Feuille d'exercices 5-MAT237 2007-2008

Exercice 1 Soient a et b deux paramètres réels. Résoudre

$$x'' + ax' + b = 0.$$

Exercice 2 (*Wronskien*)

On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $I =]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$(E) \quad x''(t) + 3\tan(t)x'(t) - 2x(t) = 0.$$

1. Quelle est la nature de l'espace des solutions?
2. Vérifier que la fonction $x_0(t) = \sin(t)$ est solution de (E).
3. Soit x une solution de (E) quelconque. On pose

$$w(t) = \det((x, x'), (x_0, x_0'))(t) = x(t)x_0'(t) - x_0(t)x'(t).$$

Trouver une équation differentielle d'ordre 1 vérifiée par w. La résoudre.

4. Vérifier que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)}{x_0(t)}\right) = -\frac{w(t)}{\sin^2(t)}.$$

Résoudre (E).

Exercice 3 *Intégrales premières.*

On considère un système différentiel du type

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{array} \right.$$

Ici chaque fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle intégrale première du systeme une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, constante sur chaque solution.

1. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

2. Si A est une matrice antisymétrique fixée de taille n, donner une intégrale première du système $x' = Ax$. Interprétation?
3. Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$. Montrer que le système

$$\begin{array}{c} x_1' = x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \end{array}$$

admet une intégrale première non constance si et seulement si $\lambda \leq 0$. On cherchera d'abord à résoudre le système.

4. On considère l'équation différentielle $x'' = g(x)$. En posant $x_1 = x$ et $x_2 = x'$, à quel système différentiel est-on ramené? Soit P telle que $P' = -g$. On pose $E_P(x_1, x_2) = P(x_1)$ (énergie potentielle) et $E_C(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$ (énergie cinétique). Montrer que l'énergie totale $E = E_P + E_C$ est une intégrale première du système.

Exercice 4 Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1' = x_1 + 8x_2 + e^t \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + e^{-3t}. \end{array} \right.$$

Exercice 5 Résoudre $x''' + x = 0$.

Exercice 6 En effectuant un changement de variable $s = g(t)$ conduisant à une équation différentielle à coefficients constants, résoudre

$$(1 + t^2)x'' + tx' + k^2x = 0.$$

Ici k est un paramètre.

Exercice 7 On considère l'équation $x' = \sin(x)$.
1. Trouver les solutions constantes.
2. Montrer que toutes les solutions sont bornées.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solution de $x''(t) = -t|x(t)|$, avec les conditions initiales $x(0) = 1, x'(0) = 0$. Montrer que $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$.