Atelier d'arithmétique

Renée De Graeve
degraeve@fourier.ujf-grenoble.fr

Bernard Parisse
parisse@fourier.ujf-grenoble.fr

14-16 Mai 1997

1 Objectif de l'atelier

Il s'agit d'illustrer un cours d'arithmétique à l'aide des calculatrices symboliques (TI92, casio CFX 9990 GT, HP48 GX). Ce cours portera sur:

- division euclidienne,
- PGCD et identité de Bezout,
- algorithme d'Euclide

pour les entiers, les entiers de Gauß et les polynômes. Il aura comme prolongement la décomposition d'une fraction (de $\mathbb{Q}$ ou $K[X]$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) en éléments simples.

On fera l'analogie entre les propriétés des entiers et des polynômes afin de faire apparaître comme "naturel" la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. La calculatrice permet aux étudiants de se concentrer plus sur les concepts que sur les difficultés calculatoires et d'expérimenter de nombreux exemples.

2 Public visé et organisation de la classe.

Ce cours est destiné à des terminales scientifiques et des étudiants de Deug MIAS/SM 1ère année. Les différents exercices de ce cours seront résolus au fur et à mesure de la progression du cours à l'aide de la calculatrice dont l'écran sera rétroprojeté. Les programmes et le texte de ce cours sont disponibles à l'URL suivante:
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse`

3 Division euclidienne dans $I\!N$

3.1 Définition

Étant donnés $a, b \in I\!N$, il existe q et $r \in [0, b[$ tels que

$$a = bq + r$$

Exemples:

1. $$a = 21,\ b = 8, \quad q = 2,\ r = 5, \quad 21 = 2 \times 8 + 5$$

   Visualisation:

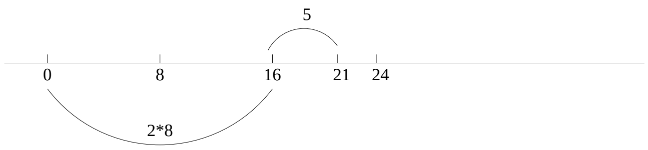

Figure 1: Division euclidienne dans $I\!N$

   Algorithme de la potence:

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \underline{8} \\ & 5 & 2 \end{array}$$

2. $a = 215$ et $b = 8$:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & \underline{8\ \ } \\ & 5 & 5 & 26 \\ & & 7 & \end{array}$$

3.2 Utilisation d'une calculatrice pour déterminer q et r:

- Les calculatrices symboliques permettent de le faire pour a et b aussi grands que l'on veut:

  1. TI92: `intDiv` renvoie q et `mod` renvoie r.
     Exemple: `intdiv(215,8)` renvoie `26` et `mod(215,8)` renvoie `7`
  2. `Erable` (HP48): en mode arithmétique entière (`10 SF`), `DIV2` renvoie au niveau 2 de la pile q et au niveau 1 r.
     Exemple: `215 8 DIV2` renvoie `26` au niveau 2 et `7` au niveau 1.

- Les autres calculatrices permettent de le faire pour a et b pas trop grands en utilisant la méthode suivante:
  q est la partie entière de $\frac{a}{b}$ puis $r = a - bq$.
  Par exemple sur Casio en mode `RUN`, `intg ( 215/8 )` renvoie `26` (`intg` s'obtient dans le menu `NUM` de la touche `OPTN`). Pour obtenir r, on tape alors `215-8*Ans` qui donne `7`

3.3 Exercices

Division euclidienne de 581 par 17, de 30576 par 6600.

Prenez votre numéro INSEE *sans* la clef (les 13 premiers chiffres), divisez par 97 et comparez le reste à la clef.

Si vous avez un compte chèque, composez un nombre en accollant le code de la banque, le code guichet et le numero de compte suivi de 2 zéros (5+5+11+2). Calculez le reste de la division de ce nombre par 97 et comparez à la clef RIB.

4 Division dans $\mathbb{Z}$.

Il s'agit toujours de trouver q et r tels que $a = bq + r$, mais il y a maintenant plusieurs conventions possibles pour le reste:

- Le reste est positif: $0 \leq r < |b|$.
- Le reste est positif ou négatif et $|r| < |b|$. Dans ce cas, il y a 2 choix possibles (cf. la figure 2).
- Le reste est de valeur absolue la plus petite possible: $|r| \leq \frac{|b|}{2}$. Il n'y a alors qu'un seul choix possible sauf pour $r = \pm\frac{b}{2}$, dans ce cas on choisit souvent $r = \frac{b}{2}$. Ce choix est appelé représentation symétrique, c'est le plus efficace d'un point de vue algorithmique.

