Université Joseph Fourier
Année universitaire 2007/2008
Licence Sciences et Technologies (L2)
Unité MAT237
Feuille d'exercices no.1

Exercice 1. Montrer que le cercle $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ n'est pas le graphe d'une fonction scalaire.

Exercice 2. Soit D une droite dans $\mathbb{R}^2$ donnée par l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Donner au moins trois paramétrages différents de D.

Exercice 3. Soit C un cercle de rayon R qui roule sans glisser (de gauche à droite) sur l'axe des x. On fixe un point M de C, et on étudie la trajectoire $M(t)$ de ce point lors du glissement. On peut supposer que $M(0) = M$ est à l'origine. Chercher les coordonnées de $M(t)$. [résultat: $x(t) = R(t - \sin(t))$, $y(t) = R(1 - \cos(t))$]

Exercice 4. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et γ un cercle de rayon $1/n$ que l'on fait rouler (sans glissement) à l'intérieur du cercle unité. On fixe un point M du cercle mobile, il décrit dans le mouvement une courbe. On prend comme paramètre l'angle polaire $\theta \in \mathbb{R}$, du point de contact $H(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ du cercle γ avec le grand. On suppose que $M(0) = H(0) = (1, 0)$.

a) Calculer les coordonnées du centre $I(\theta)$ de γ au temps θ.

b) Montrer que l'angle $\widehat{M(\theta), H(\theta)}$ est $n\theta$.

c) Trouver les coordonnées de $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$.

[résultat: $x(\theta) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\theta + \cos(n-1)\theta)$, $y(\theta) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\theta - \sin(n-1)\theta)$]

Exercice 5. On consider les points $F = (1, 0)$ et $F' = (-1, 0)$ dans le plan. Déterminer une équation cartésienne et polaire de l'ensemble C des points M tels que $d(M, F) \cdot d(M, F') = 1$. (lemniscate de Bernoulli)

Exercice 6. Soit la courbe plane $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t - \frac{1}{t}$ pour $t > 0$. Montrer que, par un changement de paramètre, cette courbe se transforme en $x(t) = 2\mathrm{ch}(s)$, $y(t) = 2\mathrm{sh}(s)$.

Exercice 7. Soit $f(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée (continue) telle la fonction $t \mapsto x(t)$ est injective. Montrer que la courbe est graphe d'une fonction scalaire.

Exercice 8. Soenit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ des constantes. On considère la courbe de Lissajous $f(t) = (x(t), y(t))$, où $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \sin(at + b)$.

a) On suppose que $b = \pi/2$. Tracer (qualitativement) l'image de la courbe pour $a = 2$ et $a = 3/2$.

b) Montrer qu'elle est périodique si et seulement si a est rationnel.

c) Que peut-on dire sur la nature de l'image de la courbe si a n'est pas rationnel ?

⁂