Remarque 1

Dans le commerce les flacons ont souvent la taille fine : c'est pour les avoir bien en main mais aussi pour donner l'illusion d'un grand volume, puisque la section médiane compte 4 fois !!!

Remarque 2

On en déduit facilement le volume du tonneau de hauteur $2d$ (sphère de rayon R sans ses 2 calottes), en effet $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$ d'où :

$$V = \frac{2d}{6} (\pi(R^2 - d^2) + 4\pi R^2 + \pi(R^2 - d^2)) = \frac{\pi}{3} d(6R^2 - 2d^2)$$

On retrouve bien :

$$V = \frac{2\pi}{3} d(3R^2 - d^2)$$

et le volume de la sphère ($\frac{4\pi R^3}{3}$) lorsque $d = R$.

Cinquième partie

Fiche Xcas pour la spécialité maths Terminale S.

Ces commandes se trouvent dans le menu Cmds.

Arithmétique	
<code>iquo(a,b), irem(a,b)</code>	quotient et reste de la division euclidienne de a par b
<code>isprime(p)</code>	Test de primalité
<code>gcd(a,b), lcm(a,b)</code>	PGCD, PPCM de 2 entiers
<code>iabcuv(a,b,c)</code>	Renvoie u et v tels que $au + bv = c$
<code>powmod(a,n,m)</code>	Renvoie $a^n \pmod{m}$
<code>L:=convert(a,base,b)</code>	conversion de a en base b
<code>a:=convert(L,base,b)</code>	conversion inverse
<code>n:=a % b; A:=n % 0</code>	$n \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ congru à a ; $A \in \mathbb{Z}$, $A = a \pmod{b}$
Matrices et vecteurs	
<code>M:=matrix(3,4,(j,k)->j+k)</code>	matrice définie par une formule
<code>M:=[[1,2,3],[4,5,6]]</code>	matrice définie par des coefficients (ou bien créer un tableur Xcas en lui donnant un nom de variable)
<code>v:=[0,1,0]</code>	vecteur défini par ses coordonnées
<code>M[0,1] ou M(1,2)</code>	élément de M ligne 1 colonne 2
<code>M[j,k]:=a</code>	les indices commencent à 0 ou à 1 selon la notation
<code>M[j,k]=<a ou M(j,k)=<a</code>	modifie l'élément d'indice j,k (copie M)
<code>+, -, *</code>	modifie en place l'élément d'indice j,k
<code>inv(M)</code>	addition, soustraction, multiplication de matrices/vecteurs
<code>M^4</code>	inverse d'une matrice carrée M
<code>matpow(M,n)</code>	puissance entière d'une matrice
<code>P,D:=jordan(M)</code>	puissance (symbolique) d'une matrice
	faire supposons ($n > 0$) si M n'est pas inversible
	diagonalisation de la matrice M (hors programme)
Autres	
<code>asc("chaîne")</code>	renvoie la liste des codes ASCII d'une chaîne
<code>char(L)</code>	renvoie la chaîne de caractères à partir d'une liste
<code>rsolve()</code>	résolution de suites récurrentes
<code>L:=readrgb("fichier")</code>	lecture du fichier image (jpg, png) dans L
<code>writergb("fichier.png",L)</code>	stocke et affiche l'image contenue dans L
<code>rectangle(dx,0,dy/dx,</code> <code>gl_texture="fichier")</code>	affiche l'image de taille dx, dy contenue dans le fichier "fichier"

Attention : la notation $M(j,k) := a$ est interprétée comme une définition de fonction si j, k est symbolique (non entier) et non comme une affectation de l'indice j, k de M . On peut utiliser la notation $M(j,k) = <a$ qui modifie toutes les matrices partageant la représentation de M , est donc beaucoup plus rapide pour de grosses matrices, mais peut avoir des effets surprenants.

N.B. : il peut être nécessaire d'utiliser la version 0.9.6 ou ultérieure de Xcas.

Cryptographie

`s:="un message a coder"; L:=asc(s)`, la liste `L` contient une suite d'entiers compris entre 0 et 255. Pour le système RSA, on peut générer une paire de premiers et n

`p:=nextprime(10^30); q:=nextprime(10^15); n:=p*q;`

(on peut aussi utiliser de l'aléatoire) puis une paire de clefs,

`n1:=euler(n); c:=rand(); d:=inv(c % n1) % 0`

puis coder et décoder avec `N:=powmod(L, c, n); char(powmod(N, d, n));`

Pour éviter des attaques évidentes, on peut créer des regroupements de 8 par deux conversions en base

`l:=convert(L, base, 256); M:=convert(l, base, 256^8)`

Pour le système de Hill, on crée par exemple une matrice aléatoire 2,2

`n:=nextprime(512); M:=ranm(2, 2) % n; Minv:=inv(M);`

(on recommence si `M` n'est pas inversible), puis on calcule les produits par paire d'éléments de `L` (ajouter un espace dans `s` en fin de chaîne si le nombre d'éléments est impair)

`N:=seq(M*[L[2*j], L[2*j+1]], j, 0, size(L)/2-1)`

Le décodage en utilisant `O:=seq(Minv*N[j], j, 0, size(N)-1)`

puis il faut aplatir `O` avant d'appeler `char` :

`P:=[];`

pour `j` de 0 jusque `size(O)-1` faire `P:=concat(P, O[j]);`

`fpour; P`

Systèmes dynamiques, graphes probabilistes

Ouvrir un tableur (menu `Tableur`), indiquez par exemple 4 lignes et 4 colonnes et choisissez un nom de matrice, par exemple `M` puis remplissez-le par exemple avec

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Si vous n'avez pas le bon nombre de lignes ou de colonnes ou oublié le nom de variable, cliquez sur la ligne `Sheet config...` du tableur. On a ici la somme des **colonnes** de `M` égales à 1. Donc si `V0` est le vecteur initial, pour avoir la probabilité de la cinquième étape, on écrira `V5:=M^5*V0`. Vous pouvez faire une étude formelle supposons ($n > 0$) ; `Mn:=matpow(M, n); limit(Mn, n=inf)`

ou numérique avec `v:=seq(1./nrows(M), j, 1, nrows(M));`

pour `j` de 1 jusque 100 faire `v:=M*v; fpour;`

Attention, les probabilistes codent habituellement par une matrice `A` dont les sommes des **lignes** sont égales à 1, transposée de `M` ci-dessus. Donc si `V0` est le vecteur initial, pour avoir la probabilité de la cinquième étape, on écrira `V5:=V0*A^5`.

Un exemple de modèle proie-prédateur se trouve sur le site pédagogique de Xcas : www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/irem.html

Images

Voir la session `image.xws` sur le site de Xcas (cf. ci-dessus).

Autres

Cherchez le mot-clef `fougere` (F12 dans Xcas), ou fraction continue (en lien avec l'identité de Bézout, les réduites successives sont les coefficients de Bézout de $au_n - bv_n = (-1)^n r_n$), ...