Les 2 choix possibles sont: $21 = (-2) \times (-8) + 5$ et $21 = (-3) \times (-8) + (-3)$.

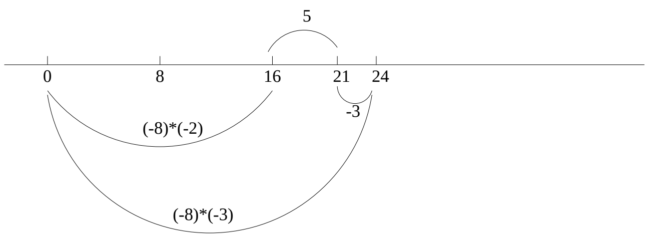

Figure 2: Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de 21 par -8.

Remarque 1 *Attention, le choix de la TI92 n'est pas cohérent entre* `mod` *et* `intdiv` *lorsque les arguments sont dans* $\mathbb{Z}$.

5 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$.

Par définition $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib/a, b \in \mathbb{Z}\}$, c'est l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont entières, ces nombres sont appelés entiers de Gauß.

5.1 Définition

On choisit q tel que bq soit le plus proche possible de a et on pose $r = a - bq$. Le choix de q et r va être expliqué dans les sections qui suivent, on verra que l'on peut choisir r tel que $|r|^2 \leq \frac{|b|^2}{2}$

5.1.1 Cas particulier.

Si $b \in \mathbb{N}$, on peut facilement visualiser r (cf. la figure 3 où $r = 14+3i-(15+5i)$):

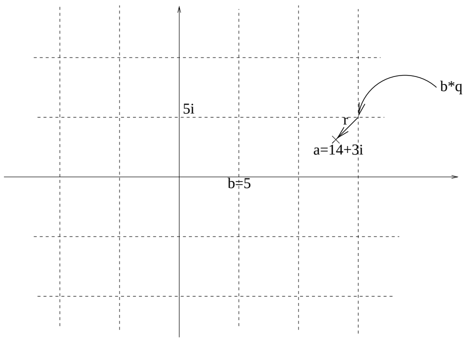

Figure 3: Division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$ de $14 + 3i$ par 5.

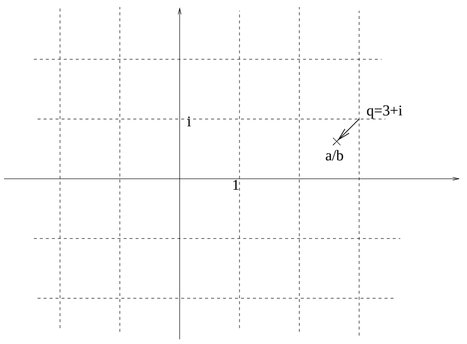

Figure 4: Division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$ de $14 + 3i$ par 5.

On remarque que les 2 coordonnées du vecteur d'affixe r sont en valeur absolue plus petites que $b/2$ (au sens large), on a donc:

$$|r|^2 \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{|b|^2}{2}$$

En faisant une homothétie de rapport $1/b = 1/5$, on peut visualiser q (figure 4, p. 4)

5.1.2 Cas général.

On peut visualiser directement q et r ou se ramèner au cas particulier précédent en effectuant la division de $a\overline{b}$ par $b\overline{b} = |b|^2$:

$$a\overline{b} = b\overline{b}q + \rho$$

On a alors $\rho = r\overline{b}$ et q est le quotient.

Exemple et visualisations:
$a = 5 + 4i$, $b = 2 + i$, $a\overline{b} = 14 + 3i$, $q = 3 + i$, $r = a - bq = -i$. Voir les figures 5, 6, 7 pages 5, 6, 6. Le passage de la figure 5 à la figure 6 se fait par une similitude correspondant à la multiplication par $\overline{b}$.

