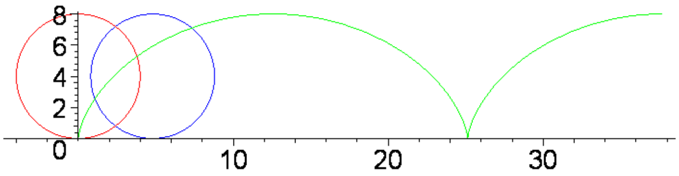
Visualisations sur l'ordinateur (TP1-2009)

FEUILLE N1, MAT 237

Exercice 3. Soit C un cercle de rayon R qui roule sans glisser (de gauche à droite) sur l’axe des x. On fixe un point M de C, et on étudie la trajectoire M(t) de ce point lors du roulement. On peut supposer que M(0) = M est à l’origine. Chercher les coordonnées de M(t). [résultat: x(t) = R(t - sin(t)), y(t) = R(1 - cos(t))]

```
> restart:with(plots):R:=4:theta:=1.2:
  P0:=plot([ R*(t-sin(t)), R*(1-cos(t)),t=0..3*Pi], color=green):
  C0:=plot([ R*cos(t), R*(sin(t)+1),t=0..2*Pi], color=red):
  C1:=plot([ R*(cos(t)+theta), R*(sin(t)+1),t=0..2*Pi],
  color=blue, scaling=CONSTRAINED):

  display(P0, C0,C1);
Warning, the name changecoords has been redefined
```



Exercice 4. Soit n \ge 2 un entier naturel et \gamma un cercle de rayon 1/n que l’on fait rouler (sans glissement) à l’intérieur du cercle unité. On fixe un point M du cercle mobile, il décrit dans le mouvement une courbe. On prend comme paramètre l’angle polaire\theta \in R, du point de contact H(\theta) = (cos(\theta), sin(\theta)) du cercle \gamma avec le grand. On suppose que M(0) = H(0) = (1,0).

a) Calculer les coordonnées du centre I(\theta) de \gamma au temps \theta.

b) Montrer que l’angle \widehat M(\theta);H(\theta) est n\theta

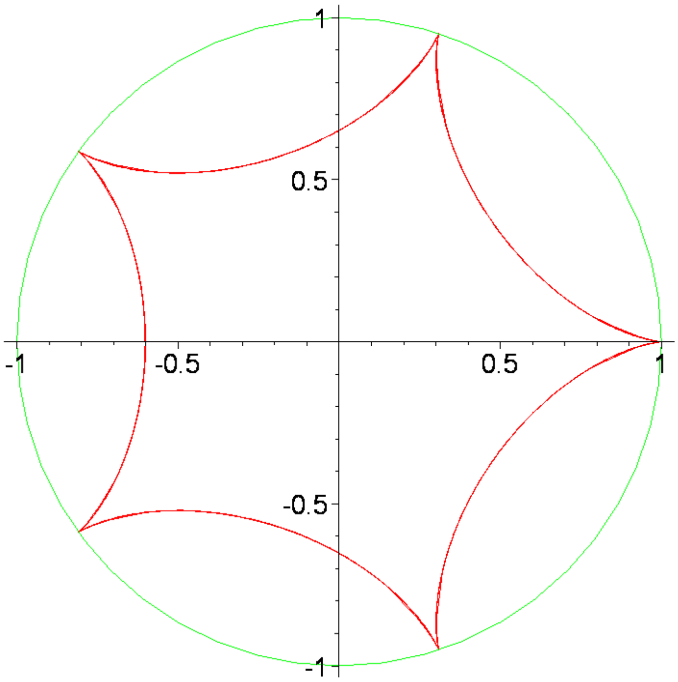
c) Trouver les coordonnées de M(\theta) = (x(\theta), y(\theta)).

[*résultat*: x(\theta) = (1/n)((n-1)cos\theta+cos(n-1)\theta), y(μ) = (1/n)((n-1)sin\theta-sin(n-1)\theta)]

```
> ########### EX 4 (Astroïde)
  with(plots):n:=5;
  P1:=plot([ cos(t), sin(t),t=-Pi..Pi], color=green):
```

```
P2:=plot([(1/n)*((n-1)*cos(t)+cos((n-1)*t)),
(1/n)*((n-1)*sin(t)-sin((n-1)*t)),t=-n*Pi..n*Pi]):
display(P1,P2);
```

$n := 5$



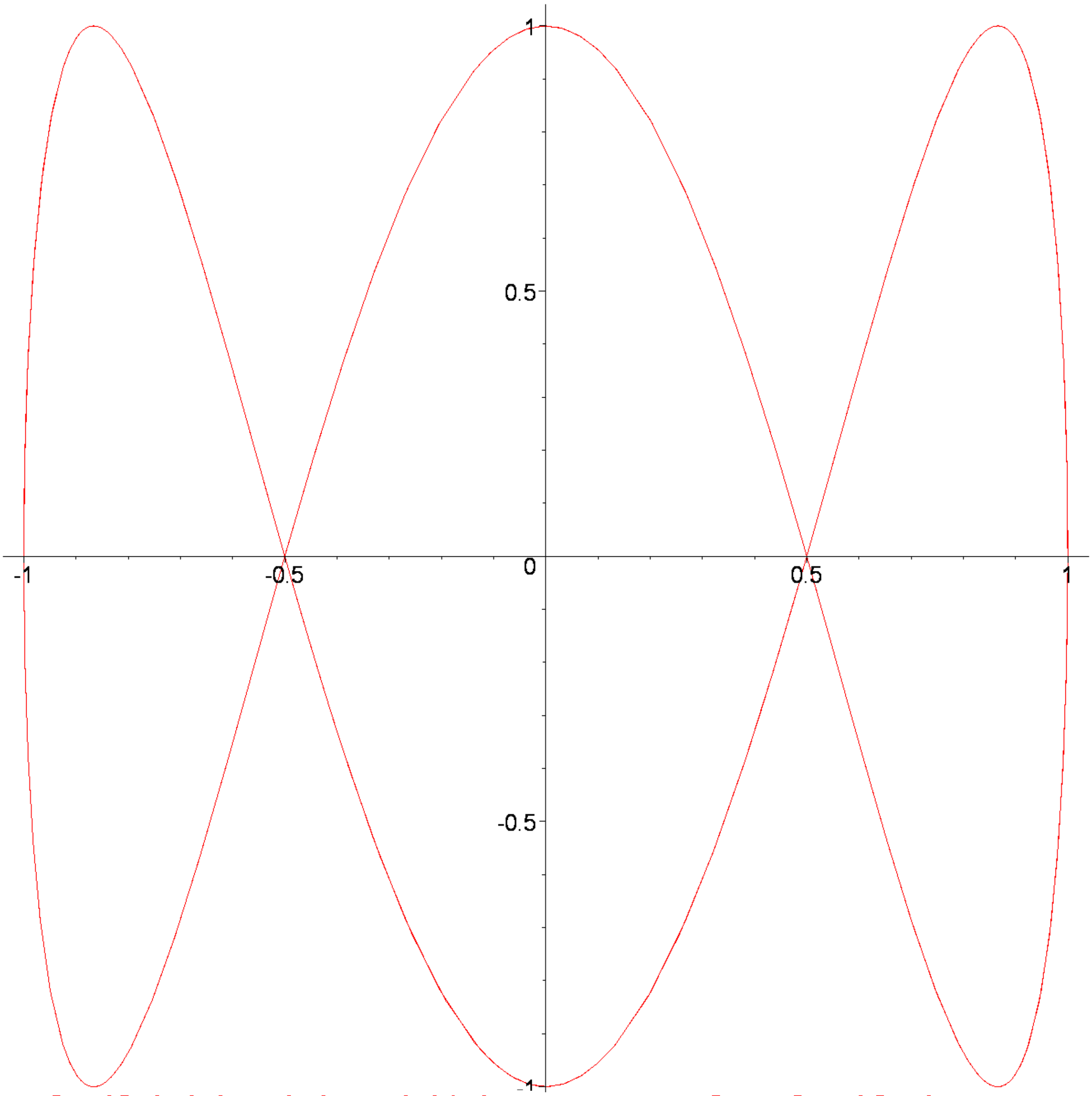
Exercice 8. Soient a, b \in R, a \ne 0 des constantes. On considère la courbe de Lissajous f(t) = (x(t), y(t)), où x(t) = sin(t), y(t) = sin(at + b).

a) On suppose que b = \pi/2. Tracer (qualitativement) l'image de la courbe pour a = 2 et a = 3.