5 Exemples d'utilisation

5.1 Cryptographie de Hill

On associe aux nombres 0,..9,10 les caractères "0".."9"," :" et aux nombres 11,..36 les lettres "A".."Z" (cf `co (nbre)`) et réciproquement (cf `cod (lettre)`).

On utilise `asc`, `char`, `op` et `op (asc ("09:AZ")) = (48, 57, 58, 65, 90)`.

Le texte T à coder, (complété éventuellement avec " :") est découpé en p blocs successifs de 2 lettres. À ces blocs on associe une matrice à coefficients entiers B de 2 lignes et p colonnes (cf `B:=coda (T)`).

La matrice de codage M est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers, connue de l'expéditeur et du destinataire du message (ici `M:=irem (ranm (2, 2), 37) = [[7, 11], [8, 11]]` et `N:=irem (Inverse (M), 37) = [[-1, 1], [-6, -4]]`).

Le produit $C = M * B$ est une matrice colonne que l'on transforme modulo 37 en le texte codé TC (cf `TC:=codag (C)` et `TC:=codage (T, M)`).

Pour décoder, il faudra faire le chemin inverse : `codage (TC, N)`.

```
co(c):={
  local n;
  si c<0 alors c:=c+37; fsi;
  si c<=10 alors c:=c+48; sinon c:=c+54; fsi;
  return char(c);
};;
cod(l):={
  local n;
  n:=op(asc(l));
  si 48<=n and n<=58 alors n:= n-48; sinon n:=n-54 fsi;
  return n;
};;
coda(s):={
  local j,n,B,p;
  n:=dim(s);
  si odd(n) alors s:=s+":"; n:=n+1;fsi;
  p:=n/2;B:=makemat(0,2,p);
  pour j de 0 jusque p-1 faire
    B[0,j]:=cod(s[2*j]);B[1,j]:=cod(s[2*j+1]);
  fpour;
  return B;
};;
codag(B):={
  local s,n,j,k;
  n:=coldim(B);s:="";
  pour j de 0 jusque n-1 faire
    pour k de 0 jusque 1 faire
      s:=s+co(B[k,j]);
    fpour;
  fpour;
  return s;
};;
```

```

codage (s, M) := {
  local B, C;
  B := coda (s);
  C := irem (M*B, 37);
  return codag (C);
};

```

```

On tape : M := [[7, 11], [8, 11]]
N := irem (Inverse (M), 37) renvoie [[-1, 1], [-6, -4]]
codage ("ABCD012", M) renvoie "NYMZAACE"
codage ("NYMZAACE", N) renvoie "ABCD012 : "
Mon message à décoder "RJPAT8KWKLKUASZZ".

```

5.2 Systèmes dynamiques

On considère 2 urnes A et B , et 3 boules numérotées de 0 à 3. Au début, toutes les boules se trouvent dans l'urne A . Aux étapes 1, 2, ..., n , on tire au hasard de façon équiprobable, un nombre entre 0 et 3, et on change d'urne la boule correspondante. Déterminer la matrice de transition M et trouver la probabilité de chacun des états lorsque $n = 5$ puis lorsque $n = 10$. Trouver la probabilité de chacun des états lorsque n tend vers l'infini ?

On appelle état j lorsqu'il y a $3-j$ boules en A et j boules en B . La probabilité de passer à chaque étape de l'état j à l'état k est donné par $M[j, k]$, avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On tape $(M^5)[0]$

On obtient lorsque $n = 5$: $[0, 61/81, 0, 20/81]$ (2 boules en A et 1 boule en B avec une probabilité de $61/81$ ou 3 boules en B avec une probabilité de $20/81$)

On tape $(M^{10})[0]$

On obtient lorsque $n = 10$: $[4921/19683, 0, 14762/19683, 0]$ (3 boules en A avec une probabilité de $4921/19683$ ou 1 boule en A et 2 boules en B avec une probabilité de $14762/19683$)

On tape :

supposons $(n, \text{integer})$; $M0 := \text{matpow}(M, 2*n)$; $\text{limit}(M0, n = \text{inf})$

On obtient lorsque n est pair et tend vers $+\infty$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

On tape :

supposons $(n, \text{integer})$; $M1 := \text{matpow}(M, 2*n+1)$; $\text{limit}(M1, n = \text{inf})$

On obtient lorsque n est impair et tend vers $+\infty$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Sixième partie

Fiche Xcas analyse

Dérivées	
diff (E) ou E'	expression de la dérivée de l'expression E par rapport à x
diff (E, t) ou (E, t)'	expression de la dérivée de l'expression E par rapport à t
diff (f) ou f'	fonction dérivée de la fonction f
diff (E, x $\$$ n, y $\$$ m)	expression de la dérivée partielle $\frac{\partial E}{\partial x^n \partial y^m}$ de l'expression E
grad	gradient
divergence	divergence
curl	rotationnel
laplacian	laplacien
hessian	matrice hessienne

Limites et développements limités	
limite (E, x, a)	limite en a d'une expression E
limite (E, x, a, 1)	limite à droite en a de E
limite (E, x, a, -1)	limite à gauche en a de E
taylor (E, a)	développement limité de E en $x = a$ ordre 5
series (E, x=a, n)	développement limité de E en $x = a$ ordre n entier

Intégrales	
int (E, x)	primitive d'une expression E
int (f)	fonction primitive d'une fonction f
int (E, x, a, b)	intégrale exacte de E
romberg (E, x, a, b)	intégrale approchée de E

Équations	
solve (eq, x)	solution exacte dans \mathbb{R} d'une équation polynomiale
solve ([eq1, eq2], [x, y])	solution exacte dans \mathbb{R} d'un système polynomial
csolve (eq, x)	solution exacte dans \mathbb{C} d'une équation polynomiale
csolve ([eq1, eq2], [x, y])	solution exacte dans \mathbb{C} d'un système polynomial
fsolve (eq, x=x0)	solution approchée d'une équation ($x_0=x$ estimé)
fsolve ([eq], [var], [val])	solution approchée d'un système ($val=estimation$)
newton	méthode de Newton
linsolve	système linéaire
proot	racines approchées d'un polynôme

Équations différentielles	
desolve	résolution exacte
odesolve	résolution approchée
plotode	tracé d'une solution
plotfield	tracé du champ de vecteurs
interactive_plotode	tracé de solutions définies à la souris

Tracés de courbes

plot ou graphe	graphe d'une expression d'une variable
tangente	tangente à une courbe
penne	penne d'une droite
plotfunc	graphe d'une expression d'1 ou 2 variable(s)
..., couleur=...	choisir la couleur d'un tracé
plotarea	affiche l'aire sous une courbe
plotparam	courbe paramétrique
plotpolar	courbe en polaires
plotimplicit (f(x,y), x, y)	courbe implicite de $f(x,y) = 0$

Un exemple : étude de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln(|2-x|)}{\ln(|x|)}$.

On va montrer que f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1, 2\}$ et peut être prolongée sur $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$. Puis on fera le graphe de f , on tracera les tangentes en $x = -1/2$, $x = 0$ et $x = 1$, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire comprise entre $x = 3$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe avec une subdivision en 4 trapèzes.