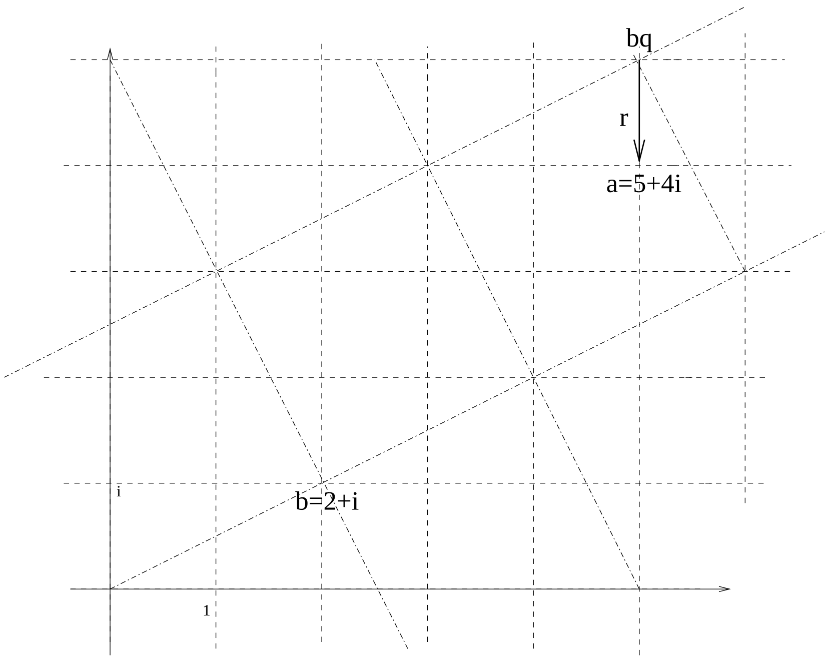

Figure 5: Lecture directe de q et r.

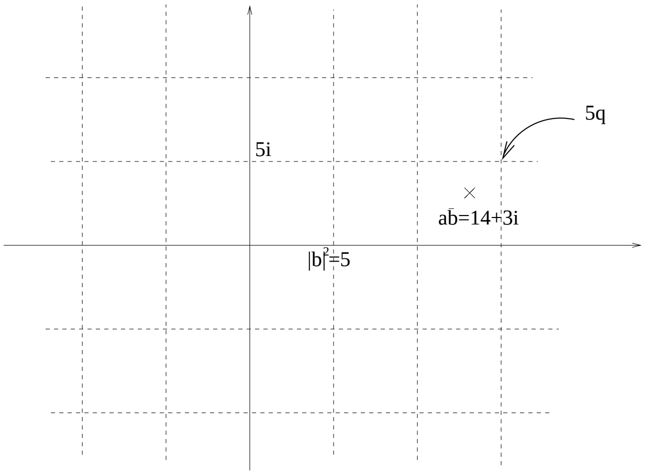

Figure 6: Division de $a\overline{b}$ par $|b|^2$.

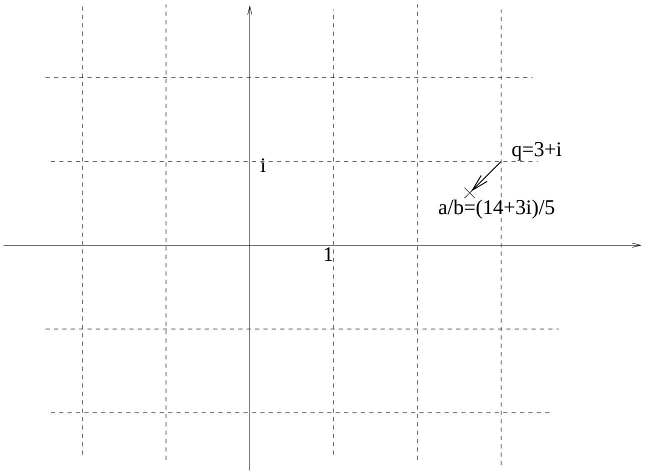

Figure 7: Division de a par b.

5.2 Avec calculatrices

Les calculatrices ne proposent pas d'instruction toute faite en général sauf `Erable` version 3.1 et ultérieure où on utilisera `DIV2` comme pour la division d'entiers relatifs. Avec la TI92: attention, `intdiv` accepte des arguments complexes, mais les réponses ne sont pas valides. Il faut utiliser la 2ème méthode (multiplication de a par $\overline{b}$).