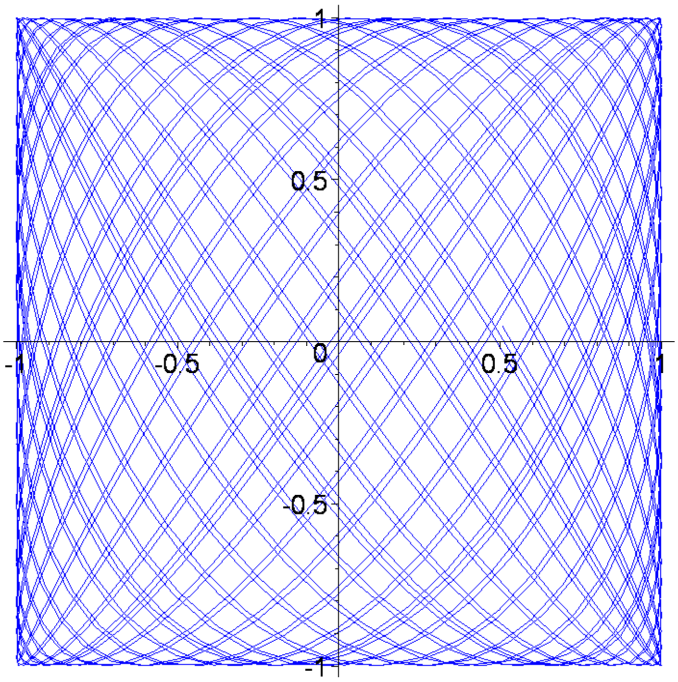
b) Montrer qu'elle est périodique si et seulement si a est rationnel.

c) Que peut-on dire sur la nature de l'image de la courbe si a n'est pas rationnel ?

```
> a:=3:b:=Pi/2:plot([sin(t), sin(a*t+b), t=-2*Pi..2*Pi]);
```



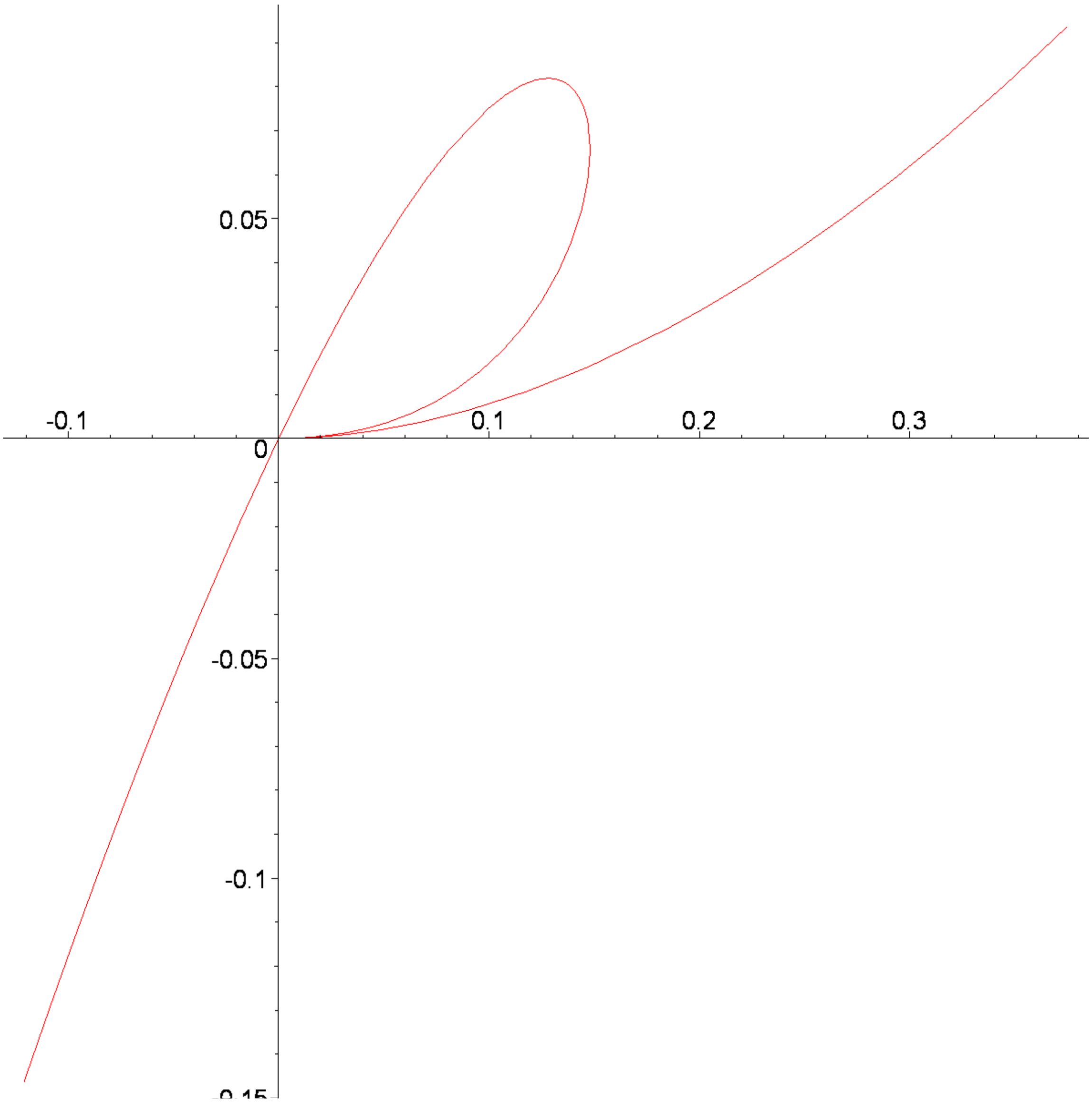

```
> plot([sin(t), sin(sqrt(2)*t), t=-100..100], color=blue);
```



FEUILLE N2 MAT237

Exercice 1. Déterminer les points singuliers de la courbe plane définie sur R par t \mapsto (t^2 +t^3, t^4 +t^5). Déterminer s'il s'agit de points de rebroussement de première ou de seconde espèce.

```
> restart:plot([t^2+t^3,t^4+t^5, t=-1.1...0.5]);
```



Exercice 2. Déterminer les points singuliers de l'astroide A (cf. exercice 4, feuille 1), leur esp`ece, et la tangeante `a l'astroide en ces points. Vérifier que la distance entre les points d'intersection de la tangente en un point régulier M(\theta) \in A avec les axes est constante. En déduire une construction géométrique alternative de l'astroide.

```
> simplify(sin(3*t)-3*sin(t)+4*sin(t)^3);
```