On tape : `f(x) := ln(abs(x-2)) / ln(abs(x))`

`limite(f(x), x, 1)` renvoie -1 et `limite((f(x)+1)/(x-1), x, 1)` renvoie -1 , donc la penne de la tangente au point $(1, -1)$ vaut -1 .

`limite(f(x), x, 0)` renvoie 0 , `limite(f(x)/x, x, 0, 1)` renvoie $-\infty$ et `limite(f(x)/x, x, 0, -1)` renvoie $+\infty$. Donc Oy est tangent en $(0,0)$.

`limite(f(x), x, -1)` renvoie ∞ , donc $x = -1$ est asymptote.

`limite(f(x), x, 2)` renvoie $-\infty$, donc $x = 2$ est asymptote.

`limite(f(x), x, inf)`, `limite(f(x), x, -inf)` renvoie $(1,1)$, $y = 1$ est donc asymptote.

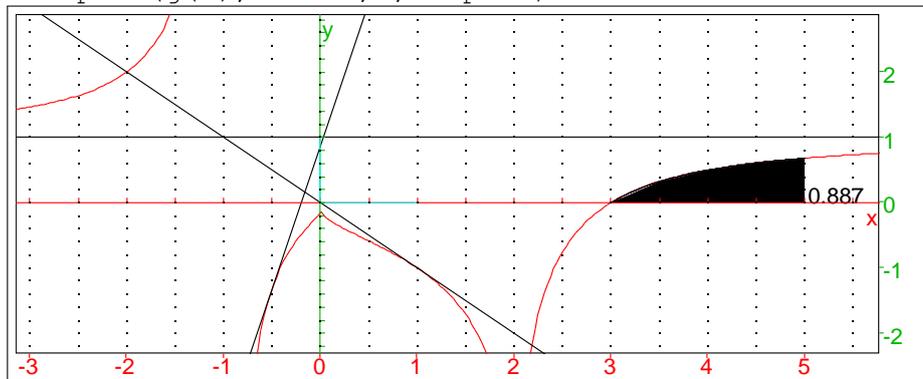
Pour prolonger f par continuité en $x = 0$ et $x = 1$, on tape :

`g := when(x==0, 0, when(x==1, -1, f(x)))`

On tape : `G := plotfunc(g(x), x=-5..8, couleur=rouge)`,

droite `(y=1)`, tangente `(G, -1/2)`, droite `(1-i, penne=-1)`,

`areaplot(g(x), x=3..5, 4, trapeze)` et on obtient :



Si on approche l'aire avec 4 trapèzes, on peut aussi taper : `Digits:=3`; puis :

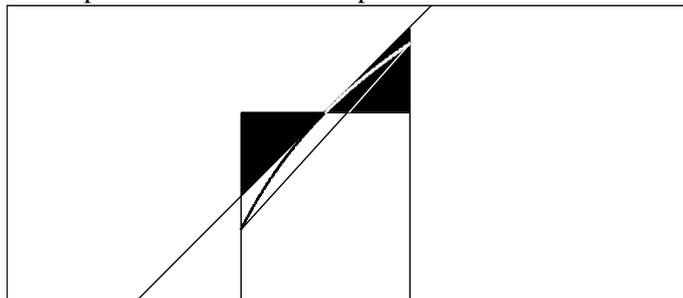
`0.5*(f(3)/2+f(3.5)+f(4)+f(4.5)+f(5)/2)` et cela renvoie 0.887.

Avec `areaplot(g(x), x=3..5)` l'aire est calculée par la méthode de Romberg et affichée avec 3 décimales. Pour en savoir plus, tapez `romberg(g(x), x, 3, 5)`,

cela renvoie 0.903226168665 avec `Digits:=12`; . La méthode de Romberg est une accélération de la convergence de la méthode des trapèzes.

6 Exercice : Nombre de chiffre de 1000 !

Prérequis Si f est concave ($f''(x) \neq 0$) ou convexe ($f''(x) \geq 0$) la méthode des trapèzes et la méthode du point milieu encadrent l'intégrale en effet :



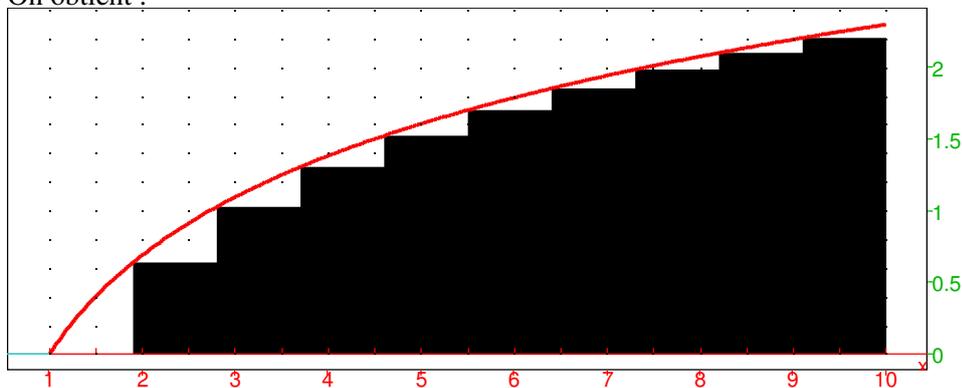
si f est concave, la courbe est située sous la tangente au point milieu et les 2 triangles noir sont égaux.

Soient $S_n = \ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_1^n \ln(x) dx$.

- En faisant une intégration par parties calculer I_n .
- En utilisant la méthode des rectangles montrer que : $S_{n-1} < I_n < S_n$.
- En déduire que : $I_n < S_n < I_n + \ln(n)$ et donner un encadrement de I_n en fonction de n .
- Utilisez la méthode des trapèzes et du point milieu pour trouver un meilleur encadrement de I_n .
- En déduire $p \in \mathbb{N}$ tel que : $10^{p-1} < 1000! < 10^p$.
Quel est le nombre de chiffre de 1000 ! ?

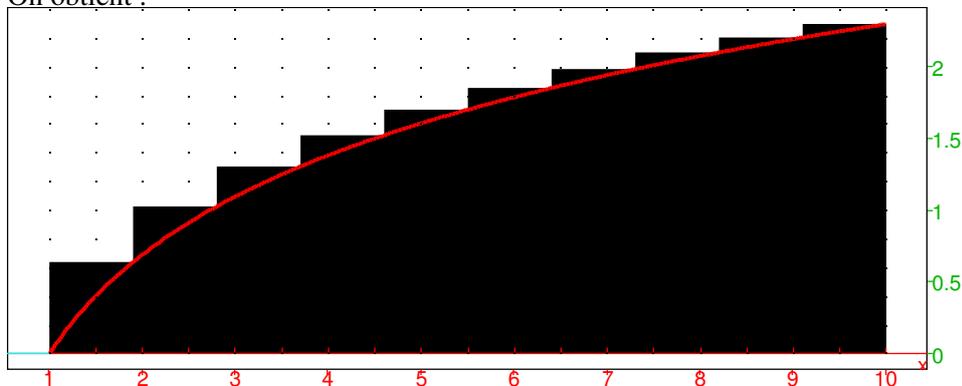
La solution avec Xcas

- Calcul de I_n
On tape : `ibpu(ln(x), ln(x), x, 1, n)`
On obtient : `[n*ln(n), -1]`
On tape : `ibpu([n*ln(n), -1], 0, x, 1, n)`
On obtient : `-n+1+n*ln(n)`
Donc $I_n = -n + 1 + n * \ln(n)$
- On approche l'aire sous la courbe de $y = \ln(x)$. La somme des aires des rectangles gauches (inférieurs) est S_{n-1} et la somme des aires des rectangles droits (supérieurs) est S_n . Donc $S_{n-1} < I_n < S_n$.
On visualise les rectangles gauches lorsque $n = 10$:
`plotarea(ln(x), x=1..10, 10, rectangle_gauche),`
On obtient :