Avec la HP48 (sans `Erable`):

```
<< DUP2 / 0 RND DUP 4 ROLLD * - >>
'DIVSYM' STO
```

Avec la TI92: `eucl(a,b)`

```
Func
Local c,r
a/b→c
If imag(c)≠0 Then
c+.5+.5*i →c
EndIf
int(c)→c
a-b*c→r
return {c,r}
EndFunc
```

Avec la Casio: taper le programme suivant, que vous nommerez `EUCL`:

```
"A"? -> A
"B"? -> B
A/B -> C
ImP C -> D
If D≠0
Then C+0.5+.0.5i -> C
IfEnd
"Q"
Intg C -> C triangle d'arrêt
"R"
A-BC -> R triangle d'arrêt
```

Commentaires: `D` contient la partie imaginaire de `A/B`, à la fin `C` est la partie entière de `A/B` si elle est réelle et l'entier de Gauss le plus proche sinon (car on a translaté `C` de $\frac{1+i}{2}$).

5.3 Exercices.

- Divisez $8 + 9i$ par $3 + 7i$.
- Diviser $13 + 17i$ par $5 - 2i$ et par $5 + 2i$.
- Faire les dessins illustrant les résultats de la calculatrice.

6 Division euclidienne des polynomes.

Le principe est identique, étant donnés deux polynômes A et B, on cherche 2 polynômes Q et R tels que:

$$A = BQ + R, \quad \deg(R) < \deg(B)$$

Il suffit d'adapter l'algorithme de la potence.

6.1 Exemple: $12X^2 + 10X - 9$ divisé par $2X + 7$.

A chaque étape, il faut "tuer" le coefficient principal du polynôme à diviser. Première étape: on tue $12X^2$ en créant $6X$ dans le quotient (le coefficient dominant de $(2X+7) \times (6X)$ est $12X^2$), on retranche ensuite $(2X+7) \times (6X)$ à $12X^2 + 5X - 9$.

```
  12X^2 + 10X -  9  |  2X + 7
                    |---------
-(12X^2 + 42X)      |  6X
         -32X -  9  |
```

Deuxième étape: on tue $-32X$ de la même façon

```
  12X^2 + 10X -   9 |  2X + 7
                    |---------
-(12X^2 + 42X)      |  6X - 16
         -32X -   9 |
       -(-32X - 112)|
                103 |
```

Comme le degré du polynôme constant 103 est $0 < 1$ le degré de $2X + 7$, la division est terminée: $Q = 6X - 16$ et $R = 103$.

6.2 Avec calculatrices

Avec `Erable` sur la HP48, on peut toujours utiliser `DIV2`.

Sur la TI92, ce n'est pas programmé, de plus le format symbolique (par exemple $12x^2 + 10x - 9$) est très peu maniable. Il faut donc utiliser un format plus maniable, on utilisera les listes où on mettra les coefficients du polynôme par ordre croissant (ici `{-9,10,12}`).

```
poldiv(l1,l2)
Func
Local a,b,c,r,i,j,k,l3,l4
dim(l1)→a
dim(l2)→b
a-b+1→c
newList(c)→l3
a→ r
```

```
l1→l4
While r≥b
r-b+1→j
l4[r]/l2[b]→ l3[j]
For i,j,r
i-j+1→k
l4[i]-l2[k]*l3[j]→l4[i]
EndFor
r-1→r
EndWhile string(l3)→l3
string(l4)→l4
return {l3,l4}
EndFunc
```

On aurait pu choisir de mettre les coefficients dans la liste en commençant par le coefficient de plus grand degré, ce qui permet d'utiliser l'instruction `polyeval` qui transforme alors le polynome du format liste en format symbolique.

Avec la Casio, on écrit le même genre de programme. Il faut rentrer auparavant les coefficients du polynôme dans les listes 1 (A) et 2 (B) par ordre croissant et les degrés de A et B dans les variables `A` et `B`. On suppose que $A \geq B$. On appelera le programme par exemple `POLQR`

```
List 1→List 4
A→R
R-B+1→C
C→DimList 3
While R≥B
R-B+1→J
List 4[R] / List 2[B]→List 3[J]
For J→I to R
I-J+1→K
List 4[I]-List 2[K]*List 3 [J]→List 4[I]
Next
R-1→R
WhileEnd
If R≠0
Then While List 4[R]=0 And R>1
R-1→R
WhileEnd
If List 4[R]=0
Then 0→R
IfEnd
IfEnd
Return
```

Le polynôme Q est mis dans la liste 3, son degré est égal à $C - 1$ et R est en liste 4, son degré est $R - 1$ ou 0.