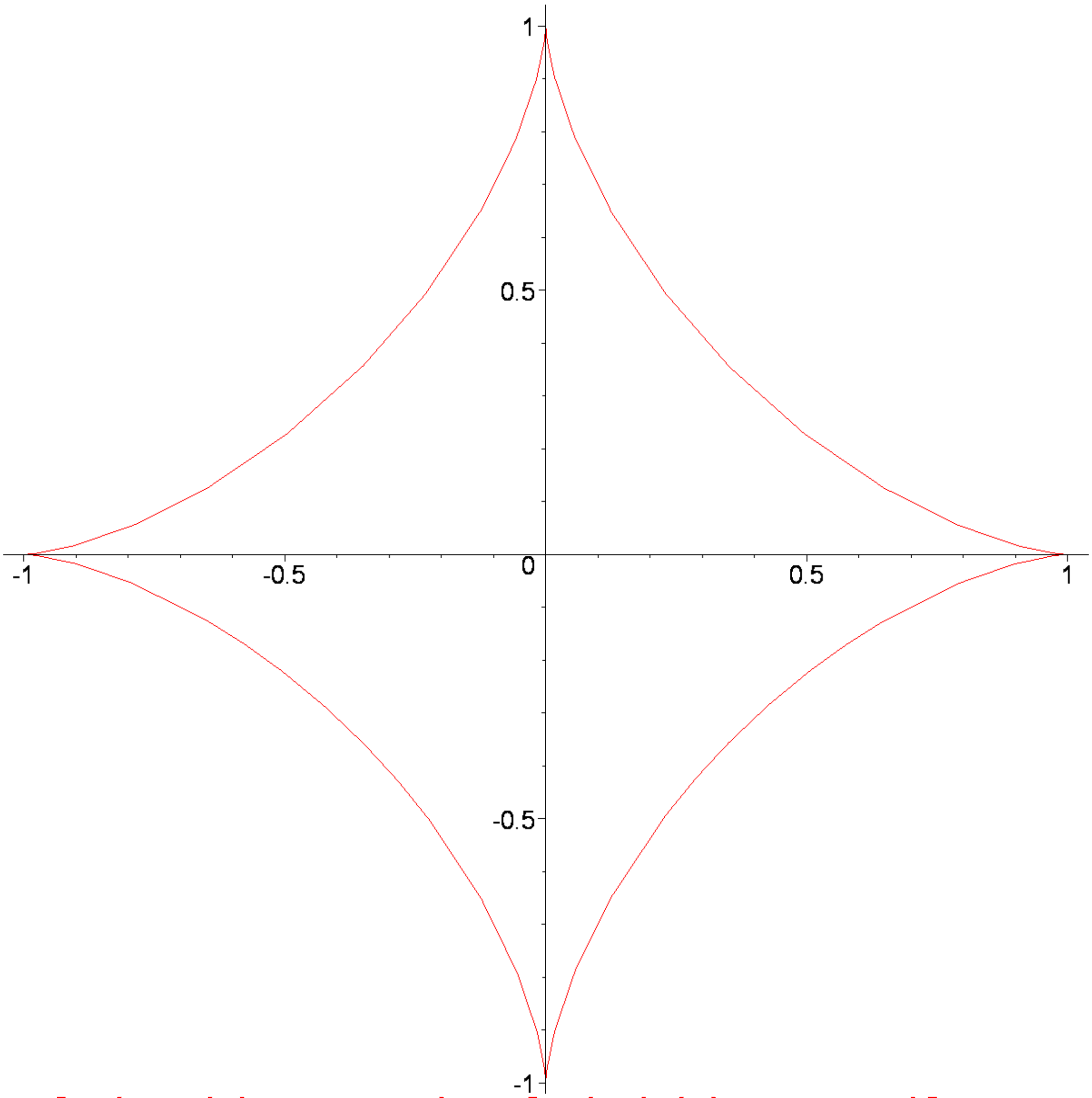
$$0$$

```
> expand(cos(3*t));simplify(cos(3*t)+3*cos(t)-4*cos(t)^3);
```

$$4\cos(t)^3 - 3\cos(t)$$

$$0$$

```
plot([(sin(t))^3, (cos(t))^3, t=0..2*Pi]);
```




```
> [taylor( cos(t)^3,t=0, 5 ),taylor( sin(t)^3,t=0, 5 )];
```

$$\left[1-\frac{3}{2}t^2+\frac{7}{8}t^4+\mathrm{O}(t^5),\ t^3+\mathrm{O}(t^5)\right]$$

Limaçons de Pascal

Exercice 3. Soit C un cercle de centre (1, 0) et de rayon 1.

a) Déterminer une équation polaire de C.

b) Soit D une droite passant par l'origine qui coupe C en un point P.
On construit sur D deux points M et N distincts tels que d(P;M) = d(P;N) = a,
où a est un réel strictement positif fixé.
Déterminer une équation polaire de
l'ensemble \Gamma_a décrit par les points M et N si l'on varie D ({\it limaçons de Pascal}).

