Université Joseph Fourier
Année universitaire 2007/2008
Licence Sciences et Technologies (L2)
Unité MAT237
Feuille d'exercices no.4

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes

$$
\begin{array}{lll}
(1) & 2u' = u & ; \quad \lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty. \\
(2) & u' = u + t^2 + 3t - 1 & ; \quad u(0) = 1. \\
(3) & u' = 2u + e^t \cos t & ; \quad u(\pi/4) = 0. \\
(4) & u' = 4tu. & \\
(5) & u' = 5u/t + (t+1)/t. &
\end{array}
$$

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $u' = e^t - u$. Etudier suivant la condition initiale $u(0)$ le comportement des solutions à l'infini.

Exercice 3. On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad u - tu' = \frac{2t}{t+2}.$$

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on définit $F(t) = f(t)/t$.

1. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si
$$F'(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t}$$
pour tout $t \in]0, +\infty[$.
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4.

On considère l'ensemble des polynômes $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Montrer que l'application $L : y \mapsto y' - y$ définit une bijection de V dans V. Déterminer l'application réciproque L^{-1}. b) Déterminer une primitive de $f(x) = e^{-x}(x^2 + x + 2)$.

Exercice 5. (a) Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' = y + t + 2 \ ; \ y(0) = 1.$$

(b) Tracer la solution et étudier le comportement de la solution en $-\infty$ et en $+\infty$.

(c) Trouver le point où la solution atteint son minimum sur $\mathbb{R}$, et donner la valeur de ce minimum.

Exercice 6. Équations différentielles à variables séparées : résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(2t+3)y'(t) + ty(t) = 0 \ ; \ y(0) = 1.$$

Exercice 7.

1) La désintégration de 50 % de matière radioactive s'est produite dans 30 jours. Dans combien de temps restera-t-il 1 % de toute la quantité initiale ?

2) Selon les expériences, la désintégration annuelle du radium est de l'ordre 0,44 mg par gramme. En combien d'années la moitié de toute la réserve de radium se désintégrera-t-elle ?

Exercice 8. a) Résoudre l'équation différentielle $y' = y(5-y)$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ en utilisant la méthode de séparation des variables.

b) Résoudre l'équation différentielle $y' = y^2 + 10$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 2$.

c) Résoudre l'équation différentielle $y' = y^2 - 10y + 9$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 3$.

Réponse : a)$y(t) = \dfrac{5}{1+4\,e^{-5t}}$; b) $y(t) = \sqrt{10}\tan(\dfrac{1}{10}\,(10t+\sqrt{10}\arctan(\dfrac{\sqrt{10}}{5}))\,\sqrt{10})$;
c) $y(t) = \dfrac{3\,(-e^{8t}-3)}{-3\,e^{8t}-1}$.

Exercice 9. On considère les deux équations différentielles dépendant de deux paramètres réels a et b.

$$\begin{array}{ll} (E_1) & u' = au + b \\ (E_2) & u' = au + bu^2. \end{array}$$

Pour chacune d'elles

1. Montrer que la donnée d'une condition initiale $u(0)$ détermine u de façon unique.
2. Déterminer les solutions stationnaires.
3. Résoudre analytiquement, et donner l'allure des solutions.

Référence bibliographique :

`Hervé PAJOT, Cours MAT110c (Apprentissage du raisonnement et analyse élémentaire), http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pajot, CH.VII: Equations Différentielles, pp.17--24`