Sur HP48, si `Erable` n'est pas installé, on peut utiliser la représentation liste des polynômes par ordre décroissant comme dans le programme ci-dessous (ce qui suit `@` représente l'état de la pile, il est inutile de le taper réellement sur la HP)

```
<< DUP TAIL SWAP HEAD { }      @ A,B',b,Q
   WHILE
     4 PICK SIZE 4 PICK SIZE > @ A,B',b,Q,#a,#b-1
   REPEAT
     4 ROLL DUP TAIL SWAP HEAD @ B',b,Q,A',a
     4 PICK /                  @ B',b,Q,A',a/b
     ROT OVER +                @ B',b,A',a/b,Q
     ROT ROT 5 PICK *          @ B',b,Q,A',a/b*B'
     OVER SIZE OVER SIZE - { } @ B',b,Q,A',a/b*B',#,{}
     WHILE
       SWAP DUP 1 - ROT ROT    @ B',b,Q,A',a/b*B',#-1,{0...0},#
     REPEAT
       0 +
     END                       @ B',b,Q,A',a/b*B',-1,{0...0}
     SWAP DROP +               @ B',b,Q,A',a/b*B' complete de 0
     -                         @ B',b,Q,nouvel A
     4 ROLLD
   END                         @ A,B',b,Q
   4 ROLLD DROP2               @ Q,R
```

(182 octets, CRC `#1940h`)

7 Diviseurs, facteurs premiers, factorisation

7.1 Définition

On dit que B est un diviseur de A si le reste de la division de A par B est nul. En pratique, pour trouver les diviseurs d'un entier n on peut essayer de le diviser par tous les nombres inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$. Pour un entier de Gauß, on peut aussi tester la division par tous les nombres de module inférieur ou égal à $\sqrt{|n|}$.

On dit qu'un entier est premier s'il n'a que 4 diviseurs: 1, -1, lui-même, et son opposé. Par exemple 2, 3, 5, 7, 11, ... sont premiers dans $\mathbb{Z}$. Dans $\mathbb{Z}[i]$, un entier de Gauß z est premier s'il admet 8 diviseurs: 1, -1, i, $-i$, z, $-z$, iz, $-iz$. Attention, 5 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[i]$ car $5 = (1+2i)(1-2i)$.

On dit qu'un polynôme est irréductible si tous ses diviseurs sont constants ou de même degré. Dans $\mathbb{C}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1. Dans $\mathbb{R}[X]$, ce sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont les racines ne sont pas réelles. Dans $\mathbb{Z}[X]$, la situation est bien plus complexe.

La factorisation consiste à écrire un entier ou un polynôme comme produit de facteurs premiers ou irréductibles.

Exemple de factorisation:

- Dans $\mathbb{Z}$:
$$1998 = 2 \times 3^3 \times 37$$
- Dans $\mathbb{Z}[i]$:
$$15 + 27i = 3(1 + i)(7 + 2i)$$
- Dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$:
$$(X^4 - 1) = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 1) = (X + i)(X - i)(X - 1)(X + 1)$$

7.2 Avec calculatrices

Factorisation des entiers:

- Sur la TI92, l'instruction `factor` factorise les nombres dont les facteurs premiers sont inférieurs à 65535
- Sur la Casio, l'instruction `factor` de `ALGBR` factorise les nombres dont les facteurs premiers sont inférieurs à 256.
- Sur la HP48, l'instruction `COLC` d'`Erable` factorise les nombres de taille raisonnable (moins de 20 chiffres en gros). `COLC` traite aussi les entiers de Gauß.

Factorisation des polynômes: les mêmes instructions factorisent aussi les polynômes. La Casio est ici la meilleure puisqu'elle factorise par exemple $x^8 + x^7 + x^5 + 3x^4 + x^3 + x + 1$.

7.3 Exercices

Factoriser:

- 30576 dans $\mathbb{N}$
- 6600 dans $\mathbb{N}$
- $3 - i$ dans $\mathbb{Z}[i]$
- $5 + 5i$ dans $\mathbb{Z}[i]$
- $8 + 9i$ dans $\mathbb{Z}[i]$
- $(x^3 - 1)^3$ dans $K[X]$
- $x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + 50$ dans $K[X]$

8 Plus grand diviseur commun

Un plus grand diviseur commun de A et B est un diviseur G de A et B tel que si D divise A et B alors D divise G.