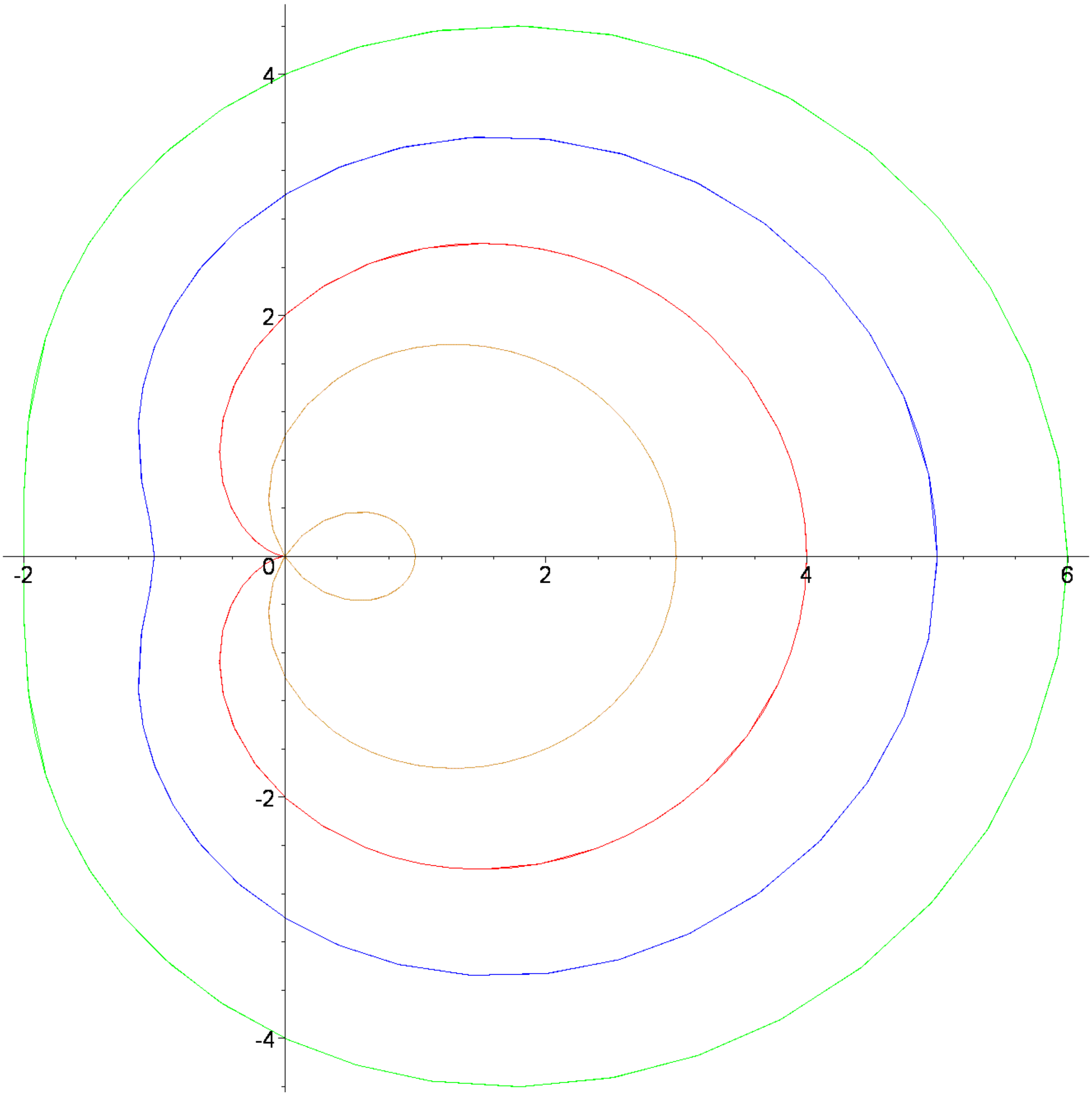
c) Déterminer, lorsque a décrit]0;\infty[,
l'ensemble des points des courbes \Gamma_a,
dont la tangente est verticale.

```
> with(plots):P1:=polarplot([2*cos(t)+1,t,t=0..4*Pi],color=gold):
```

```
P2:=polarplot([2*cos(t)+2,t,t=0..4*Pi],color=red):
P3:=polarplot([2*cos(t)+3,t,t=0..4*Pi],color=blue):
P4:=polarplot([2*cos(t)+4,t,t=0..4*Pi],color=green):

display(P1,P2,P3,P4);
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```



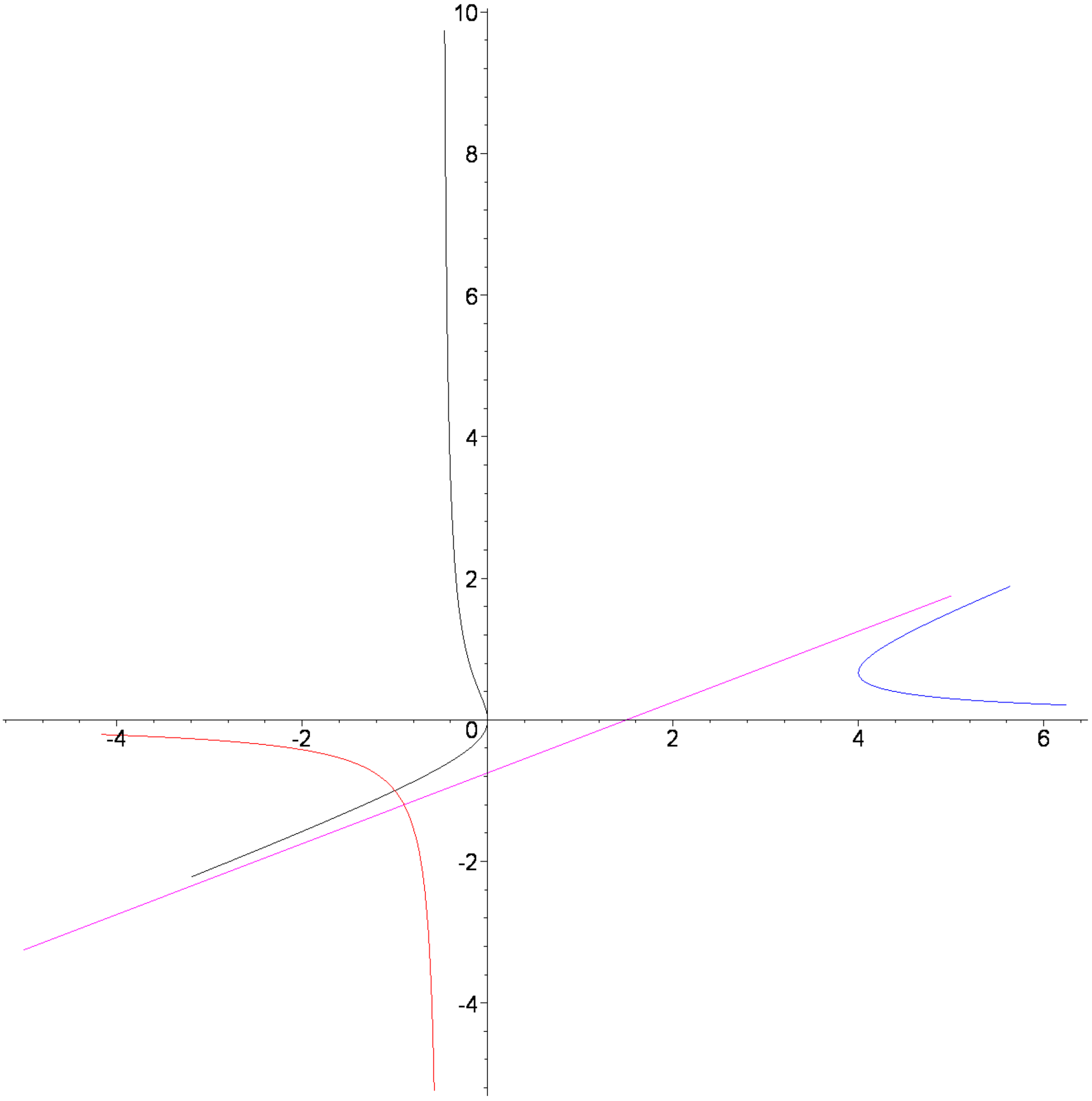
Exercice 4. Etudier les branches in nies des courbes planes dé nies par :

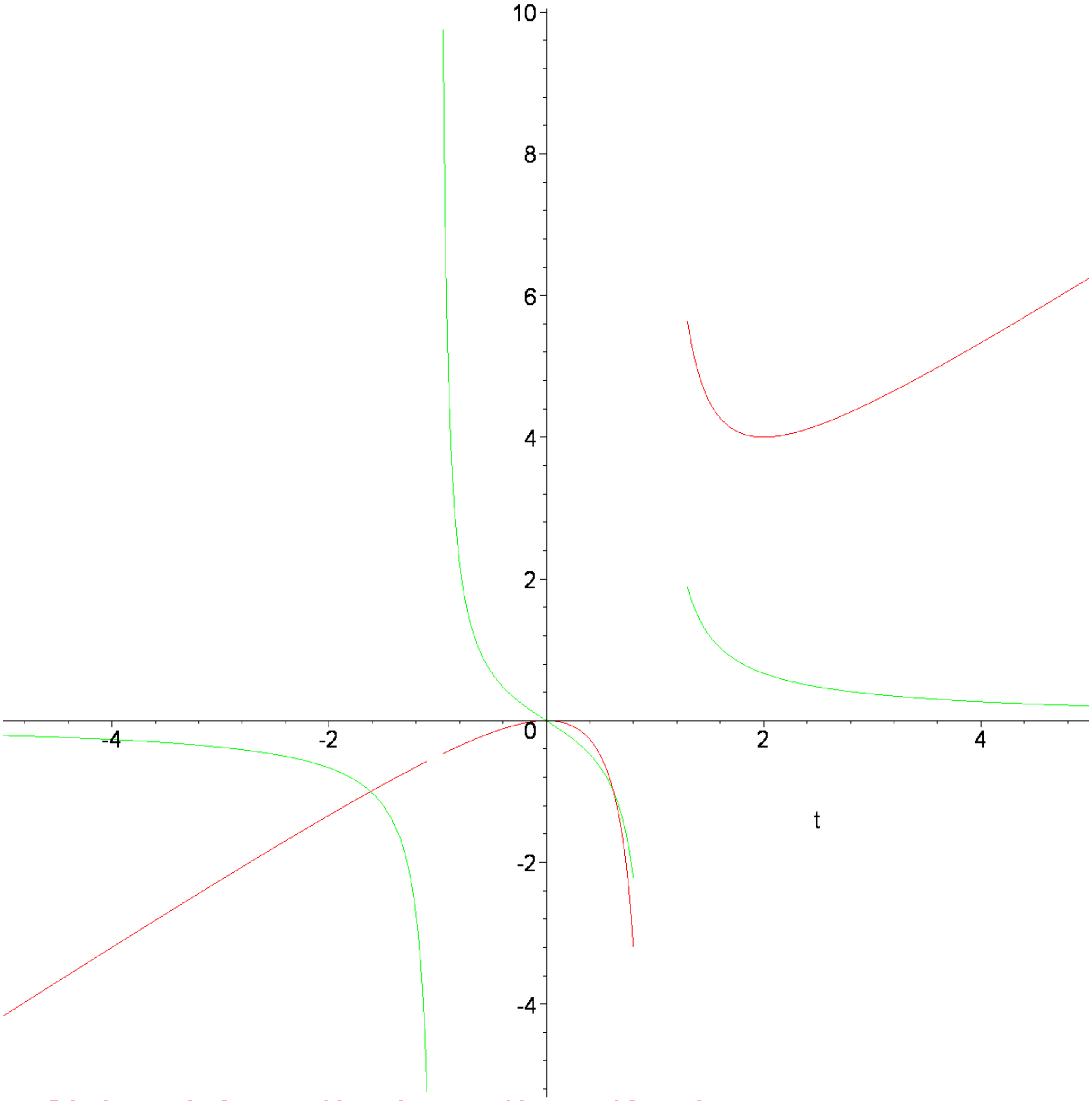
1) t \marsto (t^2/(t-1) , t/(t^2-1)),

2) (Examen de juin 2006) r(\theta)=1+1/(\theta-\pi/4)