- On visualise les rectangles droits lorsque $n = 10$:
`plotarea(ln(x), x=1..10, 10, rectangle_droit),`

On obtient :



– Puisque $S_{n-1} + \ln(n) = S_n$ et que $S_{n-1} < I_n < S_n$, on en déduit que :

$$I_n < S_{n-1} + \ln(n) = S_n < I_n + \ln(n)$$

et donc puisque $I_n = -n + 1 + n * \ln(n)$:

$$-n + 1 + n * \ln(n) < S_n = \ln(n!) < -n + 1 + n * \ln(n) + \ln(n)$$

– La somme des aires des trapèzes T_n est inférieure à I_n et on a :

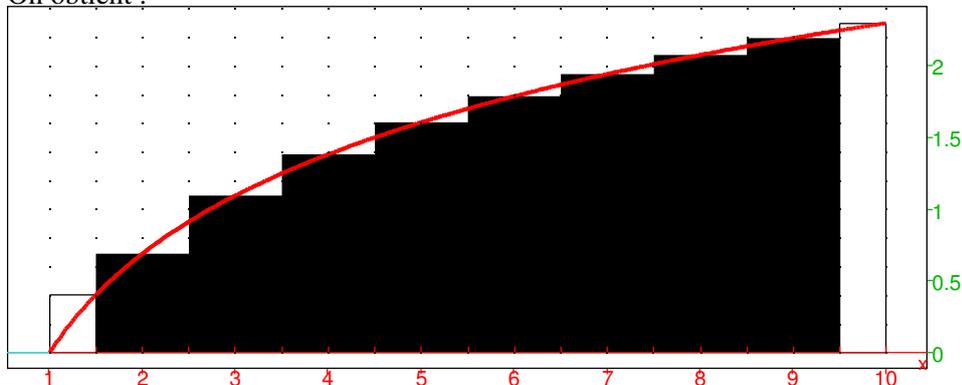
$$T_n = \ln(2) + \dots + \ln(n-1) + \ln(n)/2 = \ln(n!) - \ln(n)/2 < I_n$$

On prend comme point milieu 2, 3...n-1 et on rajoute l'aire de 2 rectangles (pour majorer l'aire entre 1 et 3/2 et pour majorer l'aire entre n-1/2 et n).

On visualise les rectangles de la méthode du point milieu lorsque $n = 10$:

```
plotarea(ln(x), x=3/2..19/2, 8, point_milieu);
rectangle(1, 1.5, ln(1.5)*2), rectangle(9.5, 10, ln(10)*2)
plotfunc(ln(x), x=1..10, affichage=1+epaisseur_ligne_3)
```

On obtient :



On a : $I_n < M_n = \ln(3/2)/2 + \ln(2) + \dots + \ln(n-1) + \ln(n)/2$

Puisque $I_n = -n + 1 + n * \ln(n)$, on obtient comme encadrement :

$$-n + 1 + n * \ln(n) + \ln(n)/2 - \ln(3/2)/2 < \ln(n!) < -n + 1 + n * \ln(n) + \ln(n)/2$$

– On cherche p le nombre de chiffres de $1000!$ c'est à dire $p \in \mathbb{N}$ tel que $10^{p-1} < 1000! < 10^p$ ou tel que $p-1 \leq \ln(1000!)/\ln(10) < p$

On tape puisque $\ln(1000) = 3 \ln(10)$:

$$-999/\ln(10.) + 3000 + 1.5 - \ln(1.5)/\ln(100), -999/\ln(10.) + 3000 + 1.5$$

On obtient :

$$2567.55176695, 2567.63981258$$

Donc $p = 2568$ et le nombre de chiffres de $1000!$ est 2568.

On tape `dim(string(1000!))` et on obtient : 2568

Septième partie

Fiche Xcas la géométrie

Fonctions de géométrie 2-d	
point	point donné par ses coordonnées ou son affixe
affichage=...	dernier argument de point pour l'afficher selon...
legend	met du texte à partir d'un point donné
segment	segment donné par 2 points
droite (A, B)	droite passant par A, B
droite (a*x+b*y+c=0)	droite d'équation $ax + by + c = 0$
triangle (A, B, C)	triangle de sommets A, B, C
bissectrice (A, B, C)	bissectrice issue de A du triangle ABC
angle (A, B, C)	mesure (en radians ou degrés) de \widehat{BAC}
mediane (A, B, C)	médiane issue de A du triangle ABC
hauteur (A, B, C)	hauteur issue de A du triangle ABC
mediatrice (A, B)	médiatrice de AB
carre (A, B)	carré direct de côté AB
cercle (A, r)	cercle de centre A, rayon r
cercle (A, B)	cercle de diamètre AB
rayon (c)	longueur du rayon du cercle c
centre (c)	le centre du cercle c
distance (A, B)	distance de A à B (point ou courbe)
inter (G1, G2)	liste des points de $G1 \cap G2$
inter_unique (G1, G2)	un des points de $G1 \cap G2$
supposons	rajout d'un paramètre symbolique ou d'hypothèses
element	rajout d'un paramètre numérique
polygone	polygone fermé
polygone_ouvert	polygone ouvert
coordonees	coordonnées d'un point
equation	équation cartésienne
parameq	équation paramétrique
symetrie (A, M)	image de M par la symétrie point (ou droite) A
translation (B-A, M)	image de M par la translation \overrightarrow{AB}
rotation (A, t, M)	image de M par la rotation de centre A et d'angle t
homothetie (A, k, M)	image de M par l'homothétie de centre A et rapport k
similitude (A, k, t, M)	image de M par la similitude de centre A, rapport k et d'angle t

Pour construire un nouvel objet géométrique dans une figure :

- on sélectionne un Mode à la souris puis on clique les objets définissant le nouvel objet. Si est décoché, les points cliqués sont à coordonnées exactes et si est coché, les points cliqués sont à coordonnées décimales.

- ou on remplit les lignes de commande, situées à gauche de la figure, en tapant la commande ou en s'aidant du menu Geo. L'exécution d'une ligne de commande par Entrée entraîne l'exécution des lignes suivantes.

En cochant Landscape, l'écran graphique est plus large et les lignes de com-

mandes sont en dessous.