Algorithme d'Euclide:
Si B est non nul, le PGCD de A et B est aussi le PGCD de B et du reste de la division de A par B. Si B est nul, on prendra A comme PGCD.

Cette méthode est bien plus efficace que la recherche de facteurs premiers communs dans la factorisation de A et B.

8.1 Avec calculatrices

Sur la TI92, on peut utiliser l'instruction `gcd` pour calculer le PGCD de 2 entiers. Pour 2 polynômes, on peut utiliser une astuce qui est `p/getnum(p/q)`: en effet `getnum(p/q)` renvoie le numérateur de la fraction p/q simplifiée.

Sur la Casio, il n'y a pas de PGCD.

Sur la HP48 avec `Erable`, on utilisera `GCD1`.

Étant donné l'importance de l'algorithme d'Euclide, nous donnons tout de même les algorithmes sur les 3 machines pour les entiers et les entiers de Gauß.

Casio:

```
"A"?→A
"B"?→B
While B≠0
A/B+.5+.5*i→C
A-B Intg C→R
B→A
R→B
WhileEnd
A triangle
```

TI92:

```
pgcd(a,b)
Func
Local c,r
While b≠ 0
a/b+0.5+0.5*i→c
a-b*int(c)→r
b→a
r→b
EndWhile
return a
EndFunc
```

HP48: (50 octets, CRC: `#5078h`)

```
<< @ a, b -> g
```

```
  WHILE
    DUP ABS
  REPEAT
    DUP2 / 0 RND   @ a, b, q
    OVER * ROT -   @ b, -r
  END
  DROP
>>
```

8.2 Exercices

Calculer le PGCD de:

- 14 et 611
- 322 et 546
- $8 + 9i$ et $3 + 7i$
- $13 + 17i$ et $5 - 2i$
- $13 + 17i$ et $9 + 7i$
- $(x^3 - 1)^3$ et $x^6 - 1$
- $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ et $x^3 + x^2 - x - 1$

9 Identité de Bézout.

9.1 Algorithmes

Il s'agit d'une amélioration de l'algorithme d'Euclide, non seulement on détermine un PGCD g de a et b mais on détermine aussi u et v tels que:

$$au + bv = g$$

Par exemple, le PGCD de 15 et 25 est 5, l'identité de Bézout correspondante est:

$$15 * (2) + 25 * (-1) = 5$$

Il y a deux approches pour déterminer u, v et g toutes deux basées sur l'algorithme d'Euclide:

- la méthode itérative: on part des relations:

$$\begin{aligned} 1 \times a + 0 \times b &= a \\ 0 \times a + 1 \times b &= b \end{aligned}$$

puis on effectue la division euclidienne de a par b: on obtient ainsi r dans le membre de droite en soustrayant la 2ème ligne multipliée par q de la première ligne:

$$(1 - 0 \times q) \times a + (0 - 1 \times q)b = a - bq = r$$

On a ainsi créé une troisième ligne, on continue avec la deuxième et la troisième ligne, jusqu'à ce que le reste soit nul, la ligne précédente est alors l'identité de Bézout.

- la méthode récursive: elle consiste à effectuer une "remontée" de l'identité de Bézout pour b et r à celle pour a et b: si

$$\alpha b + \beta r = g$$

alors, comme $r = a - bq$, on a:

$$\beta a + (\alpha - \beta q)b = g$$

Remarque: on peut aussi programmer l'algorithme d'Euclide de manière récursive. On obtient alors un programme un peu moins efficace que l'agorithme itératif, alors que pour l'identité de Bézout, l'algorithme récursif est plus efficace car il nécessite moins d'opérations arithmétiques.

9.2 Avec calculatrices

Avec `Erable` sur la HP48, on peut utiliser l'instruction `GCD3`. Attention, il faut se placer en mode "arithmétique entière" ou "polynomiale" selon le cas traité.

Nous donnons pour les entiers (de Gauß) des programmes réalisant l'identité de Bézout.