```
> ########################################     Exercice 4,1).
#étudier les branches infinies
with(plots):
B1:=plot([t^2/(t-1), t/(t^2-1), t=-5..-1.1],color=red):
B11:=plot([t^2/(t-1), t/(t^2-1)], t=-5..-1.1):
B2:=plot([t^2/(t-1), t/(t^2-1), t=-0.95..0.8],color=black):
```

```
B21:=plot([t^2/(t-1), t/(t^2-1)], t=-0.95..0.8):
B3:=plot([t^2/(t-1), t/(t^2-1), t=1.3..5],color=blue):
B31:=plot([t^2/(t-1), t/(t^2-1)], t=1.3..5):
B:=plot([t,(t/2)-3/4,t=-5..5],color=magenta): # asymptote
oblique
display(B1,B2,B3, B);
display(B11,B21,B31);
#################################################################
```






```
> eliminate( {x-t^2/(t-1), y-t/(t^2-1)}, t);
```

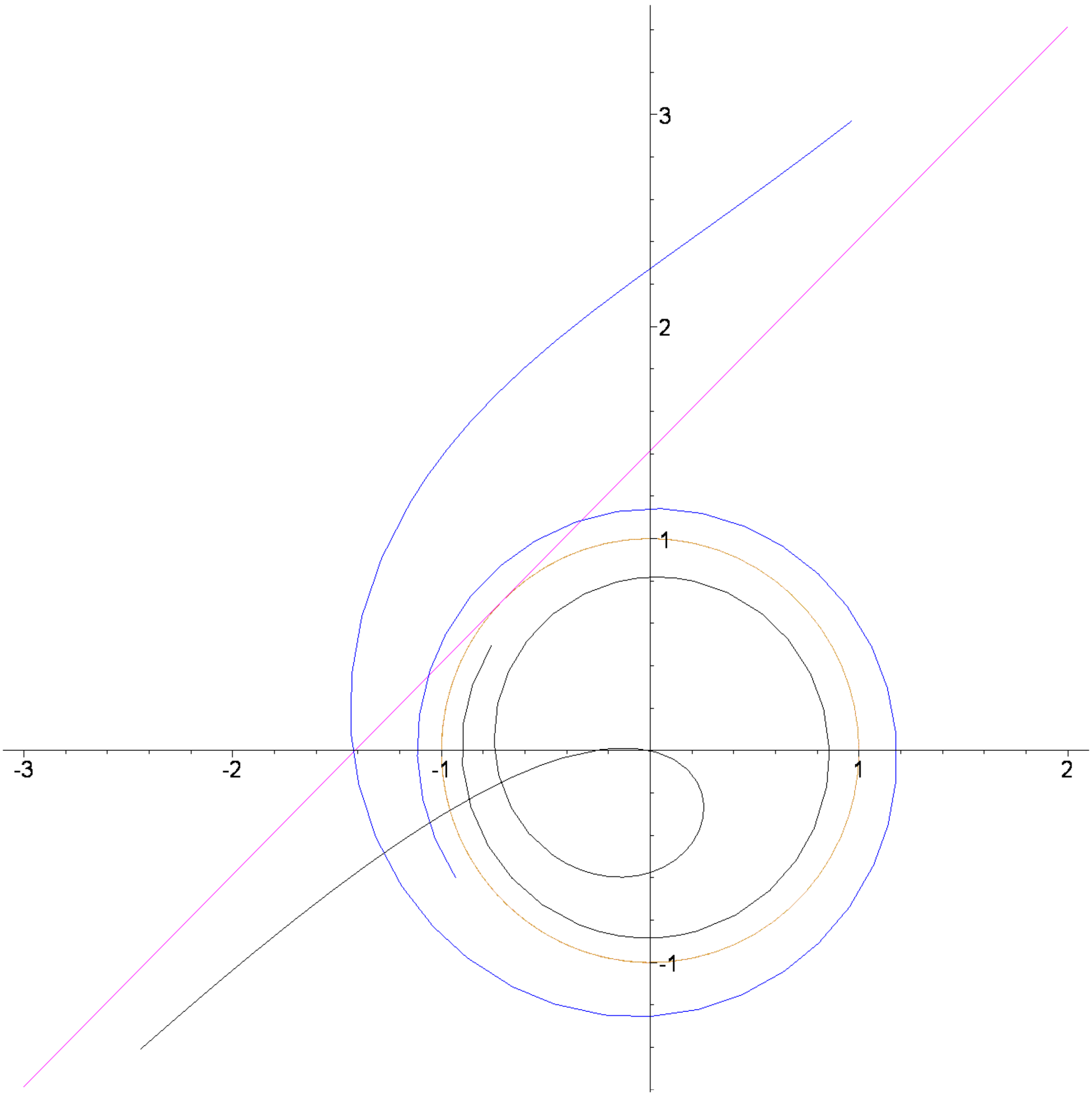
$$\left[\{t=\frac{y\,(x+1)}{y\,x-1}\},\ \{2\,y^2\,x+y^2-y\,x^2+y\,x+x\}\right]$$

