Université Joseph Fourier
Année universitaire 2009/2010
**Licence Sciences et Technologies (L2)**
Unité MAT237
Feuille d'exercices no. 2

**Exercice 1**. Déterminer les points singuliers de la courbe plane définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (t^2 + t^3, t^4 + t^5)$. Déterminer s'il s'agit de points de rebroussement de première ou de seconde espèce.

**Exercice 2**. Déterminer les points singuliers de l'astroïde $A$ (cf. exercice 4, feuille 1, avec $n = 4$), leur espèce, et la tangente à l'astroïde en ces points. Vérifier que la distance entre les points d'intersection de la tangente en un point régulier $M(\theta) \in A$ avec les axes est constante. En déduire une construction géométrique alternative de l'astroïde.

**Exercice 3**. Soit $C$ un cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

a) Déterminer une équation polaire de $C$.

b) Soit $D$ une droite passant par l'origine qui coupe $C$ en un point $P$. On construit sur $D$ deux points $M$ et $N$ distincts tels que $d(P; M) = d(P; N) = a$, où $a$ est un réel strictement positif fixé. Déterminer une équation polaire de l'ensemble $\Gamma_a$ décrit par les points $M$ et $N$ si l'on varie $D$ (*limaçons de Pascal*).

c) Déterminer, lorsque $a$ décrit $]0; \infty[$, l'ensemble des points des courbes $\Gamma_a$, dont la tangente est verticale.

**Exercice 4**. Etudier les branches infinies des courbes planes définies par :

1) $t \mapsto (\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1})$,

2) (Examen de juin 2006) $r(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta - \pi/4}$.

**Exercice 5**. Etudier et tracer les courbes planes définies par :

1) $t \mapsto (\frac{t}{1+t^2}, \frac{2+t^3}{1+t^2})$,

2) (Rosace à trois boucles) $r(\theta) = \sin(3\theta)$.

**Exercice 6**. Soit $\Gamma$ la courbe d'équation cartésienne:

$$x(y + x) + 2x^3 + x^4 + y^4 = 0$$

1) Soit $\Delta_t$ la droite d'équation $y = tx$; discuter en fonction de $t$ le nombre de points d'intersection de $\Gamma$ et $\Delta_t$, et la position de ces points par rapport à l'origine.

2) Déterminer les points d'intersection de $\Gamma$ avec la droite d'équation $x = -1$, ainsi que les tangents à $\Gamma$ en ces points.

3) Tracer la courbe $\Gamma$.

**Exercice 7**. Montrer que la relation $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + y = 0$ définit dans un voisinage de $(0, 0)$ une fonction $y = \phi(x)$.

**Exercice 8**. Calculer la longueur de la *néphroide*, d'équations paramétriques $x(t) = 3\cos(t) - \cos(3t)$ et $y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t)$.

**Exercice 9**. Soit la courbe plane $\Gamma$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = e^{-t}\cos(t)$, $y(t) = e^{-t}\sin(t)$. Calculer la longueur totale de $\Gamma$.