Voici les versions récursives:

TI92:

```
bezour(a,b)
Func
Local c,r,t
int(a/b+.5+.5*i)→c
a-b*c→r
If b≠0 Then
bezour(b,r)→t
Return {t[1],t[3],t[2]-c*t[3]}
Else
Return {a,1,0}
EndIf
EndFunc
```

Commentaires: `bezour(a,b)` est une liste de 3 éléments g=`bezour(a,b)[1]`, u=`bezour(a,b)[2]` et v=`bezour(a,b)[3]` tels que $g = ua + bv$. On a:
`bezour(a,b)[1]=bezour(b,r)[1]=g`

$$g = \alpha b + \beta r = \beta a + (\alpha - \beta q)b = ua + vb$$

HP48: programme `BEZOUT` (105 octets, CRC `#44E7h`)

```
<< IF DUP ABS
   THEN
     DUP2 / 0 RND  @ a,b,q
     SWAP ROT      @ q,b,a
     OVER 4 PICK   @ q,b,a,b,q
     * -           @ q,b,r
     BEZOUT        @ q,d,alpha,beta
     SWAP OVER     @ q,d,beta,alpha,beta
     5 ROLL * -    @ d,beta,alpha-q*beta
   ELSE
     DROP 1 0
   END
>>
```

Voici maintenant deux programmes utilisant la méthode itérative:

TI92:

```
extgcd(a,b)
Func
Local t
{a,1,0}→a
{b,0,1}→b
While b[1]≠0
b→ t
a-b*int(a[1]/b[1]+0.5+0.5*i)→b
t→a
EndWhile
return a
EndFunc
```

Casio: on suppose que les entiers A et B sont entrés

```
1→U
0→V
0→W
1→X
While B≠0
intg(A/B+0.5+0.5i)→Q
A-BQ→ R
U-WQ→S
V-XQ→T
B→A
R→B
W→U
X→B
S→W
T→X
WhileEnd
```

`A` *petit triangle*
`U` *petit triangle*
`V` *petit triangle*

9.3 Exercices

Reprendre les exercices du PGCD et calculer les coefficients u et v.

10 Décomposition en éléments simples

10.1 Algorithme

Il s'agit d'écrire une fracion sous forme de somme de fractions ayant des dénominateurs le plus simple possible. C'est particulièrement utile pour les fractions rationnelles de polynômes par exemple pour calculer une primitive de la fraction, ou pour calculer la somme d'une série dont le terme général u_n est une fraction rationnelle en n. La méthode consiste à factoriser le dénominateur en produit de facteurs irréductibles, puis à utiliser l'identité de Bézout pour casser la fraction.

Par exemple, pour décomposer $\frac{2}{21}$ en éléments simples sur $\mathbb{Z}$, on factorise $21 = 3 \times 7$, puis on écrit l'identité de Bézout pour 3 et 7:

$$3 \times (-2) + 7 \times 1 = 1$$

on obtient 1 car 3 et 7 sont premiers entre eux, on multiplie ensuite par le numérateur:

$$3 \times (-2 \times 2) + 7 \times (1 \times 2) = 2$$

on divise par 3×7 et on décompose en 2 morceaux:

$$\frac{3 \times (-4)}{3 \times 7} + \frac{7 \times 2}{3 \times 7} = \frac{2}{21}$$

après réduction des fractions du membre de droite, on obtient:

$$\frac{-4}{7} + \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$$

S'il y a plusieurs facteurs irréductibles, par exemple si le dénominateur est 105, on effectue cette opération plusieurs fois, par exemple en écrivant l'identité de Bézout pour 21 et 5 puis pour 3 et 7 pour la fraction de dénominateur 21. Ainsi

$$21 - 4 \times 5 = 1$$

donc:

$$\frac{1}{105} = \frac{21}{105} + \frac{-4 \times 5}{105} = \frac{1}{5} - \frac{4}{21}$$

puis on décompose $\frac{4}{21}$.

Si des facteurs irréductibles sont élevés à une puissance, par exemple si le dénominateur est $45 = 3^2 \times 5$, il faut appliquer la méthode ci-dessus en incluant la puissance dans le facteur, dans l'exemple, on applique Bézout pour $3^2 = 9$ et 5

$$9 \times (-1) + 5 \times 2 = 1$$

Ce qui donnerait par exemple:

$$\frac{7}{45} = \frac{9 \times (-7)}{45} + \frac{5 \times 14}{45} = \frac{-7}{5} + \frac{14}{3^2}$$

On peut continuer la décomposition de $14/3^2$ en effectuant la division euclidienne de 14 par 3:

$$14 = 3 \times 4 + 2$$

donc:

$$\frac{14}{3^2} = \frac{3 \times 4}{3^2} + \frac{2}{3^2} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3^2}$$

Pour les polynômes, la méthode est identique mais les calculs sont plus pénibles, on appréciera l'aide de la calculatrice!