```
>
```

Exercice 4.

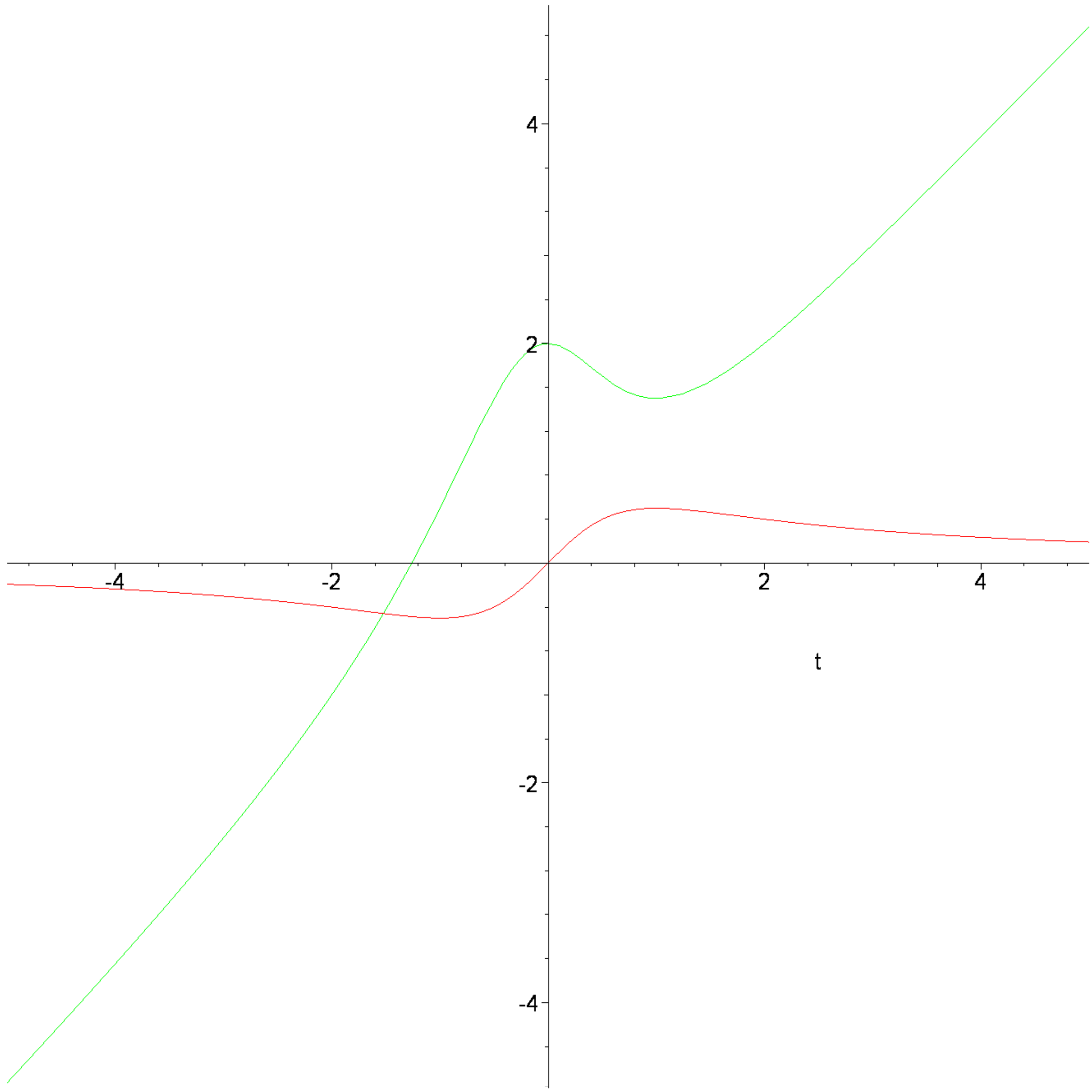
2) (Examen de juin 2006) r(\theta)=1+1/(\theta-\pi/4)

```
> ######################################     Exercice 4,2).
B4:=polarplot([1+(1/(t-Pi/4)),t,t=-10..Pi/6],color=black):
B5:=polarplot([1+(1/(t-Pi/4)),t,t=Pi/2.5..10],color=blue):
B6:=plot([t,t+sqrt(2),t=-3..2],color=magenta): # asymptote
oblique
B7:=plot([cos(t),sin(t),t=-5..5],color=gold):
display(B4,B5, B6, B7);
```

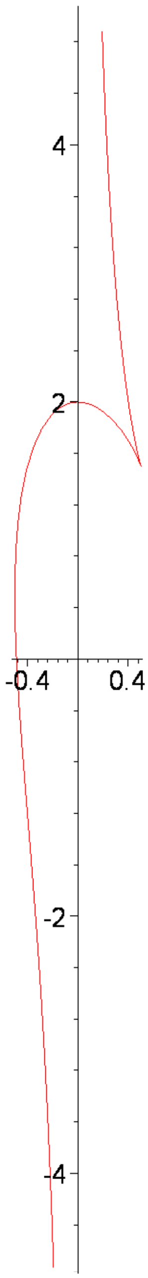


Exercice 5.

```
> ########################################    Exercice 5,1).
restart:plot([t/(1+t^2),(2+t^3)/(1+t^2)], t=-5...5);
plot([t/(1+t^2),(2+t^3)/(1+t^2), t=-5...5],
scaling=CONSTRAINED);
```



4
2
-2
-4
-4
-2
2
4
t

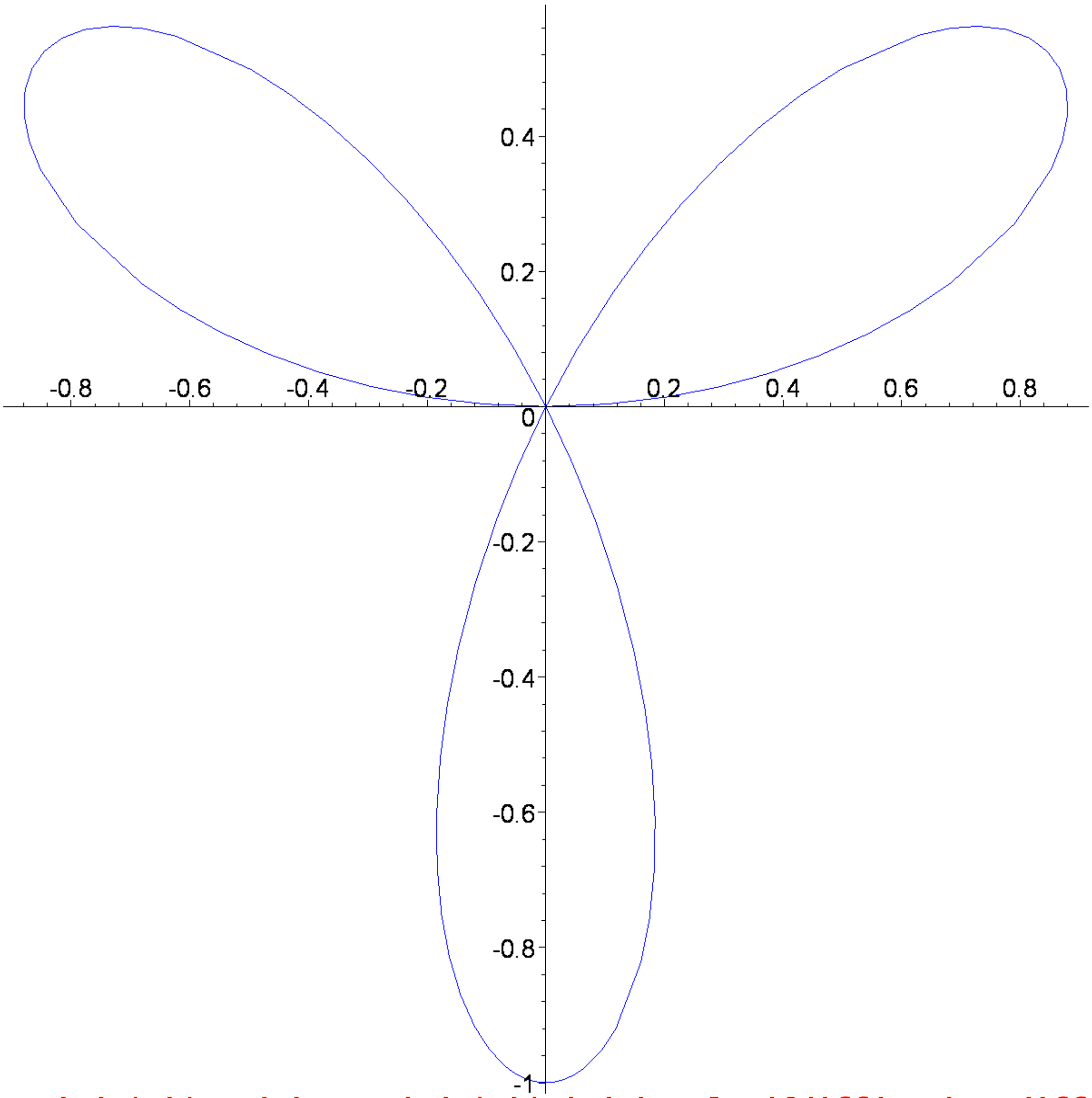