Par exemple, pour tracer un triangle ABC , la médiatrice de AB et le cercle circonscrit à ABC , on ouvre un niveau de géométrie 2d (Alt+g) et avec la souris :

- On choisit comme mode : Mode►Polygones►triangle
On clique pour désigner le premier point, puis on déplace la souris. Le segment AS où S est le point pointé par la souris, se dessine en pointillé. On clique pour désigner le 2-ième point, puis on déplace la souris un triangle en pointillé se dessine. On clique pour désigner le 3-ième point. On obtient un triangle et des lignes de commandes apparaissent ($A:=point(...),...$).
- On choisit comme mode : Mode►Lignes►mediatrice
On clique sur le point A , puis on déplace la souris : la médiatrice de AS , où S est le point pointé par la souris, se dessine en pointillé. On clique sur B . On obtient la médiatrice de AB et dans la ligne de commandes on a :
 $E:=mediatrice(A,B,'affichage'=0)$
- On choisit comme mode : Mode►Cercles►circonscrit
On clique successivement sur les points A, B : le cercle circonscrit à ABS , où S est le point pointé par la souris, se dessine en pointillé. On clique sur C . On obtient le cercle circonscrit à ABC et dans la ligne de commandes on a :
 $F:=circonscrit(A,B,C,'affichage'=0)$
- On choisit Mode►Pointeur pour pouvoir déplacer le point A, B ou C .

On peut aussi taper directement les commandes dans les lignes de commandes :

```
A:=point(-1,2);
B:=point(1,0);
C:=point(-3,-2);
D:=triangle(A,B,C);
E:=mediatrice(A,B);
F:=circonscrit(A,B,C);
```

Objets graphiques 3-d	
plotfunc	surface par équation
plotparam	surface ou courbe paramétrique
point	point donné par la liste de ses 3 coordonnées
droite	droite donnée par 2 équations ou 2 points
inter	intersection
plan	plan donné par 1 équation ou 3 points
sphere	sphère donnée par centre et rayon
cone	cône donné par sommet, axe, demi-angle d'ouverture
cylindre	cylindre donné par axe,rayon,[hauteur]
polyedre	polyèdre
tetraedre	tétraèdre régulier direct ou pyramide
tetraedre_centre	tétraèdre régulier direct
cube	cube
cube_centre	cube
parallelepiped	parallélépipède
octaedre	octaèdre
dodecaedre	dodécaèdre
icosaedre	icosaèdre

7 Exemples d'utilisation

7.1 Une démonstration avec Xcas

Soient 3 points A, B, C d'affixe a, b, c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + b*j + c*j^2 = 0$ où $j = \exp(2i\pi/3)$.

7.1.1 La solution avec Xcas

On tape dans un niveau de géométrie :

```
supposons (b1=[1.3, -5, 5, 0.1]);
supposons (b2=[2.3, -5, 5, 0.1]);
B:=point (b1+i*b2);
supposons (c1=[-2.2, -5, 5, 0.1]);
supposons (c2=[3.5, -5, 5, 0.1]);
C:=point (c1+i*c2);
j:=exp (2*i*pi/3);
a:=-b*j-c*j^2;
A:=point (a);
est_equilateral (A, B, C);
```

La réponse pour `est_equilateral (A, B, C)` ; est 1 et comme tout les calculs sont faits avec des paramètres formels cela vaut une démonstration.

Pour la réciproque, on remplace les 3 dernières lignes par :

```
triangle_equilateral (B, C, A);
a:=affiche (A)
normal (a+b*j+c*j^2);
```

la réponse pour `normal (a+b*j+c*j^2)` ; est 0 et comme tout les calculs sont faits avec des paramètres formels cela vaut une démonstration.

7.1.2 La solution sans Xcas

On a $j^2 = \exp(4i\pi/3)$, $-j^2 = \exp(i\pi/3)$ et $1 + j + j^2 = 0$
 ABC est équilatéral direct est équivalent à $(a - b) = -j^2(c - b)$ donc a :
 $a - b(1 + j^2) + cj^2 = a + bj + cj^2 = 0$.

7.2 Maximiser une aire

Soient un segment AB de longueur 10 unités et un point C de ce segment. On pose $AC = t$. On construit du même côté de AB les triangles équilatéraux ACD et CBE tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}) = \pi/3$.

Pour quelles valeurs de t l'aire $a(t)$ du triangle CED est-elle maximale ?

Avec Xcas, on choisit A de coordonnées $(0, -4)$ et B de coordonnées $(10, -4)$. C est alors de coordonnées $(t, -4)$. On tape dans un niveau de géométrie 2d :

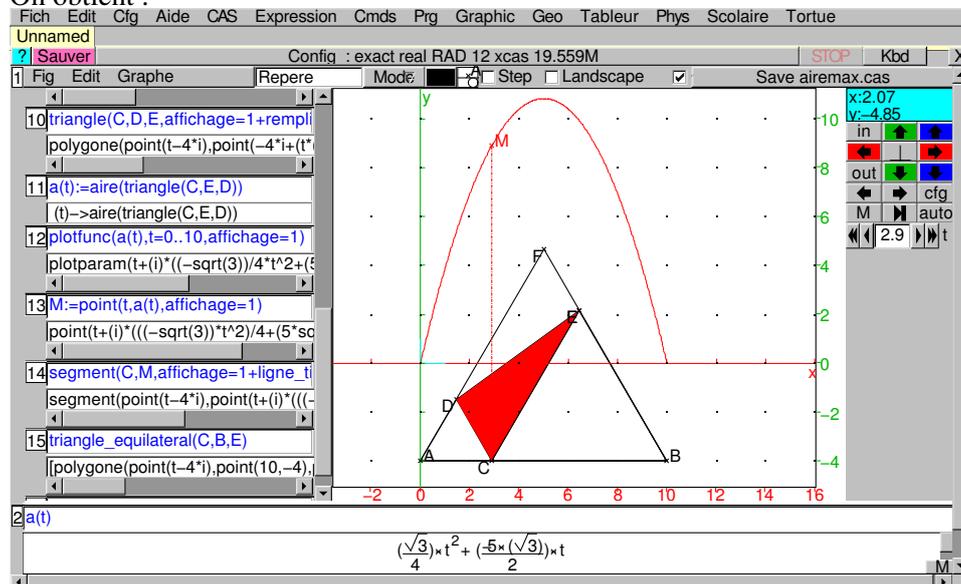
```
A:=point ([0, -4, 'affichage'=0]);
B:=point ([10, -4, 'affichage'=0]);
supposons (t=[2.9, 0, 10, 0.1]);
```

```

C:=point(t-4*i);
triangle_equilateral(A,C,D);
triangle_equilateral(C,B,E);
segment(D,E);
triangle_equilateral(A,B,F);
triangle(C,D,E,affichage=1+rempli);
a(t):=aire(triangle(C,E,D));
plotfunc(a(t),t=0..10,affichage=1);
M:=point(t,a(t),affichage=1);
segment(C,M,affichage=1+ligne_tiret_point);

```

On obtient :



La parabole en rouge est la représentation graphique de l'aire $a(t)$ du triangle CDE (en rouge). Lorsque C d'abscisse t se déplace sur AB à l'aide du curseur t , le point M de coordonnées $(t, a(t))$ décrit cette parabole.

