Université Joseph Fourier
Année universitaire 2010/2011
Licence Sciences et Technologies (L2)
Unité MAT237

Correction feuille de TD n°6

Exercice 1. C'est l'exemple standard et bien connu de non-unicite des solutions.

Exercice 2. $c'(t)$ et $f(c(t))$ sont lies car orthogonaux a $DF(c(t))$; generalisation immediate si l'on a $n-1$ intégrales premieres independantes.

Exercice 3. $H(x,y) := x^2 + y^2$ est une intégrale premiere ; periodicité des solutions : géometriquement : les orbites sont des cercles sur lesquels le champ de vecteurs ne s'annule pas ; analytiquement : en coordonnees polaires on a $r' = 0$ et $\theta' = -\lambda(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 4. 1. φ *periodique* $\Rightarrow c\varphi$ périodique pour tout reel $c \neq 0$.
2. $n = 2$: s'il y a une solution périodique, toutes le sont (sauf les stationnaires).

Exercice 5. 1. Les points d'équilibre sont

$$(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1) \quad \text{et} \quad (-1,-1).$$

En le point singulier (x,y) la linéarisation est donné par la matrice

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère une solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ du système et on dérive $t \mapsto f(x(t), y(t))$:

$$\frac{df(x(t),y(t))}{dt}(t) = (y^2(t)-1)(3x^3(t)-3) + (x^2(t)-1)(-3y^2(t)+3) = 0.$$

Exercice 6. 1. Le système différentiel équivalent est :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -W'(x(t)) \end{pmatrix}$$

2. On considère une solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ et on dérive :

$$\frac{dE(x(t), y(t))}{dt} = y(t)W'(x(t)) - W'(x(t))y(t) = 0.$$

3. Si $W(x) = \alpha x^2$, il n'y a qu'un seul point singulier : $(0, 0)$. Les trajectoires se trouvent sur les courbes $\frac{1}{2}y^2 + \alpha x^2 = c$.

Exercice 7.
Exemple standard du calcul variationnel/equation d'Euler-Lagrange.

Exercice 8. Tiré du livre de H.Goldstein : Classical mecaniics (Chap.II) ;

$$ds = \sqrt{1 + \varphi'(t)^2}dt, aire = \int_0^{2\pi} 2\pi t\sqrt{1 + \varphi'(t)^2}dt,$$

donc $L(t, x, y, x', y') = 2\pi t\sqrt{1 + y'(t)^2}$; Euler/Lagrange implique

$$\frac{ty'}{\sqrt{1 + y'^2}} = constante = \alpha,$$

et enfin $y(t) = \alpha \mathrm{arccosh}(\frac{t}{\alpha}) + \beta$, où les constantes α, β dependent de P et Q.