10.2 Calculatrices

Sur la TI92, on peut utiliser l'instruciton `propfrac` suivi de `expand` pour décomposer une fraction rationnelle de polynomes. Sur la HP48 avec `Erable`, on utilisera l'instruction `PF`. Sur la Casio, il n'y a pas d'instructions, on peut parfois se débrouiller en intégrant puis en dérivant la fraction.

10.3 Exercices

Décomposer

- $\frac{1}{24}$ (entiers)
- $\frac{30576}{6600}$ (entiers)
- $\frac{1}{(x^3-1)^3}$ (réels ou/et complexes).
- $\frac{x^4}{x^4-8x^3+39x^2-62x+50}$ (réels ou/et complexes).

Exercice de Deug:
Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$. Décomposer en élements simples $\frac{1}{P(x)}$ et en déduire:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=5}^{n} \frac{1}{P(k)}, \quad \int \frac{1}{P(x)}\, dx$$

10.4 Remarque sur l'intégration de fractions rationnelles.

Si le dénominateur D se factorise avec des facteurs irréductibles à une puissance plus grande que 1, il n'est pas intéressant d'effectuer une décomposition en éléments simples complète avant d'intégrer, il vaut mieux utiliser de l'intégration par parties pour se ramener au cas où tous les facteurs irréductibles du dénominateur sont à la puissance 1. Par exemple, pour intégrer

$$\frac{6}{(X^3-1)^2}$$

on applique Bézout à X^3-1 et à sa dérivée $3X^2$ (qui sont premiers entre eux):

$$(X^3-1)\times(-3)+3X^2\times(X)=3$$

donc:

$$\frac{6}{(X^3-1)^2}=\frac{(-6)}{(X^3-1)}+\frac{2X(X^3-1)'}{(X^3-1)^2}$$

On intègre ensuite par parties le deuxième terme

$$\int\frac{6}{(X^3-1)^2}=\int\frac{(-6)}{(X^3-1)}+\frac{-2X}{(X^3-1)}+\int\frac{2}{(X^3-1)}$$

Pour terminer le calcul, il suffit de décomposer $1/(X^3-1)$.

11 Prolongements

L'arithmétique a de nombreuses applications dans le calcul formel, par exemple:

- le calcul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier (calcul modulaire) permet de déterminer le PGCD de 2 polynômes de manière plus efficace que l'algorithme d'Euclide
- le calcul dans $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ avec p premier (calcul p-adique) en conjonction avec le calcul modulaire permet de déterminer la factorisation d'un polynôme sur les entiers (ou les entiers de Gauß).
- le théorème des restes chinois permet d'améliorer l'efficacité des algorithmes précédents ($\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$)

On pourra consulter avec profit les documents suivants:

- pour la TI92: la revue hypothèses ([8]), le livre [5], les serveurs web `www.ticalc.org` et `www.ti.com/calc/france`.
- pour la HP48: les logiciels de calcul formel: `Erable` ([7]) et `alg48` ([6]), le livre [4], les serveurs web `hp48.ml.org` et `www.hp.com/calculators`.
- pour la Casio: le livre [1], le serveur web `www.casio.fr` avec en particulier la revue `3'33` [3].
- pour le calcul formel en général: le livre [2]

References

[1] P. Chibaudel. *Les mathématiques sur Casio: Programmes Utilitaires.* PUF, 1996.

[2] J. Davenport, Y. Siret, and E. Tournier. *Calcul formel: Systèmes et algorithmes de manipulations algébriques.* Masson, 1989.

[3] M. Ferrand. `3'33`. `http://www.casio.fr`, –1998.

[4] J.-M. Ferrard. *Mathez la HP48.* D 31 Diffusion, 1993.

[5] J.-M. Ferrard. *Des maths avec la TI92.* Dunod, 1997.

[6] C.-N. Fiechter and M. Heiskanen. *ALG48 version 4.* `http://www.cs.pitt.edu/~fiechter/hp48/`, 1997.

[7] B. Parisse. *Erable version 3.* `ftp://fourier.ujf-grenoble.fr/pub/hp48/erable.zip`, 1998.

[8] Texas Instrument. *Revue Hypothèses.* –1998.