Attention aire renvoie une aire algébrique. $\text{aire}(\text{triangle}(C, E, D))$ est positive car le triangle CED est direct et on a :

$$\text{aire}(\text{triangle}(C, E, D)) = -\text{aire}(\text{triangle}(C, D, E)).$$

Dans la mesure où les coordonnées des points A et B sont des nombres exacts (par exemple $(10, -4)$ et non $(10.0, -4.0)$), l'instruction de Xcas :

supposons $(t = [2.9, 0, 10, 0.1])$; a pour effet de faire le dessin avec la valeur de t donné par le curseur (ici $t = 2.9$), mais de faire tous les calculs en fonction de la variable symbolique t .

Au niveau 2, $a(t)$ renvoie $(\sqrt{3})/4 * t^2 + (-5 * \sqrt{3})/2 * t$

On peut facilement calculer cette aire qui est la moitié de l'aire du parallélogramme $DCEF$ avec $CE = 10 - t$ $DC = t$ et $(\vec{AC}, \vec{AD}) = \pi/3$ donc ce parallélogramme a pour hauteur $CH = t\sqrt{3}/2$. Donc $a(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}t(10 - t) = \frac{-\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2}t$.

On tape pour calculer $a'(t)$: $\text{factor}(\text{diff}(a(t), t))$

On obtient : $((-\sqrt{3})) * t + 5 * \sqrt{3}) / 2$

donc $a(t)$ a un maximum pour $t = 5$ (i.e. lorsque C est le milieu de AB). Ce maximum vaut $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ (i.e. l'aire d'un triangle équilatéral de côté $5 = \frac{AB}{2}$).

Huitième partie

Fiche Xcas la programmation

1. Pour écrire une fonction ou un programme, il faut :

- choisir une syntaxe, on décrit ici la syntaxe Xcas,
 - soit avec le menu `Cfg`►`Mode (syntax)`►`xcas`,
 - soit en ouvrant la fenêtre de configuration du CAS en appuyant sur le bouton `Config:...` et choisir Xcas dans `Prog style`,
- ouvrir un niveau éditeur de programme soit en tapant `Alt+p`, soit avec le menu `Prg`►`Nouveau programme`. Il contient déjà le `;` qui termine le programme.
- taper la fonction ou le script (suite de commandes) en terminant chaque instruction par `;`. Le nom de cette fonction et de ses arguments ne doit pas être un mot-clef ou un nom de commande de Xcas, ceux-ci apparaissent en bleu et brun dans l'éditeur de programmes. On peut commencer le nom des fonctions par une Majuscule pour diminuer le risque.
- cliquer sur `OK` ou appuyer sur `F9`, pour compiler le programme (ou exécuter le script si on n'a pas terminé son écriture par `;`).
- pour exécuter le programme, il suffit de se placer dans une ligne de commandes vide, taper le nom du programme suivi entre parenthèses par les valeurs des paramètres séparées par des virgules.

2. Le menu Ajouter d'un niveau éditeur de programme

Ce menu vous permet d'avoir la syntaxe d'une fonction, d'un test et des boucles.

Syntaxe d'une fonction :

```
f(x,y) := {
  local z,a,...,val;
  instruction1;
  instruction2;
  val:=...;
  .....
  instructionk;
  retourne val;
};;
```

Euclide et l'identité de Bézout :

```
Bezout(a,b) := {
  local la,lb,lr,q;
  la:=[1,0,a];
  lb:=[0,1,b];
  tantque b!=0 faire
    q:=iquo(la[2],b)
    lr:=la+(-q)*lb;
    la:=lb; lb:=lr;
  b:=lb[2];
  ftantque
  retourne la;
};;
```

3. Compilation La réponse à une compilation réussie sera `Done` si on met `;` à la fin ou sera la traduction du programme si on met `;` à la fin.

Pour `Bezout(a,b)`, on clique sur `OK` (ou touche `F9`) et on obtient `// Parsing Bezout // Success compiling Bezout puis Done`. Puis, on tape : `Bezout(78,56)` et on obtient `[-5,7,2]` (car $-5*78+7*56=2=\text{pgcd}(78,56)$).

4. Pas à pas Vous pouvez exécuter un programme commandes par commandes ou le mettre au point grâce au débogueur. Pour cela on tape :

```
debug(Bezout(78,56))
```

Une fenêtre s'ouvre et on appuie sur `sst` pour une exécution au pas à pas.

Instructions en français	
attribution	<code>a:=2;</code> (a prend la valeur 2) et purge (a) ; (a redevient formelle)
entrée expression	<code>saisir ("a=", a);</code>
entrée chaîne	<code>saisir_chaine ("a=", a);</code>
sortie	<code>afficher ("a=", a);</code>
valeur retournée	<code>retourne a;</code>
arrêt	<code>break;</code>
alternative	<code>si <condition> alors <inst> fsi;</code> <code>si <condition> alors <inst1> sinon <inst2> fsi;</code>
boucle pour	<code>pour j de a jusque b faire <inst> fpour;</code> <code>pour j de a jusque b pas p faire <inst> fpour;</code>
boucle répéter	<code>repete <inst> jusque <condition>;</code>
boucle tantque	<code>tantque <condition> faire <inst> ftantque;</code>
boucle faire	<code>faire <inst1> si(<condition>)break;<inst2>ffaire;</code>

Instructions comme en C++	
attribution	<code>a:=2;</code> (a prend la valeur 2) et purge (a) ; (a redevient formelle)
entrée expression	<code>input ("a=", a);</code>
entrée chaîne	<code>textinput ("a=", a);</code>
sortie	<code>print ("a=", a);</code>
valeur retournée	<code>return (a);</code>
arrêt	<code>break;</code>
alternative	<code>if (<condition>) {<inst>;}</code> <code>if (<condition>) {<inst1>} else {<inst2>;}</code>
boucle pour	<code>for (j:= a; j<=b; j++) {<inst>;}</code> <code>for (j:= a; j<=b; j:=j+p) {<inst>;}</code>
boucle répéter	<code>repeat <inst> until <condition>;</code>
boucle tantque	<code>while (<condition>) {<inst>;}</code>
boucle faire	<code>do <inst1> if (<condition>) break;<inst2> od;</code>
debug	lance le débogueur pour une exécution au pas à pas de l'argument

Signification des signes de ponctuation	
.	sépare la partie entière de la partie décimale
,	sépare les éléments d'une liste ou d'une séquence
;	termine chaque instruction d'un programme
::;	termine les instructions lorsqu'on ne veut pas l'affichage de la réponse

Opérateurs			
+	addition	-	soustraction
*	multiplication	/	division
^	puissance	a mod p	a modulo p
==	teste l'égalité	!=	teste la différence
<	teste la stricte infériorité	<=	teste l'infériorité ou l'égalité
>	teste la stricte supériorité	>=	teste la supériorité ou l'égalité
, ou	opérateur booléen infixé	&&, et	opérateur booléen infixé
non	inverse logique de l'argument	!(..)	inverse logique de l'argument
vrai	est le booléen vrai ou true ou 1	faux	est le booléen faux ou false ou 0
=	permet de définir une équation	n!	n ! est la factorielle de n

8 Exemples d'utilisation

8.1 Programmer un jeu

On considère le jeu suivant :

- Le joueur tire au hasard un nombre entre 1 et 10. Ce nombre est son gain, il peut le garder et la partie est finie.
- Le joueur peut choisir d'abandonner ce gain et de recommencer. Il lui est permis de tirer ainsi au plus 5 fois et son gain est le résultat du dernier tirage lorsqu'il a abandonné les gains des 4 tirages précédents.