```
> 
> ################ Point de rebroussement
  taylor( t/(1+t^2),t=1, 5 );taylor((2+t^3)/(1+t^2),t=1, 5 );
```

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(t-1)^2+\frac{1}{4}(t-1)^3-\frac{1}{8}(t-1)^4+O((t-1)^5)$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}(t-1)^2-\frac{1}{4}(t-1)^3-\frac{1}{8}(t-1)^4+O((t-1)^5)$$

```
> ######################################     Exercice 5, 2).
  # (Rosace à trois boucles)
  :with(plots):polarplot([sin(3*t),t,t=0..Pi],color=blue);
Warning, the name changecoords has been redefined
```




```
> x:=sin(3*t)*cos(t);y:=sin(3*t)*sin(t);solve({diff(x,t)=0,diff(y,
  t)=0},{t});
```

$$x := \sin(3\,t)\cos(t)$$

$$y := \sin(3\,t)\sin(t)$$

```
> taylor( x,t=Pi/6, 5 );taylor(y,t=Pi/6, 5 );
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5\sqrt{3}}{2}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{7}{3}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{17\sqrt{3}}{6}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^4+\mathrm{O}\left(\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^5\right)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5}{2}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{7\sqrt{3}}{3}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{17}{6}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^4+\mathrm{O}\left(\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^5\right)$$

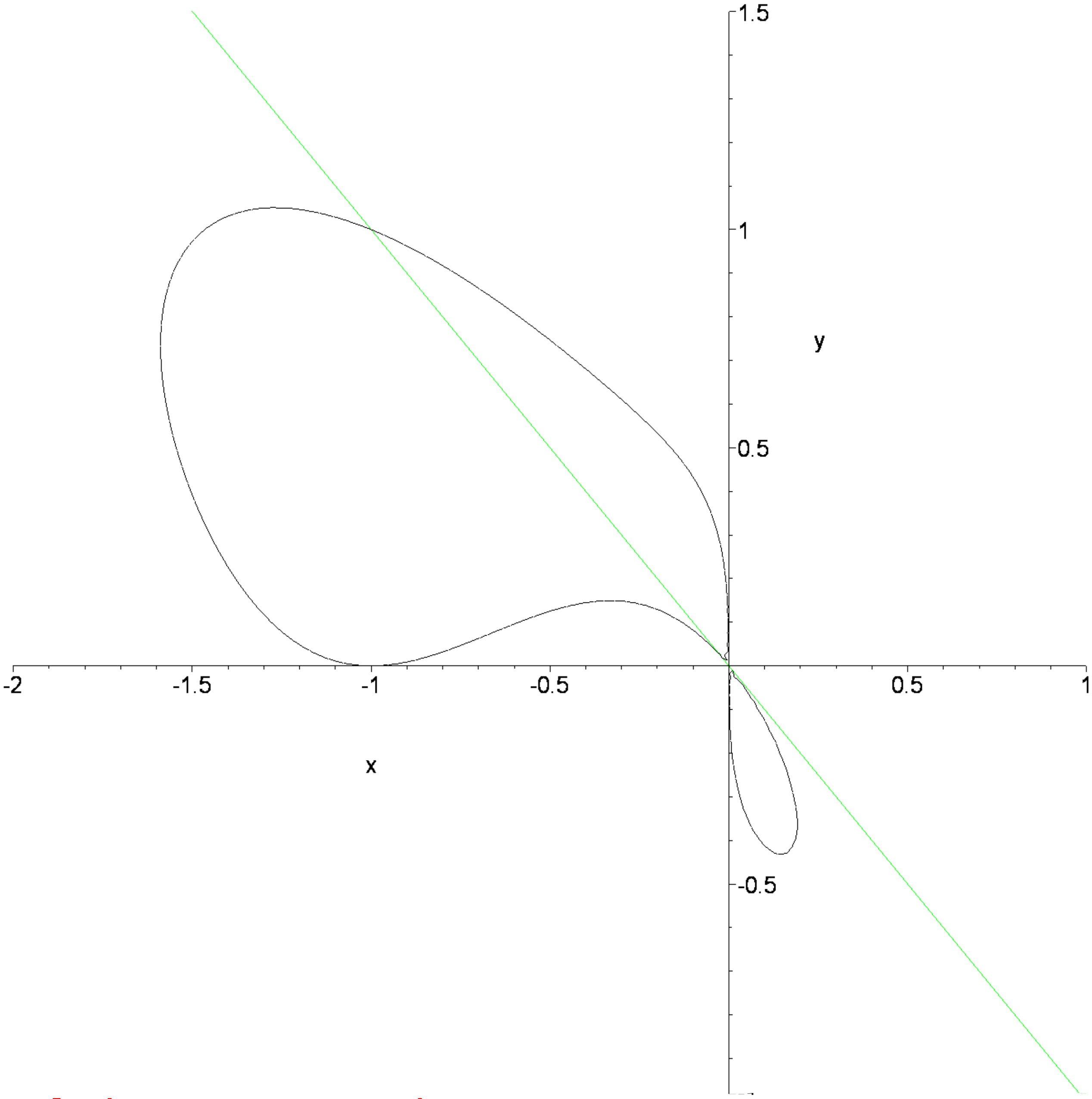
```
> with(VectorCalculus):
  #ArcLength( <3*cos(t) - cos(3*t),3*sin(t) - sin(3*t)>, t=0..2*Pi
  ) ;
> ArcLength( <sin(3*t)>,t=0..Pi/3 ) ;
Warning, the assigned names <,> and <|> now have a global binding

Warning, these protected names have been redefined and unprotected: *, +, ., D,
Vector, diff, int, limit, series
```

