

Examen du vendredi 9 janvier, de 9h à 11h.

*Documents autorisés.*

### 1. RACINES RÉELLES

Soit

$$P(x) = x^4 + \frac{-31}{5}x^3 + 11x^2 + -6x + \frac{1}{4}$$

- (1) Montrer que  $P$  n'admet que des racines simples.
- (2) Montrer que  $P$  n'admet pas de racines rationnelles (on pourra tester les racines de  $20P$  modulo un nombre premier bien choisi).
- (3) Déterminer le nombre de racines de  $P$  dans l'intervalle  $[-6, 6]$  en utilisant les suites de Sturm.
- (4) Soit  $Q(x) = x^4 - 1$  et  $R_t(x) = tP(x) + (1-t)Q(x)$ . Déterminer un polynôme en  $t$  qui s'annule si et seulement si  $R_t$  admet au moins une racine multiple.
- (5) Calculer le nombre de valeurs de  $t \in [0, 1]$  telles que  $R_t$  admet une racine multiple. En considérant le nombre de racines réelles de  $R_t$ , expliquer pourquoi on pouvait s'attendre à trouver au moins une telle valeur de  $t$ .
- (6) Programmer une méthode de recherche d'une racine de  $P$  par dichotomie en utilisant les suites de Sturm tant que l'intervalle contient plusieurs racines ou le changement de signe de  $P$  s'il n'en contient qu'une.

### 2. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Soit  $A$  une matrice aléatoire de taille  $n$  à coefficients entiers. Soit  $v_0$  un vecteur aléatoire de longueur  $n$ . L'ensemble des polynômes tels que  $P(A)v_0 = 0$  est un idéal donc est engendré par un polynôme de degré minimal  $P_v$  qui divise le polynôme caractéristique de  $A$ . Pour déterminer  $P_v$ , on calcule la suite  $v_1 = Av_0, \dots, v_n = Av_{n-1}$ .

- (1) Créer une matrice  $A$  avec `ranm` pour  $n = 4$ .
- (2) Déterminer sur cet exemple le noyau de la matrice dont les  $v_i$  sont les colonnes, puis  $P_v$ , peut-on en déduire le polynôme caractéristique de  $A$  ?
- (3) Refaites le calcul de ce noyau modulo quelques nombres premiers  $p_i$  de taille inférieure à  $\sqrt{2}^{31}$ .
- (4) Donner une majoration sur les valeurs propres complexes de  $A$  (par exemple en fonction du plus grand coefficient de  $A$  en valeur absolue), en déduire une majoration sur la valeur absolue des coefficients du polynôme caractéristique de  $A$ .
- (5) Comment reconstruit-on le polynôme caractéristique dans  $\mathbb{Z}$  à partir des polynômes caractéristiques dans  $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$  ? Le faire sur l'exemple.
- (6) Y-a-t-il un intérêt à faire les calculs modulo  $p_i$  pour de grandes valeurs de  $n$  ?