1. Écrire un programme qui réalise ce jeu,
2. Le joueur choisit 4 nombres n_1, n_2, n_3, n_4 compris entre 1 et 10 et choisit comme stratégie de garder son gain du j ième essai si celui-ci est supérieur ou égal à n_j sinon il recommence (si $n_1=9, n_2=8, n_3=6, n_4=5$ avec le tirage 2,7,8, le gain est 8 mais avec le tirage 8,7,5,4,2 le gain est 2).
Il joue 100 parties selon cette stratégie avec les mêmes n_j . Écrire un programme donnant la moyenne des gains obtenus. A vous de jouer !.

```
jeu1() := {
//repondre o pour dire oui
local j, g, rep;
pour j de 1 jusque 4 faire
    g:=alea(10)+1; afficher(g);
    lis_phrase(rep);
    si rep=="o" alors retourne g; fsi;
fpour;
retourne alea(10)+1;
};;
```

jeu2 a comme paramètre L qui est la séquence n_1, n_2, n_3, n_4 puis LL est la suite $n_1, n_2, n_3, n_4, 0$ de façon à ce que $LL[j]$ soit définie pour $j = 0..4$ ($LL[0] = n_1$).
jeu102 est la moyenne des gains de 100 parties faites avec jeu2.

```
jeu2(L) := {
local j, g, LL;
LL:=append(L, 0);
pour j de 0 jusque 4 faire
    g:=alea(10)+1; afficher(g);
    si g>=LL[j] alors break fsi;
fpour;
retourne g;
};;
jeu102(L) := {
local g, j;
g:=0;
pour j de 1 jusque 100 faire
    g:=g+jeu2(L);
fpour;
retourne evalf(g/100);
};;
```

8.2 Des triangles équilatéraux emboîés

À partir d'un triangle équilatéral direct ABC on construit les points A_1, B_1, C_1 vérifiant : $\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CA}$.

Interprétez A_1 comme le barycentre de (A, a) et (B, b) .

Montrer que le triangle $A_1B_1C_1$ est équilatéral.

On recommence la même construction à partir de $A_1B_1C_1$. Écrire la procédure récursive qui réalise le dessin des n triangles obtenus par cette construction.

On a : $\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AA}$. Donc A_1 est le barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 4)$.

B_1 est le barycentre de $(B, -1)$ et $(C, 4)$. C_1 est le barycentre de $(C, -1)$ et $(A, 4)$.

La rotation r de centre O , le centre de ABC , et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme A en B , B en C et C en A donc r transforme le barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 4)$ en le barycentre de $(B, -1)$ et $(C, 4)$ c'est à dire transforme A_1 en B_1 et r transforme le barycentre de $(B, -1)$ et $(C, 4)$ en le barycentre de $(C, -1)$ et $(A, 4)$ i.e. transforme B_1 en C_1 . Donc le triangle $A_1B_1C_1$ est équilatéral.

On tape dans l'éditeur de programmes :

```
triangles(A,B,n) := {
  local L,C;
  L:=triangle_equilateral(A,B,C);
  si n>0 alors
    A:=barycentre([A,B],[-1,4]);
    B:=barycentre([B,C],[-1,4]);
    L:=L,triangles(A,B,n-1);
  fsi;
  return L;
};;
```

On compile (F9) et dans une ligne d'entrée, on tape :

```
triangles(0,1,5)
```

On obtient :

8.3 Les nombres amiables

Écrire un programme qui pour un entier n , donne la suite des couples amiables (a, b) ($a \leq b \leq n$). Deux nombres a et b sont **amiables**, si l'un est égal à la somme des diviseurs propres de l'autre (sauf lui-même) et inversement.

On tape (on utilise l'instruction `idivis(a)` qui renvoie la liste des diviseurs de l'entier a et l'instruction `sum(L)` qui renvoie la somme de la liste L) :

```
amiable(n) := {
  local j,a,b,L:=NULL;
  pour j de 2 jusque n faire
    a:=sum(idivis(j))-j;
    b:=sum(idivis(a))-a;
    si b==j et j<=a alors L:=L,[j,a]; fsi;
  fpour;
  retourne L;
};;
```

`amiable(500)` renvoie `[6,6], [28,28], [220,284], [496,496]`

Les nombres parfaits a sont les nombres amiables (a, a) .

Neuvième partie

Fiche Xcas la tortue

Déplacements

efface	pour effacer
avance	pour avancer
recule	pour reculer
saute	pour avancer ou reculer sans tracer
pas_de_cote	pour faire des pas de coté à gauche (ou à droite) sans tracer
tourne_gauche	pour tourner à gauche
tourne_droite	pour tourner à droite

Les couleurs et la tortue

crayon	pour connaître ou changer la couleur du crayon
cache_tortue	cache la tortue
montre_tortue	montre la tortue
dessine_tortue (n)	dessine la tortue en une forme pleine (n=0) ou non (n=1)

Les formes

rond	dessine un cercle ou un arc de cercle
triangle_plein	dessine un triangle plein
rectangle_plein	dessine un carré, rectangle, losange ou parallélogramme plein
disque	dessine un disque ou un secteur angulaire tangent à la tortue
disque_centre	dessine un disque ou un secteur angulaire de centre la tortue
polygone_rempli	remplit le polygône dessiné juste avant

Les légendes

ecris	pour écrire là où se trouve la tortue ou en un point
signe	pour signer, en bas à gauche, son dessin

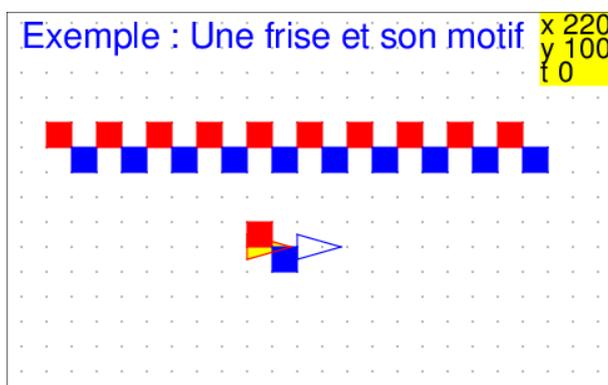
La programmation et la tortue

si <c> alors <inst> fsi	fait < inst > si la condition < c > est vraie
si <c> alors <inst1> sinon <inst2> fsi	fait < inst1 > si la condition < c > est vraie ou fait < inst2 > si < c > est fausse
repete n, <i1>, <i2>	repète n fois les instructions < i1 >, < i2 >
pour j de j1 jusque j2 faire <inst> fpour	fait < inst > en itérant la variable j avec un pas=1
pour j de j1 jusque j2 pas p faire <inst> fpour	fait < inst > en itérant la variable j avec un pas = p
tantque <c> faire <inst> ftantque	fait < inst > tant que la condition < c > est vraie
retourne <obj>	définit la valeur de la fonction par < obj >
lis(a)	met dans a, une expression lue au clavier
lis_phrase(a)	met dans a, une phrase lue au clavier
sauve ("toto", a, b)	sauve dans le fichier toto les fonctions a, b
ramene ("toto")	ramène les fonctions du fichier toto

Positionnement	
position	pour avoir la position de la tortue ou pour changer sa position
cap	pour avoir le cap de la tortue ou pour changer son cap
vers	pour diriger la tortue selon un point

Il ne doit y avoir qu'un seul écran de dessin tortue par session.