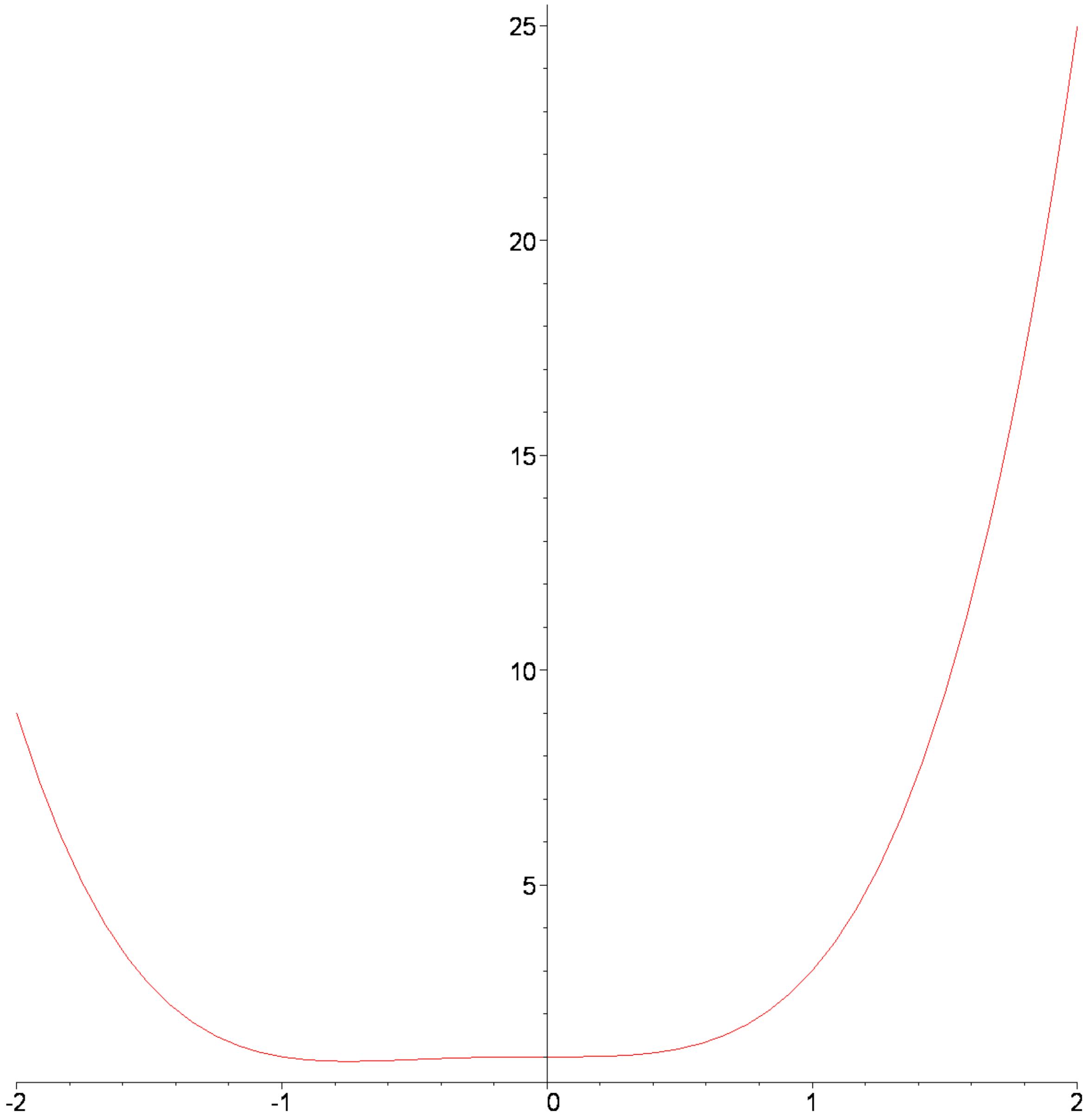
Exercice 6.

```
> ############################################
  ######################################    Exercice 6.
  restart:with(plots):
  I1:=implicitplot(x*(y + x) + 2*x^3 + x^4 + y^4=0,
  x=-2..1,y=-1..1.5,color=black , numpoints=10000):
  I2:=
  plot(-x, x=-2..1,y=-1..1.5,color=green):
  display(I1,I2);
```

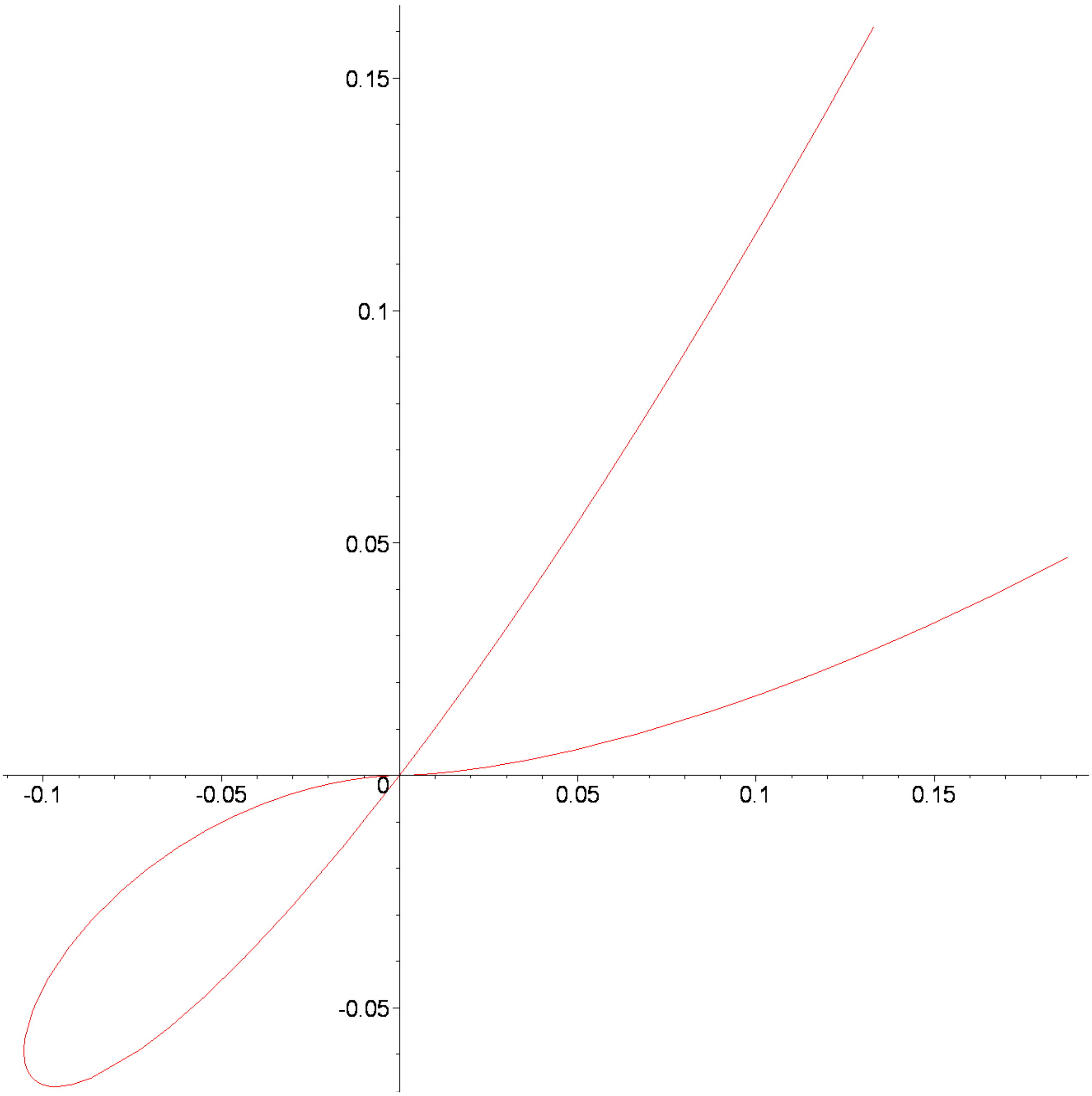
Warning, the name changecoords has been redefined




```
> plot(t^4+t^3+1, t=-2..2);
```




```
> ############################################################
  restart:plot([t^3+t^4,t^5+t^6, t=-1.1..0.5]);
```


0.15
0.1
0.05
-0.05
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15

>