Pour piloter la tortue, on met des commandes à gauche du dessin : soit on les tape en toutes lettres, soit on les sélectionne dans le menu `Tortue`, soit on clique sur leurs abréviations situées sur la barre des boutons (le bouton `cr` affiche en plus la palette des couleurs du crayon), soit on réutilise une commande déjà tapée. À droite de l'écran se trouve l'enregistreur qui enregistre toutes les commandes utilisées : en cas d'erreur, il est facile de le modifier, puis d'exécuter toutes les commandes depuis le début en appuyant sur `F7`.



Cette frise est la répétition d'un même motif, isolé ci-dessus avec en jaune la position de départ de la tortue. On réalise d'abord le dessin du motif : on ouvre un niveau de dessin tortue (`Alt+d`) et on met dans les lignes de commandes :

```
crayon 1;
rectangle_plein ;
saute ;
tourne_droite ;
crayon 4;
rectangle_plein ;
tourne_gauche ;
saute ;
```

Pour cela on appuie successivement sur les boutons `cr`, `rp`, `sa`, `td`, Ces commandes se mettent automatiquement à droite dans l'enregistreur (une erreur se corrige directement dans l'enregistreur et on réexécute celui-ci avec `F7`).

On ouvre un éditeur de programme (`Alt+p`) et d'un coup de souris on recopie les commandes de l'enregistreur dans l'éditeur : on remplace alors `efface;` par `motif() := {`, puis on rajoute `}` avant `;` et on appuie sur `F9`.

On tape ensuite à gauche, dans les lignes de commandes : `repete 10, motif()` Vous pouvez zoomer le dessin, en avant ou en arrière, avec la molette de la souris et déplacer la fenêtre visible en la translatant avec la souris.

Cet exemple vous montre comment on réalise un dessin complexe en le décomposant et aussi comment on utilise l'enregistreur pour écrire facilement une procédure à partir d'un dessin exécuté en pas à pas.

9 Exercices

9.1 La toile d'araignée et la trigonométrie

La procédure `polyg(l, k)` trace un polygone régulier direct de k côtés de longueur l . La tortue part d'un sommet et est dirigée vers un sommet et revient à son point de départ. On tape dans l'éditeur de programme :

```
polyg(l, k) := {  
  repete(k, avance l, tourne_gauche 360/k);  
};
```

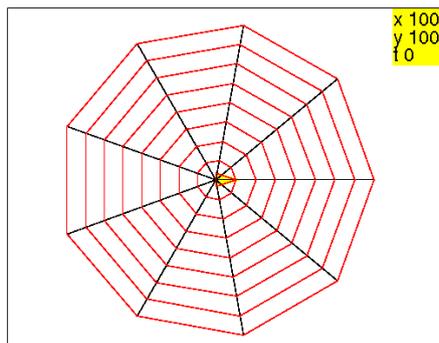
La procédure `araignee(k, p, n)` trace n polygones emboîtés, réguliers, directs et de k côtés où le plus petit polygone P a des côtés de longueur p . La distance du centre de P à un de ces sommets donne l'espacement entre les différents polygones. La tortue part du centre et est dirigée vers un sommet et revient à son point de départ. On tape dans l'éditeur de programme :

```
araignee(k, p, n) := {  
  local r, j;  
  r := p / sin(pi/k) / 2;  
  repete(k, avance n*r, recule n*r, tourne_gauche 360/k);  
  pour j de 1 jusque n faire  
    saute r;  
    tourne_gauche 90+180/k;  
    crayon rouge;  
    polyg(j*p, k);  
    tourne_droite 90+180/k;  
  fpour;  
  saute -n*r;  
};
```

Puis, on tape dans un niveau dessin tortue :

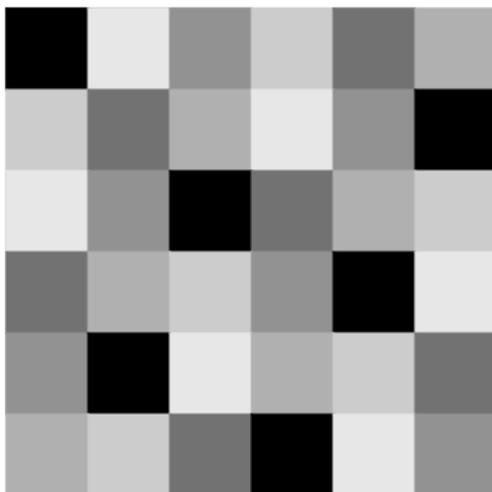
```
efface ;  
crayon jaune;  
dessine_tortue;  
crayon noir;  
araignee(9, 10, 8);
```

On obtient :



9.2 Les carrés magiques

Le départ de cette activité est un tableau de Richard Paul Lohse vu au musée de Grenoble. En voici une reproduction faite avec la tortue : les couleurs ne sont pas respectées...Ici, les couleurs ont comme code [40, 54, 46, 52, 43, 49].



On remarque que la permutation $p := [3, 4, 5, 1, 2, 0]$ effectue le passage des couleurs d'une ligne à la suivante (traduit par `coul := passage(coul, p)` ; ou par `coul := coul[p[j]]` $(j=0..5)$;). On tape dans l'éditeur de programmes :

```
ligne(coul) := {
  local j;
  pour j de 0 jusque 5 faire
    crayon coul[j]; rectangle_plein(30); saute(30);
  fpour
  saute -180;
};;

passage(l, p) := {
  local n, j, lp;
  n := size(l); lp := l;
  pour j de 0 jusque n-1 faire
    lp[j] := l[p[j]];
  fpour
  retourne lp;
};;

lohse() := {
  local j, p, coul;
  coul := [40, 43, 46, 49, 52, 54]; // [180, 168, 3, 136, 93, 78];
  pour j de 0 jusque 5 faire
    ligne(coul); p := [3, 4, 5, 1, 2, 0];
    coul := passage(coul, p); pas_de_cote -30;
  fpour;
  pas_de_cote 180; cache_tortue;
};;
```

On tape dans un niveau de dessin tortue `lohs e ()` et on obtient le dessin ci-dessus.